



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE AGUASCALIENTES

**CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS
SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS
DINÁMICOS CAÓTICOS CON BÚSQUEDA
TABÚ**

TESIS

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON
OPCIONES A MATEMÁTICAS APLICADAS**

Presenta

LIC. MAYTE ESMERALDA DEL VILLAR GONZALEZ

Tutor

DR. MANUEL RÁMIREZ ARANDA

DR. ALEJANDRO PADILLA DÍAZ

Comité Tutorial

DR. MANUEL RÁMIREZ ARANDA

DR. ALEJANDRO PADILLA DÍAZ

DR. JOSE VILLA MORALES

Aguascalientes, Ags. 28 de Marzo del 2016

AUTORIZACIONES

CARTAS DE VOTOS APROBATORIOS EN EL SIGUIENTE ORDEN:

1. DECANO
2. TUTORES
3. ASESORES



M. en C. José de Jesús Ruiz Gallegos
 DECANO DEL CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS
 PRESENTE

Por medio de la presente, en mi calidad de tutor designado del estudiante **MAYTE ES-
 MERALDA DEL VILLAR GONZÁLEZ** con ID 39023 quien realizó la tesis titulada:
**SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS CAÓTICOS CON BÚSQUE-
 DA TABÚ**, y con fundamento en el Artículo 175, Apartado II del Reglamento General
 de Docencia, me permito emitir el **VOTO APROBATORIO**, para que pueda proceder
 a imprimirla, y así continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del
 grado.

Pongo lo anterior a su digna consideración y, sin otro particular por el momento, me
 permito enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE

“Se Lumen Proferre”

Aguascalientes, Ags., a 18 de Marzo de 2016

Dr. Manuel Ramírez Aranda

- c.c.p.- Interesado
- c.c.p.- Secretaría de Investigación y Posgrado
- c.c.p.- Jefatura del Depto. de Matemáticas y Física
- c.c.p.- Consejero Académico
- c.c.p.- Minuta Secretario Técnico



M. en C. José de Jesús Ruiz Gallegos
DECANO DEL CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS
PRESENTE

Por medio de la presente, en mi calidad de sinodal designado del estudiante **MAYTE ES-
MERALDA DEL VILLAR GONZÁLEZ** con ID 39023 quien realizó la tesis titulada:
**SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS CAÓTICOS CON BÚSQUE-
DA TABÚ**, y con fundamento en el Artículo 175, Apartado II del Reglamento General
de Docencia, me permito emitir el **VOTO APROBATORIO**, para que pueda proceder
a imprimirla, y así continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del
grado.

Pongo lo anterior a su digna consideración y, sin otro particular por el momento, me
permito enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE

“Se Lumen Proferre”

Aguascalientes, Ags., a 18 de Marzo de 2016

Dr. Alejandro Padilla Díaz

c.c.p.- Interesado
c.c.p.- Secretaría de Investigación y Posgrado
c.c.p.- Jefatura del Depto. de Matemáticas y Física
c.c.p.- Consejero Académico
c.c.p.- Minuta Secretario Técnico



M. en C. José de Jesús Ruiz Gallegos
DECANO DEL CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS
PRESENTE

Por medio de la presente, en mi calidad de sinodal designado del estudiante **MAYTE ES-MERALDA DEL VILLAR GONZÁLEZ** con ID 39023 quien realizó la tesis titulada: **SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS CAÓTICOS CON BÚSQUE-DA TABÚ**, y con fundamento en el Artículo 175, Apartado II del Reglamento General de Docencia, me permito emitir el **VOTO APROBATORIO**, para que pueda proceder a imprimirla, y así continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del grado.

Pongo lo anterior a su digna consideración y, sin otro particular por el momento, me permito enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE

“Se Lumen Proferre”

Aguascalientes, Ags., a 18 de Marzo de 2016

Dr. José Villa Morales

c.c.p.- Interesado
c.c.p.- Secretaría de Investigación y Posgrado
c.c.p.- Jefatura del Depto. de Matemáticas y Física
c.c.p.- Consejero Académico
c.c.p.- Minuta Secretario Técnico

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primero a Dios por haberme dado las oportunidades que me pusieron en este camino y que me sirvió de sustento y fuerza en los momentos mas difíciles del camino.

Quiero agradecer a mis tutores de tesis Dr. Manuel Ramírez Aranda y Dr. Alejandro Padilla Díaz. Por su apoyo y paciencia para la elaboracion de esta tesis.

De igual forma al Dr. Jose Villa Morales y Dr. Jorge Eduardo Macías Díaz por sus enseñanzas y consejos en esta maestría, así como a mis maestros de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, ya que sin esos conocimientos no podría haber llegado hasta donde estoy. A mis compañeros y amigos Ana Elena y Erick los cuales trabajamos juntos ayudandonos unos a a otros.

A la U.A.A. y CONACYT por el apoyo economico para realizar esta investigación durante estos dos años.

Por último de manera especial a mis padres Victor Hugo y Beatriz, ya que sin ellos no podría ser la persona que soy ahora.

DEDICATORIA

Dedicado a:

Maria Guillermina del Villar Hernández



Índice general

AUTORIZACIONES	2
AGRADECIMIENTOS	6
DEDICATORIA	7
List of Tables	9
List of Figures	10
1. RESUMEN	16
2. ABSTRACT	17
3. INTRODUCCIÓN	18
4. JUSTIFICACIÓN DEL MODELO PROPUESTO	21
5. MARCO TEÓRICO: SISTEMAS DINÁMICOS CAÓTICOS, SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS Y METAHEURÍSTICAS	23
5.1. Sistemas Dinámicos	23
5.1.1. Sistemas Lineales	24
5.1.2. Sistemas No Lineales: Periodicidad	28
5.2. Sistemas Caóticos	29
5.2.1. Sistema de Lorenz	30
5.3. Exponentes de Lyapunov	34
5.4. Sincronización	36

5.4.1. Tipos de Sincronización	36
5.4.2. Sincronización Generalizada	39
5.5. Metaheurísticas	45
5.5.1. Que Son Las Metaheurísticas?	45
5.5.2. Búsqueda Tabú	46
5.5.3. Búsqueda Caótica	51
5.5.4. Recocido Simulado	55
5.6. Modelo de Programación No Lineal	56
6. MARCO METODOLÓGICO (Diseño Experimental)	58
6.1. Objetivos	58
6.2. Planteamiento del Problema	59
6.3. Hipótesis	61
7. RESULTADOS Y CONCLUSIONES	62
7.1. Descripción de Resultados	62
7.1.1. Descripción del Sistema Dinámico Caótico a Sincronizar	62
7.1.2. Diseño, Descripción de Los Algoritmos y Los Pseudocódigos	65
7.1.3. Experimentos y Gráficas	71
7.2. Conclusiones Finales	90
7.2.1. Resumen de la Investigación	90
7.2.2. Contribuciones de esta Investigación	91
7.3. Trabajo Futuro	91
A. Códigos	92
B. Experimentos	98
C. Experimentos con $g=4$	111
Bibliografía	124

Índice de cuadros

7.1. Simulaciones Generales	71
7.2. Tabla: Solución y evolución con 250 iteraciones.	74
7.3. Tabla: Solución y evolución con 80 iteraciones.	76
7.4. Tabla Solución y evolución con 160 iteraciones.	80
7.5. Simulaciones Generales	82
7.6. Tabla: Solución y evolución con 160 iteraciones y $g=4$	84
7.7. Tabla: Solución y evolución con 220 iteraciones $g=4$	87
B.1. Tabla Solución y evolución con 250 iteraciones.	100
B.2. Tabla Solución y evolución con 240 iteraciones.	103
B.3. Tabla Solución y evolución con 170 iteraciones.	106
B.4. Tabla Solución y evolución con 100 iteraciones.	109
C.1. Tabla: Solución y evolución con 220 iteraciones $g=4$	113
C.2. Tabla: Solución y evolución con 170 iteraciones $g=4$	116
C.3. Tabla: Solución y evolución con 60 iteraciones $g=4$	119
C.4. Tabla: Solución y evolución con 230 iteraciones $g=4$	122

Índice de figuras

3.1. Sincronización de Sistemas Caóticos [11]	19
5.1. $x'(t) = ax(t) + b$ Si $a < 0$ entonces $x(t) = \frac{-b}{a}$ [21].	25
5.2. $x'(t) = ax(t) + b$ Si $a > 0$ entonces $ x(t) \rightarrow \infty$ [21].	25
5.3. $x'(t) = b$ Si $a = 0$ entonces $ x(t) \rightarrow \infty$ [21].	25
5.4. $ x(t) \rightarrow 0$ [5]	26
5.5. $ x(t) \rightarrow \infty$ [5].	27
5.6. Solución Cíclica: Cada cierto tiempo repite su comportamiento [5].	28
5.7. Sistema de Lorenz.	31
5.8. Sistema de Lorenz	32
5.9. Diferencia del 0,1 %.	33
5.10. Sincronización Completa	37
5.11. $g = 8$	42
5.12. y_2 contra z_2 y contra $g = 8$	42
5.13. $g = 4$	42
5.14. y_2 contra z_2 y contra $g = 4$	42
5.15. Señales Sincronizadas	44
5.16. Error ξ	44
5.17. Diagrama de Flujo de Búsqueda Tabú [15]	47
5.18. Búsqueda Tabú con frecuencias [2].	50
5.19. Comportamiento Mapa Logístico [8]	51
5.20. Interpretación del Gradiente [8]	52
5.21. Algoritmo de la Búsqueda Caótica [8]	53
5.22. Funciones de Prueba [8]	53
5.23. Funciones de Prueba [8]	54

7.1. Diagrama General	65
7.2. Algoritmo 1.	66
7.3. Búsqueda Caótica	67
7.4. Pseudo-Código. Búsqueda Caótica	67
7.5. Búsqueda Tabú	68
7.6. Pseudo-Código. Búsqueda Tabú	69
7.7. Recocido Simulado	70
7.8. Pseudo-Código. Recocido Simulado	70
7.9. Simulación 3	72
7.10. Sincronización y_1 y z_1	73
7.11. y_1 contra z_1	73
7.12. Sincronización y_2 y z_2	73
7.13. y_2 contra z_2	73
7.14. Sincronización y_3 y z_3	73
7.15. y_3 contra z_3	73
7.16. Diferencias.	75
7.17. Resultado de la Simulación 80 iteraciones.	77
7.18. Diferencias.	77
7.19. Sincronización y_1 y z_1	78
7.20. y_1 contra z_1	78
7.21. Sincronización y_2 y z_2	78
7.22. y_2 contra z_2	78
7.23. Sincronización y_3 y z_3	78
7.24. y_3 contra z_3	78
7.25. Resultado de la Simulación 160 iteraciones.	79
7.26. Diferencias.	79
7.27. Sincronización y_1 y z_1	81
7.28. y_1 contra z_1	81
7.29. Sincronización y_2 y z_2	81
7.30. y_2 contra z_2	81
7.31. Sincronización y_3 y z_3	81
7.32. y_3 contra z_3	81
7.33. Resultado de la Simulación 160 iteraciones con $g=4$	83

7.34. Diferencias con $g=4$.	83
7.35. Sincronización y_1 y z_1 $g=4$	85
7.36. y_1 contra z_1	85
7.37. Sincronización y_2 y z_2	85
7.38. y_2 contra z_2	85
7.39. Sincronización y_3 y z_3	85
7.40. y_3 contra z_3	85
7.41. Resultado de la Simulación 220 iteraciones con $g=4$.	86
7.42. Diferencias con $g=4$.	86
7.43. Sincronización y_1 y z_1 $g=4$	88
7.44. y_1 contra z_1	88
7.45. Sincronización y_2 y z_2	88
7.46. y_2 contra z_2	88
7.47. Sincronización y_3 y z_3	88
7.48. y_3 contra z_3	88
B.1. Experimento 5 con 250 iteraciones.	99
B.2. Diferencias con 250 iteraciones.	99
B.3. Sincronización y_1 y z_1	101
B.4. y_1 contra z_1	101
B.5. Sincronización y_2 y z_2	101
B.6. y_2 contra z_2	101
B.7. Sincronización y_3 y z_3	101
B.8. y_3 contra z_3	101
B.9. Experimento 4 con 240 iteraciones.	102
B.10. Diferencias con 240 iteraciones.	102
B.11. Sincronización y_1 y z_1	104
B.12. y_1 contra z_1	104
B.13. Sincronización y_2 y z_2	104
B.14. y_2 contra z_2	104
B.15. Sincronización y_3 y z_3	104
B.16. y_3 contra z_3	104
B.17. Experimento 5 con 170 iteraciones.	105

B.18. Diferencias con 170 iteraciones.	105
B.19. Sincronización y_1 y z_1	107
B.20. y_1 contra z_1	107
B.21. Sincronización y_2 y z_2	107
B.22. y_2 contra z_2	107
B.23. Sincronización y_3 y z_3	107
B.24. y_3 contra z_3	107
B.25. Experimento 4 con 100 iteraciones.	108
B.26. Diferencias con 100 iteraciones.	108
B.27. Sincronización y_1 y z_1	110
B.28. y_1 contra z_1	110
B.29. Sincronización y_2 y z_2	110
B.30. y_2 contra z_2	110
B.31. Sincronización y_3 y z_3	110
B.32. y_3 contra z_3	110
C.1. Experimento 4 con 250 iteraciones $g=4$	112
C.2. Diferencias con 250 iteraciones.	112
C.3. Sincronización y_1 y z_1	114
C.4. y_1 contra z_1	114
C.5. Sincronización y_2 y z_2	114
C.6. y_2 contra z_2	114
C.7. Sincronización y_3 y z_3	114
C.8. y_3 contra z_3	114
C.9. Experimento 1 con 170 iteraciones.	115
C.10. Diferencias con 170 iteraciones.	115
C.11. Sincronización y_1 y z_1	117
C.12. y_1 contra z_1	117
C.13. Sincronización y_2 y z_2	117
C.14. y_2 contra z_2	117
C.15. Sincronización y_3 y z_3	117
C.16. y_3 contra z_3	117
C.17. Experimento 4 con 60 iteraciones.	118

C.18. Diferencias con 60 iteraciones.	118
C.19. Sincronización y_1 y z_1	120
C.20. y_1 contra z_1	120
C.21. Sincronización y_2 y z_2	120
C.22. y_2 contra z_2	120
C.23. Sincronización y_3 y z_3	120
C.24. y_3 contra z_3	120
C.25. Experimento 5 con 230 iteraciones.	121
C.26. Diferencias con 100 iteraciones.	121
C.27. Sincronización y_1 y z_1	123
C.28. y_1 contra z_1	123
C.29. Sincronización y_2 y z_2	123
C.30. y_2 contra z_2	123
C.31. Sincronización y_3 y z_3	123
C.32. y_3 contra z_3	123

Capítulo 1

RESUMEN

En este trabajo se propone un nuevo método y algoritmo para la sincronización de sistemas dinámicos caóticos con la ayuda de la Búsqueda Tabú. La búsqueda Tabú es un método de optimización matemática, perteneciente a las clases de búsqueda local; una vez que una potencial solución es determinada se la marca como "tabú" de modo que el algoritmo no vuelva a visitar esa posible solución.

Con la ayuda de los exponentes de Lyapunov se puede garantizar la estabilidad de la solución y además evitar caer en una región cíclica, permitiendo explorar todas las posibles soluciones del sistema dinámico. Esta última característica es la que motiva el uso de la búsqueda tabú en la sincronización de señales de sistemas dinámicos caóticos.

Capítulo 2

ABSTRACT

In this paper we propose a new method and algorithm for synchronization of chaotic dynamical systems using the Tabu Search . The Tabu search is a mathematical optimization method, belonging to the class of local search ; Once a potential solution is determined is the brand as "taboo "so that the algorithm not visit again this possible solution.

Using the Lyapunov exponents we can guarantee the stability of the solution and also to avoid falling into a cycle region, allowing to explore all possible solutions of the dynamical system . This last feature is what motivates the use of tabu search in synchronizing signals of chaotic dynamical systems.

Capítulo 3

INTRODUCCIÓN

Uno de los tópicos más sonados en los últimos años es el control del caos. Ya sea de forma analítica o numéricamente, la búsqueda del control del caos puede ser complicada ya que el caos tiene un comportamiento aperiódico a largo plazo en un sistema que presenta sensibilidad a condiciones iniciales. Lo cual dificulta cualquier predicción a lo largo del tiempo. El control del caos consiste en el diseño de estrategias que permiten asignar dinámicas deseadas a sistemas caóticos. Un problema básico es la sincronización del caos. La sincronización de caos consiste en un régimen en el cual dos sistemas caóticos acoplados (uno llamado maestro y el otro esclavo), después de un tiempo de transición, exhiben oscilaciones caóticas idénticas .

El comportamiento del segundo sistema llamado esclavo (o respuesta) depende del comportamiento del primer sistema llamado maestro (o conductor), mientras que este último no se ve influenciado por el primero. De hecho, la sincronización puede alcanzarse en diferentes tipos o grados, estos son: la sincronización en atraso y en adelanto, sincronización parcial, sincronización en orden reducido, sincronización completa, sincronización generalizada (de la cual se hablará un poco más detalladamente en el capítulo 5.4).

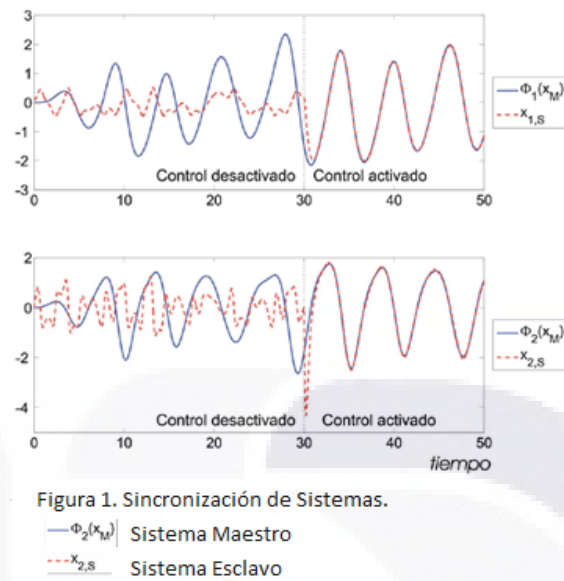


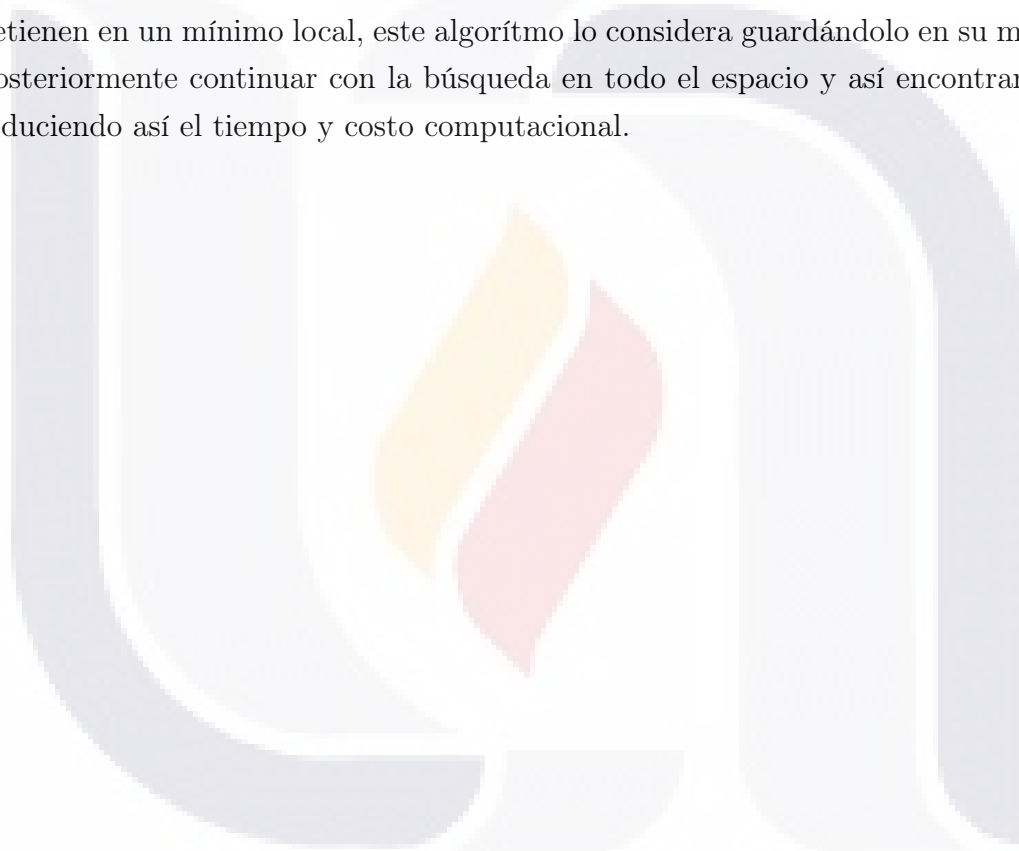
Figura 3.1: Sincronización de Sistemas Caóticos [11]

Uno de los riesgos al trabajar con sistemas dinámicos es la posibilidad de que el sistema respuesta quede atrapado en un “atractor” del sistema maestro. Los mínimos locales pueden verse como “atractores”, además el sistema dinámico podría tener ciclos que se repitan continuamente.

Con éste enfoque se abordará el problema desde un nuevo ángulo, es decir, la sincronización de dos sistemas dinámicos distintos será un problema de minimización, en el cual se desea reducir en mayor medida la diferencia que existe entre ellos, convirtiéndose esto en un problema de optimización. Desde este punto de vista se encuentran muchos algoritmos y métodos para atacar problemas de optimización, obteniendo así un buen algoritmo de búsqueda. Sin embargo con éste tipo de algoritmos se corre el riesgo de que el óptimo encontrado sea sólo un óptimo local, y que la selección de puntos se quede estancada en un atractor, provocando un gran gasto de tiempo y energía computacional. La búsqueda tabú en combinación con la búsqueda aleatoria repetitiva basada en caos en conjunto con el recocido simulado, nos permite salir de esos óptimos locales, y explorar todo el espacio de una manera más rápida. Por un lado, la primera impide que nos quedemos atrapados en un óptimo local, ya que su memoria a corto plazo nos ayuda a salir de los óptimos locales; mientras que la búsqueda basada en caos nos permite movernos de una forma más rápida a través del espacio de posibles soluciones, gracias en mayor medida a el uso de gradientes matemáticos.

La búsqueda Tabú explota la historia del proceso de resolución del problema, aumentando el rendimiento, mediante el uso de estructuras de memoria. Una vez que una potencial solución es determinada se le marca como "tabú" de modo que el algoritmo no vuelva a visitar esa posible solución.

Este algoritmo ofrece una herramienta fresca e innovadora en esta área, debido a la naturaleza sencilla de ella, ya que nos invita a mapear todo el espacio de posibles soluciones. Se especializa en resolver problemas de Programación No Lineal de una forma más rápida y eficiente que con otros tipos de algoritmos; ya que otros algoritmos se detienen en un mínimo local, este algoritmo lo considera guardándolo en su memoria para posteriormente continuar con la búsqueda en todo el espacio y así encontrar uno mejor; reduciendo así el tiempo y costo computacional.



Capítulo 4

JUSTIFICACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

En este apartado se buscará que el lector tenga un panorama general del trabajo propuesto, que conozca los antecedentes y alcances del mismo, así como el desarrollo del trabajo y los resultados obtenidos. Con esto se plasmará las aportaciones de conocimientos nuevos en las matemáticas aplicadas.

Los sistemas caóticos a pesar de su difícil análisis son de vital importancia en diferentes ramas de la ciencia, tales como la predicción financiera, enmascaramiento de información en sistemas, encriptación de señales, predicciones climáticas, entre otras.

La presencia de caos, lejos de ser un inconveniente, permite un gran número de funcionamientos útiles que no tiene los sistemas no caóticos.

La sincronización y el filtrado de señales inmersas en caos son temas estrechamente vinculados. A partir de técnicas de sincronización se ha podido inferir nuevos métodos para controlar sistemas caóticos [14] y se ha obtenido logros importantes en el control de arritmias cardíacas, reacciones químicas industriales del tipo oscilatorio y sistemas electrónicos [7].

El hecho que los sistemas caóticos presenten un comportamiento impredecible, sumado a su capacidad de sincronización, los hacen interesantes para ser aplicados en sistemas de comunicaciones. Las investigaciones realizadas en (Cuomo y Oppenheim, 1993; Cuomo et al., 1993) mostraron cómo puede enmascarse una señal de voz, sumándole una señal caótica, y luego recuperarla con un receptor sincronizado.

Trabajos anteriores han mostrado técnicas para realizar dicha sincronización, sin embargo la búsqueda tabú brinda una herramienta fresca e innovadora en esta área. Esto debido a la naturaleza sencilla de ella, ya que ofrece mapear todo el espacio de posibles soluciones sin la posibilidad de que se quede atrapada en una región particular debido a un atractor.

Se habla de un algoritmo metaheurístico que normalmente es utilizado para resolver problemas de optimización combinatoria, tales como el problema del viajante (TSP, del inglés Travelling Salesman Problem). Este utiliza un procedimiento de búsqueda local o por vecindades para moverse iterativamente desde una solución hacia otra en una vecindad, hasta satisfacer algún criterio de parada. Esto con el fin de explorar regiones del espacio de búsqueda que serían dejadas de lado por el procedimiento de búsqueda local, modifica la estructura de los vecinos para cada solución a medida que la búsqueda progresa. Las soluciones admitidas para el nuevo vecindario son determinadas mediante el uso de estructuras de memoria.

Con este algoritmo se buscará optimizar de una manera más conveniente la sincronización generalizada, reduciendo tiempo computacional y el uso de memoria.

Capítulo 5

MARCO TEÓRICO: SISTEMAS DINÁMICOS CAÓTICOS, SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS Y METAHEURÍSTICAS

En este capítulo se presenta un panorama general del estado del arte, presentando algunos conceptos básicos de los sistemas dinámicos caóticos, sus principales características y configuraciones.

5.1. Sistemas Dinámicos

Por sistema dinámico se entenderá el sistema que varía con el tiempo, que define el comportamiento de cierto fenómeno siguiendo una serie de reglas temporales. Son sistemas porque están descritos por un conjunto de ecuaciones (sistemas) y dinámicos porque sus parámetros varían con respecto a alguna variable (generalmente el tiempo). Por ejemplo, el movimiento de una bala de cañón se describe en términos de un sistema dinámico que se expresa o modela con una ecuación.

Un sistema dinámico queda, por tanto, determinado por los valores que sus variables tienen en un momento determinado. Ese conjunto de valores se denomina, a su vez, el estado del sistema.

Estos pueden dividirse en dos grandes grupos: aquellos en los que el tiempo varia continuamente y en los que el tiempo transcurre discretamente [18].

Sistemas dinámicos discretos: La palabra discreta se refiere al hecho de que los valores de las variables del sistema se restringen en números enteros (1, 2, 3, 4, etc.). Estos se describen por medio de ecuaciones en diferencias, conocidas como mapas iterados.

Sistemas dinámicos continuos: En ellos tenemos en cuenta todos los posibles valores de la variable independiente, el tiempo. Estos sistemas pueden ser descritos simplemente como un sistema de N ecuaciones diferenciales; ya sea ordinarias, en derivadas parciales y diferenciales con retrasos:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, \dots, x_N, r) \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.1)$$

5.1.1. Sistemas Lineales

Son los primeros sistemas que se estudian en cualquier curso de ecuaciones diferenciales.

Sea f una función de una variable ($f : R \longrightarrow R$), se dice que es lineal, si es de la forma:

$$f(x) = ax + b \quad (5.2)$$

donde $a, b \in R$.

Cuando f es una función de varias variables ($f : R^n \longrightarrow R^n$) tendrá la forma:

$$f(x) = Ax + B \quad (5.3)$$

donde A será una matriz de $n \times n$ y B un vector de n puntos.

El comportamiento de su solución cuando se habla de una dimensión estará estrechamente ligado a la naturaleza de su pendiente y al de su valor inicial [21].

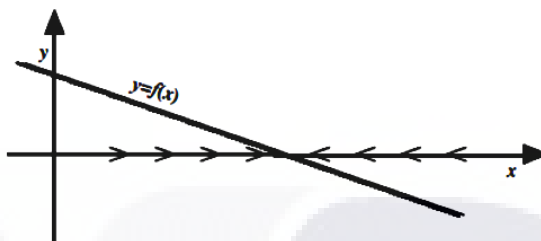


Figura 5.1: $x'(t) = ax(t) + b$ Si $a < 0$ entonces $x(t) = \frac{-b}{a}$ [21].

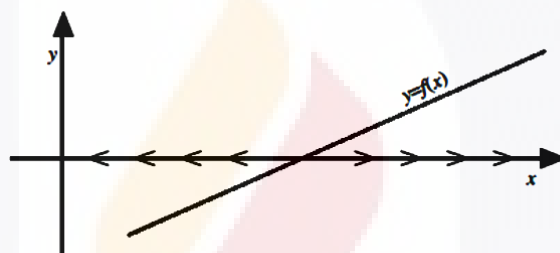


Figura 5.2: $x'(t) = ax(t) + b$ Si $a > 0$ entonces $|x(t)| \rightarrow \infty$ [21].

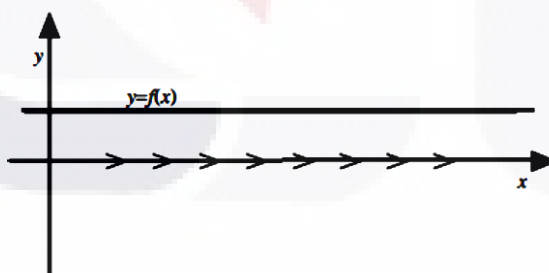


Figura 5.3: $x'(t) = b$ Si $a = 0$ entonces $|x(t)| \rightarrow \infty$ [21].

Cuando se habla de más dimensiones como en el caso de (5.3) tendremos que fijarnos en los valores característicos de la matriz A . Los cuales harán que la solución tienda a cero o explote.

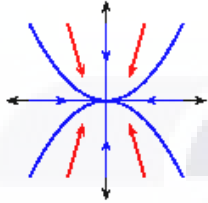
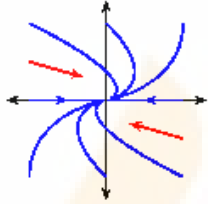
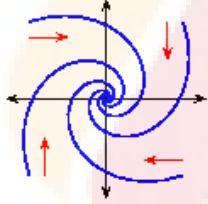
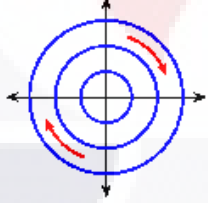
Nombre	Retrato	e-valores	Ejemplo
<i>Estable</i>		Reales Negativos	$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{-t}$ $x_2(t) = x_{20}e^{-2t}$	
<i>Estable de multiplicidad 2</i>		Reales Negativos Repetidos	$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = (x_{10} + tx_{20})e^{-t}$ $x_2(t) = x_{20}e^{-t}$	
<i>Sifón</i>		Complejos de Parte Real Negativa	$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{-2t} \cos t + x_{20}e^{-2t} \sin t$ $x_2(t) = -x_{10}e^{-2t} \sin t + x_{20}e^{-2t} \cos t$	
<i>Centro</i>		Imaginarios puros	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10} \cos t + x_{20} \sin t$ $x_2(t) = -x_{10} \sin t + x_{20} \cos t$	

Figura 5.4: $|x(t)| \rightarrow 0$ [5]

La soluciones son estables, debido a que la solución de estás se acercan a cero o se mantienen constantes sin importar de sus valores iniciales.

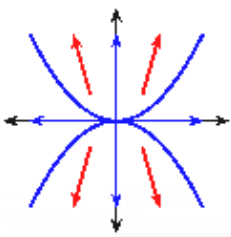
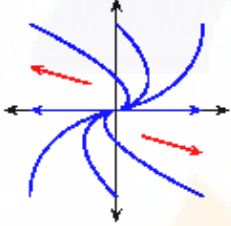
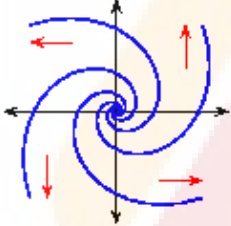
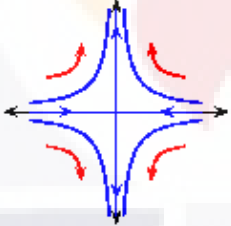
Nombre	Retrato	e-valores	Ejemplo
<i>Inestable</i>		Reales Positivos	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^t$ $x_2(t) = x_{20}e^{2t}$	
<i>Inestable de multiplicidad 2</i>		Reales Positivos Repetidos	$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = (x_{10} + tx_{20})e^t$ $x_2(t) = x_{20}e^t$	
<i>Fuente</i>		Complejos de Parte Real Positiva	$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{2t} \cos t + x_{20}e^{2t} \sin t$ $x_2(t) = -x_{10}e^{2t} \sin t + x_{20}e^{2t} \cos t$	
<i>Punto de Silla</i>		Reales de Signo Diferente	$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{-t}$ $x_2(t) = x_{20}e^t$	

Figura 5.5: $|x(t)| \rightarrow \infty$ [5].

Mientras que se dicen inestables debido a que su solución no se queda fijo en un solo valor, al contrario toma valores muy grandes del infinito o se vuelve un punto silla como en el último caso.

5.1.2. Sistemas No Lineales: Periodicidad

Un sistema periódico es aquel que regresa a un estado previamente visitado, es decir:

$$x(t_1) = x(t_1 + T) \quad (5.4)$$

para algún $T > 0$. Es decir, cada T veces el sistema estará destinado a repetir la misma trayectoria una y otra vez:

$$x(t_1) = x(t_1 + T) = x(t_1 + 2T) = x(t_1 + 3T) = \dots \quad (5.5)$$

Por ejemplo el sistema:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Sus valores característicos son $\lambda \pm i$, es decir, su solución tendrá la forma:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{1,0} \cos t + x_{2,0} \sin t, \\ x_2(t) &= -x_{1,0} \sin t + x_{2,0} \cos t \end{aligned} \quad (5.7)$$

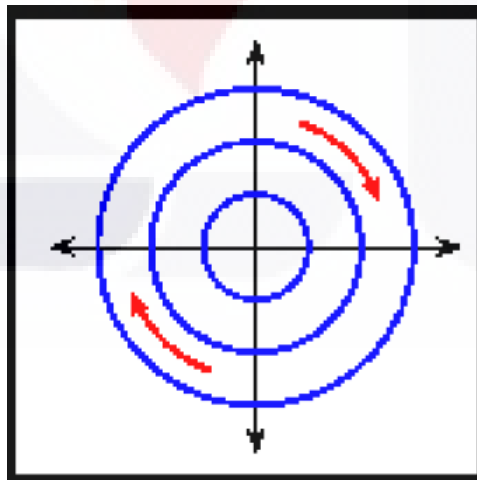


Figura 5.6: **Solución Cíclica:** Cada cierto tiempo repite su comportamiento [5].

5.2. Sistemas Caóticos

La ciencia clásica acaba donde el caos empieza [13].

Cuando se trabaja con sistemas dinámicos y modelos matemáticos se olvida a menudo lo impredecible que puede ser la vida real, al tratar de predecir ciertos comportamientos, se encuentran desórdenes de la atmósfera y del mar; fluctuaciones de las poblaciones de animales y plantas; y oscilaciones del corazón y el cerebro. El comportamiento irregular de la naturaleza, su parte discontinua y variable, ha sido un rompecabezas a los ojos de la ciencia.

Durante largo tiempo se ha estudiado la estabilidad de una solución, esto es, si una solución persiste o no bajo una perturbación infinitesimal y cómo se modifica cuando el número de soluciones varía.

Sin embargo en un estudio efectuado en 1963 tras la publicación por parte de Lorenz [12] de un artículo sobre flujo no periódico relacionado con la turbulencia, se descubría la existencia de soluciones aperiódicas en un modelo simplificado de las ecuaciones de Navier-Stokes, por lo que se revelaron nuevos objetos de estudio.

Esta contribución proporcionó diferentes caminos de estudio en los que sistemas determinísticos muy simples generan trayectorias dinámicas fuertemente influenciadas por la sensibilidad a las condiciones iniciales. Es decir, aún conociendo exactamente las reglas de evolución de un sistema dinámico, si éste es caótico, su predicción a largo plazo resultará imposible debido a su divergencia exponencial que dicha dinámica experimenta ante pequeñas perturbaciones.

Estudiar esto es muy importante ya que la mayoría de los modelos biológicos, meteorológicos o económicos pueden mostrar caos y por lo tanto llegar a ser impredecibles a largo plazo. El caos se encuentra en todos lados, tanto en sucesos cotidianos, como la caída de una hoja o el ondear de una bandera, en las fluctuaciones climáticas, las trayectorias de los cometas o la evolución del propio sistema solar. También ha sido encontrado, por ejemplo, en células cardíacas periódicamente estimuladas, en el principio de turbulencia, en reacciones químicas, en láseres, etc.

Con frecuencia el comportamiento caótico se ha visto como una conducta perjudicial e indeseable. Pero no siempre esto es así, los sistemas caóticos también pueden exhibir aplicaciones potenciales en procesamiento de señales no lineales y en computación neuronal. En los últimos años han surgido nuevas tendencias en las que se sitúa la base de los

procesos perceptivos en un medio caótico [23] de forma que el abandono de dicha conducta caótica constituye la pérdida fisiopatológica de las posibilidades adaptativas del sistema. El comportamiento caótico puede ser bastante útil en ciertos procesos fisiológicos en los que el comportamiento regular puede ser dañino, tal es el caso de los temblores musculares producidos por una activación periódica de las unidades motoras o los ataques epilépticos en los que el electroencefalograma, EEG, llega a ser periódico y regular [23].

Otro ejemplo es en las fluctuaciones meteorológicas, existen nuevas técnicas de predicción meteorológica apoyadas en el hecho de que la atmósfera puede considerarse como un sistema caótico, esto está siendo utilizado con el propósito de ampliar el rango de fiabilidad de las predicciones meteorológicas.

Un sistema presenta caos cuando presenta un atractor extraño, el cual hace que la trayectoria del sistema no se establezca en puntos fijos o ciclos límite o diverja al infinito; como resultado la trayectoria se mantendrá moviéndose conforme pase el tiempo de forma aperiódica [18].

Otra característica importante es que tiene dependencia a condiciones iniciales, es decir, que ligeras variaciones entre trayectorias hacen que estas evoluciones de forma muy distinta.

La noción de divergencia exponencial de órbitas cercanas es formalizada con la introducción de los exponentes de Lyapunov (lo cual se analizará en la sección 5.3) [13].

5.2.1. Sistema de Lorenz

Cuando se habla de 2 dimensiones, el sistema de Lorenz es uno de los principales ejemplos de los sistemas no periódicos, este está dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= rx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1x_2 - bx_3,\end{aligned}\tag{5.8}$$

donde $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ y $r = 28$ con $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$

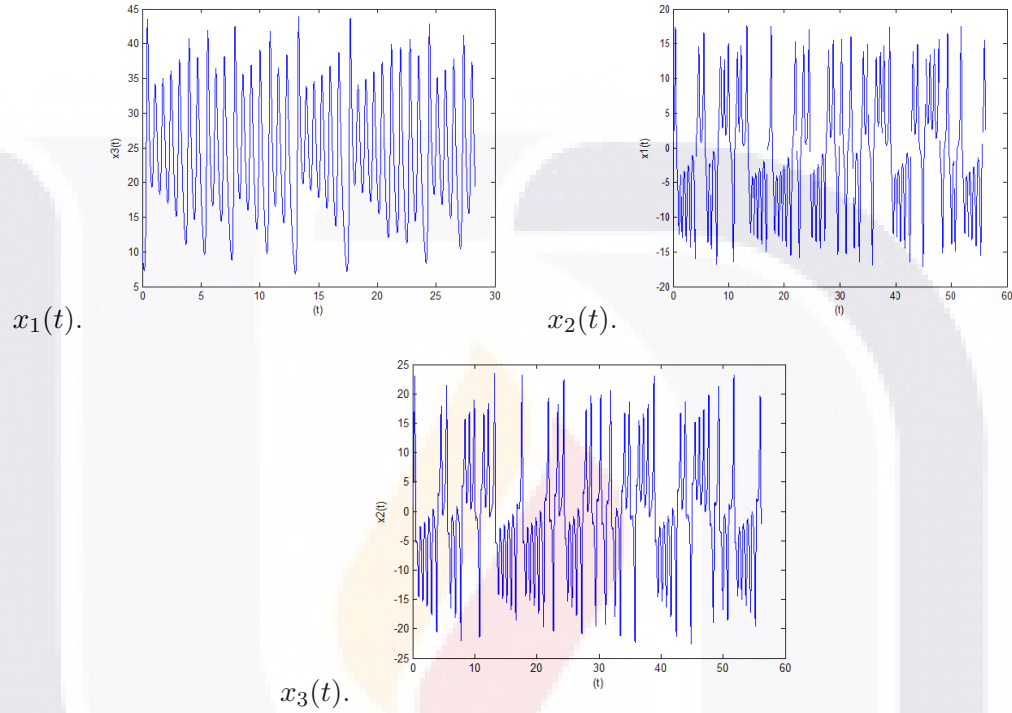


Figura 5.7: Sistema de Lorenz.

Lo cual muestra que aunque se tenga un comportamiento no periódico, este permanece acotado.

Lo realmente interesante se aprecia en 3 dimensiones.

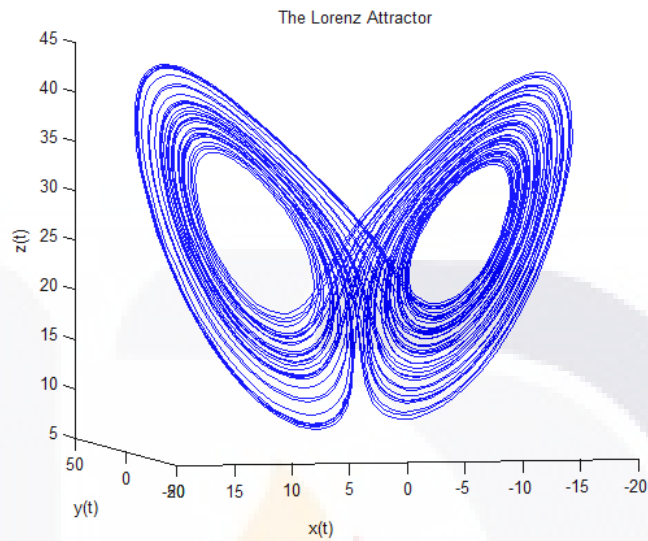


Figura 5.8: Sistema de Lorenz

El punto $x(t)$ es un espiral que gira alrededor de un bucle por un lapso de tiempo, el cual de repente salta y gira alrededor de otro antes de regresar al primero en intervalos de tiempo pseudoaleatorios.

Este sistema es extremadamente sensible y depende mucho de las condiciones iniciales, por ejemplo si se cambia el vector inicial $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 10,1 \end{bmatrix}$ la diferencia es del 0,1 %, sin embargo el comportamiento de $x_3(t)$ cambia drásticamente.

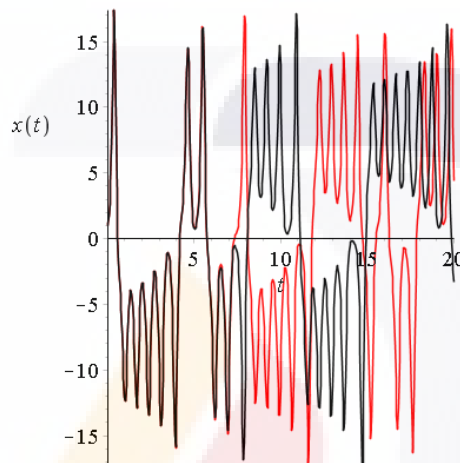


Figura 5.9: Diferencia del 0,1 %.

La diferencia se va acentuando conforme a el tiempo, eso se conoce como el ***Efecto Mariposa*** [21].

Para el área de Métodos Numéricos nos da malas noticias, ya que se hace muy difícil predecir el comportamiento de los sistemas no lineales.

5.3. Exponentes de Lyapunov

Un indicador general de la presencia de caos en un sistema dinámico, es el exponente de Lyapunov. Esta cantidad da una medida de la tasa media de divergencia exponencial en órbitas cercanas [6].

Los Exponentes de Lyapunov son muy importantes cuando se estudia sistemas dinámicos caóticos, Aleksandr, Lyapunov propuso un método para medir como dos trayectorias muy próximas se separan a medida que pasa el tiempo [24].

Mide la tasa promedio de divergencia o convergencia exponencial de trayectorias cercanas en el espacio de fase. Dado que condiciones iniciales cercanas corresponden a estados iniciales prácticamente idénticos, la divergencia exponencial de las órbitas implica la pérdida de la predictibilidad del sistema. Cualquier sistema que contenga al menos un exponente de Lyapunov positivo, se define como caótico [6].

Consideré el sistema dinámico:

$$\dot{x} = F(x) \quad (5.9)$$

Cuya solución está dada por $f^t(x)$. Asumiendo dos condiciones iniciales cercanas en el espacio fase x_0 y $x_0 + \delta x_0$, donde δx_0 es una pequeña perturbación del punto x_0 . Después de un tiempo t , la solución para estas condiciones iniciales particulares, estará dada por $f^t(x_0)$ y $f^t(x_0 + \delta x_0)$. Luego la separación entre el par de trayectorias será:

$$\Delta f^t = f^t(x_0 + \delta x_0) - f^t(x_0). \quad (5.10)$$

Entonces la tasa media exponencial de divergencia del par de trayectorias estará dada por:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\Delta f^t}{\delta x_0} \right|. \quad (5.11)$$

donde λ se denomina exponente de Lyapunov. En general, un sistema dinámico en un espacio fase $n - dimensional$ posee un espectro con n exponentes de Lyapunov, uno por cada dirección del espacio fase.

Si $\lambda > 0$, dos trayectorias divergen por muy próximas que estén en un principio, si $\lambda = 0$ la distancia crecerá de manera constante, y si $\lambda < 0$ las dos trayectorias convergen en una sola [24].

Estos exponentes pueden ayudar a saber si un sistema tiene un comportamiento caó-

tico, ya que estos son muy sensibles a condiciones iniciales, y si las trayectorias de un mismo sistema con condiciones iniciales diferentes divergen, entonces se hablará de un sistema caótico.

Por otro lado los exponentes también nos pueden ayudar en estudiar la estabilidad del sistema de errores, es decir si la solución propuesta por este trabajo es estable, ya que si $\lambda > 0$ los sistemas jamás convergerán en uno solo.

Por ello es importante que al resolver el sistema de errores todos los exponentes de Lyapunov sean negativos.



5.4. Sincronización

La sincronización del caos consiste en un régimen en el cual dos sistemas caóticos acoplados (uno llamado maestro y otro esclavo), después de un tiempo de transición, exhiben oscilaciones caóticas idénticas [10].

A causa de su alta sensibilidad a condiciones iniciales, dos sistemas caóticos aislados, no permanecen en sincronía. Sin embargo, un estudio de L.M. Pecora y T.L.Carroll [3] mostró que algunos sistemas caóticos idénticos con una señal en común de acoplamiento sí pueden evolucionar en sincronía.

La sincronización puede alcanzarse en diferentes tipos o grados, estos son la sincronización idéntica, sincronización de fase, sincronización de atraso y en adelante, sincronización generalizada, sincronización completa, sincronización parcial, sincronización en orden reducido [11].

5.4.1. Tipos de Sincronización

Sincronización Completa de Caos: La sincronización completa fue el primer tipo descubierto. Consiste en una perfecta unión de las trayectorias caóticas de dos sistemas conseguidos por medio de una señal de acoplamiento. Con este mecanismo se demuestra que dos sistemas caóticos son acoplados unidireccionalmente sólo si todos los exponentes de Lyapunov del subsistema a sincronizar son negativos [22].

Se utiliza una señal caótica para acoplar un sistema no lineal con otro. De modo que:

El comportamiento de un segundo sistema llamado respuesta (o responde) depende del comportamiento de un primer sistema llamado conductor (o driver), mientras que el primero no se ve influenciado por el segundo [16].

Considere el siguiente sistema:

$$\dot{u} = f(u). \quad (5.12)$$

Con $u \in R^n, f : R^n \rightarrow R^n$

Este sistema se subdivide en 2:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= d(x(t)) && \text{driver,} \\ \dot{y} &= r(x(t), y(t)) && \text{response.} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Con $x \in R^k$ y $y \in R^m, k + m = n$

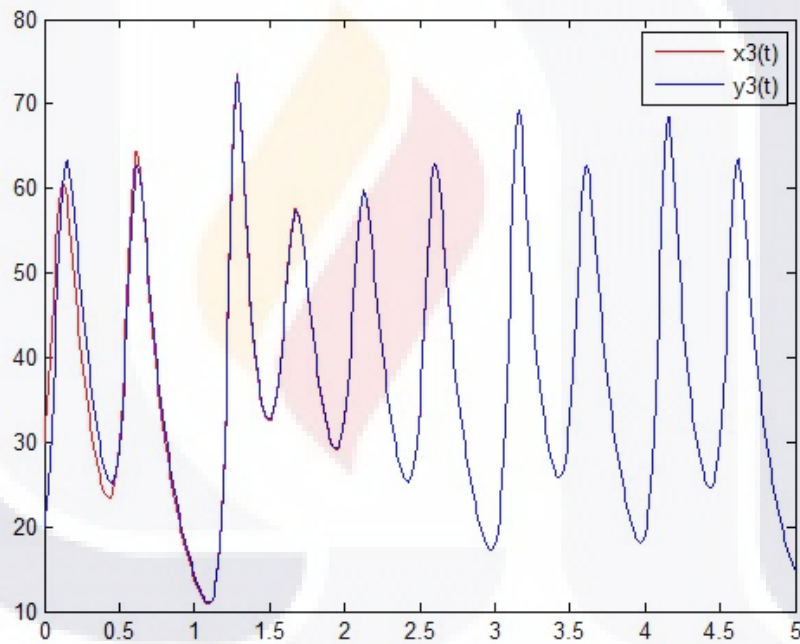


Figura 5.10: Sincronización Completa

Sincronización Generalizada:

En la sincronización generalizada se usan sistemas completamente diferentes y se asocia la salida de uno de ellos como una función dada de la entrada del otro. De ella se hablará a detalle más adelante en la siguiente sección [22].

Sincronización de Fase:

Se utiliza para sistemas de osciladores no idénticos o sistemas rotatorios, que pueden alcanzar un régimen intermedio donde se produce una unión de las fases, mientras la correlación entre las amplitudes permanece débil (amplitudes descorrelacionadas, caóticas) [22].

Sincronización de Retardo:

Es un paso entre la sincronización de fase y la completa. La cuestión radica en que existe un límite asintótico entre el tiempo t , de salida de un sistema, y la salida del otro. Esto hace que las fases y las amplitudes vayan unidas, pero con la presencia de un tiempo de retardo [22].

Sincronización de Retardo Intermitente:

En los sistemas la mayor parte del tiempo se verifica la sincronización de fase, pero existen estallidos intermitentes de comportamientos no sincronizados, debido a que la trayectoria pasa por una región del atractor donde el exponente local de Lyapunov se acorta en alguna dirección y se vuelve positivo [22].

Sincronización de Fase Imperfecta:

Ocurre cuando estando fuera del régimen de sincronización de fase, las fases se ajustan [22].

Casi Sincronización:

Es debida a la existencia del límite asintótico entre un subconjunto de variables de un sistema y el correspondiente subconjunto de variables del otro sistema [22].

5.4.2. Sincronización Generalizada

En la sincronización generalizada se usan sistemas completamente diferentes y se asocia la salida de uno de ellos como una función dada de la entrada del otro [16].

Considere el sistema caótico de la forma (5.12), el sistema se subdivide ahora en 3 subsistemas: **sistema conductor, respuesta y auxiliar.**

$$\begin{aligned}\dot{x} &= d(x(t)) && \text{Conductor,} \\ \dot{y} &= r(y(t), g, x(t)) && \text{Respuesta,} \\ \dot{z} &= a(z(t), g, x(t)) && \text{Auxiliar.}\end{aligned}\tag{5.14}$$

Con $x \in R^k$, $y \in R^m$, $z \in R^l$ y $k + m + l = n$.

donde g representa la fuerza de acoplamiento.

Dos sistemas son Generalmente Sincronizados si existe una transformación T tal que:

$$y(t) = T(x(t)).\tag{5.15}$$

Si se tiene que la respuesta y el auxiliar son conducidos por la misma señal, entonces:

$$\begin{aligned}y(t) &= T(x(t)), \\ z(t) &= T(x(t)).\end{aligned}\tag{5.16}$$

Es decir: Cuando $y = z$ es linealmente estable entonces los exponentes de Lyapunov condicionales para el sistema respuesta conducidos por $x(t)$ son todos negativos [1].

Por lo que un sistema esclavo se sincroniza exponencialmente con el sistema maestro si [20]:

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{-\alpha t} |y(0) - z(0)|,\tag{5.17}$$

con

$$e(t) = y(t) - z(t) = \text{error}.\tag{5.18}$$

Despejando α

$$\frac{|e(t)|}{|e(0)|} \leq e^{-\alpha t},\tag{5.19}$$

$$\ln \frac{|e(t)|}{|e(0)|} \leq -\alpha t, \quad (5.20)$$

$$\alpha \leq -\frac{1}{t} \ln \frac{|e(t)|}{|e(0)|}, \quad (5.21)$$

Tomando el límite cuando $t \rightarrow \infty$ queda:

$$\alpha \leq \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \ln \frac{|e(t)|}{|e(0)|}. \quad (5.22)$$

Lo cual dará como resultado el exponente de Lyapunov.

Otra restricción importante es que se exige que los exponentes de todas las variables de Lyapunov sean negativos para que haya sincronización [1], es decir:

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|e(t)|}{|e(0)|} < 0, \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{t} \ln \frac{|e(t)|}{|e(0)|} < 0, \quad (5.24)$$

$$-\frac{1}{t} \ln \frac{|e(t)|}{|e(0)|} > 0, \quad (5.25)$$

$$\ln \frac{|e(t)|}{|e(0)|} < 0, \quad (5.26)$$

$$\frac{|e(t)|}{|e(0)|} < 1, \quad (5.27)$$

$$|e(t)| < |e(0)|. \quad (5.28)$$

Para cada una de las variables.

Con ayuda del sistema Auxiliar se encontrará el nuevo sistema de errores:

$$\dot{e} = (e(t), g, z(t)). \quad (5.29)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_2 - x_3), \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 0,2x_2, \\ \dot{x}_3 &= 0,2 + x_3(x_1 - \mu) \end{aligned} \quad \textbf{Sistema Rossler (Conductor).} \quad (5.30)$$

Con $\mu = 6,3$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \sigma(y_2 - y_1) - g(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_2 &= ry_1 - y_2 - y_1y_3, \\ \dot{y}_3 &= y_1y_2 - by_3 \end{aligned} \quad \textbf{Sistema Lorenz (Respuesta).} \quad (5.31)$$

Con $\sigma = 16, r = 45,92, \quad b = 4$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \sigma(z_2 - z_1) - g(z_1 - x_1), \\ \dot{z}_2 &= rz_1 - z_2 - z_1z_3, \\ \dot{z}_3 &= z_1z_2 - bz_3 \end{aligned} \quad \textbf{Sistema Lorenz (Auxiliar).} \quad (5.32)$$

Considere (5.18), además que el parámetro de acoplamiento debe satisfacer ciertas condiciones, ya que dependiendo de su valor se puede obtener una sincronización o no.

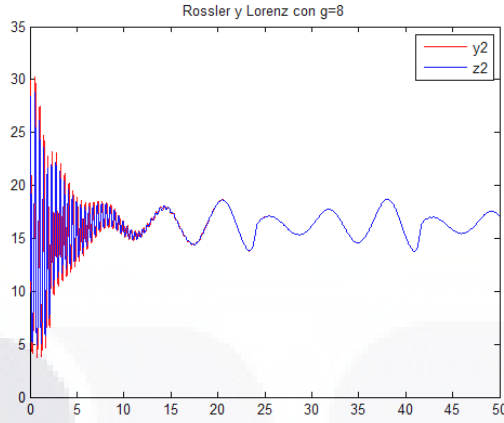


Figura 5.11: $g = 8$

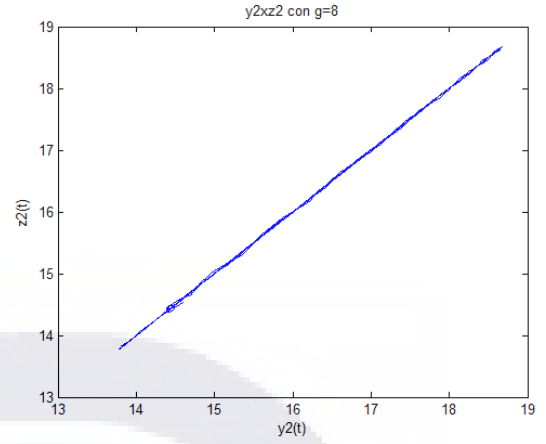


Figura 5.12: y_2 contra z_2 y contra $g = 8$

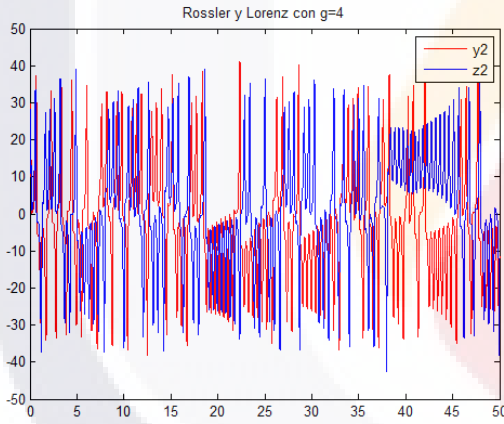


Figura 5.13: $g = 4$

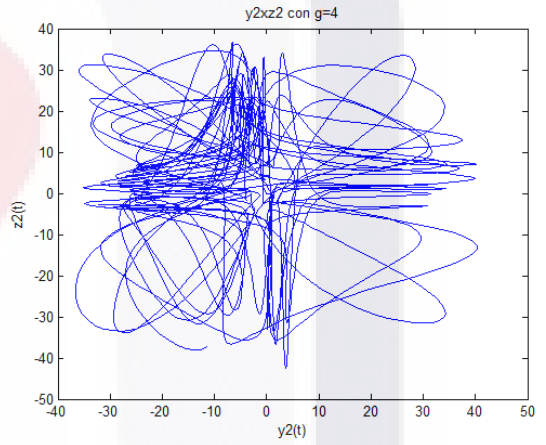


Figura 5.14: y_2 contra z_2 y contra $g = 4$

Teniendo un nuevo sistema:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \sigma(e_2 - e_1) - ge_1, \\ \dot{e}_2 &= -z_3e_1 - z_1e_3 + re_1 - e_2, \\ \dot{e}_3 &= z_2e_1 + z_1e_2 - be_3. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Para estudiar las condiciones que debe de tener el parámetro g , se analiza e_1 debido a que solo afecta a esta primera, es decir, tenemos que estudiar el comportamiento de la solución de $e_1(t)$.

El comportamiento de la solución dependerá de su condición inicial $e_1(0)$, debido a los exponentes de Lyapunov, es decir:

$$|e_1(t)| < e_1(0). \quad (5.34)$$

Analizando esa función en trozos pequeños se sabe que:

$$e_{1,h} = mx_h + b. \quad (5.35)$$

Para este caso:

$$-e_1(0) < mx_h < e_1(0). \quad (5.36)$$

Pero es bien sabido que la derivada no es mas que la pendiente de la función en un intervalo de longitud h

$$-\frac{e_1(0)}{x_h} < \dot{e}_1 < \frac{e_1(0)}{x_h}. \quad (5.37)$$

Haciendo $x_h = e_1$ queda:

$$-\frac{e_1(0)}{e_1} < \dot{e}_1 < \frac{e_1(0)}{e_1}. \quad (5.38)$$

Sustituyendo (5.33) y despejando para g

$$-\frac{e_1(0)}{e_1} < \sigma(e_2 - e_1) - ge_1 < \frac{e_1(0)}{e_1}, \quad (5.39)$$

$$\frac{\sigma(e_2 - e_1)}{e_1} - \frac{e_1(0)}{e_1^2} < g < \frac{\sigma(e_2 - e_1)}{e_1} + \frac{e_1(0)}{e_1^2}. \quad (5.40)$$

Lo cual dará una sincronización generalizada si se cumple que:

$$(\xi) \longrightarrow 0 \text{ con } \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \xi_i = e_i.$$

Es decir:

$$\|\xi\| \longrightarrow 0 \text{ cuando } t \longrightarrow \infty. \quad (5.41)$$

sujeto a:

$$\frac{\sigma(e_2 - e_1)}{e_1} - \frac{e_1(0)}{e_1^2} < g < \frac{\sigma(e_2 - e_1)}{e_1} + \frac{e_1(0)}{e_1^2}, \quad (5.42)$$

$$|e_i(t)| \leq e_i(0). \quad (5.43)$$

Para todo $i = 1, 2, 3$

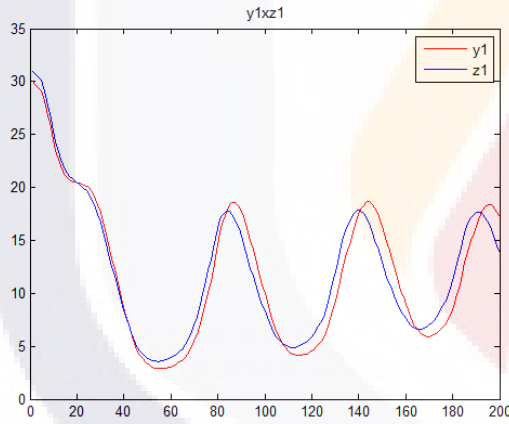


Figura 5.15: Señales Sincronizadas

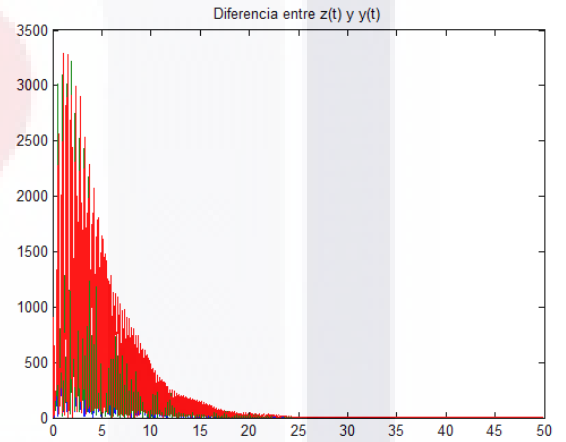


Figura 5.16: Error ξ

5.5. Metaheurísticas

El término heurístico está relacionado con la tarea de resolver problemas inteligentemente utilizando la información disponible, el término proviene de la palabra griega *heuristicen* que significa encontrar o descubrir, de la cual se deriva *eureka* [19].

En el ámbito Computacional se usa el término heurístico para describir una clase de algoritmos que aplicando el conocimiento propio del problema y técnicas realizables se acercan a la solución de problemas en un tiempo razonable.

En Investigación Operativa, el término es más exigente:

Se califica de heurístico a un procedimiento para el que se tiene un alto grado de confianza que encuentra soluciones de alta calidad con un coste computacional razonable, aunque no se garantice su optimalidad o su factibilidad, e incluso, en algunos casos, no se llegue a establecer lo cerca que se está de dicha situación [19].

Los Métodos heurísticos son procedimientos eficientes para encontrar buenas soluciones aunque no se pueda comprobar que sean óptimas, donde la rapidez del proceso es tan importante como la calidad de la solución obtenida.

5.5.1. Que Son Las Metaheurísticas?

El sufijo “meta” significa “más allá”, a un nivel superior, las metaheurísticas son estrategias para diseñar o mejorar los procedimientos heurísticos con miras a obtener un alto rendimiento. Introducido por Fred Glover en 1986 y a partir de entonces han aparecido muchas propuestas para diseñar mejores procedimientos de solución de problemas combinatorios [19].

Los procedimientos Metaheurísticos son una clase de métodos aproximados que están diseñados para resolver problemas difíciles de optimización combinatoria, en los que los heurísticos clásicos no son efectivos. Los Metaheurísticos proporcionan un marco general para crear nuevos algoritmos híbridos combinando diferentes conceptos derivados de la inteligencia artificial, la evolución biológica y los mecanismos estadísticos [19].

Estos se pueden clasificar en:

- **Metaheurísticas constructivas:** Son las que van incorporando elementos a una estructura inicialmente vacía que representa la solución. Parten de una solución inicial vacía y van añadiéndole componentes hasta construir una solución. Optimización Basada en Colonias de Hormigas [9].
- **Metaheurísticas evolutivas:** Son métodos que van construyendo un conjunto de soluciones a diferencia de los otros métodos que sólo pasan de una solución a otra en cada iteración. El procedimiento consiste en generar, seleccionar, combinar y reemplazar un conjunto de soluciones. Algoritmos Genéticos, Scatter Search, Particle Swarm, Búsqueda Dispersa (Scatter search) [9].
- **Metaheurísticas de búsqueda:** Son métodos que presuponen que existe una solución y realizan procedimientos de búsqueda, la diferencia con los métodos analíticos es que no necesariamente se encontrará la solución óptima. Uno de los riesgos al usar un algoritmo de búsqueda es el de alcanzar un óptimo local del que ya no sea posible salir. Búsqueda Local, Enfriamiento Simulado, Búsqueda Tabú [9].

5.5.2. Búsqueda Tabú

La búsqueda tabú es atribuida a Fred Glover, la cual es un método de optimización matemática, perteneciente a la clase de técnicas de búsqueda local, es un intento de dotar de “inteligencia” a estos algoritmos. Aumenta el rendimiento del método de búsqueda local mediante el uso de estructuras de memoria: una vez que una potencial solución es determinada, se la marca como "tabú" de modo que el algoritmo no vuelva a visitar esa posible solución.

Según Fred Glover, su primer definidor, “la búsqueda tabú guía un procedimiento de búsqueda local para explorar el espacio de soluciones más allá del óptimo local” [19].

Es un algoritmo metaheurístico que puede utilizarse para resolver problemas de optimización combinatoria, tales como el problema del viajante (TSP, del inglés Travelling Salesman Problem). Toma de la Inteligencia Artificial el concepto de memoria y lo implementa mediante estructuras simples con el objetivo de dirigir la búsqueda teniendo en cuenta la historia de ésta, es decir, el procedimiento trata de extraer información de

lo sucedido y actuar en consecuencia. En este sentido puede decirse que hay un cierto aprendizaje y que la búsqueda es inteligente [19].

Utiliza un procedimiento por vecindades para moverse iterativamente desde una solución en una vecindad hacia una nueva solución en otra, hasta satisfacer algún criterio de parada. Para poder explorar regiones del espacio de búsqueda que serían dejadas de lado por el procedimiento de búsqueda local (óptimo local), la búsqueda tabú modifica la estructura de los vecinos para cada solución a medida que la búsqueda progresa. Permite moverse a una solución aunque no sea tan buena como la actual, de modo que se pueda escapar de óptimos locales y continuar estratégicamente la búsqueda de soluciones aún mejores. Las soluciones admitidas para el nuevo vecindario, son determinadas mediante el uso de estructuras de memoria:

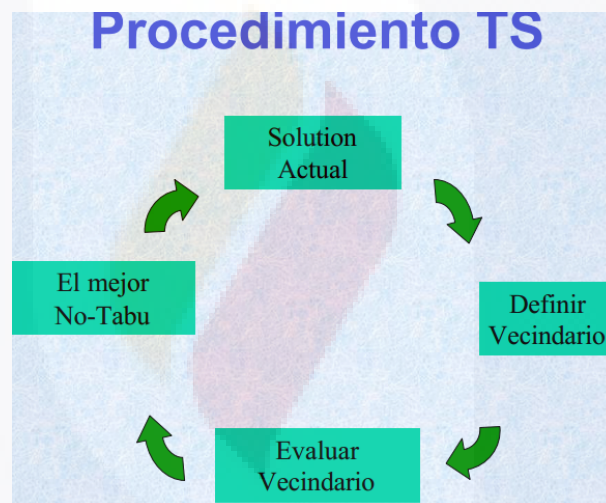


Figura 5.17: Diagrama de Flujo de Búsqueda Tabú [15]

La característica que distingue a la Búsqueda Tabú de las otras metaheurísticas de búsqueda es el uso de la memoria, la cual tiene una estructura basada en una lista tabú y unos mecanismos de selección del siguiente movimiento.

La lista tabú guarda la historia reciente de la búsqueda. El tamaño de la lista tabú es el tiempo o número de iteraciones que un elemento (movimiento o atributo) permanece en la lista tabú [19].

Elementos claves en la búsqueda Tabú [17]:

- **Restricciones Tabú:** Restringir la búsqueda al clasificar ciertos movimientos como prohibidos (tabú), para evitar caer en soluciones recientemente generadas.
- **Criterio de aspiración:** Liberar la búsqueda por medio de una función de memoria a corto plazo (olvido estratégico).

NIVELES DE ASPIRACIÓN

La lista tabú puede prohibir movimientos indeseables que nos produzcan ciclarse o también nos puedan llevar a un punto en donde no es posible moverse.

Todos los algoritmos de búsqueda tabú permiten revocar o cancelar tabús, “olvido estratégico”. A estos se les llama criterios de aspiración, que permiten movimientos, aunque sean tabú [17].

INTENSIFICACIÓN Y DIVERSIFICACIÓN

Las funciones de memoria a mediano plazo u corto plazo sirven para registrar y comparar atributos de las mejores soluciones obtenidas durante un período de búsqueda.

Es una memoria donde se almacenan los últimos movimientos realizados, y que puede ser utilizada para “recordar” aquellos movimientos que hacen caer de nuevo en soluciones ya exploradas. Su objetivo es penalizar la búsqueda para evitar el ciclado. Es una manera de definir el entorno o vecindario reducido de una solución, consiste en etiquetar como tabú las soluciones previamente visitadas en un pasado cercano, ciertos movimientos se consideran prohibidos (tabú), de forma que no serán aceptados durante un cierto tiempo o un cierto número de iteraciones, se considera que tras un cierto número de iteraciones la búsqueda está en una región distinta y puede liberarse del status tabú [19].

La memoria a largo plazo tratan de diversificar la búsqueda, complementa la información proporcionada por la memoria basada en lo reciente, ampliando la base para seleccionar movimientos preferidos. Como lo reciente, la frecuencia a menudo toma en cuenta las dimensiones de calidad de la solución e influencia del movimiento. En esta estructura de memoria se registra la frecuencia de ocurrencias de los movimientos, las soluciones o sus atributos. Tiene dos estrategias asociadas:

- **Intensificar.**
- **Diversificar la búsqueda.**

La **Intensificación** consiste en regresar a regiones ya exploradas para estudiarlas más a fondo. Para ello se favorece la aparición de aquellos atributos asociados a buenas soluciones encontradas.

La **Diversificación** consiste en visitar nuevas áreas no exploradas del espacio de soluciones. Para ello se modifican las reglas de elección para incorporar a las soluciones atributos que no han sido usados frecuentemente. Una forma clásica de diversificación consiste en reiniciar periódicamente la búsqueda desde puntos elegidos aleatoriamente, si se tiene alguna información acerca de la región factible se puede hacer un “muestreo” para cubrir la región en lo posible, si no, cada vez se escoge aleatoriamente un punto de partida (método multi arranque).

La idea es explorar regiones que contrastan fuertemente con las regiones exploradas hasta el momento. No se trata de inyectar diversidad aleatoria, sino tomando en cuenta el proceso de búsqueda llevado hasta ese momento.

Para escapar de atractores fuertes se requiere de un esfuerzo adicional [2]:

1. Imponer restricciones más fuertes en las condiciones tabú para excluir un número más grande de movimientos.
2. Usar información de cuándo el proceso apunta hacia una dirección y tratar de favorecer movimientos que apunten hacia ella.
3. Penalizar movimientos que usan atributos muy usados en el pasado.

Se pueden incorporar también elementos probabilísticos, para preferir movimientos con cierta probabilidad, utilizando una tabla de frecuencias que almacena la frecuencia con

que se ha cambiado durante el horizonte un pedazo de la solución. En este caso no se excluye ninguna solución de la vecindad, en cambio se agrega una penalización al costo de la solución basado en la frecuencia.

La tabla de frecuencias se va llenando con la función de Actualizar Frecuencias. Por lo que la función objetivo puede modificarse como:

$$\text{valor del movimiento}' = \text{valor del movimiento} - d * \text{penalización}.$$

donde la penalización suele depender de la frecuencia del atributo y d es un parámetro de diversificación.

Algoritmo 3 Búsqueda Tabú basada en frecuencias

```
solActual:=solInicial;
//mientras no sea el optimo o mejor
while evaluar(solActual)<optimo && k<KMAX
    vecinos:=vecindad(solActual); //busco todos los vecinos
    //busco en todos los vecinos
    for i:=0;i<tamaño(vecinos);i++
        frec:=buscarFrec(vecino[i])
        if evaluar(vecino[i])-penalidad(frec) ==
            min(evaluar(vecinos)-penalidad(vecinos))then
            actualizarFrecuencia(vecinos[i])
    k:=k+1
```

Figura 5.18: Búsqueda Tabú con frecuencias [2].

Además de un mecanismo de diversificación de memoria a largo plazo cuando se sospecha de un atractor fuerte. Para entender los atractores, los mínimos locales se pueden ver como atractores. Por otro lado, también se pueden tener ciclos, que se repiten continuamente. Una tercera posibilidad es que la trayectoria esté restringida a una cierta área del espacio de búsqueda (atractores caóticos).

Recuerde que el evitar ciclos no debe de ser la única meta, se tienen que continuar estimulando el descubrimiento de soluciones de mejor calidad.

5.5.3. Búsqueda Caótica

En muchas de las metodologías desarrolladas, el éxito en el proceso de optimización está condicionado a que el usuario fije valores apropiados para los parámetros que controlan el algoritmo de optimización.

Recientemente, la teoría de sistemas caóticos ha sido aprovechada para desarrollar nuevas metodologías de optimización; una de sus aplicaciones más importantes es el uso de secuencias numéricas generadas a partir de un mapa caótico, en vez de generadores de números pseudo-aleatorios, así como también, la hibridación de algoritmos existentes.

El término caos se refiere, en el sentido matemático, a un comportamiento complejo, limitado, inestable e impredecible generado por un sistema simple no lineal y determinista, conocido como mapa caótico, de tal manera que las secuencias generadas son casi aleatorias y sensibles a las condiciones iniciales [8].

Uno de los mapas caóticos más conocidos corresponde a la parábola logística, definida como:

$$\gamma_{n+1} = 4\gamma_n(1 - \gamma_n) \quad (5.44)$$

Donde $\gamma \in (0, 1)$ y $\notin 0,25, 0,5, 0,75$. Ya que genera un comportamiento ciclico periódico.

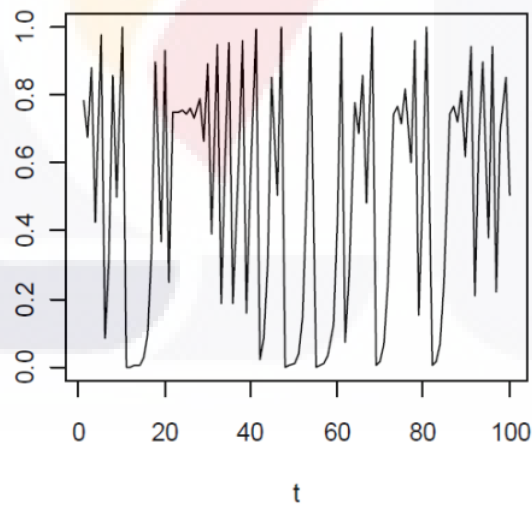


Figura 5.19: Comportamiento Mapa Logístico [8]

Este Algoritmo encuentra la nueva solución tentativa como:

$$x(k+1) = x(k) + \Delta x(k). \quad (5.45)$$

con

$$\Delta x(k) = \lambda(k)[\beta \widehat{z(k)} + (1 - \beta)\hat{u}]. \quad (5.46)$$

Donde $z(k)$ es un vector que guarda la historia de las direcciones exitosas que han dado como resultado la minimización de la función objetivo

$$z(k+1) = \gamma z(k) + (1 - \gamma)\Delta x(k). \quad (5.47)$$

\hat{u} es un vector aleatorio de magnitud unitaria. $\beta \in (0, 1)$ es un factor de ponderación que combina la dirección de minimización de la iteración anterior con una dirección aleatoria.

Es decir, la nueva solución tentativa se encontrará por medio de un gradiente.

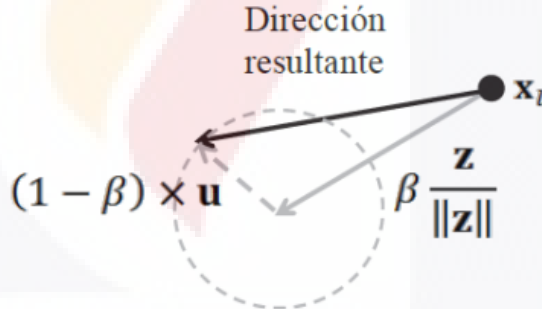


Figura 5.20: Interpretación del Gradiente [8]

Recuerde que el gradiente determina el máximo ritmo de cambio para cada variable de un plano multivariable. Cuando el gradiente es igual a 0, es posible determinar un valor máximo o mínimo de la función. Su Algoritmo es bastante sencillo [8].

```

01 inicializar  $\mathbf{x}(1)$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$ ,  $K$ ,  $fc=f(\mathbf{x}(1))$ 
02 Para ( $k=1, \dots, K$ ) {
03      $\beta = 4 * \beta * (1 - \beta)$ 
04     Si ( $\beta \in \{0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0\}$ ),  $\beta = \text{aleatorio}(1)$ 
05      $\gamma = 4 * \gamma * (1 - \gamma)$ 
06     Si ( $\gamma \in \{0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0\}$ ),  $\gamma = \text{aleatorio}(1)$ 
07      $\mathbf{u}(k) = 2 * \text{aleatorio}(n) - 1$ ;  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) / \|\mathbf{u}(k)\|$ 
08      $\Delta \mathbf{x}(k) = \lambda * \left[ \beta \frac{\mathbf{z}(k)}{\|\mathbf{z}(k)\|} + (1 - \beta) * \mathbf{u}(k) \right]$ 
09     Si ( $(f(\mathbf{x}(k)) + \Delta \mathbf{x}(k)) < fc$ ) {
10          $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \Delta \mathbf{x}(k)$ 
11          $fc = f(\mathbf{x}(k+1))$ 
12          $\mathbf{z}(k+1) = \gamma * \mathbf{z}(k) + (1 - \gamma) * \mathbf{u}(k)$ 
13          $\lambda = 1.2 * \lambda$ 
14     }
15     Sino {
16          $\lambda = 0.9 * \lambda$ 
17         Si ( $\lambda < 0.1$ ),  $\lambda = 0.1$ 
18     }
19 }
```

Figura 5.21: Algoritmo de la Búsqueda Caótica [8]

Algunas funciones minimizadas con este algoritmo son:

Nombre	Definición	\mathbf{x}_{opt}	$f(\mathbf{x}_{opt})$	Rango de búsqueda
Rosenbrock	$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \left[100(x(i)_2 - x(i-1))^2 + (x(i) - 1)^2 \right]$	(1, 1, ..., 1)	0	$-5 \leq x(i) \leq 10$
Paraboloide	$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N x(i)^2$	(0, 0, ..., 0)	0	$-5.12 \leq x(i) \leq 5.12$
Schwefel 1.2	$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^j x(i) \right)^2$	(0, 0, ..., 0)	0	$-100 \leq x(i) \leq 100$
Schwefel 2.22	$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N x(i) + \prod_{i=1}^N x(i) $	(0, 0, ..., 0)	0	$-10 \leq x(i) \leq 10$

Figura 5.22: Funciones de Prueba [8]

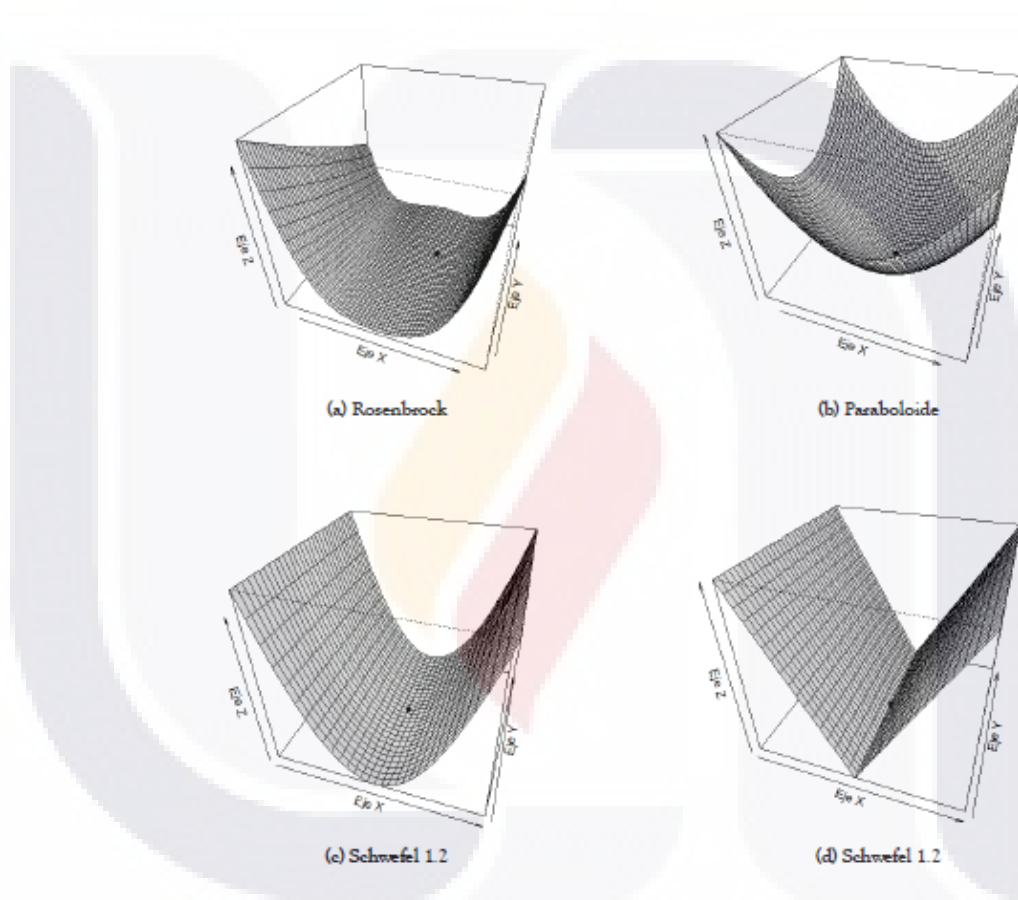


Figura 5.23: Funciones de Prueba [8]

5.5.4. Recocido Simulado

El recocido simulado parte de una solución inicial y de una temperatura inicial la cual explora un número determinado de soluciones vecinas. Tras examinar cada solución vecina, si esta es mejor que la solución de partida, se acepta como una nueva solución. Si es peor, se admitirá como una nueva solución con una determinada tasa de proporción [4]:

$$\text{Probabilidad de Aceptar una solución peor} = e^{-\frac{\Delta f}{T}}. \quad (5.48)$$

Donde Δf es el incremento de la función objetivo, es decir:

$$\Delta f = f_{Sol.Cand} - f_{Sol.Act}, \quad (5.49)$$

T es la temperatura, la cual debe ir decreciendo.

Esta temperatura permite escapar de óptimos locales, además en cada número de iteraciones, esta puede variar.

$$T_{i+1} = \alpha T_i. \quad (5.50)$$

Con $0 < \alpha < 1$ y se recomienda que $\alpha \in \{0,8, 0,9\}$.

5.6. Modelo de Programación No Lineal

Un Modelo de Programación No Lineal (MPNL) puede verse como :

$$\begin{aligned} & \text{Min} f(x) \quad , \\ & \quad \quad \quad \text{s.a.} \quad , \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.51)$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$.

Sin embargo para poder introducir el algoritmo de búsqueda tabú es necesario modificar en MPNL de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \text{Min} f(x), \\ & \quad \quad \quad \text{s.a.}, \\ & x_i \in [L_i, U_i] \end{aligned} \quad (5.52)$$

Con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $i = 1, 2, \dots, n$, L_i límite inferior de la variable x_i y U_i límite Superior de variable x_i .

Es decir el modelo quedará como:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \parallel (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \parallel, \\ & \quad \quad \quad \text{s.a.}, \\ & |e_1(t)| < e_1(0), \\ & |e_2(t)| < e_2(0), \\ & |e_3(t)| < e_3(0), \\ & g > \frac{\sigma(e_2 - e_1)}{e_1} - \frac{1}{e_1^2}, \\ & g < \frac{\sigma(e_2 - e_1)}{e_1} + \frac{1}{e_1^2}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Donde:

$$\xi_1 = e_1(t) + \dot{e}_1(t) * h,$$

$$\begin{aligned}\xi_2 &= e_2(t) + \dot{e}_2(t) * h, \\ \xi_3 &= e_3(t) + \dot{e}_3(t) * h.\end{aligned}\tag{5.54}$$

Sustituyendo (5.33)

$$\begin{aligned}\xi_1 &= e_1(t) + (\sigma(e_2(t) - e_1(t)) - ge_1(t)) * h, \\ \xi_2 &= e_2(t) + (z_3(t)e_1(t) - z_1(t)e_3(t) + re_1(t) - e_2(t)) * h, \\ \xi_3 &= e_3(t) + (z_2(t)e_1(t) - z_1(t)e_2(t) + be_3(t)) * h.\end{aligned}\tag{5.55}$$

Esto debido a que si se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$y' = f(x, y),\tag{5.56}$$

su solución aproximada será

$$y(x) \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).\tag{5.57}$$

Capítulo 6

MARCO METODOLÓGICO (Diseño Experimental)

Este capítulo se compone entre otros aspectos de: Objetivos, Planteamiento del problema, Hipótesis, Método, Resultado y Conclusiones. Se expresan los objetivos y metas a alcanzar vinculadas con soluciones al problema a atacar. Además de la metodología diseñada y utilizada para alcanzar dichas metas, que es específicamente el obtener sincronización de dos sistemas dinámicos caóticos.

6.1. Objetivos

Objetivo Principal: El problema principal a tratar en este trabajo es realizar la Sincronización Generalizada de dos sistemas Dinámicos Caóticos con ayuda de la Búsqueda Tabú.

Objetivos Específicos:

- Analizar la Sincronización Generalizada, es decir, sus propiedades y condiciones para que ella pueda existir.
- Elaborar un software basado en la Búsqueda Tabú que sea capaz de realizar una Sincronización Generalizada de dos señales caóticas distintas.

- Reforzar la Búsqueda Tabú con ayuda de la Búsqueda Caótica y el Recocido Simulado. Con la búsqueda caótica se buscará que el algoritmo sea más rápido y con el Recocido Simulado obtendremos la característica del autoaprendizaje.

6.2. Planteamiento del Problema

Un sistema dinámico es un conjunto de funciones que definen el comportamiento de cierto fenómeno en el tiempo; a menudo se desea que la realidad se comporte tal como lo describen aquel sistema, sin embargo no siempre es así, se encuentran comportamientos erráticos y caóticos casi en cualquier parte, y solo una en pequeña parte de los sucesos de la vida cotidiana tienen un comportamiento lineal.

Esto hace difícil la predicción y el posterior aprendizaje de fenómenos en nuestro mundo, y para poder intentar describir la naturaleza nos apoyamos en los sistemas caóticos.

Los sistemas dinámicos caóticos son sistemas muy sensibles a condiciones iniciales, lo cual dificulta cualquier predicción a lo largo del tiempo, volviéndolos difíciles al momento de querer trabajar con ellos. Sin embargo esto no quiere decir que ellos son indeseables o inservibles, son de vital importancia en diferentes ramas de la ciencia, tales como la predicción financiera, enmascaramiento de información en sistemas, encriptación de señales, predicciones climáticas, entre otras.

Uno de los tópicos más sonados en los últimos años es el control de caos. Ya sea de forma analítica o numérica, la búsqueda del control de caos puede ser complicada. El control consiste en el diseño de estrategias que permitan asignar dinámicas deseadas a sistemas caóticos. En él existen dos problemas básicos: supresión y sincronización de caos.

La sincronización del caos consiste en un régimen en el cual dos sistemas caóticos acoplados (uno llamado maestro y otro esclavo), después de un tiempo de transición, exhiben oscilaciones caóticas idénticas. Pecora y Carroll y Rulkov [3] demostraron que es posible acoplar dos sistemas caóticos, que parten de estados iniciales distintos, de tal manera que las oscilaciones se sincronicen. Desde entonces ha habido muchos métodos y formas para abordar este problema, sin embargo ninguno desde el punto de vista de los Algoritmos Metaheurísticos, mas concretamente de la Búsqueda Tabú.

La búsqueda Tabú es un método de optimización matemática, perteneciente a las clases de búsqueda local. Esta aumenta el rendimiento del método mediante el uso de estructuras de memoria: una vez que una potencial solución es determinada se la marca

como "tabú" de modo que el algoritmo no vuelva a visitar esa posible solución.

Por todo lo anterior se buscará en este trabajo estudiar la sincronización de sistemas dinámicos caóticos con la ayuda de la Búsqueda Tabú.



6.3. Hipótesis

Se parte de los siguientes supuestos:

- La Sincronización Generalizada entre dos sistemas dinámicos caóticos se puede realizar utilizando un algoritmo de búsqueda tabú.
- Es posible definir una funcion objetivo a minimizar a partir del sistema de errores, definido por ecuaciones diferenciales.
- La estabilidad de la solución dependerá de los Exponentes de Lyapunov.
- La Búsqueda Tabú proporcionará un mínimo más pequeño comparado con otros algoritmos.
- Ayudado de la Búsqueda Caótica y el Recocido Simulado, la búsqueda Caótica puede ser aún mas rápida.

Capítulo 7

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este capítulo se expresan los resultados encontrados a través del desarrollo de la metodología instaurada en el proyecto. Una breve explicación del modelo que se sincroniza en este trabajo, así como una explicación del pseudo-código y para finalizar una breve explicación de las contribuciones aportadas por este trabajo.

7.1. Descripción de Resultados

7.1.1. Descripción del Sistema Dinámico Caótico a Sincronizar

El Sistema Dinámico Caótico que se buscará Sincronizar es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_2 - x_3), \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 0,2x_2, \\ \dot{x}_3 &= 0,2 + x_3(x_1 - \mu), \end{aligned} \quad \textbf{Sistema Rossler (Conductor)} \quad (7.1)$$

con $\mu = 6,3$.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \sigma(y_2 - y_1) - g(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_2 &= ry_1 - y_2 - y_1y_3, \\ \dot{y}_3 &= y_1y_2 - by_3, \end{aligned} \quad \textbf{Sistema Lorenz (Respuesta)} \quad (7.2)$$

con $\sigma = 16, r = 45,92, b = 4$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \sigma(z_2 - z_1) - g(z_1 - x_1), \\ \dot{z}_2 &= rz_1 - z_2 - z_1z_3, \\ \dot{z}_3 &= z_1z_2 - bz_3. \end{aligned} \quad \textbf{Sistema Lorenz (Auxiliar)} \quad (7.3)$$

El cual seguirá un esquema de Sincronización Generalizada, es decir, se obtendrá un nuevo sistema de errores

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \sigma(e_2 - e_1) - ge_1, \\ \dot{e}_2 &= -z_3e_1 - z_1e_3 + re_1 - e_2, \\ \dot{e}_3 &= z_2e_1 + z_1e_2 - be_3, \end{aligned} \quad (7.4)$$

con $e = y(t) - z(t) = \text{error}$.

Con ayuda de esto, se buscará una solución (e_1, e_2, e_3) que cumpla el sistema y además que $\| (e_1, e_2, e_3) \| \rightarrow 0$.

Para poder resolver este sistema se tendrá que tener en cuenta algunas restricciones:

$$\begin{aligned} |e_1(t)| &< e_1(0), \\ |e_2(t)| &< e_2(0), \\ |e_3(t)| &< e_3(0). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Estas tres condiciones darán la estabilidad de la solución. Las cuales provienen del estudio previo de los exponentes de Lyapunov.

$$\frac{\sigma(e_2 - e_1)}{e_1} - \frac{1}{e_1^2} < g < \frac{\sigma(e_2 - e_1)}{e_1} + \frac{1}{e_1^2}. \quad (7.6)$$

La última es muy necesaria, ya que la sincronización estará estrechamente ligada al parámetro de acoplamiento g .

Para poder implementar la búsqueda Tabú en este problema, será necesario escribir todo esto como un Modelo de Programación No Lineal:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \| (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \|, \\
 & \quad \text{s.a.}, \\
 & |e_1(t)| < e_1(0), \\
 & |e_2(t)| < e_2(0), \\
 & |e_3(t)| < e_3(0), \\
 & g > \frac{\sigma(e_2 - e_1)}{e_1} - \frac{1}{e_1^2}, \\
 & g < \frac{\sigma(e_2 - e_1)}{e_1} + \frac{1}{e_1^2}.
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= e_1(t) + e_1(t) * h, \\
 \xi_2 &= e_2(t) + e_2(t) * h, \\
 \xi_3 &= e_3(t) + e_3(t) * h.
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Sustituyendo en (7.4)

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= e_1(t) + (\sigma(e_2(t) - e_1(t)) - ge_1(t)) * h, \\
 \xi_2 &= e_2(t) + (z_3(t)e_1(t) - z_1(t)e_3(t) + re_1(t) - e_2(t)) * h, \\
 \xi_3 &= e_3(t) + (z_2(t)e_1(t) - z_1(t)e_2(t) + be_3(t)) * h.
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

7.1.2. Diseño, Descripción de Los Algoritmos y Pseudocódigos

La idea de unir la búsqueda tabú con la búsqueda caótica provino de los resultados obtenidos por Sun Changzhi, Chen Zhifei, Li Hongmei [4]. Los cuales demostraron un mejoramiento significativo tanto en la Búsqueda Tabú como en la Búsqueda Caótica.

El diagrama general, junto el Pseudo-código del Algoritmo, se puede apreciar en las siguientes figuras, en las cuales se alterna la Búsqueda Caótica y la Búsqueda Tabú.

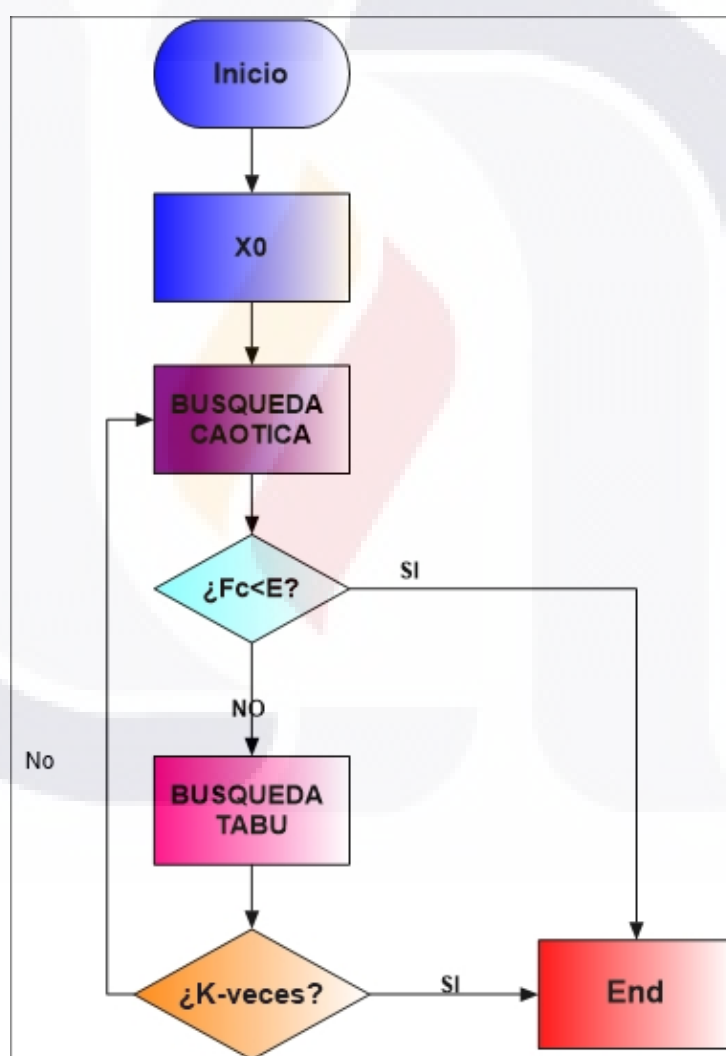


Figura 7.1: Diagrama General

Algoritmo .1: Programa General

```

1 Inicializar.  $\varepsilon, K, x_0, f_c = f(x_0)$ 
2 Leer Datos.
3 while ( $K \leq K_{max}$  o  $f_c < \varepsilon$ ) do
4    $K = K + 1$ ;
5   Búsqueda Caótica;
6   if ( $f_c < \varepsilon$ ) & ( $rest.g$ ) then
7      $K = 1001$ ;
8   else
9     Búsqueda Tabú;
10 return  $Y, Z$ ;
11  $X = |Y - Z|$ ;
```

Figura 7.2: Algoritmo 1.

Como puede apreciarse, en estas figuras, el esquema principal de trabajo es la Búsqueda Tabú, siendo la Búsqueda Caótica y el Recocido Simulado herramientas de apoyo para el algoritmo.

Se desglosan el programa principal en pequeños programas mas pequeños para mayor entendimiento.

En el Diagrama de la Búsqueda Caótica podemos apreciar su simplicidad, encontrando las nuevas soluciones con ayuda del gradiente.

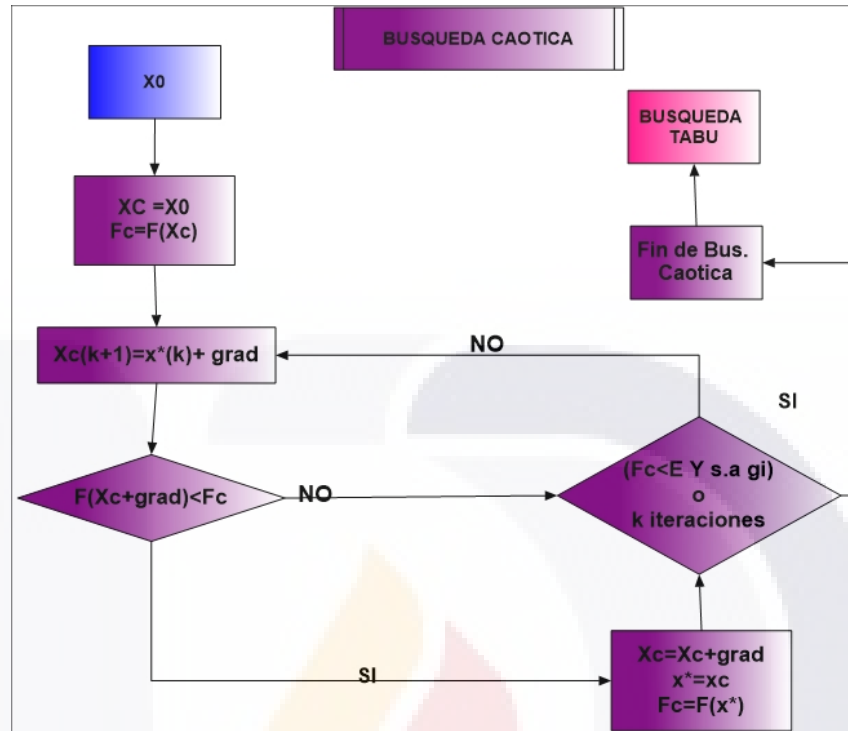


Figura 7.3: Búsqueda Caótica

Algoritmo .2: Búsqueda Caótica(y, z, K, ε, fc)

```

1 Inicializar  $\beta, \gamma, \lambda, K_{int}$ 
2 while ( $K_{int} \leq 5$  o  $fc < \varepsilon$ ) do
3    $K_{int} = K_{int} + 1$ ;
4    $\beta = 4 * \beta(1 - \beta)$ ;
5    $\gamma = 4 * \gamma(1 - \gamma)$ ;
6   if  $\beta, \gamma, \in \{.25, .5, .75, 1\}$  then
7      $\beta, \gamma \in (0, 1)$ 
8    $u(K) = 2 * aleatorio(n) - 1$ ;
9    $\Delta x(K) = \lambda[\beta z(K) + (1 - \beta)u(K)]$ ;
10  if ( $(f(x(K) - \Delta x(K)) < fc) \& (Con.Lya)$ ) then
11     $x(K+1) = x(k) - \Delta x(K)$ ;
12     $fc = f(x(K) - \Delta x(K))$ ;
13     $\lambda = 1,2 * \lambda$ ;
14     $K = K + 1$ ;
15  else
16     $\lambda = ,9 * \lambda$ ;
17    if  $\lambda < 0,1$  then
18       $\lambda = 0,1$ 
19 return  $y, z, fc, K$ ;
20  $x = |y - z|$ ;

```

$$\text{Con } z(K+1) = \gamma * z(k) + (1 - \gamma) * \Delta x(k)$$

Figura 7.4: Pseudo-Código. Búsqueda Caótica

Sin embargo, se debe tener extremo cuidado en obedecer las restricciones de los exponentes de Lyapunov, ya que ellas evitarán la inestabilidad de las soluciones candidatas.

En la Búsqueda Tabú el proceso de encontrar nuevos posibles candidatos es un poco mas sencillo, y en esta parte se agrega el Recocido Simulado, sin embargo se debe de tener en cuenta nuevamente la estabilidad de los exponentes de Lyapunov, antes de aceptar una solución mala.

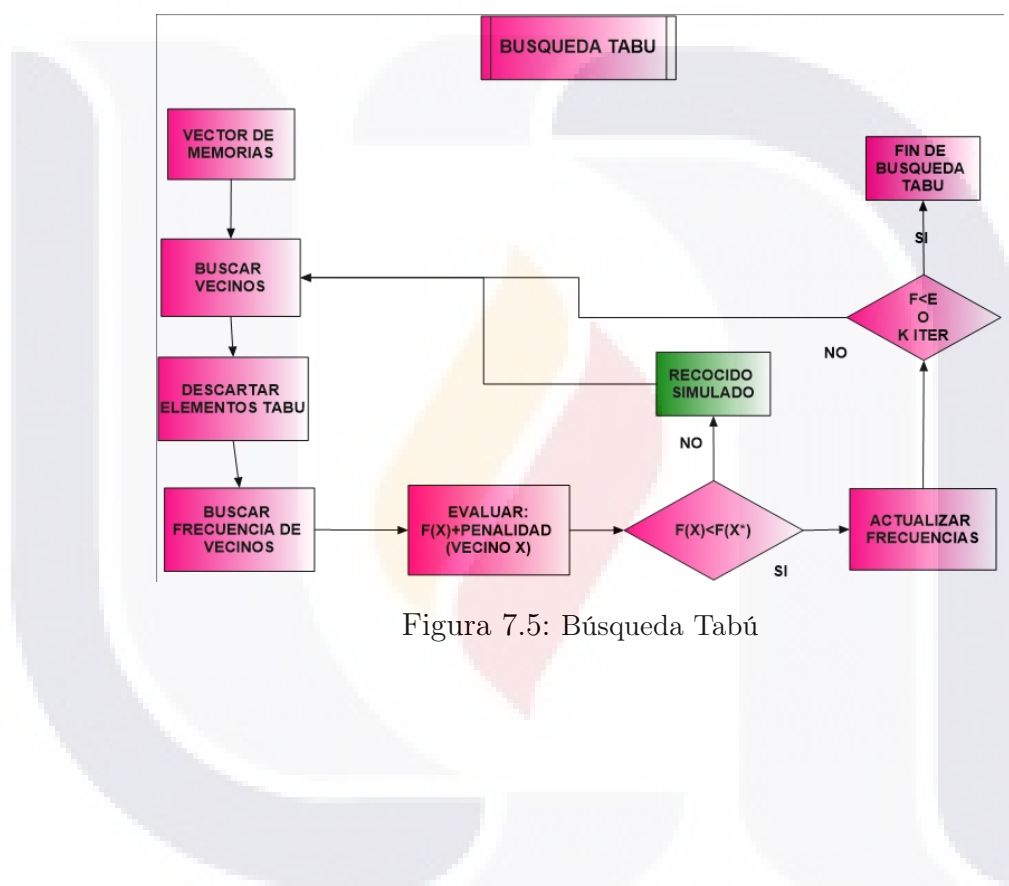


Figura 7.5: Búsqueda Tabú

Algoritmo .3: Búsqueda Tabú($y, z, K, \varepsilon, fc, T$)

```

1 Inicializar. $K_{int}$ 
2 while ( $K_{int} \leq K_{max}$  o  $fc < \varepsilon$ ) do
3    $K_{int} = K_{int} + 1$ ;
4   Buscar Vecinos;
5   Descartar Elementos Tabu;
6   Buscar Frecuencia de Vecinos;
7    $x_{can} = MejorNoTabu$ ;
8   if ( $f(x_{can}) + Penal. < fc$ ) & ( $Con.Lya$ ) then
9      $x(K+1) = x_{can}(k)$ ;
10    Actualizar Lista Tabu;
11    Actualizar Memoria de Frecuencias;
12  else
13    if  $Con.Lya$  then
14       $T = RecocidoSimulado$ ;
15      if Se acepto then
16         $x(K+1) = x_{can}$ ;
17        Actualizar Lista Tabu;
18        Buscar Frecuencia de Vecinos;
19      else
20         $h=0.9h$ ;
21    else
22       $h=0.9h$ ;
23 return  $y, z, fc, K, T$ ;
24  $x = |y - z|$ ;

```

Figura 7.6: Pseudo-Código. Búsqueda Tabú

Las condiciones de estabilidad están presentes al igual que en la búsqueda caótica, además del recocido simulado, hay que agregarle un factor de temperatura T , el cual irá disminuyendo hasta que el algoritmo esté templado.

Por último el Recocido Simulado llega a ser la parte más sencilla de los algoritmos. En donde la temperatura disminuye cada vez que se acepta una solución mala.

Después de un tiempo la probabilidad de aceptar una solución mala habrá disminuido drásticamente.

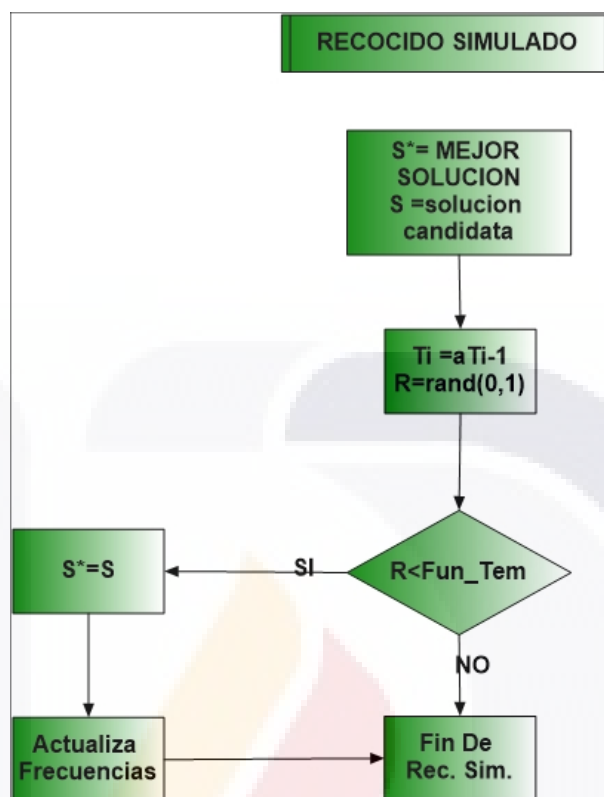


Figura 7.7: Recocido Simulado

Algoritmo .4: Recocido Simulado (x, T, fc)

```

1 Inicializar.  $R \in (0, 1)$ 
2  $\Delta f = |f(x) - fc|;$ 
3  $Prob = e^{-\frac{\Delta f}{T}};$ 
4 if  $R < Prob$  then
5   | Aceptar Solución;
6   |  $T = 0,8T;$ 
7 else
8   | No se Acepta;
9 return  $Aceptacion, T;$ 

```

Figura 7.8: Pseudo-Código. Recocido Simulado

En los anexos se puede revisar los códigos de una forma más detallada.

7.1.3. Experimentos y Gráficas

En esta sección se muestra algunos resultados de las simulaciones utilizando los programas descritos en la sección anterior. Tomando como parámetro de acoplamiento del modelo (7.7) a \mathbf{g} con $g = 8$

Se experimentó con el número de iteraciones que le llevaría al algoritmo realizar una sincronización. De los cuales se concluyó que, a medida que aumentaba el número de iteraciones el valor de la función objetivo disminuía drásticamente.

Cuadro 7.1: Simulaciones Generales

Iteraciones	10	20	30	40	50	60
1	0.1158	0.0337	0.0635	0.1259	0.0676	0.0205
2	0.0811	0.1397	0.024	0.1194	0.0125	0.1184
3	0.1314	0.1054	0.0305	0.01	0.0296	0.0195
4	0.1048	0.094	0.1008	0.1015	0.006	0.0257
5	0.0123	0.0871	0.0305	0.1042	0.0125	0.0306
Iteraciones	70	80	90	100	110	120
1	0.1258	7.14E-04	0.0072	0.0276	0.0077	0.0133
2	0.0052	0.0483	7.14E-04	0.0069	7.14E-04	0.0763
3	0.1259	0.0063	0.0576	0.0023	7.14E-04	0.0115
4	0.0247	0.028	0.0738	9.80E-04	0.0077	0.005
5	0.1173	0.0075	0.0022	0.0072	7.14E-04	0.1623
Iteraciones	130	140	150	160	170	180
1	0.0082	7.14E-04	0.0289	0.005	0.0012	0.1739
2	0.0061	0.0012	0.0024	0.0031	0.0044	0.1287
3	0.0116	0.0016	0.1457	3.93E-04	0.0028	0.0252
4	0.0063	0.0019	0.0142	0.0019	0.0047	0.001
5	0.0129	0.003	0.1735	0.0069	7.14E-04	0.1509
Iteraciones	190	200	210	220	230	240
1	0.0011	7.14E-04	7.14E-04	0.0016	5.33E-04	0.0742
2	0.0179	0.0011	7.14E-04	7.14E-04	0.0025	0.0039
3	0.002	7.14E-04	0.0031	0.0082	0.0756	0.0041
4	0.0024	0.0011	0.0031	0.0016	0.0018	5.16E-04
5	0.0012	7.14E-04	0.0022	0.0034	0.0034	0.1181
Iteraciones	250					
1	5.33E-04					
2	0.0023					
3	4.17E-04					
4	5.33E-04					
5	4.39E-04					

Uno de los mejores resultados es con 250 iteraciones. Haciendo pruebas posteriores, aumentando el número de iteraciones, el algoritmo encontraba mejores soluciones. Para este caso particular, se aprecia la simulación número 3.

```
>> main(30,20,10,31,21,11)  j =
fc =                        250
2.0239
K =
j =                          38
2
Caot_end =                  -0.2489
K =                          4.1721e-04
2
Tab_end =
Caot_end =                  4.1721e-04
fx
```

```
>> Prueba
exp_lya1 =
-Inf
exp_lya2 =
-0.2489
exp_lya3 =
-0.2115
```

Figura 7.9: Simulación 3

Donde la sincronización entre las variables y_1 y z_1 son casi completas, con tan sólo una diferencia de 0,000046852; de 0,00010234 para y_2 y z_2 y de 0,00039175 para y_3 y z_3 .

Con un valor inicial de la función objetivo de 2,0239 hasta uno final de 0,00041721.

Los exponentes de Lyapunov cumplen la condición de negatividad:

$$\lambda_1 = -\infty$$

$$\lambda_2 = -0,2489$$

$$\lambda_3 = -0,2115$$

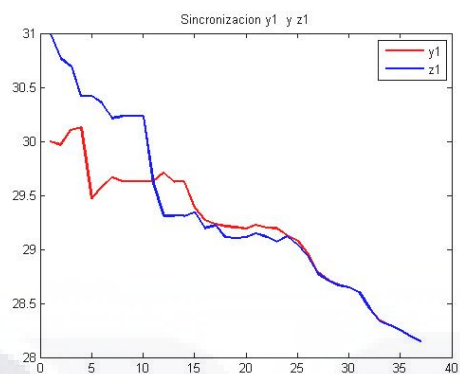


Figura 7.10: Sincronización y_1 y z_1

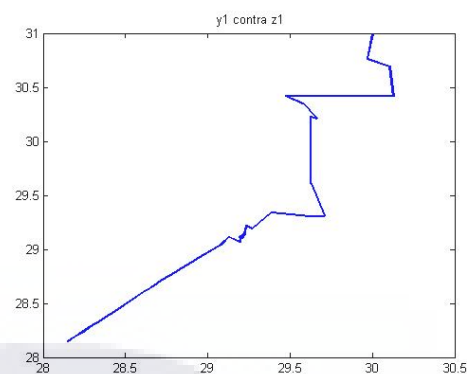


Figura 7.11: y_1 contra z_1

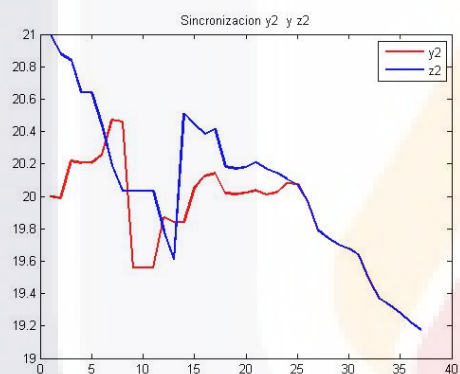


Figura 7.12: Sincronización y_2 y z_2

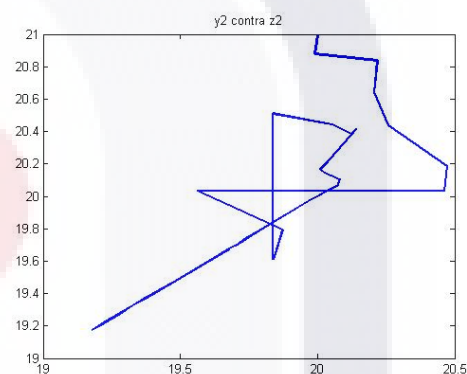


Figura 7.13: y_2 contra z_2

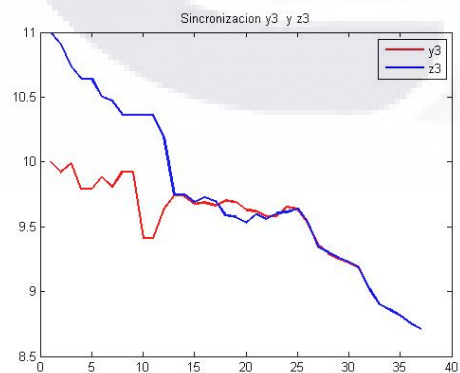


Figura 7.14: Sincronización y_3 y z_3

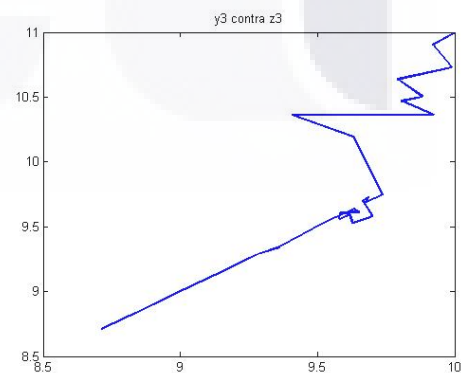


Figura 7.15: y_3 contra z_3

Cuadro 7.2: Tabla: Solución y evolución con 250 iteraciones.

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	e_1	e_2	e_3
30	20	10	31	21	11	1	1	1
29.9689	19.9897	9.9201	30.7662	20.8795	10.9072	0.7973	0.8898	0.9871
30.1037	20.2178	9.9882	30.6938	20.8383	10.7328	0.5901	0.6205	0.7446
30.128	20.2061	9.7902	30.4188	20.6417	10.6401	0.2907	0.4356	0.8499
29.4719	20.2061	9.7902	30.4188	20.6417	10.6401	0.9468	0.4356	0.8499
29.5762	20.2575	9.8821	30.353	20.4365	10.5043	0.7768	0.1789	0.6222
29.664	20.4709	9.8054	30.214	20.1881	10.4706	0.55	0.2828	0.6652
29.6294	20.4611	9.9239	30.2291	20.0331	10.3614	0.5997	0.428	0.4375
29.6294	19.5611	9.9239	30.2291	20.0331	10.3614	0.5997	0.472	0.4375
29.6294	19.5611	9.4073	30.2291	20.0331	10.3614	0.5997	0.472	0.9541
29.6294	19.5611	9.4073	29.6092	20.0331	10.3614	0.0201	0.472	0.9541
29.7102	19.8713	9.6295	29.3105	19.7937	10.1936	0.3997	0.0775	0.5641
29.6241	19.8393	9.7374	29.311	19.6107	9.7485	0.3131	0.2287	0.011
29.6241	19.8393	9.7374	29.311	20.5107	9.7485	0.3131	0.6713	0.011
29.3831	20.0513	9.6758	29.3448	20.4433	9.6908	0.0383	0.3921	0.015
29.2687	20.1248	9.6845	29.1964	20.3859	9.7293	0.0723	0.261	0.0448
29.2329	20.141	9.6628	29.2232	20.4178	9.7009	0.0097	0.2769	0.0381
29.2146	20.0192	9.6992	29.1108	20.1815	9.5868	0.1038	0.1623	0.1124
29.2026	20.0127	9.6915	29.1048	20.1705	9.5754	0.0978	0.1577	0.1161
29.1908	20.0215	9.6291	29.1117	20.1791	9.5298	0.0791	0.1576	0.0993
29.2277	20.0354	9.6192	29.1472	20.21	9.596	0.0804	0.1747	0.0232
29.1979	20.0091	9.5798	29.1182	20.1675	9.5621	0.0797	0.1584	0.0177
29.1938	20.0236	9.5829	29.0673	20.1464	9.6061	0.1265	0.1229	0.0232
29.1272	20.0797	9.6527	29.1186	20.1062	9.6145	0.0086	0.0265	0.0382
29.079	20.0741	9.6342	29.0442	20.073	9.6404	0.0348	0.0011	0.0062
28.9609	19.966	9.5279	28.9391	19.9726	9.5415	0.0218	0.0067	0.0136
28.783	19.7869	9.3618	28.7734	19.7908	9.3465	0.0095	0.004	0.0153
28.7125	19.7394	9.2927	28.7104	19.7416	9.3006	0.0021	0.0022	0.0079
28.6725	19.7003	9.2522	28.6688	19.6991	9.2595	0.0037	0.0012	0.0073
28.6465	19.6774	9.2231	28.6452	19.6769	9.2313	0.0013	5.24E-04	0.0082
28.6056	19.6376	9.183	28.6045	19.6352	9.19	0.0011	0.0024	0.007
28.4543	19.4835	9.0147	28.4518	19.4824	9.0177	0.0025	0.0011	0.003
28.338	19.3663	8.9006	28.3368	19.3669	8.9009	0.0012	5.78E-04	2.79E-04
28.2972	19.3258	8.8602	28.2976	19.3267	8.8607	4.27E-04	8.83E-04	5.34E-04
28.2511	19.2796	8.8141	28.2511	19.2794	8.8145	1.03E-05	1.51E-04	4.30E-04
28.1918	19.2202	8.7548	28.1918	19.2201	8.7552	4.56E-05	1.02E-04	3.94E-04
28.1483	19.1767	8.7113	28.1483	19.1766	8.7117	4.69E-05	1.02E-04	3.92E-04

Las diferencias entre los sistemas disminuyen y tienden a cero.

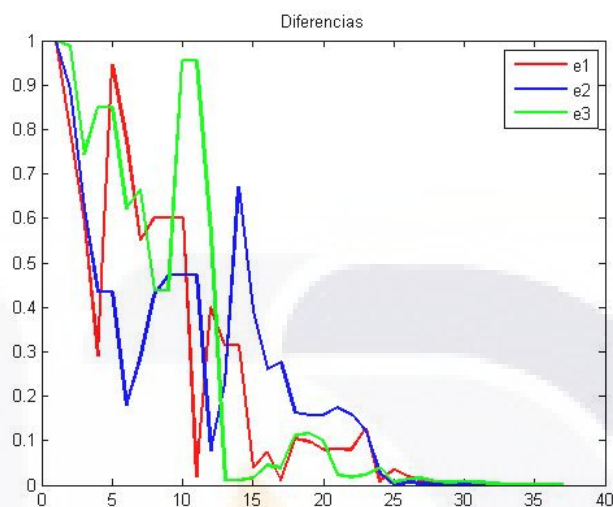


Figura 7.16: Diferencias.

Esto de por si ya es muy bueno, y a medida que aumentó el número de iteraciones se encontró mejores resultados sin la necesidad de tantas iteraciones, ahorrandonos el tiempo y espacio en memoria computacional.

A partir de la iteración número 80 halló buenas soluciones, siendo la mejor la número 1.

Cuadro 7.3: Tabla: Solución y evolución con 80 iteraciones.

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	e_1	e_2	e_3
30	20	10	31	21	11	1	1	1
29.8269	20.2379	10.0251	30.8148	20.4979	10.5685	0.9879	0.26	0.5435
29.6505	19.9347	9.4742	30.3262	19.9452	10.3816	0.6757	0.0105	0.9073
29.5958	19.6176	9.2539	30.1949	19.4531	10.0794	0.5991	0.1644	0.8255
29.2084	19.6176	9.2539	30.1949	19.4531	10.0794	0.9865	0.1644	0.8255
29.2084	19.1527	9.2539	30.1949	19.4531	10.0794	0.9865	0.3005	0.8255
29.497	19.2314	9.2575	30.346	19.2707	9.8015	0.8489	0.0392	0.544
29.5119	19.0588	9.3061	30.0379	19.2778	9.6637	0.526	0.219	0.3576
29.268	18.9351	8.9344	29.6843	18.7899	9.4382	0.4163	0.1452	0.5038
29.268	18.9351	8.4561	29.6843	18.7899	9.4382	0.4163	0.1452	0.9821
29.268	18.9351	8.4561	29.1103	18.7899	9.4382	0.1577	0.1452	0.9821
29.2136	18.679	8.6272	29.2773	18.8748	9.1978	0.0637	0.1959	0.5706
29.298	18.8661	8.9174	29.3561	18.971	9.5042	0.058	0.1049	0.5868
29.2943	18.7962	8.7674	29.4253	18.8073	9.2965	0.131	0.0111	0.5291
29.2943	18.7962	8.7674	29.4253	17.9073	9.2965	0.131	0.8889	0.5291
29.1159	18.2639	9.1983	29.1502	17.8076	9.3807	0.0343	0.4563	0.1824
29.0505	18.1997	9.1337	29.0891	17.7463	9.3162	0.0386	0.4534	0.1825
29.0236	18.1503	9.0962	29.0403	17.7348	9.2898	0.0167	0.4154	0.1936
28.9972	18.1178	9.0785	29.0075	17.6877	9.2419	0.0103	0.4301	0.1634
28.96	18.0715	9.075	28.991	17.6434	9.182	0.031	0.4281	0.1069
28.8895	18.0545	9.0305	28.887	17.636	9.1586	0.0025	0.4185	0.1281
28.6601	17.9218	8.9365	28.8542	17.7161	8.9295	0.194	0.2058	0.0071
28.6099	17.8135	9.0758	28.6805	17.5823	9.0843	0.0706	0.2312	0.0086
28.6424	17.7757	9.083	28.6733	17.6144	9.0666	0.0309	0.1614	0.0164
28.6654	17.7355	9.0632	28.7122	17.6465	9.0751	0.0468	0.089	0.0119
28.671	17.6941	9.1134	28.6467	17.6297	9.0906	0.0243	0.0645	0.0228
28.6857	17.6493	9.0578	28.6142	17.6353	9.0194	0.0715	0.0141	0.0385
28.6569	17.6054	9.0205	28.6438	17.6194	9.0372	0.0131	0.0141	0.0167
28.5944	17.5425	8.9594	28.5814	17.5572	8.9714	0.013	0.0147	0.012
28.5805	17.5253	8.9552	28.5713	17.5207	8.9653	0.0092	0.0046	0.0101
28.4141	17.3708	8.7964	28.4078	17.3633	8.7999	0.0063	0.0075	0.0035
28.2829	17.2397	8.6654	28.2767	17.2322	8.6688	0.0062	0.0075	0.0035
28.1953	17.1518	8.5814	28.1924	17.1467	8.5805	0.003	0.0051	9.67E-04
28.1156	17.0718	8.5018	28.1127	17.0669	8.5004	0.0029	0.0049	0.0013
28.0741	17.0305	8.4616	28.0726	17.0269	8.4593	0.0014	0.0036	0.0024
27.9396	16.8924	8.3247	27.9413	16.8928	8.3238	0.0017	4.77E-04	8.54E-04
27.84	16.7928	8.2242	27.8406	16.7925	8.2241	5.37E-04	3.01E-04	1.18E-04

Con un valor mínimo de 0,00071366 lo cual no difiere mucho de cuando se trabajó con 250 iteraciones.

```

>> main(30,20,10,31,21,11)
fc =
    2.0239
j =
    2
K =
    2
Caot_end =
    4.1721e-04
j =
    250
K =
    38
Caot_end =
    4.1721e-04
Tab_end =
    4.1721e-04
>> Prueba
exp_lya1 =
    -Inf
exp_lya2 =
    -0.2489
exp_lya3 =
    -0.2115
    
```

Figura 7.17: Resultado de la Simulación 80 iteraciones.

Con sus respectivas diferencias

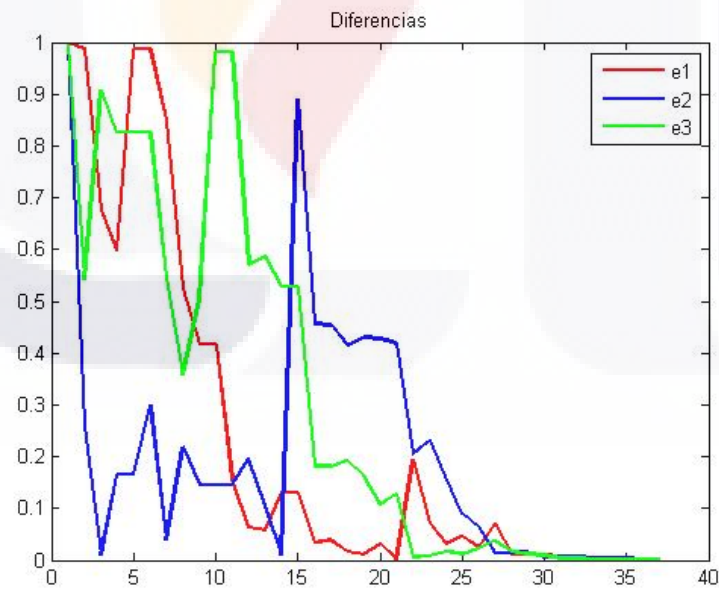


Figura 7.18: Diferencias.

Las sincronizaciones de y contra z se puede apreciar en la siguientes gráficas.

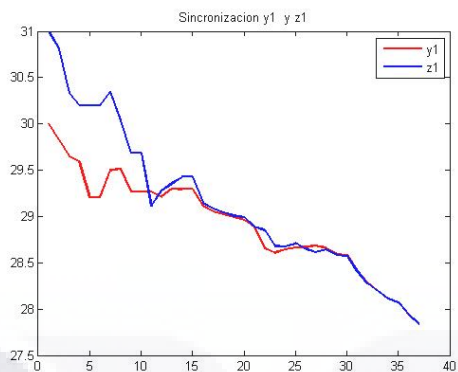


Figura 7.19: Sincronización y_1 y z_1

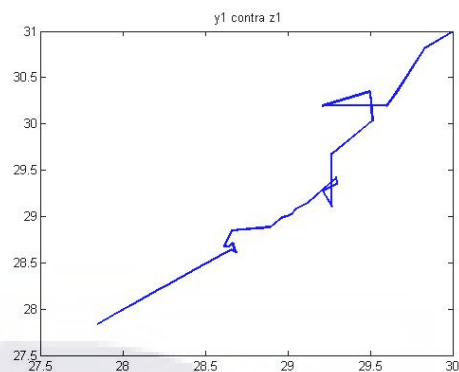


Figura 7.20: y_1 contra z_1

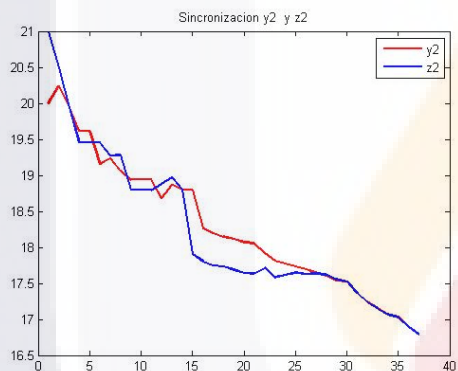


Figura 7.21: Sincronización y_2 y z_2

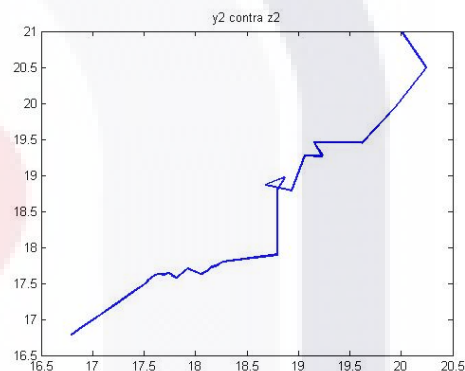


Figura 7.22: y_2 contra z_2

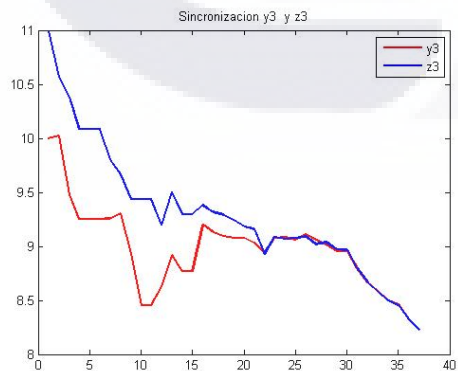


Figura 7.23: Sincronización y_3 y z_3

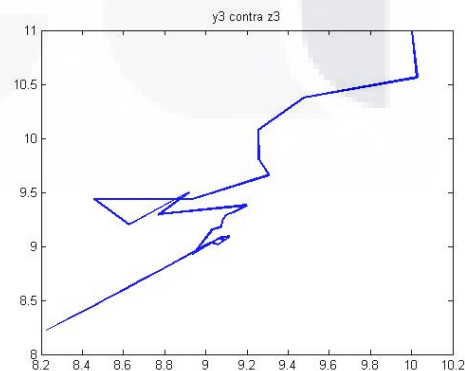


Figura 7.24: y_3 contra z_3

De lo cual, comparado con otros métodos resulta una mejora significativa en cuanto al tiempo y espacio computacional.

El mejor resultado encontrado fue con 160 iteraciones en la simulación número 3 (vease la Tabla 7.1). En ella se encontró un valor mínimo de 0,00039308.

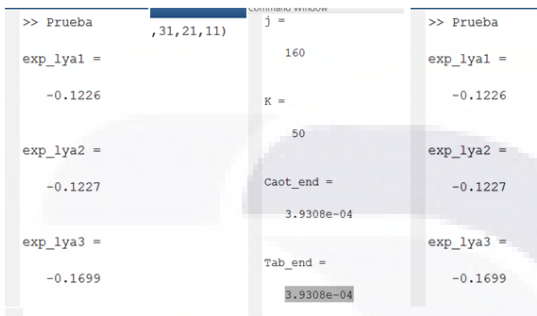


Figura 7.25: Resultado de la Simulación 160 iteraciones.

En donde las diferencias disminuyeron drásticamente.

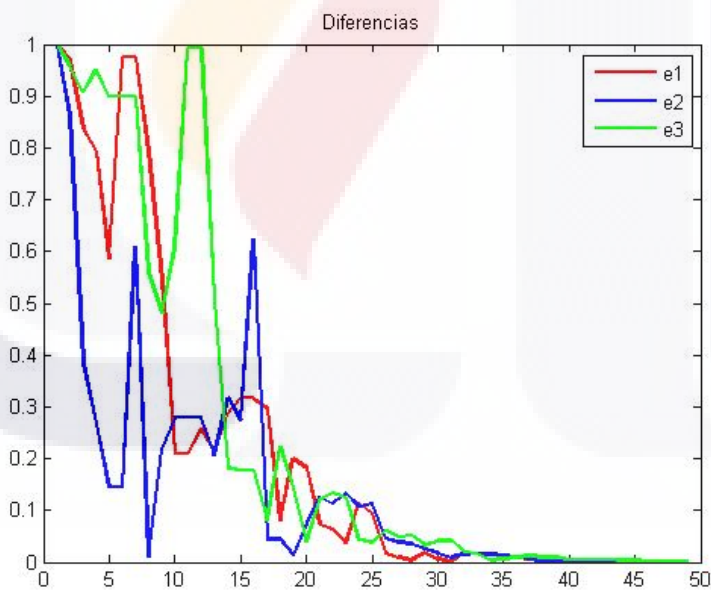


Figura 7.26: Diferencias.

Su solución numérica se puede apreciar en la siguiente tabla:

Cuadro 7.4: Tabla Solución y evolución con 160 iteraciones.

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	e_1	e_2	e_3
30	20	10	31	21	11	1	1	1
30.0287	20.0259	10.0006	30.7869	20.859	10.808	0.7581	0.8331	0.8074
30.3436	20.0596	10.1144	30.4839	20.5644	10.7062	0.1403	0.5048	0.5918
29.5336	20.0596	10.1144	30.4839	20.5644	10.7062	0.9503	0.5048	0.5918
29.5187	20.2811	10.3052	30.2866	20.3373	10.6055	0.7679	0.0562	0.3002
29.5187	19.3811	10.3052	30.2866	20.3373	10.6055	0.7679	0.9562	0.3002
29.7363	19.6449	10.6528	29.9595	20.1899	10.5622	0.2232	0.545	0.0906
29.915	20.0074	10.357	29.865	20.5616	10.2424	0.05	0.5542	0.1146
29.915	20.0074	9.457	29.865	20.5616	10.2424	0.05	0.5542	0.7854
29.915	20.0074	9.457	28.9902	20.5616	10.2424	0.9248	0.5542	0.7854
29.915	20.0074	9.457	28.9902	19.6168	10.2424	0.9248	0.3906	0.7854
29.7196	19.944	9.7924	29.3641	19.9192	10.2308	0.3555	0.0248	0.4384
29.6957	19.6007	9.8396	29.667	20.0144	9.9794	0.0287	0.4137	0.1398
29.8274	19.9863	9.7711	29.703	19.8738	9.7143	0.1244	0.1125	0.0568
29.6112	19.7825	9.6182	29.5406	19.6868	9.5222	0.0707	0.0957	0.0961
29.427	19.6048	9.4512	29.3723	19.5193	9.348	0.0547	0.0855	0.1031
29.2453	19.4241	9.2844	29.211	19.3546	9.1715	0.0343	0.0695	0.1129
29.1103	19.3457	9.141	29.0931	19.3061	9.0533	0.0172	0.0396	0.0877
29.031	19.2576	9.0613	29.0216	19.2295	8.9778	0.0094	0.0281	0.0835
28.7339	18.9607	8.7645	28.7247	18.9327	8.6809	0.0092	0.0279	0.0835
28.7302	18.8813	8.7711	28.6889	18.8852	8.7234	0.0413	0.004	0.0477
28.6918	18.8449	8.7333	28.6469	18.8499	8.6938	0.0448	0.0049	0.0395
28.5317	18.6864	8.5701	28.488	18.6885	8.5312	0.0436	0.0022	0.0389
28.4814	18.6604	8.567	28.4711	18.6433	8.5938	0.0102	0.0171	0.0269
28.4375	18.6204	8.5305	28.4336	18.602	8.549	0.0038	0.0184	0.0185
28.3403	18.5239	8.4343	28.3374	18.5051	8.4518	0.0029	0.0187	0.0175
28.3113	18.5014	8.4191	28.3232	18.4842	8.4264	0.0119	0.0172	0.0073
28.2734	18.4628	8.3796	28.2839	18.4561	8.3866	0.0105	0.0067	0.007
27.9284	18.1178	8.0358	27.9371	18.1098	8.0408	0.0086	0.008	0.005
27.9114	18.0832	8.0068	27.9197	18.0798	8.0113	0.0083	0.0034	0.0046
27.9187	18.0278	7.9606	27.9218	18.0237	7.9591	0.0031	0.0041	0.0015
27.9173	18.0263	7.959	27.9205	18.0224	7.9576	0.0031	0.0039	0.0014
27.8798	17.9889	7.9163	27.88	17.9852	7.9212	2.48E-04	0.0037	0.005
27.7881	17.8972	7.8247	27.7884	17.8935	7.8296	3.36E-04	0.0037	0.0049

Teniendo las siguientes gráficas de sincronización.

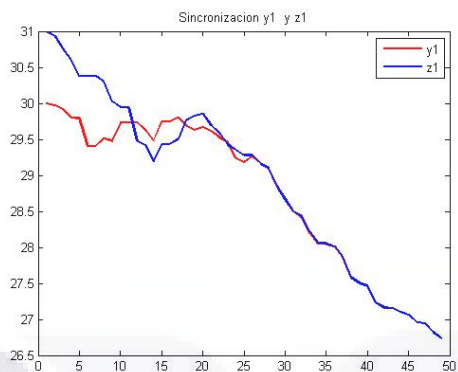


Figura 7.27: Sincronización y_1 y z_1

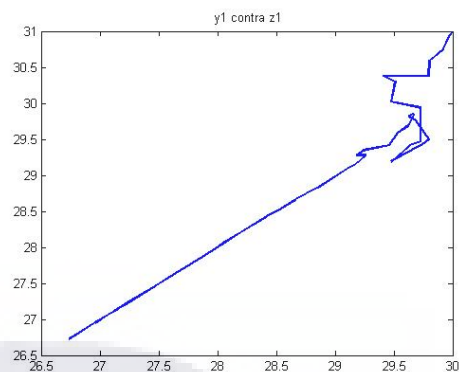


Figura 7.28: y_1 contra z_1

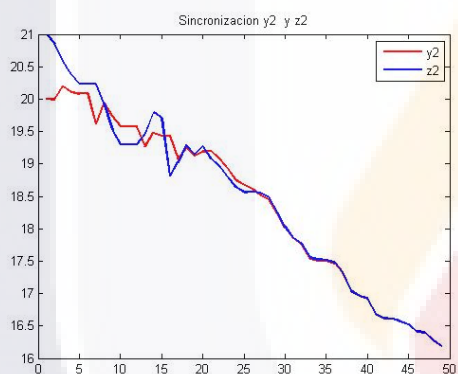


Figura 7.29: Sincronización y_2 y z_2

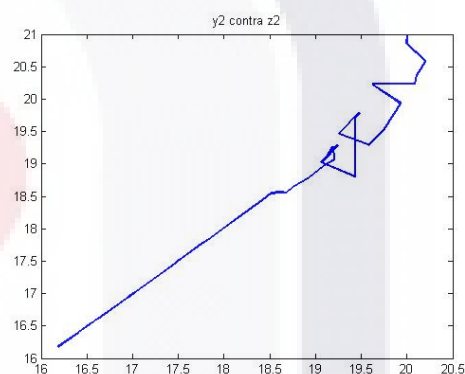


Figura 7.30: y_2 contra z_2

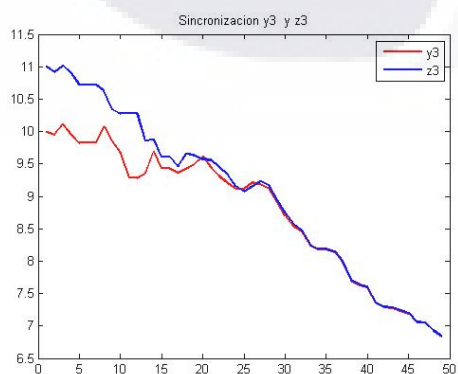


Figura 7.31: Sincronización y_3 y z_3

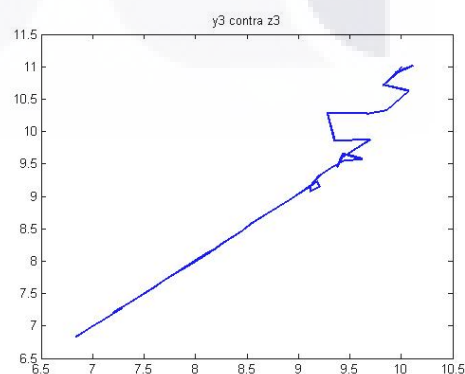


Figura 7.32: y_3 contra z_3

Otros ejemplos de sincronización se pueden encontrar en el Apéndice B de Experimentos.

Por otro lado realizando más simulaciones, en las cuales se altera el factor de acoplamiento g del modelo (7.7) con $g = 4$, se encontró los siguientes resultados:

Cuadro 7.5: Simulaciones Generales

Iteraciones	10	20	30	40	50	60	70	80
1	0.1623	0.3504	0.4058	0.0486	0.2722	0.2562	0.0116	0.0074
2	0.3299	0.0063	0.2241	0.2998	0.2915	0.2817	0.279	0.2898
3	0.3389	0.3481	0.1825	0.2813	0.2937	0.2253	0.402	0.3118
4	0.2897	0.0747	0.3412	0.3195	0.3726	0.0049	0.0187	0.0074
5	0.4165	0.4121	0.1365	0.204	0.3507	0.4003	0.143	0.3118
Iteraciones	90	100	110	120	130	140	150	160
1	0.3062	0.0051	0.0283	0.1902	0.0047	0.0101	0.2576	9.92E-04
2	0.233	0.4028	0.3796	0.2251	0.3018	0.2311	0.333	0.0016
3	0.1042	0.4003	0.1439	0.2506	0.2515	0.0781	0.2486	0.0037
4	0.1089	0.375	0.0114	0.1886	0.1882	0.2937	0.3129	0.1966
5	0.059	0.4011	0.3622	0.3349	0.3008	0.0028	0.1904	0.0025
Iteraciones	170	180	190	200	210	220	230	240
1	9.92E-04	0.0723	9.92E-04	0.02	0.1836	0.1962	0.2191	0.3274
2	0.0715	0.2418	0.0023	0.0034	0.0473	0.3854	0.1773	0.1876
3	0.0497	0.2485	0.182	0.2347	0.1856	0.1995	0.0043	0.2434
4	0.0015	0.3198	0.002	0.313	0.3587	5.23E-04	0.2139	0.3121
5	0.0041	0.2359	0.2051	0.1127	0.1956	9.80E-04	0.0011	0.0642
Iteraciones	250							
1	0.0026							
2	0.0038							
3	0.0065							
4	0.0036							
5	0.0835							

Como puede apreciarse en la tabla anterior, la sincronización se realizó a pesar del parámetro de acoplamiento. Obteniendo buenas resultados a partir de las 160 iteraciones. Con un valor de la función objetivo de 0,00099225.

```

>> main(30,20,10,31,21,11)
fc =
    2.0424
j =
    2
K =
    2
Caot_end =
    9.9225e-04
j =
    160
K =
    46
Caot_end =
    9.9225e-04
Tab_end =
    9.9225e-04
>> Prueba
exp_lya1 =
   -0.1819
exp_lya2 =
   -0.1605
exp_lya3 =
   -0.1774

```

Figura 7.33: Resultado de la Simulación 160 iteraciones con $g=4$.

El cual, si bien no es tan pequeño como cuando el parámetro g es igual a 8, además cumple todas las restricciones, incluyendo los exponentes de Lyapunov:

$$\lambda_1 = -0,1819$$

$$\lambda_2 = -0,1605$$

$$\lambda_3 = -0,1774$$

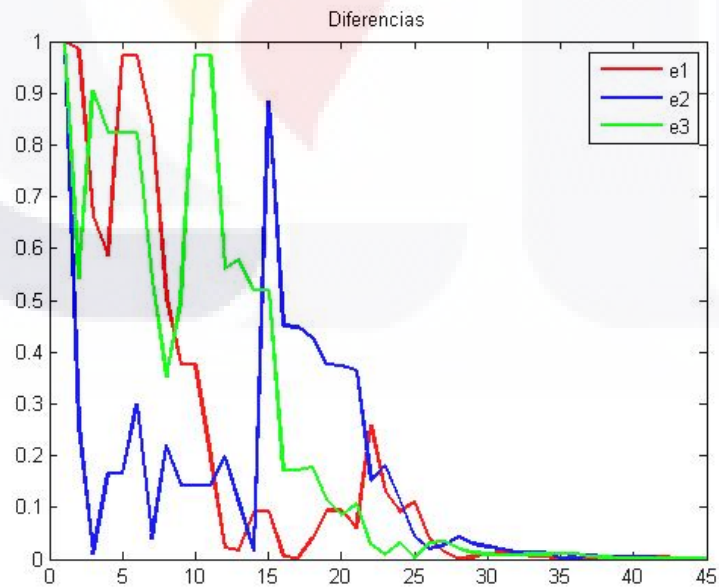


Figura 7.34: Diferencias con $g=4$.

Cuadro 7.6: Tabla: Solución y evolución con 160 iteraciones y $g=4$.

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	e_1	e_2	e_3
30	20	10	31	21	11	1	1	1
29.8286	20.2381	10.0256	30.8134	20.4981	10.5683	0.9848	0.26	0.5428
29.658	19.9354	9.4764	30.3201	19.9459	10.3806	0.6621	0.0105	0.9042
29.6036	19.6182	9.2562	30.1885	19.4538	10.0785	0.5849	0.1644	0.8223
29.2162	19.6182	9.2562	30.1885	19.4538	10.0785	0.9723	0.1644	0.8223
29.2162	19.1533	9.2562	30.1885	19.4538	10.0785	0.9723	0.3005	0.8223
29.5049	19.2321	9.2598	30.3394	19.2713	9.8005	0.8345	0.0392	0.5407
29.5232	19.0593	9.3091	30.028	19.2789	9.662	0.5048	0.2196	0.3529
29.2893	18.935	8.9397	29.665	18.7922	9.4349	0.3758	0.1428	0.4952
29.2893	18.935	8.4614	29.665	18.7922	9.4349	0.3758	0.1428	0.9735
29.2893	18.935	8.4614	29.0911	18.7922	9.4349	0.1982	0.1428	0.9735
29.2349	18.6789	8.6325	29.2581	18.8771	9.1945	0.0232	0.1982	0.562
29.3193	18.866	8.9227	29.3368	18.9734	9.5008	0.0176	0.1074	0.5781
29.3153	18.7949	8.7736	29.4062	18.8108	9.2921	0.0909	0.0159	0.5185
29.3153	18.7949	8.7736	29.4062	17.9108	9.2921	0.0909	0.8841	0.5185
29.1369	18.2625	9.2045	29.131	17.8111	9.3763	0.0058	0.4515	0.1718
29.0715	18.1984	9.1399	29.07	17.7498	9.3118	0.0015	0.4486	0.1719
29.1289	18.133	9.1737	29.1684	17.7072	9.3507	0.0395	0.4257	0.177
29.0828	18.0995	9.1938	29.1771	17.723	9.3089	0.0943	0.3765	0.1151
29.0591	18.059	9.1809	29.153	17.6848	9.2658	0.094	0.3743	0.0849
28.9885	18.0421	9.1363	29.049	17.6774	9.2424	0.0605	0.3647	0.1061
28.759	17.9096	9.0425	29.0164	17.7573	9.0133	0.2574	0.1522	0.0292
28.7101	17.8011	9.1783	28.8395	17.6217	9.1696	0.1294	0.1795	0.0086
28.7415	17.7652	9.1839	28.8333	17.6519	9.1534	0.0918	0.1133	0.0305
28.7627	17.7266	9.1618	28.8739	17.6824	9.1642	0.1111	0.0442	0.0024
28.7685	17.6853	9.2118	28.8082	17.6654	9.1799	0.0396	0.0199	0.0319
28.7858	17.6411	9.1487	28.7708	17.6683	9.114	0.015	0.0272	0.0348
28.737	17.5922	9.0986	28.7377	17.6347	9.0791	7.63E-04	0.0424	0.0194
28.7237	17.5718	9.0902	28.7275	17.6019	9.0777	0.0038	0.0301	0.0126
28.5489	17.3896	8.8939	28.5381	17.4139	8.9032	0.0108	0.0243	0.0093
28.3857	17.2356	8.7323	28.3714	17.256	8.7406	0.0143	0.0205	0.0083
28.1376	17.0063	8.4985	28.1483	17.0194	8.506	0.0107	0.0131	0.0074
28.0535	16.9201	8.4112	28.0604	16.9322	8.421	0.0069	0.0122	0.0098
27.9738	16.8401	8.3315	27.9807	16.8524	8.341	0.0069	0.0123	0.0095
27.911	16.8089	8.3343	27.9117	16.8062	8.3457	6.77E-04	0.0027	0.0114
27.8699	16.7684	8.294	27.8712	16.7654	8.3049	0.0013	0.0029	0.0109
27.8612	16.7333	8.2717	27.8635	16.7394	8.2666	0.0023	0.0061	0.0051
27.762	16.6334	8.1712	27.7623	16.6392	8.1671	2.81E-04	0.0058	0.0041
27.7217	16.5931	8.1304	27.7207	16.5984	8.1282	0.001	0.0053	0.0022
27.6515	16.5224	8.0595	27.6502	16.527	8.0572	0.0013	0.0047	0.0023
27.5012	16.3731	7.9098	27.4999	16.3767	7.9075	0.0014	0.0036	0.0022
27.4624	16.3333	7.8697	27.4593	16.3357	7.8687	0.003	0.0023	9.51E-04
27.4586	16.329	7.8636	27.4594	16.3272	7.8622	8.48E-04	0.0018	0.0014
27.4088	16.2793	7.8143	27.4101	16.2781	7.8128	0.0014	0.0012	0.0015
27.3691	16.2411	7.7735	27.3693	16.2403	7.7731	2.78E-04	7.30E-04	3.42E-04

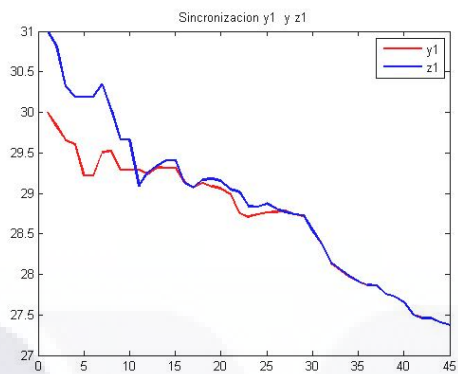


Figura 7.35: Sincronización y_1 y z_1 $g=4$

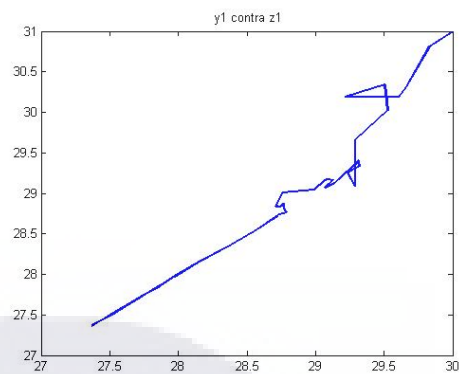


Figura 7.36: y_1 contra z_1

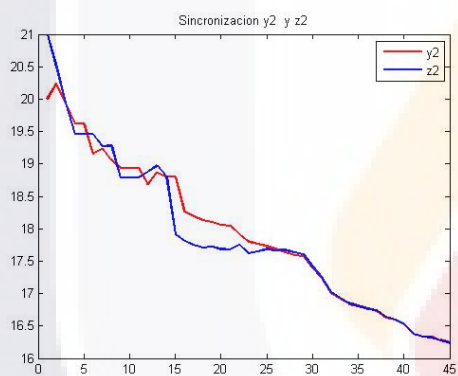


Figura 7.37: Sincronización y_2 y z_2

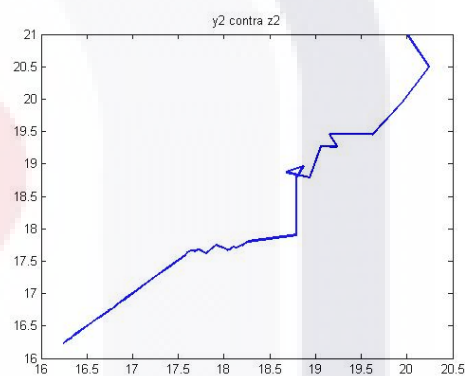


Figura 7.38: y_2 contra z_2

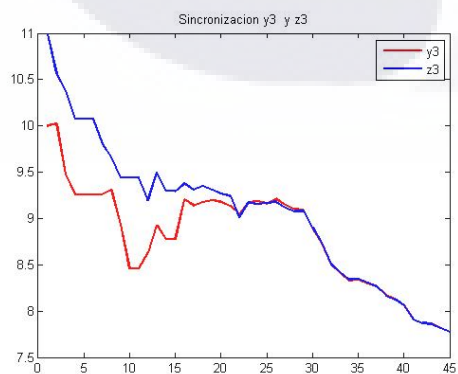


Figura 7.39: Sincronización y_3 y z_3

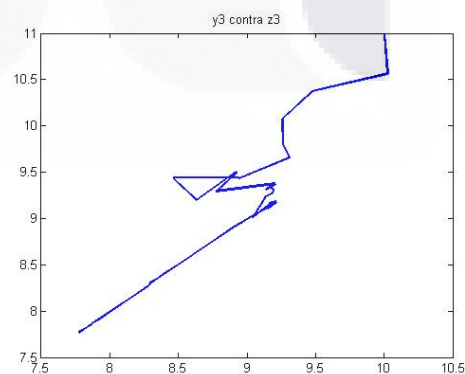


Figura 7.40: y_3 contra z_3

El mejor resultado se obtuvo en la iteración 220. Con un valor de 0,00052263 de la función objetivo, con sus respectivos exponentes de Lyapunov de:

$$\lambda_1 = -0,1955,$$

$$\lambda_2 = -0,1637,$$

$$\lambda_3 = -0,1715.$$

```
>> clear all
>> main(30,20,10,31,21,11)

fc =
    2.0424

j =
    2

K =
    2

j =
    220

K =
    49

Caot_end =
    5.2263e-04

Tab_end =
    5.2263e-04

>> Prueba

exp_lya1 =
    -0.1955

exp_lya2 =
    -0.1637

exp_lya3 =
    -0.1715
```

Figura 7.41: Resultado de la Simulación 220 iteraciones con $g=4$.

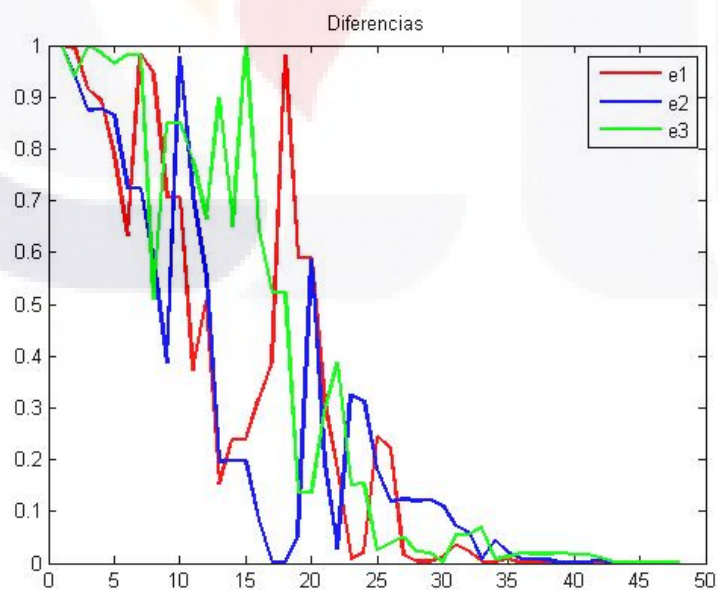


Figura 7.42: Diferencias con $g=4$.

Cuadro 7.7: Tabla: Solución y evolución con 220 iteraciones $g=4$.

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	e_1	e_2	e_3
30	20	10	31	21	11	1	1	1
29.9954	20.032	10.0134	30.9895	20.9781	10.9525	0.9942	0.9461	0.9391
30.0309	20.0655	9.9906	30.9463	20.9408	10.9903	0.9153	0.8753	0.9997
30.0191	20.0637	9.99	30.9118	20.9404	10.975	0.8927	0.8767	0.985
30.0276	20.0435	10.0455	30.82	20.9103	11.0095	0.7924	0.8667	0.964
30.0884	20.0952	10.0218	30.7224	20.8202	11.0029	0.6341	0.725	0.9811
29.7397	20.0952	10.0218	30.7224	20.8202	11.0029	0.9827	0.725	0.9811
29.4452	20.2036	10.2955	30.3892	20.7897	10.8063	0.944	0.5861	0.5108
29.4576	20.2265	10.1077	30.1623	20.6141	10.9578	0.7047	0.3876	0.8501
29.4576	19.636	10.1077	30.1623	20.6141	10.9578	0.7047	0.9781	0.8501
29.5814	19.6833	10.1511	29.9554	20.3966	10.9303	0.3739	0.7133	0.7792
29.5298	19.7938	10.2544	30.0365	20.3452	10.9204	0.5067	0.5514	0.6661
29.5933	19.8591	10.0225	29.7462	20.0556	10.9212	0.153	0.1965	0.8987
29.7088	19.6753	10.1758	29.4709	19.8736	10.8266	0.2379	0.1983	0.6508
29.7088	19.6753	9.8272	29.4709	19.8736	10.8266	0.2379	0.1983	0.9994
29.7359	19.4315	10.0714	29.4198	19.514	10.7154	0.3162	0.0825	0.644
29.5135	19.2885	9.9488	29.1219	19.2906	10.4703	0.3916	0.0022	0.5215
29.5135	19.2885	9.9488	28.5315	19.2906	10.4703	0.9821	0.0022	0.5215
29.3565	19.3882	10.141	28.7687	19.333	10.006	0.5879	0.0551	0.1351
29.3565	19.3882	10.141	28.7687	18.8016	10.006	0.5879	0.5866	0.1351
29.15	19.1596	10.1691	28.8377	18.9654	9.8791	0.3123	0.1941	0.29
29.2169	18.9776	10.2608	29.0359	19.0068	9.874	0.1811	0.0292	0.3868
28.9304	19.3131	10.1121	28.9404	18.9885	9.9615	0.01	0.3246	0.1507
28.7541	19.1395	9.9445	28.7733	18.8255	9.7895	0.0192	0.314	0.1549
28.8861	19.0153	9.8918	28.6418	18.8324	9.8662	0.2443	0.1829	0.0256
28.6293	18.7091	9.6143	28.4073	18.5897	9.5761	0.222	0.1195	0.0382
28.5207	18.5465	9.3423	28.5042	18.4232	9.3933	0.0165	0.1233	0.051
28.4445	18.4779	9.2883	28.4413	18.3567	9.3115	0.0031	0.1211	0.0233
28.3803	18.419	9.2301	28.3837	18.2975	9.2492	0.0033	0.1215	0.019
28.3185	18.3556	9.1785	28.3293	18.2433	9.1812	0.0107	0.1123	0.0027
28.3012	18.3251	9.1729	28.2648	18.253	9.1177	0.0364	0.0721	0.0552
28.2588	18.2705	9.177	28.2348	18.2118	9.1217	0.024	0.0587	0.0554
28.242	18.2046	9.203	28.2397	18.1963	9.1342	0.0024	0.0084	0.0689
28.2133	18.2011	9.1586	28.2161	18.1565	9.1504	0.0028	0.0446	0.0082
28.0417	18.0217	8.9783	28.0494	18.0017	8.9904	0.0077	0.02	0.0122
28.0077	17.9578	8.9104	28.0086	17.9658	8.9298	9.77E-04	0.008	0.0194
27.8556	17.8073	8.7587	27.8575	17.8149	8.7772	0.0019	0.0075	0.0185
27.6958	17.6478	8.5983	27.6968	17.6539	8.6171	0.001	0.0061	0.0188
27.5874	17.5403	8.4845	27.5864	17.5406	8.5036	9.47E-04	3.64E-04	0.0191
27.3145	17.2679	8.2122	27.3118	17.2668	8.2292	0.0027	0.0011	0.017
27.2736	17.2278	8.172	27.2713	17.2257	8.1887	0.0023	0.0021	0.0168
27.2793	17.2276	8.1845	27.2759	17.2339	8.1742	0.0034	0.0063	0.0103
27.2025	17.1584	8.1066	27.2044	17.1582	8.1049	0.0019	2.35E-04	0.0017
27.1142	17.0688	8.0163	27.1153	17.0698	8.018	0.0011	0.001	0.0016
27.0554	17.0115	7.9592	27.0563	17.0107	7.9605	8.77E-04	7.72E-04	0.0013
27.0149	16.9713	7.9204	27.0157	16.9706	7.9199	7.46E-04	7.62E-04	4.40E-04
27.0115	16.9675	7.9167	27.0115	16.9672	7.9171	3.43E-05	3.47E-04	3.81E-04
26.9096	16.8657	7.8149	26.9097	16.8653	7.8151	8.40E-05	3.86E-04	2.66E-04

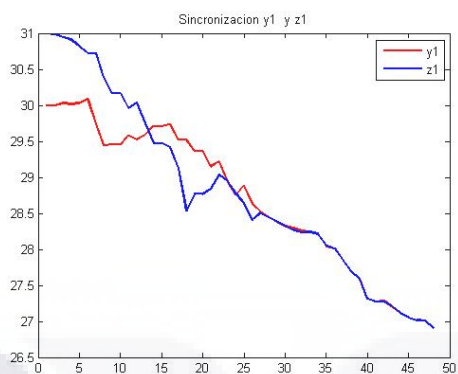


Figura 7.43: Sincronización y_1 y z_1 $g=4$

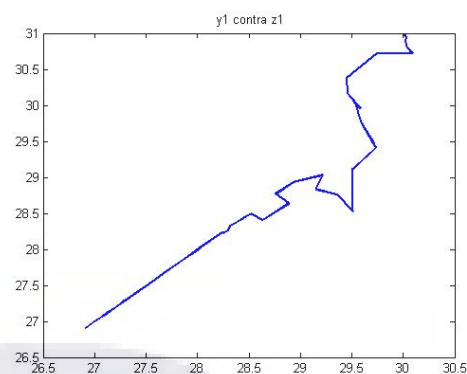


Figura 7.44: y_1 contra z_1

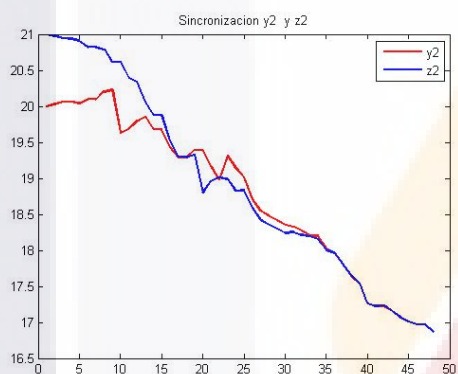


Figura 7.45: Sincronización y_2 y z_2

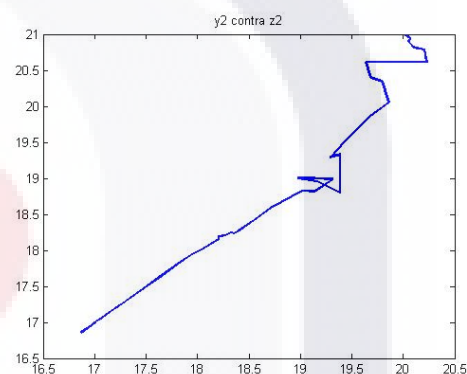


Figura 7.46: y_2 contra z_2

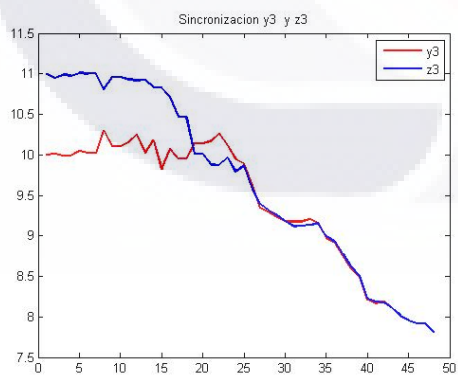


Figura 7.47: Sincronización y_3 y z_3

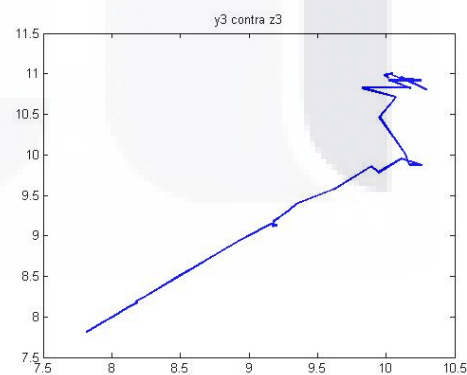


Figura 7.48: y_3 contra z_3

Estas sincronizaciones fueron posibles debido al modelo (7.7), ya que las restricciones 4 y 5 obligan a la solución a depender del parámetro g de acoplamiento.

Más simulaciones se pueden encontrar en el Apéndice C.



7.2. Conclusiones Finales

7.2.1. Resumen de la Investigación

El objetivo de este estudio es la Sincronización Generalizada de Sistemas Dinámicos Caótico con la ayuda del Algoritmo de la Búsqueda Tabú. Los pasos que se siguieron para realizar la investigación fueron los siguientes:

- Se estudió brevemente los sistemas dinámicos, iniciando con los lineales para después pasar a los sistemas dinámicos caóticos y su sincronización.
- Siguiendo la línea de estudio anterior se profundizó en la sincronización generalizada, incluyendo todas sus características y además de estudiar la estabilidad del sistema el cual quedó estrechamente ligado a los Exponentes de Lyapunov.
- Los algoritmos escogidos para ser tratados en esta investigación fueron la Búsqueda Tabú, Búsqueda Caótica y el Recocido Simulado. Se decidió hacer un híbrido con estos tres, tomando como base a la Búsqueda Tabú. Esta idea surgió inicialmente de la tutoría de la tesis y fue apoyada por trabajos anteriores realizados por otras personas.
- Se diseñó la implementación del Algoritmo, en el cual podíamos variar el número de iteraciones.
- Luego de unas experimentos iniciales, se hizo un ajuste al parámetro de la Temperatura del Recocido Simulado, este ajuste se hizo de forma manual haciendo pequeñas corridas de prueba.
- Se planteó una estrategia para realizar los experimentos de forma ordenada y consecutiva. La idea principal de este paso fue tener herramientas con las cuales se pudiese comparar realmente las soluciones obtenidas dependiendo del número de iteraciones. Además de pruebas en forma de gráficas y tablas.

7.2.2. Contribuciones de esta Investigación

A continuación listamos los aportes realizados por esta investigación:

- Introducción del método híbrido, entre los algoritmos Búsqueda Tabú, Búsqueda Caótica y el Recocido Simulado, para realizar la Sincronización de Sistemas Dinámicos Caóticos Rossler y Lorenz. Además de un nuevo método para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales.
- Tomando en cuenta los resultados obtenidos, consideramos que el modelo propuesto obtuvo buenos resultados. Ya que jamás se había abordado la Sincronización de sistemas dinámicos caóticos con el enfoque de algoritmos Metaheurísticos.
- En comparación entre Runge-Kutta 4 estudiado para las pruebas y el método híbrido desarrollado se demostró experimentalmente obtener una sincronización en menor tiempo y menor número de pasos.

7.3. Trabajo Futuro

El estudio presentado, debido a su enfoque y ámbito limitado, deja en el aire varias interrogantes y da cabida a varias posibilidades a estudiar. Entre éstas tenemos:

- La posibilidad de usar el algoritmo y extrapolarlo a sistemas discretos y otros modelos continuos.
- Utilizar el algoritmo para atacar el problema de la supresión de caos, el cual es un problema estrechamente ligado a la sincronización.
- Debido a que se encontró sincronización a pesar del parámetro de acoplamiento, se puede estudiar mas detenidamente este parámetro y trabajar con otros tipos de sincronización más complicados.

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

Apéndice A

Códigos

En esta sección se encuentran los códigos que se utilizaron para realizar los experimentos. El software utilizado MATLAB R2013a. Siendo en orden de aparición:

- Programa General (main.m).
- Búsqueda Tabú (Bus_Tabu.m).
- Búsqueda Caótica (Bus_Caotica.m).
- Recocido Simulado (Rec_Sim.m).

Listing A.1: Programa General

```

1 function main(y10,y20,y30,z10,z20,z30)
2 K=1;
3 T=.8;
4 Ep=.0001;
5 Cascaron_datos(y10,y20,y30,z10,z20,z30);
6 [datos_y, datos_z,datos_e]=Leer_datos;
7 fc=funcion_min(datos_y(K,:),datos_z(K,:))
8 M=zeros(1,6);
9 V0=zeros(1,6);
10 H=zeros(1,6);
11 h=rand;
12 j=1;
13 while (j<110)
14     j=j+1
15     K=K+1
16     Vec1=(16*(datos_e(K-1,2)-datos_e(K-1,1)))/datos_e(K-1,1)
17     -1/(datos_e(K-1,1)^2);
18     Vec2=(16*(datos_e(K-1,2)-datos_e(K-1,1)))/datos_e(K-1,1)
19     +1/(datos_e(K-1,1)^2);
20     [datos_y,datos_z,fc,K]=Bus_Caotica(datos_y,datos_z,K-1,Ep,fc);
21     fc1=fc;
22     Caot_end=fc
23     if ((fc<Ep) & (Vec1<8) & (Vec2>8))
24         K=1001;
25         j=1000;
26     else
27         [datos_y,datos_z,fc,K,M,H,T]=...
28         Bus_Tabu(datos_y,datos_z,K,Ep,fc,T,M,V0,H,h);
29         Tab_end=fc
30     end
31     datos_e=abs(datos_y-datos_z);
32 end
33 Actualizar_datos(datos_y,datos_z,datos_e);

```

Listing A.2: Búsqueda Tabú

```

1 function [y,z,fc,K,M,H,T]=Bus_Tabu(datos_y,datos_z,K,Ep,fc,T,M,V0,H,h)
2     h=.9;
3     V=eye(6);           %Matriz_Vecindad
4     kint=0;
5     ft=fc;
6     while(kint<10) %|fc<Ep)    %Mas iteraciones se cicla?
7         fc;
8         kint=kint+1;
9         y1=datos_y(K,:);
10        z1=datos_z(K,:);
11        ind1=1;
12        ind2=1;
13        sig1=0;
14        sig2=0; %positivo
15        fmalo=fc;
16        j=1;
17        faux=10;
18        while (j<6)
19            if (M(j)==0)
20                [ft1,sig1]=Evaluar(y1,z1,V0,V(j,j),H(j),h,sig1);
21                ft1;
22                if (ft1<faux)
23                    faux=ft1;
24                    ind1=j;
25                    sig1=sig1;
26                else
27                    ind1=ind1;
28                    sig1=sig1;
29                end
30                [ind2,sig2,fmalo]=...
31                Evaluar_peor(y1,z1,V0,V(j,j),H(j),h,ind2,j,sig2,fmalo,ind1);
32            else
33                if (M(j)<0)
34                    M(j)=-(abs(M(j))-1);
35                else
36                    M(j)=M(j)-1;
37                end
38            end
39            j=j+1;

```

```

40     end
41     lya=...
42     est_lya(y1+h*(V(ind1,1:3)*sig1),z1+h*(V(ind1,4:6)*sig1),y1,z1);
43     if ((lya==3)&(faux<fc))
44         fc=faux;
45         datos_y(K+1,:)=y1+h*(V(ind1,1:3)*sig1);
46         datos_z(K+1,:)=z1+h*(V(ind1,4:6)*sig1);
47         V0=V0+V(ind1,:);
48         K=K+1;
49         h=1.2*h;           %
50         M(ind2)=sig2*3;    %Malo
51         M(ind1)=sig1*5;    %Mejor
52         H(ind1)=H(ind1)+1;
53     else
54         [Si,T]=Rec_Sim(faux,fc,T);
55         Si;
56         if(lya==3)
57             Si=0;
58         end
59         if(Si==1) %Se acepto la sol mala
60             fc=faux;
61             datos_y(K+1,:)=y1+h*(V(ind1,1:3)*sig1);
62             datos_z(K+1,:)=z1+h*(V(ind1,4:6)*sig1);
63             V0=V0+V(ind1,:);
64             K=K+1;
65             h=.9*h         %
66             M(ind2)=sig2*3; %Malo
67             M(ind1)=sig1*5; %Mejor
68             H(ind1)=H(ind1)+1;
69         else
70             h=0.9*h;       %
71             if h<0.1
72                 h=0.1;
73             end
74         end
75     end
76 end
77 y=datos_y;
78 z=datos_z;

```

Listing A.3: Caótica

```
1 function [y,z,fc,K]=Bus_Caotica(datos_y,datos_z,K,Ep,fc)
2 kint=0;
3 lam=rand;
4 gm=rand;
5 bet=rand;
6 zdir=ones(1,6);
7 while (kint<10)
8     kint=kint+1;
9     [gm,bet]=Ga_bet(gm,bet);
10    datos_y(K,:);
11    [delx,zk]=Deltax(datos_y(K,:),datos_z(K,:),gm,bet,zdir,lam);
12    ft=funcion_min(datos_y(K,:)-delx(1:3),datos_z(K,:)-delx(4:6));
13    lya=...
14    est_lya(datos_y(K,:)-delx(1:3),datos_z(K,:)-delx(4:6),...
15    datos_y(K,:),datos_z(K,:));
16    if ((ft<fc)&(lya==3))
17        datos_y(K+1,:)=datos_y(K,:)-delx(1:3);
18        datos_z(K+1,:)=datos_z(K,:)-delx(4:6);
19        zdir=zk;
20        fc=ft;
21        lam=1.2*lam;
22        K=K+1;
23    else
24        lam=0.9*lam;
25        if lam<0.1
26            lam=0.1;
27        end
28    end
29 end
30 y=datos_y;
31 z=datos_z;
```


Listing A.4: Recocido Simulado

```
1 function [Si,T]=Rec_Sim(sol_cand,fant,T)
2 Dif=abs(sol_cand-fant);
3 if(Dif>0.1)
4     Si=0;
5 else
6     Prob=exp(-Dif/T);
7     R=rand;
8     if(R<Prob)
9         Si=0;
10        T=0.8*T;
11    else
12        Si=0;
13    end
14 end
```

Apéndice B

Experimentos

En esta sección se presentan más experimentos.

Experimento número 5 con 250 iteraciones con 0,00043915 de valor final en la función objetivo.

```

>> main(30,20,10,31,21,11)
fc =
    2.0239

j =
    2

K =
    2

j =
    250

K =
    47

Caot_end =
    4.3915e-04

Tab_end =
    4.3915e-04

>> Prueba
exp_lya1 =
    -0.1763

exp_lya2 =
    -0.1852

exp_lya3 =
    -0.1852
    
```

Figura B.1: Experimento 5 con 250 iteraciones.

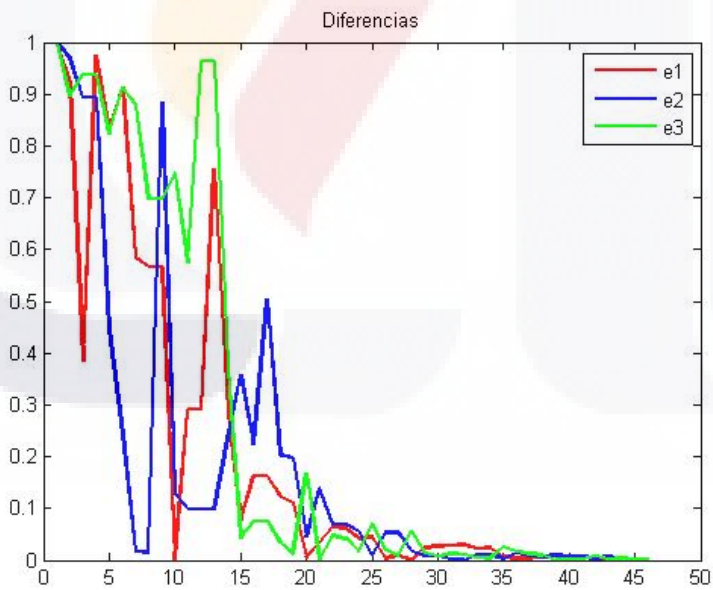


Figura B.2: Diferencias con 250 iteraciones.

Cuadro B.1: Tabla Solución y evolución con 250 iteraciones.

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	e_1	e_2	e_3
30	20	10	31	21	11	1	1	1
29.9421	19.8103	10.1233	30.865	20.7806	11.0209	0.9228	0.9703	0.8977
30.1313	19.6452	10.0293	30.5164	20.5372	10.9669	0.3851	0.892	0.9377
29.5408	19.6452	10.0293	30.5164	20.5372	10.9669	0.9756	0.892	0.9377
29.6533	19.8689	10.1383	30.4812	20.3151	10.9624	0.8279	0.4462	0.8241
29.4797	19.8579	9.9009	30.3942	20.1019	10.8145	0.9145	0.2439	0.9136
29.5627	19.8858	9.9462	30.1472	19.8697	10.8261	0.5845	0.0161	0.8799
29.8759	19.6098	10.2142	30.4423	19.5946	10.9109	0.5664	0.0152	0.6967
29.8759	18.7098	10.2142	30.4423	19.5946	10.9109	0.5664	0.8848	0.6967
30.2998	19.1362	10.2555	30.2993	19.2644	11.0034	5.51E-04	0.1282	0.7478
30.4095	19.2102	10.3392	30.1176	19.1127	10.9137	0.292	0.0974	0.5745
30.4095	19.2102	9.9517	30.1176	19.1127	10.9137	0.292	0.0974	0.962
30.4095	19.2102	9.9517	29.6527	19.1127	10.9137	0.7569	0.0974	0.962
30.1768	18.8844	10.1767	29.8928	19.1207	10.5498	0.284	0.2363	0.3731
29.7817	18.7322	10.3868	29.8592	19.0906	10.3437	0.0775	0.3584	0.0431
29.8236	18.598	10.0868	29.6622	18.8221	10.1618	0.1615	0.2242	0.075
29.8236	18.598	10.0868	29.6622	18.0931	10.1618	0.1615	0.5048	0.075
29.8414	18.3444	9.9032	29.7185	18.1413	9.9375	0.123	0.2032	0.0342
29.6714	18.1857	9.7543	29.5593	17.9881	9.7671	0.1121	0.1976	0.0128
29.5823	18.08	9.7694	29.5874	18.1258	9.6019	0.0051	0.0458	0.1675
29.6424	17.9098	9.6695	29.6093	18.0494	9.6703	0.033	0.1397	7.94E-04
29.5049	17.7961	9.5808	29.4399	17.866	9.5338	0.0649	0.07	0.047
29.3496	17.642	9.4248	29.2876	17.7116	9.3826	0.062	0.0696	0.0422
29.091	17.4003	9.1616	29.049	17.4562	9.1444	0.042	0.0559	0.0171
29.1069	17.3771	9.1506	29.0625	17.3861	9.0791	0.0444	0.009	0.0715
28.9785	17.3235	9.0357	28.9742	17.2696	9.0556	0.0044	0.0539	0.0199
28.8929	17.2413	8.9621	28.9018	17.1878	8.971	0.0089	0.0535	0.0089
28.8754	17.2076	8.915	28.876	17.1897	8.9715	5.94E-04	0.0179	0.0566
28.8537	17.1966	8.9401	28.8785	17.1892	8.9259	0.0248	0.0074	0.0142
28.6457	16.9903	8.7312	28.6729	16.9824	8.7228	0.0272	0.0079	0.0084
28.6456	16.9718	8.7167	28.6747	16.969	8.7039	0.0291	0.0028	0.0128
28.6046	16.9308	8.6757	28.6341	16.9297	8.6642	0.0295	0.0011	0.0115
28.5675	16.8996	8.6325	28.5896	16.8883	8.627	0.0221	0.0113	0.0056
28.4086	16.7393	8.4732	28.4324	16.7295	8.4694	0.0239	0.0099	0.0037
28.3311	16.6417	8.4036	28.3371	16.6456	8.3786	0.006	0.0039	0.0251
28.0885	16.3934	8.1559	28.0921	16.4079	8.1391	0.0036	0.0145	0.0168
27.8713	16.1794	7.9261	27.8746	16.1874	7.9135	0.0033	0.008	0.0126
27.7245	16.0317	7.7786	27.7169	16.0383	7.7684	0.0077	0.0066	0.0102
27.533	15.8441	7.5853	27.5249	15.8535	7.5856	0.008	0.0093	3.14E-04
27.253	15.5674	7.3048	27.2447	15.5743	7.307	0.0083	0.007	0.0022
27.1666	15.4815	7.2183	27.1587	15.4878	7.2211	0.0079	0.0063	0.0027
27.1302	15.4445	7.1896	27.1278	15.4481	7.1814	0.0023	0.0036	0.0082
27.0923	15.4082	7.1464	27.0917	15.4145	7.1438	6.30E-04	0.0063	0.0026
27.0275	15.3465	7.0767	27.0242	15.3462	7.081	0.0032	2.78E-04	0.0043
26.972	15.2925	7.0231	26.97	15.2908	7.025	0.0021	0.0017	0.0019
26.9311	15.2515	6.9843	26.9314	15.2513	6.9845	2.49E-04	2.16E-04	1.84E-04

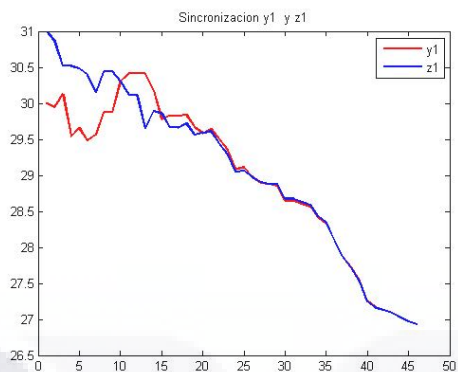


Figura B.3: Sincronización y_1 y z_1

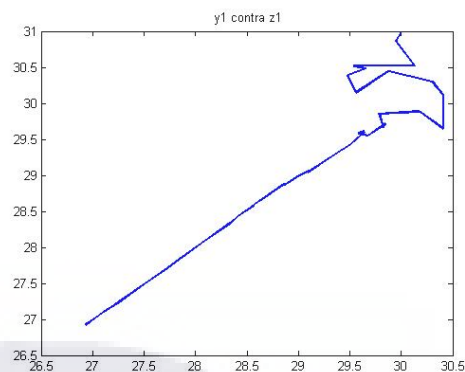


Figura B.4: y_1 contra z_1

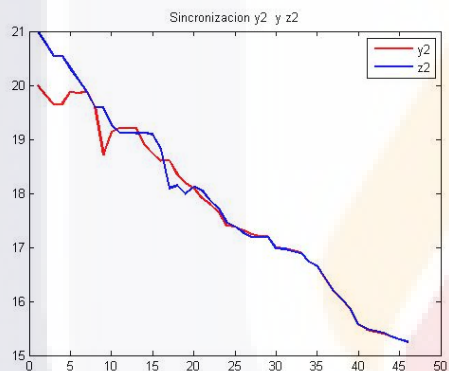


Figura B.5: Sincronización y_2 y z_2

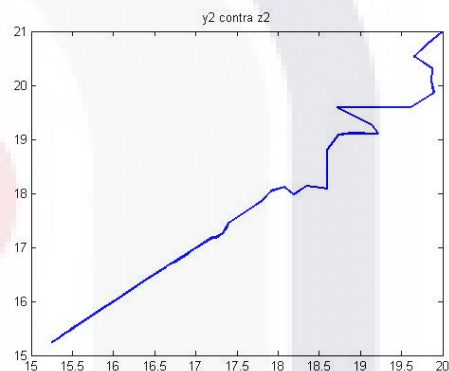


Figura B.6: y_2 contra z_2

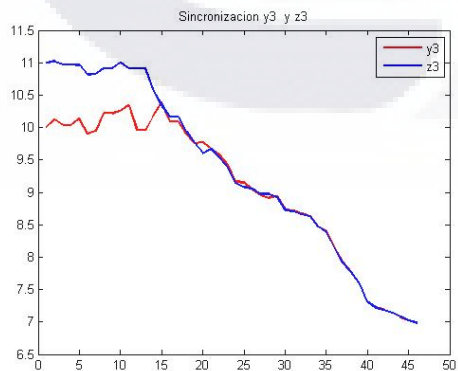


Figura B.7: Sincronización y_3 y z_3

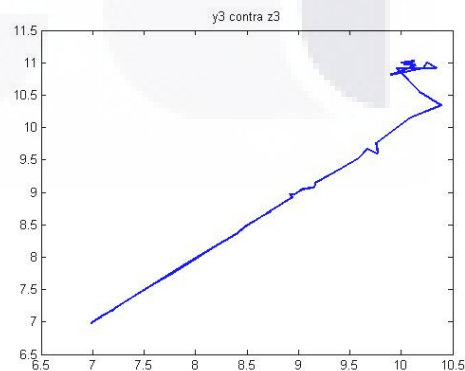


Figura B.8: y_3 contra z_3

Experimento número 4 con 240 iteraciones con 0,00051624 de valor final en la función objetivo.

```
>> main(30,20,10,31,21,11)
fc =
    2.0239
j =
    2
K =
    2
j =
    250
K =
    47
Caot_end =
    4.3915e-04
Tab_end =
    4.3915e-04
>> Prueba
exp_lya1 =
    -0.1763
exp_lya2 =
    -0.1852
exp_lya3 =
    -0.1852
```

Figura B.9: Experimento 4 con 240 iteraciones.

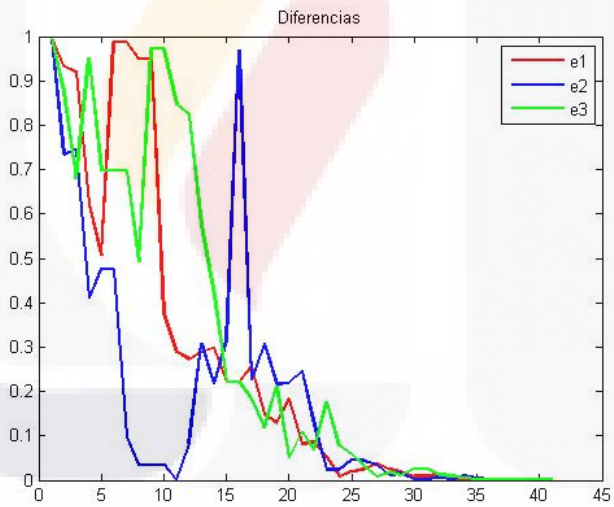


Figura B.10: Diferencias con 240 iteraciones.

Cuadro B.2: Tabla Solución y evolución con 240 iteraciones.

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	e_1	e_2	e_3
30	20	10	31	21	11	1	1	1
30.2308	20.2516	9.9793	31.1647	20.9856	10.8549	0.9339	0.734	0.8756
29.9744	20.1858	9.8644	30.8957	20.9302	10.5454	0.9213	0.7444	0.681
29.8679	20.0944	9.4721	30.4889	20.504	10.4247	0.621	0.4096	0.9527
29.8407	20.4866	9.8399	30.3488	20.0107	10.5373	0.5082	0.4759	0.6974
29.3624	20.4866	9.8399	30.3488	20.0107	10.5373	0.9865	0.4759	0.6974
29.3624	19.9127	9.8399	30.3488	20.0107	10.5373	0.9865	0.098	0.6974
29.5029	19.7442	10.0171	30.4522	19.7785	10.5111	0.9494	0.0343	0.4941
29.5029	19.7442	9.5388	30.4522	19.7785	10.5111	0.9494	0.0343	0.9724
29.5029	19.7442	9.5388	29.8783	19.7785	10.5111	0.3754	0.0343	0.9724
29.4016	19.6685	9.5769	29.6909	19.6683	10.4239	0.2893	1.97E-04	0.847
29.2611	19.5631	9.4455	29.5338	19.4795	10.27	0.2727	0.0836	0.8246
29.2248	19.3409	9.5965	29.5131	19.6485	10.1717	0.2883	0.3076	0.5752
29.0267	19.3642	9.6151	29.3264	19.5811	10.0327	0.2996	0.2169	0.4176
28.8474	19.5474	9.563	29.0681	19.2333	9.7838	0.2207	0.3142	0.2208
28.8474	19.5474	9.563	29.0681	18.5772	9.7838	0.2207	0.9703	0.2208
29.3179	19.1889	9.7456	29.062	18.9619	9.9296	0.2559	0.2271	0.1841
29.0684	18.8931	10.1563	29.218	18.5847	10.2759	0.1495	0.3084	0.1196
29.0474	18.8266	10.087	29.1767	18.6099	10.299	0.1292	0.2167	0.212
28.9894	18.8233	10.1851	29.1732	18.6046	10.2351	0.1838	0.2187	0.0501
29.0554	18.8744	10.177	29.1377	18.6282	10.2858	0.0823	0.2462	0.1087
29.1019	18.6658	10.0901	29.0169	18.7904	10.1602	0.085	0.1246	0.0701
29.0917	18.7542	10.0684	29.0405	18.7294	9.8916	0.0512	0.0248	0.1768
29.2915	18.83	10.2461	29.2838	18.8064	10.1678	0.0077	0.0236	0.0783
29.2358	18.7475	10.1625	29.2157	18.7932	10.1046	0.0201	0.0457	0.0579
29.1791	18.6915	10.0887	29.1547	18.7357	10.0562	0.0245	0.0442	0.0325
29.2254	18.6686	10.0183	29.1883	18.6344	10.0261	0.037	0.0342	0.0078
29.1729	18.6027	9.9649	29.1483	18.5906	9.9471	0.0246	0.0122	0.0179
29.1316	18.5664	9.9223	29.1126	18.5515	9.9108	0.0191	0.0149	0.0115
28.9988	18.4285	9.7975	28.9899	18.43	9.7715	0.0088	0.0015	0.026
28.8466	18.2763	9.6453	28.8378	18.2778	9.6193	0.0088	0.0016	0.026
28.6759	18.1074	9.4658	28.6639	18.1012	9.4533	0.012	0.0061	0.0125
28.657	18.0944	9.4048	28.663	18.0962	9.3947	0.0061	0.0018	0.0101
28.5351	17.9653	9.2724	28.5349	17.9753	9.277	2.09E-04	0.0101	0.0047
28.4379	17.8705	9.1626	28.4408	17.8666	9.161	0.003	0.0039	0.0016
28.3652	17.7873	9.0912	28.3656	17.7868	9.0893	3.38E-04	5.41E-04	0.0019
28.3598	17.7811	9.0853	28.36	17.7808	9.0836	2.26E-04	3.54E-04	0.0018
28.2117	17.6325	8.9369	28.2123	17.6331	8.9358	6.18E-04	6.45E-04	0.0011
28.1714	17.5915	8.8954	28.171	17.5925	8.8957	4.24E-04	9.98E-04	2.64E-04
28.1305	17.551	8.855	28.1308	17.5515	8.8552	3.38E-04	5.92E-04	1.56E-04
28.0918	17.5107	8.8147	28.0917	17.511	8.8143	5.89E-05	2.61E-04	4.15E-04

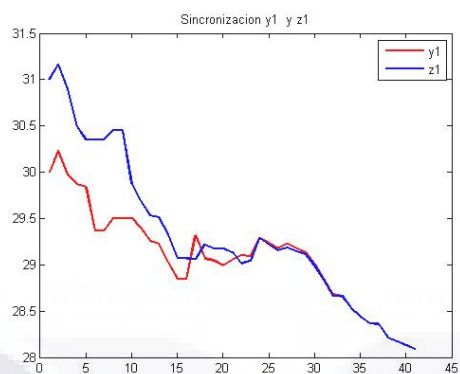


Figura B.11: Sincronización y_1 y z_1

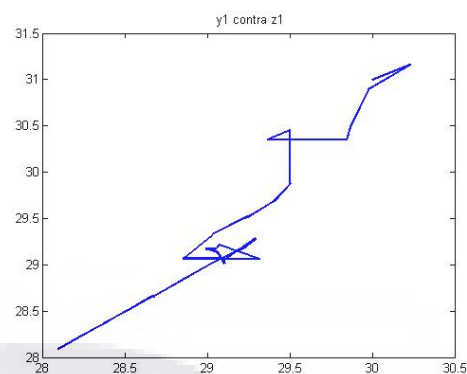


Figura B.12: y_1 contra z_1

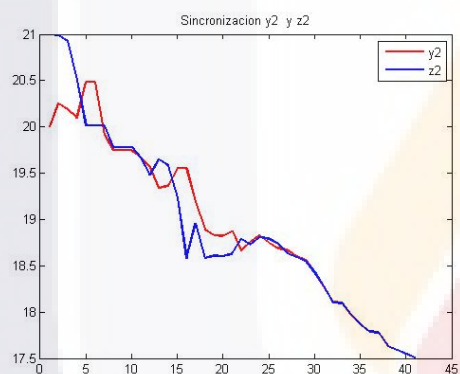


Figura B.13: Sincronización y_2 y z_2

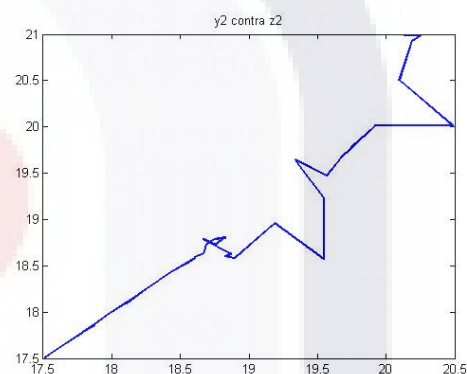


Figura B.14: y_2 contra z_2

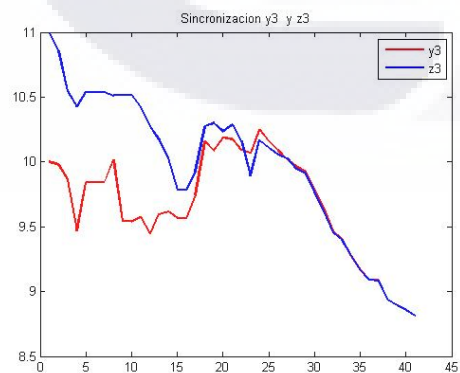


Figura B.15: Sincronización y_3 y z_3

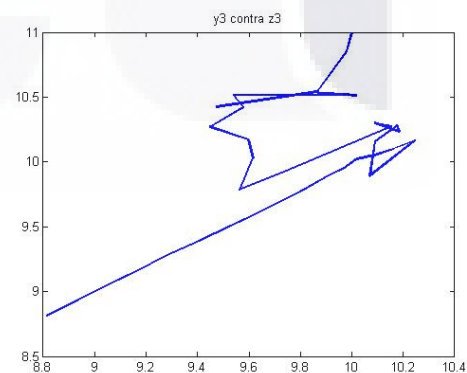


Figura B.16: y_3 contra z_3

Experimento número 5 con 170 iteraciones con 0,00071366 de valor final en la función objetivo.

```
>> clear all
>> main(30,20,10,31,21,11)

fc =

    2.0239

j =

     2

K =

     2

j =

    170

K =

    38

Caot_end =

    7.1366e-04

Tab_end =

    7.1366e-04

>> Prueba

exp_lya1 =

   -0.2005

exp_lya2 =

   -0.2192

exp_lya3 =

   -0.2489
```

Figura B.17: Experimento 5 con 170 iteraciones.

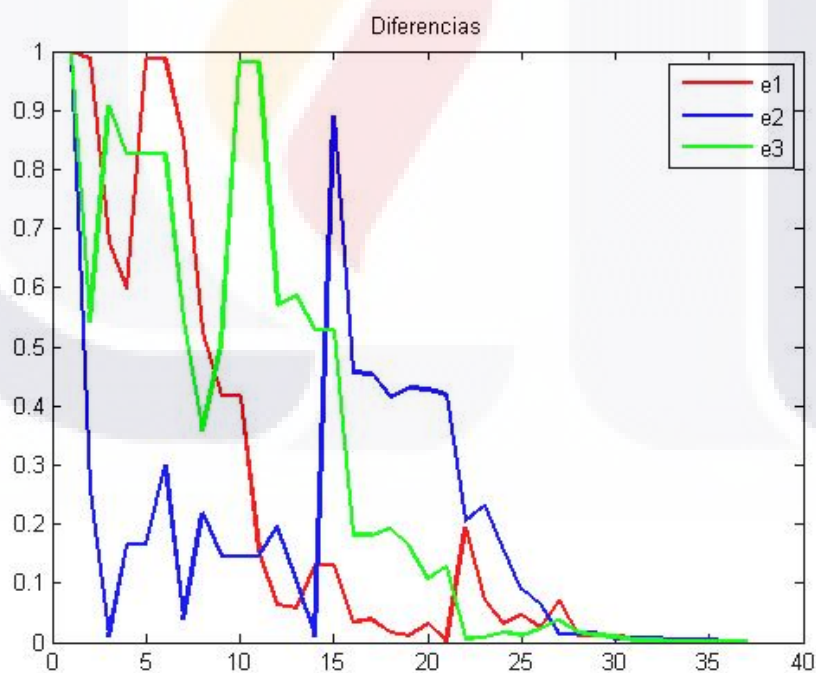


Figura B.18: Diferencias con 170 iteraciones.

Cuadro B.3: Tabla Solución y evolución con 170 iteraciones.

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3		e_1	e_2	e_3
30	20	10	31	21	11		1	1	1
29.8269	20.2379	10.0251	30.8148	20.4979	10.5685		0.9879	0.26	0.5435
29.6505	19.9347	9.4742	30.3262	19.9452	10.3816		0.6757	0.0105	0.9073
29.5958	19.6176	9.2539	30.1949	19.4531	10.0794		0.5991	0.1644	0.8255
29.2084	19.6176	9.2539	30.1949	19.4531	10.0794		0.9865	0.1644	0.8255
29.2084	19.1527	9.2539	30.1949	19.4531	10.0794		0.9865	0.3005	0.8255
29.497	19.2314	9.2575	30.346	19.2707	9.8015		0.8489	0.0392	0.544
29.5119	19.0588	9.3061	30.0379	19.2778	9.6637		0.526	0.219	0.3576
29.268	18.9351	8.9344	29.6843	18.7899	9.4382		0.4163	0.1452	0.5038
29.268	18.9351	8.4561	29.6843	18.7899	9.4382		0.4163	0.1452	0.9821
29.268	18.9351	8.4561	29.1103	18.7899	9.4382		0.1577	0.1452	0.9821
29.2136	18.679	8.6272	29.2773	18.8748	9.1978		0.0637	0.1959	0.5706
29.298	18.8661	8.9174	29.3561	18.971	9.5042		0.058	0.1049	0.5868
29.2943	18.7962	8.7674	29.4253	18.8073	9.2965		0.131	0.0111	0.5291
29.2943	18.7962	8.7674	29.4253	17.9073	9.2965		0.131	0.8889	0.5291
29.1159	18.2639	9.1983	29.1502	17.8076	9.3807		0.0343	0.4563	0.1824
29.0505	18.1997	9.1337	29.0891	17.7463	9.3162		0.0386	0.4534	0.1825
29.0236	18.1503	9.0962	29.0403	17.7348	9.2898		0.0167	0.4154	0.1936
28.9972	18.1178	9.0785	29.0075	17.6877	9.2419		0.0103	0.4301	0.1634
28.96	18.0715	9.075	28.991	17.6434	9.182		0.031	0.4281	0.1069
28.8895	18.0545	9.0305	28.887	17.636	9.1586		0.0025	0.4185	0.1281
28.6601	17.9218	8.9365	28.8542	17.7161	8.9295		0.194	0.2058	0.0071
28.6099	17.8135	9.0758	28.6805	17.5823	9.0843		0.0706	0.2312	0.0086
28.6424	17.7757	9.083	28.6733	17.6144	9.0666		0.0309	0.1614	0.0164
28.6654	17.7355	9.0632	28.7122	17.6465	9.0751		0.0468	0.089	0.0119
28.671	17.6941	9.1134	28.6467	17.6297	9.0906		0.0243	0.0645	0.0228
28.6857	17.6493	9.0578	28.6142	17.6353	9.0194		0.0715	0.0141	0.0385
28.6569	17.6054	9.0205	28.6438	17.6194	9.0372		0.0131	0.0141	0.0167
28.5944	17.5425	8.9594	28.5814	17.5572	8.9714		0.013	0.0147	0.012
28.5805	17.5253	8.9552	28.5713	17.5207	8.9653		0.0092	0.0046	0.0101
28.4141	17.3708	8.7964	28.4078	17.3633	8.7999		0.0063	0.0075	0.0035
28.2829	17.2397	8.6654	28.2767	17.2322	8.6688		0.0062	0.0075	0.0035
28.1953	17.1518	8.5814	28.1924	17.1467	8.5805		0.003	0.0051	9.67E-04
28.1156	17.0718	8.5018	28.1127	17.0669	8.5004		0.0029	0.0049	0.0013
28.0741	17.0305	8.4616	28.0726	17.0269	8.4593		0.0014	0.0036	0.0024
27.9396	16.8924	8.3247	27.9413	16.8928	8.3238		0.0017	4.77E-04	8.54E-04
27.84	16.7928	8.2242	27.8406	16.7925	8.2241		5.37E-04	3.01E-04	1.18E-04

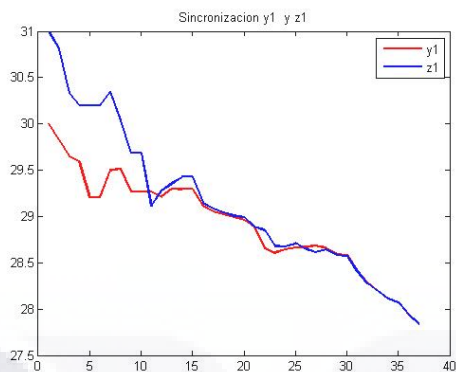


Figura B.19: Sincronización y_1 y z_1

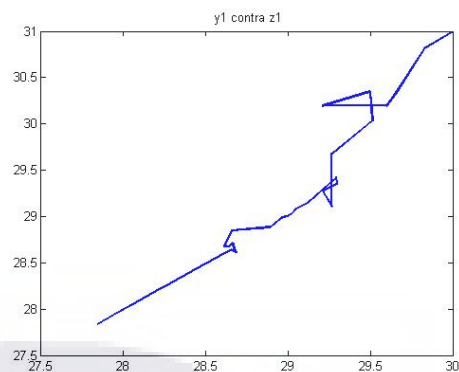


Figura B.20: y_1 contra z_1

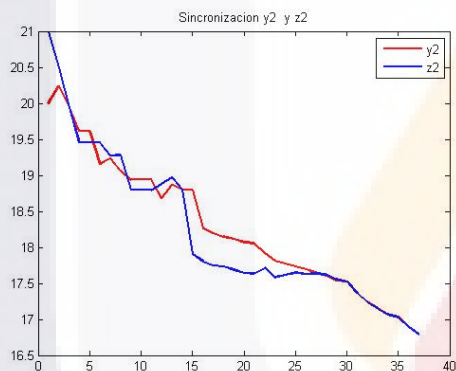


Figura B.21: Sincronización y_2 y z_2

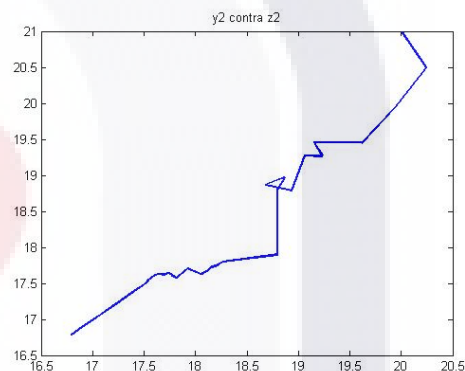


Figura B.22: y_2 contra z_2

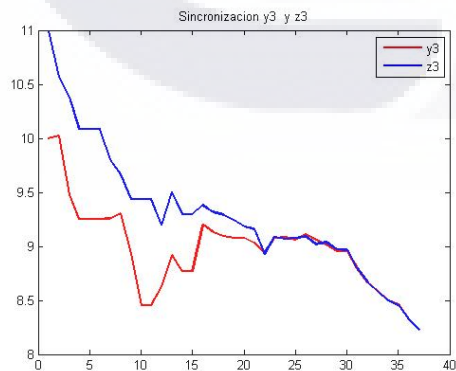


Figura B.23: Sincronización y_3 y z_3

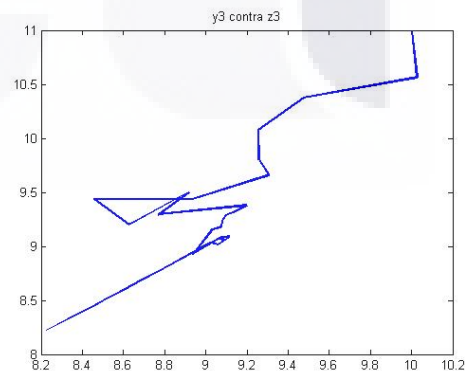


Figura B.24: y_3 contra z_3

Experimento número 4 con 100 iteraciones con 0,00098046 de valor final en la función objetivo.

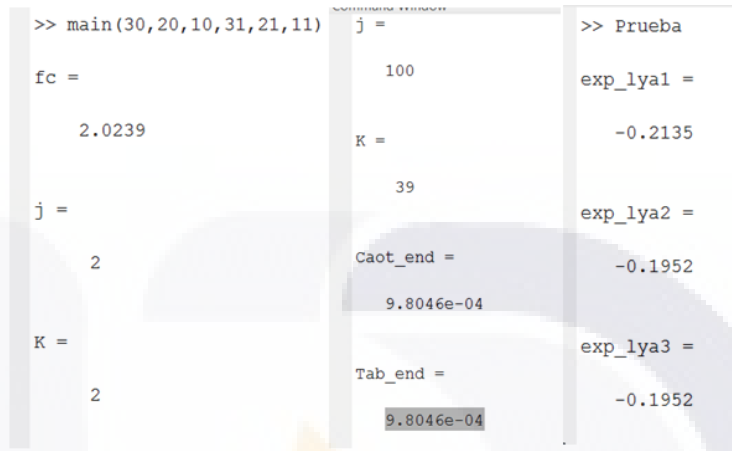


Figura B.25: Experimento 4 con 100 iteraciones.

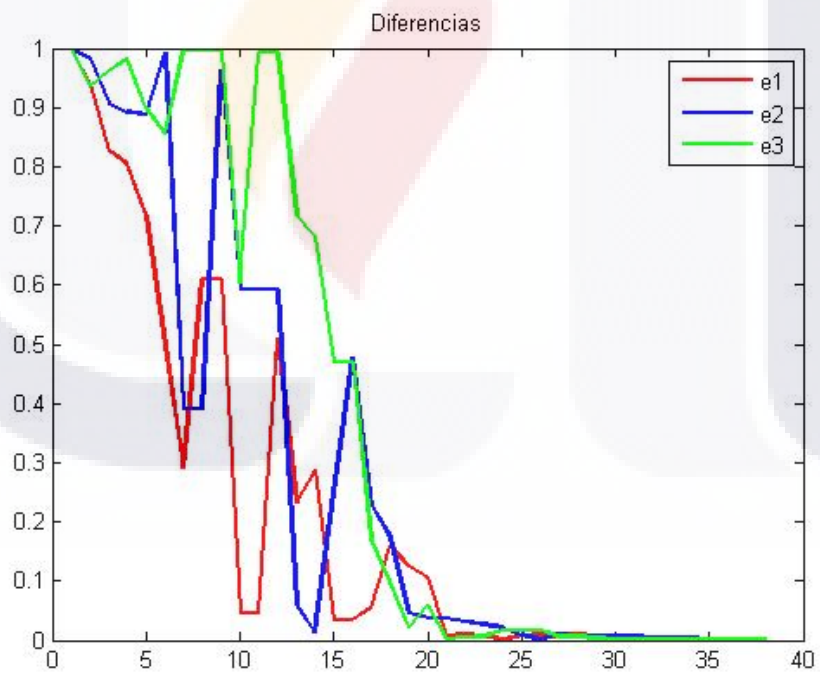


Figura B.26: Diferencias con 100 iteraciones.

Cuadro B.4: Tabla Solución y evolución con 100 iteraciones.

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	e_1	e_2	e_3
30.017	20.0477	10.022	30.9562	21.0302	10.9582	0.9392	0.9824	0.9362
30.0778	20.0935	10.0159	30.9047	21.0011	10.9782	0.8269	0.9076	0.9623
29.8643	19.8823	9.7796	30.6696	20.7742	10.7617	0.8052	0.8919	0.9821
29.8558	19.6927	9.7325	30.575	20.5814	10.6312	0.7192	0.8887	0.8987
30.0671	19.8002	10.0539	30.5659	20.7937	10.9104	0.4988	0.9935	0.8566
30.5268	20.0548	10.1125	30.2369	20.4452	11.1074	0.2899	0.3904	0.9948
29.6268	20.0548	10.1125	30.2369	20.4452	11.1074	0.6101	0.3904	0.9948
29.6268	19.4808	10.1125	30.2369	20.4452	11.1074	0.6101	0.9644	0.9948
29.871	19.6335	10.3151	29.826	20.2258	10.9202	0.045	0.5923	0.6051
29.871	19.6335	9.9277	29.826	20.2258	10.9202	0.045	0.5923	0.9926
29.871	19.6335	9.9277	29.3611	20.2258	10.9202	0.5099	0.5923	0.9926
29.9844	20.032	10.0141	29.7523	20.0934	10.7305	0.2322	0.0615	0.7164
29.6357	19.7011	9.6602	29.3486	19.689	10.3423	0.2871	0.0121	0.6821
29.2709	19.6408	9.7079	29.305	19.8909	10.1763	0.0341	0.25	0.4684
29.2709	19.6408	9.7079	29.305	19.1619	10.1763	0.0341	0.479	0.4684
29.2984	19.4602	9.8293	29.3533	19.2346	10.0018	0.0549	0.2256	0.1725
29.0468	19.2609	9.6999	29.207	19.0869	9.7989	0.1602	0.174	0.099
29.0465	19.0238	9.8342	28.9209	19.0699	9.8127	0.1256	0.0461	0.0215
28.9903	18.9743	9.8061	28.8847	19.011	9.7475	0.1056	0.0367	0.0586
28.9333	18.9951	9.7595	28.94	19.0331	9.7624	0.0067	0.0381	0.003
28.9218	18.9944	9.7574	28.9325	19.0263	9.7625	0.0107	0.0319	0.0051
28.8821	18.9581	9.7158	28.8897	18.985	9.7228	0.0076	0.0269	0.0069
28.8452	18.9301	9.6702	28.8454	18.9518	9.6876	1.34E-04	0.0217	0.0174
28.6965	18.8016	9.5239	28.6883	18.8114	9.5409	0.0082	0.0098	0.017
28.5969	18.7451	9.4921	28.6063	18.7445	9.4753	0.0094	5.86E-04	0.0168
28.473	18.6139	9.3619	28.48	18.6245	9.355	0.007	0.0105	0.0068
28.4712	18.6144	9.3624	28.4802	18.6228	9.3553	0.009	0.0083	0.0071
28.4712	18.6131	9.3594	28.4774	18.6215	9.3553	0.0062	0.0084	0.0041
28.4731	18.6128	9.356	28.4744	18.6209	9.3569	0.0013	0.008	9.48E-04
28.4325	18.572	9.3151	28.4335	18.58	9.3163	9.48E-04	0.0079	0.0011
28.3405	18.4802	9.2226	28.3399	18.4839	9.2247	5.37E-04	0.0037	0.0021
28.3332	18.4728	9.2153	28.3328	18.4765	9.2175	3.94E-04	0.0036	0.0023
28.2925	18.4321	9.1752	28.2918	18.4352	9.1779	7.40E-04	0.0031	0.0027
28.1515	18.2956	9.0325	28.1525	18.2957	9.0346	9.88E-04	1.08E-04	0.0021
28.15	18.2954	9.031	28.1508	18.2941	9.0321	8.33E-04	0.0013	0.0011
27.9449	18.0892	8.8266	27.9458	18.0893	8.8255	9.21E-04	5.64E-05	0.0011
27.9045	18.0483	8.7849	27.9048	18.0489	8.7855	2.97E-04	5.82E-04	5.69E-04

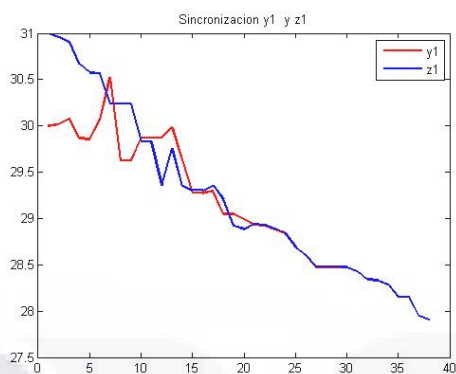


Figura B.27: Sincronización y_1 y z_1

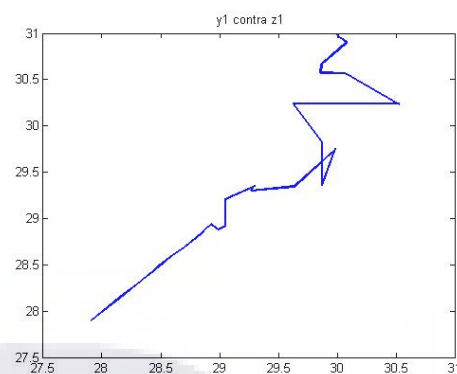


Figura B.28: y_1 contra z_1

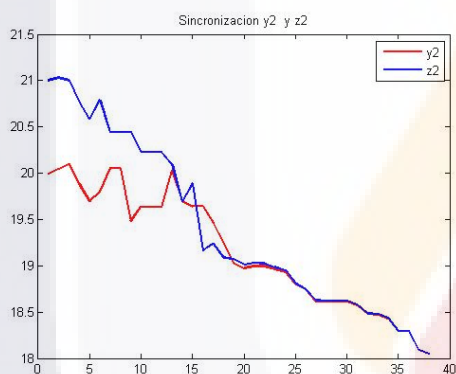


Figura B.29: Sincronización y_2 y z_2

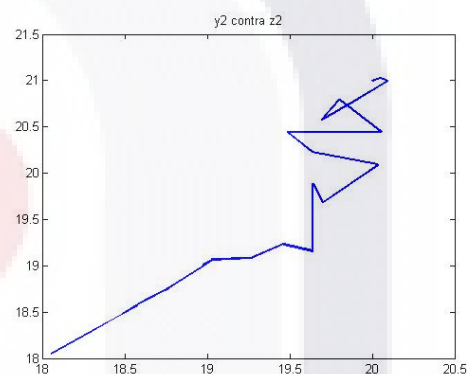


Figura B.30: y_2 contra z_2

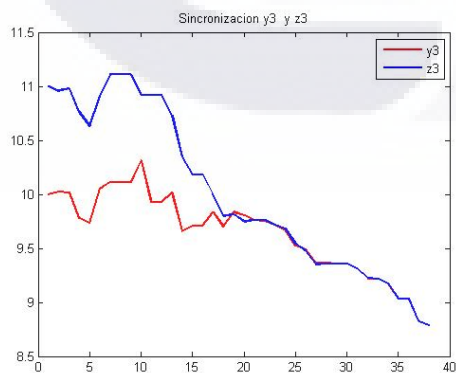


Figura B.31: Sincronización y_3 y z_3

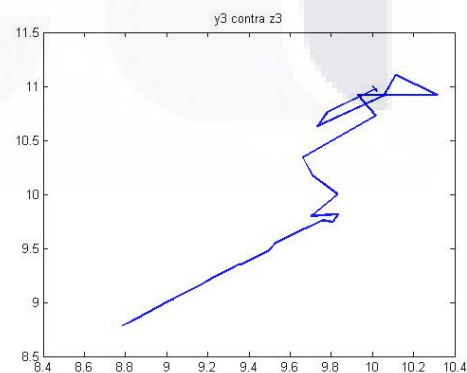


Figura B.32: y_3 contra z_3

Apéndice C

Experimentos con $g=4$

En esta sección se presentan experimentos en los cuales el parámetro de acoplamiento es $g = 4$.

Experimento número 4 con 250 iteraciones con 0,0036 de valor final en la función objetivo.

```
>> clear all
>> main(30,20,10,31,21,11)

fc =
    2.0424

j =
    2

K =
    2

j =
    250

K =
    46

Caot_end =
    0.0036

Tab_end =
    0.0036

>> Prueba

exp_lya1 =
   -0.1421

exp_lya2 =
   -0.1426

exp_lya3 =
   -0.1367
```

Figura C.1: Experimento 4 con 250 iteraciones $g=4$.

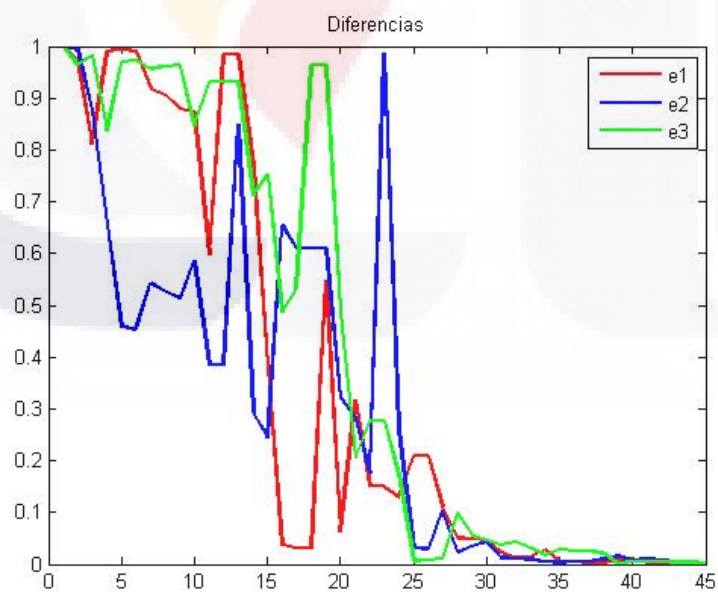


Figura C.2: Diferencias con 250 iteraciones.

Cuadro C.1: Tabla: Solución y evolución con 220 iteraciones $g=4$.

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	e_1	e_2	e_3
30	20	10	31	21	11	1	1	1
29.9552	19.9059	9.8781	30.9281	20.9008	10.8416	0.9729	0.9948	0.9635
29.9244	19.8664	9.7682	30.7353	20.7418	10.7511	0.8109	0.8753	0.9829
29.7483	20.0172	9.7354	30.7382	20.674	10.5739	0.9899	0.6568	0.8385
29.5995	20.0442	9.6258	30.5938	20.5032	10.5956	0.9943	0.459	0.9697
29.5598	20.0057	9.5832	30.5509	20.4591	10.5558	0.9911	0.4534	0.9725
29.6067	19.9995	9.6063	30.5241	20.5413	10.5632	0.9174	0.5418	0.9569
29.5715	19.9663	9.5635	30.4771	20.4916	10.5255	0.9057	0.5253	0.962
29.5663	19.9811	9.5244	30.4459	20.4951	10.4892	0.8796	0.514	0.9648
29.4078	19.5402	9.4448	30.2806	20.1262	10.291	0.8728	0.5861	0.8462
29.5109	19.6887	9.4895	30.1079	20.0736	10.4199	0.5969	0.3849	0.9304
29.1235	19.6887	9.4895	30.1079	20.0736	10.4199	0.9844	0.3849	0.9304
29.1235	19.2238	9.4895	30.1079	20.0736	10.4199	0.9844	0.8498	0.9304
28.9516	19.4167	9.778	29.7225	19.7098	10.4903	0.771	0.293	0.7123
28.9166	19.5348	10.0953	29.2996	19.2897	10.8481	0.3829	0.245	0.7529
29.2084	19.6858	10.0519	29.1706	19.0316	10.5381	0.0378	0.6542	0.4862
29.2873	19.6751	9.8136	29.256	19.066	10.346	0.0312	0.6092	0.5325
29.2873	19.6751	9.3831	29.256	19.066	10.346	0.0312	0.6092	0.9629
29.2873	19.6751	9.3831	28.7395	19.066	10.346	0.5478	0.6092	0.9629
29.0399	19.5268	9.6046	28.978	19.2058	10.0901	0.0619	0.321	0.4855
29.0793	19.2817	9.8596	28.7611	18.9985	10.0648	0.3182	0.2831	0.2052
29.2711	19.2239	9.5708	29.1216	19.0463	9.8461	0.1495	0.1776	0.2753
29.2711	19.2239	9.5708	29.1216	18.2363	9.8461	0.1495	0.9876	0.2753
29.0874	18.8086	9.4969	29.2171	18.5505	9.3242	0.1297	0.2581	0.1727
28.8463	18.7318	9.526	29.0557	18.7007	9.5194	0.2094	0.0311	0.0066
28.6875	18.5721	9.3682	28.8971	18.5416	9.3604	0.2096	0.0305	0.0078
28.5924	18.4128	9.2386	28.7044	18.3089	9.2495	0.112	0.1039	0.0109
28.3885	18.2071	8.9428	28.4391	18.1834	9.0413	0.0506	0.0237	0.0985
28.3275	18.1354	8.8988	28.3758	18.1002	8.9551	0.0483	0.0352	0.0562
28.2207	18.1373	8.8098	28.2671	18.1802	8.8555	0.0464	0.0429	0.0457
28.1076	18.066	8.7708	28.0842	18.0778	8.7335	0.0234	0.0117	0.0373
28.0273	18.0003	8.6979	28.0155	18.0114	8.654	0.0119	0.0111	0.0438
27.9747	17.9441	8.6287	27.9608	17.9534	8.5961	0.0139	0.0093	0.0326
27.9428	17.9157	8.5935	27.9151	17.9208	8.577	0.0277	0.0051	0.0165
27.8732	17.8999	8.5738	27.8786	17.903	8.5458	0.0054	0.0031	0.028
27.8329	17.8584	8.5322	27.8375	17.8633	8.5062	0.0046	0.0048	0.026
27.7476	17.7725	8.4461	27.7518	17.7782	8.421	0.0042	0.0057	0.0251
27.6345	17.6564	8.3302	27.6366	17.6659	8.3086	0.0021	0.0095	0.0216
27.5793	17.5824	8.2506	27.5695	17.5972	8.2512	0.0097	0.0148	6.15E-04
27.4509	17.4573	8.1227	27.4404	17.4654	8.1279	0.0105	0.0081	0.0052
27.4102	17.4145	8.0925	27.4087	17.4252	8.0879	0.0016	0.0106	0.0046
27.3465	17.3538	8.0166	27.3453	17.3602	8.022	0.0012	0.0064	0.0055
27.3079	17.3175	7.9786	27.3035	17.322	7.9827	0.0044	0.0045	0.0041
27.2183	17.2289	7.8878	27.2195	17.2318	7.8915	0.0011	0.0029	0.0037
27.1851	17.1929	7.8498	27.1834	17.1913	7.852	0.0017	0.0016	0.0021

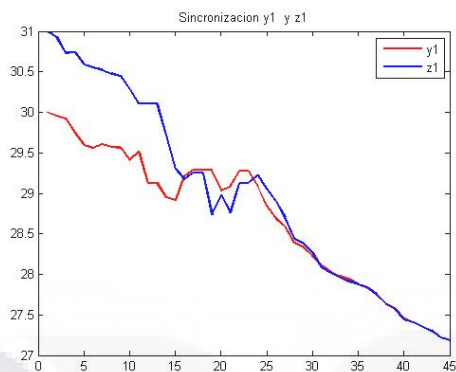


Figura C.3: Sincronización y_1 y z_1

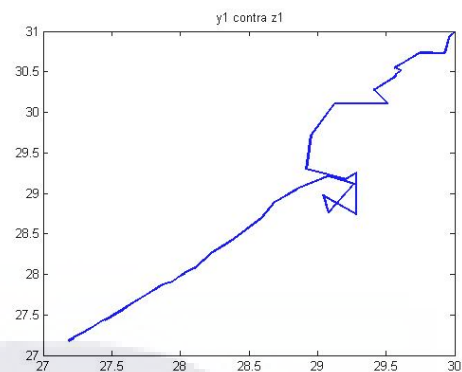


Figura C.4: y_1 contra z_1

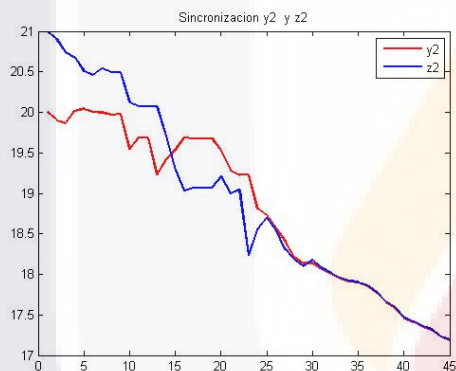


Figura C.5: Sincronización y_2 y z_2

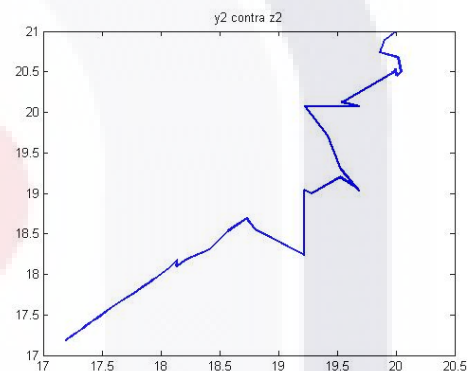


Figura C.6: y_2 contra z_2

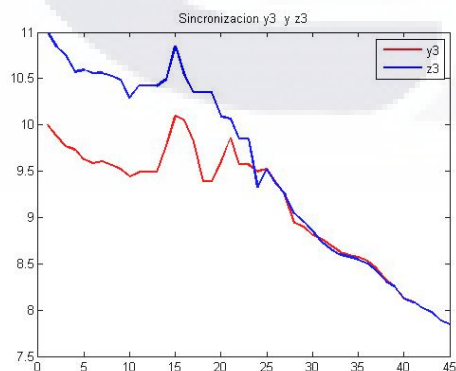


Figura C.7: Sincronización y_3 y z_3

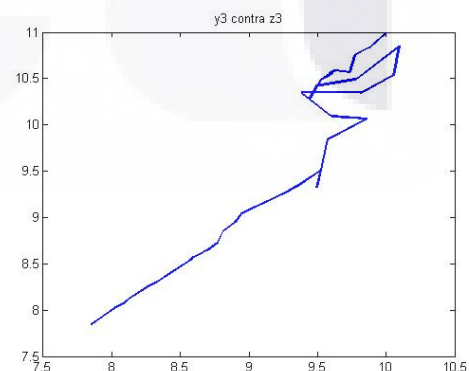


Figura C.8: y_3 contra z_3

Experimento número 1 con 170 iteraciones con 0,00099225 de valor final en la función objetivo.

```

>> clear all
>> main(30,20,10,31,21,11)

fc =
    2.0424

j =
     2

K =
     2

Caot_end =

j =
    170

K =
    46

Caot_end =
    9.9225e-04

Tab_end =
    9.9225e-04

>> Prueba

exp_lya1 =
   -0.1819

exp_lya2 =
   -0.1605

exp_lya3 =
   -0.1774
    
```

Figura C.9: Experimento 1 con 170 iteraciones.

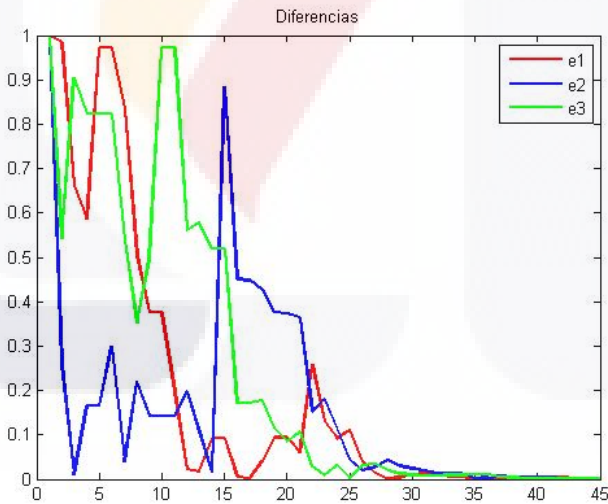


Figura C.10: Diferencias con 170 iteraciones.

Cuadro C.2: Tabla: Solución y evolución con 170 iteraciones $g=4$.

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	e_1	e_2	e_3
30	20	10	31	21	11	1	1	1
29.8286	20.2381	10.0256	30.8134	20.4981	10.5683	0.9848	0.26	0.5428
29.658	19.9354	9.4764	30.3201	19.9459	10.3806	0.6621	0.0105	0.9042
29.6036	19.6182	9.2562	30.1885	19.4538	10.0785	0.5849	0.1644	0.8223
29.2162	19.6182	9.2562	30.1885	19.4538	10.0785	0.9723	0.1644	0.8223
29.2162	19.1533	9.2562	30.1885	19.4538	10.0785	0.9723	0.3005	0.8223
29.5049	19.2321	9.2598	30.3394	19.2713	9.8005	0.8345	0.0392	0.5407
29.5232	19.0593	9.3091	30.028	19.2789	9.662	0.5048	0.2196	0.3529
29.2893	18.935	8.9397	29.665	18.7922	9.4349	0.3758	0.1428	0.4952
29.2893	18.935	8.4614	29.665	18.7922	9.4349	0.3758	0.1428	0.9735
29.2893	18.935	8.4614	29.0911	18.7922	9.4349	0.1982	0.1428	0.9735
29.2349	18.6789	8.6325	29.2581	18.8771	9.1945	0.0232	0.1982	0.562
29.3193	18.866	8.9227	29.3368	18.9734	9.5008	0.0176	0.1074	0.5781
29.3153	18.7949	8.7736	29.4062	18.8108	9.2921	0.0909	0.0159	0.5185
29.3153	18.7949	8.7736	29.4062	17.9108	9.2921	0.0909	0.8841	0.5185
29.1369	18.2625	9.2045	29.131	17.8111	9.3763	0.0058	0.4515	0.1718
29.0715	18.1984	9.1399	29.07	17.7498	9.3118	0.0015	0.4486	0.1719
29.1289	18.133	9.1737	29.1684	17.7072	9.3507	0.0395	0.4257	0.177
29.0828	18.0995	9.1938	29.1771	17.723	9.3089	0.0943	0.3765	0.1151
29.0591	18.059	9.1809	29.153	17.6848	9.2658	0.094	0.3743	0.0849
28.9885	18.0421	9.1363	29.049	17.6774	9.2424	0.0605	0.3647	0.1061
28.759	17.9096	9.0425	29.0164	17.7573	9.0133	0.2574	0.1522	0.0292
28.7101	17.8011	9.1783	28.8395	17.6217	9.1696	0.1294	0.1795	0.0086
28.7415	17.7652	9.1839	28.8333	17.6519	9.1534	0.0918	0.1133	0.0305
28.7627	17.7266	9.1618	28.8739	17.6824	9.1642	0.1111	0.0442	0.0024
28.7685	17.6853	9.2118	28.8082	17.6654	9.1799	0.0396	0.0199	0.0319
28.7858	17.6411	9.1487	28.7708	17.6683	9.114	0.015	0.0272	0.0348
28.737	17.5922	9.0986	28.7377	17.6347	9.0791	7.63E-04	0.0424	0.0194
28.7237	17.5718	9.0902	28.7275	17.6019	9.0777	0.0038	0.0301	0.0126
28.5489	17.3896	8.8939	28.5381	17.4139	8.9032	0.0108	0.0243	0.0093
28.3857	17.2356	8.7323	28.3714	17.256	8.7406	0.0143	0.0205	0.0083
28.1376	17.0063	8.4985	28.1483	17.0194	8.506	0.0107	0.0131	0.0074
28.0535	16.9201	8.4112	28.0604	16.9322	8.421	0.0069	0.0122	0.0098
27.9738	16.8401	8.3315	27.9807	16.8524	8.341	0.0069	0.0123	0.0095
27.911	16.8089	8.3343	27.9117	16.8062	8.3457	6.77E-04	0.0027	0.0114
27.8699	16.7684	8.294	27.8712	16.7654	8.3049	0.0013	0.0029	0.0109
27.8612	16.7333	8.2717	27.8635	16.7394	8.2666	0.0023	0.0061	0.0051
27.762	16.6334	8.1712	27.7623	16.6392	8.1671	2.81E-04	0.0058	0.0041
27.7217	16.5931	8.1304	27.7207	16.5984	8.1282	0.001	0.0053	0.0022
27.6515	16.5224	8.0595	27.6502	16.527	8.0572	0.0013	0.0047	0.0023
27.5012	16.3731	7.9098	27.4999	16.3767	7.9075	0.0014	0.0036	0.0022
27.4624	16.3333	7.8697	27.4593	16.3357	7.8687	0.003	0.0023	9.51E-04
27.4586	16.329	7.8636	27.4594	16.3272	7.8622	8.48E-04	0.0018	0.0014
27.4088	16.2793	7.8143	27.4101	16.2781	7.8128	0.0014	0.0012	0.0015
27.3691	16.2411	7.7735	27.3693	16.2403	7.7731	2.78E-04	7.30E-04	3.42E-04

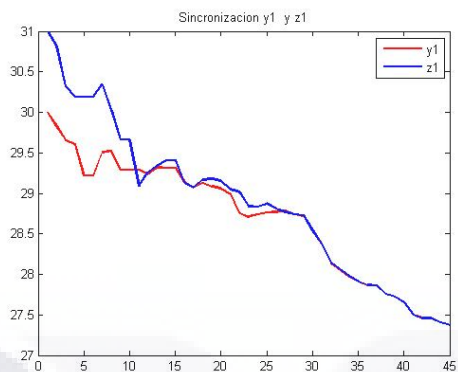


Figura C.11: Sincronización y_1 y z_1

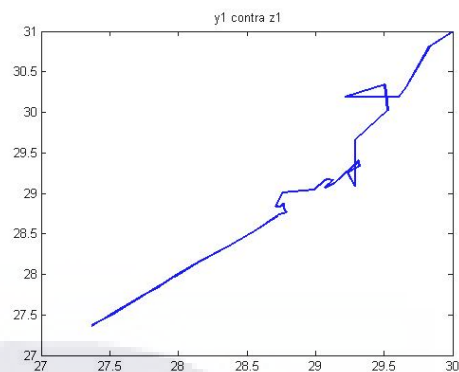


Figura C.12: y_1 contra z_1

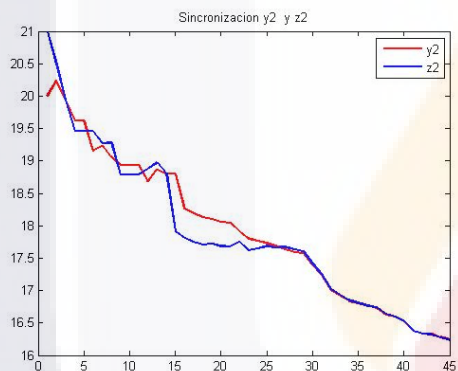


Figura C.13: Sincronización y_2 y z_2

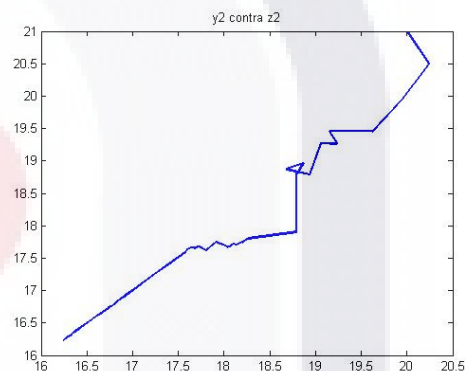


Figura C.14: y_2 contra z_2

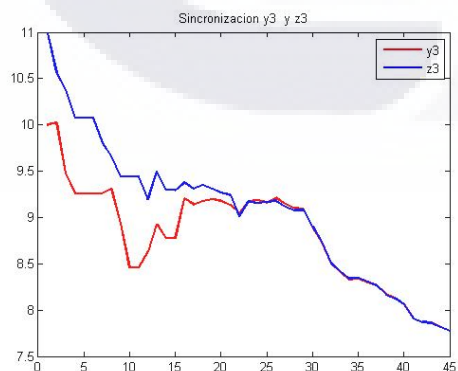


Figura C.15: Sincronización y_3 y z_3

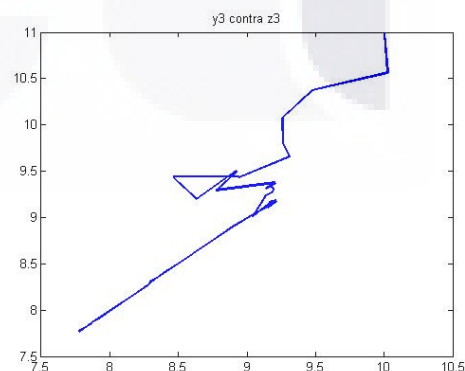


Figura C.16: y_3 contra z_3

Experimento número 4 con 60 iteraciones con 0,0049 de valor final en la función objetivo.

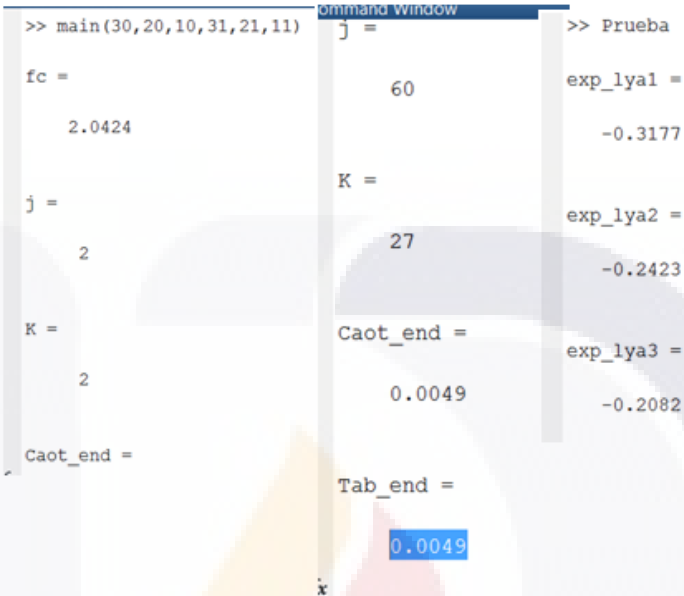


Figura C.17: Experimento 4 con 60 iteraciones.

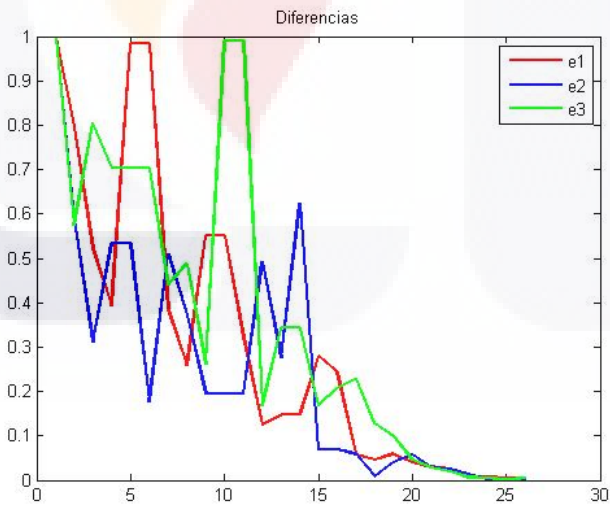


Figura C.18: Diferencias con 60 iteraciones.

Cuadro C.3: Tabla: Solución y evolución con 60 iteraciones $g=4$.

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	e_1	e_2	e_3
30	20	10	31	21	11	1	1	1
29.9688	19.9782	9.9723	30.9636	20.976	10.9666	0.9947	0.9978	0.9943
29.9739	20.0366	9.9244	30.9291	20.9696	10.915	0.9553	0.933	0.9906
30.0146	19.9793	9.9481	30.8666	20.914	10.9162	0.852	0.9348	0.9681
29.989	19.9418	9.8762	30.7565	20.8249	10.8548	0.7675	0.8832	0.9786
29.9733	19.9076	9.8377	30.625	20.7499	10.7952	0.6516	0.8424	0.9575
29.923	19.8797	9.8356	30.5358	20.7486	10.656	0.6128	0.8689	0.8204
30.0531	20.1558	9.7889	30.4599	20.704	10.6197	0.4068	0.5481	0.8308
29.9713	20.1568	10.0098	30.4345	20.8206	10.3649	0.4632	0.6638	0.3551
30.2144	20.3305	9.8194	30.5956	20.8632	10.3154	0.3812	0.5328	0.496
30.4286	20.3199	9.6662	30.2968	20.8522	10.3372	0.1318	0.5323	0.671
29.5286	20.3199	9.6662	30.2968	20.8522	10.3372	0.7682	0.5323	0.671
29.4707	20.1551	9.8235	29.9428	20.4401	10.154	0.4721	0.285	0.3305
29.5015	20.0822	9.4133	29.5234	19.9555	9.9685	0.0219	0.1267	0.5551
29.5015	19.1822	9.4133	29.5234	19.9555	9.9685	0.0219	0.7733	0.5551
29.3719	19.3613	9.5613	29.4017	19.8231	9.773	0.0298	0.4618	0.2117
29.3824	19.2855	9.3769	29.4555	19.5954	9.5665	0.0731	0.3099	0.1896
29.3888	19.5399	9.515	29.7482	19.6133	9.4181	0.3593	0.0735	0.0969
29.3522	19.5214	9.4438	29.726	19.5818	9.3884	0.3738	0.0604	0.0553
29.3257	19.4788	9.3702	29.6714	19.5344	9.3367	0.3456	0.0556	0.0335
29.3942	19.5342	9.2772	29.6099	19.4675	9.4352	0.2157	0.0667	0.158
29.3942	19.5342	8.4672	29.6099	19.4675	9.4352	0.2157	0.0667	0.968
29.3942	19.5342	8.4672	28.7351	19.4675	9.4352	0.6591	0.0667	0.968
29.3942	19.5342	8.4672	28.7351	18.6172	9.4352	0.6591	0.917	0.968

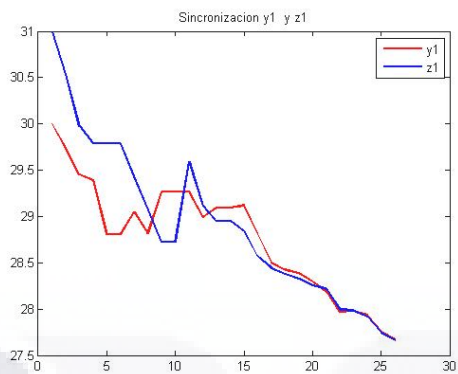


Figura C.19: Sincronización y_1 y z_1

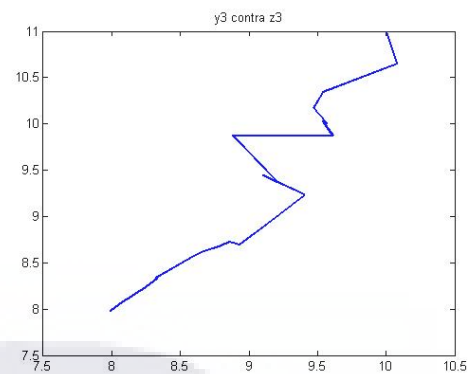


Figura C.20: y_1 contra z_1

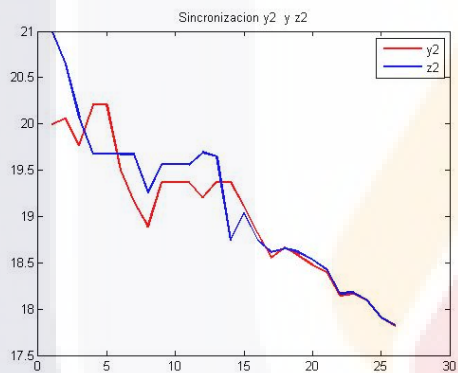


Figura C.21: Sincronización y_2 y z_2

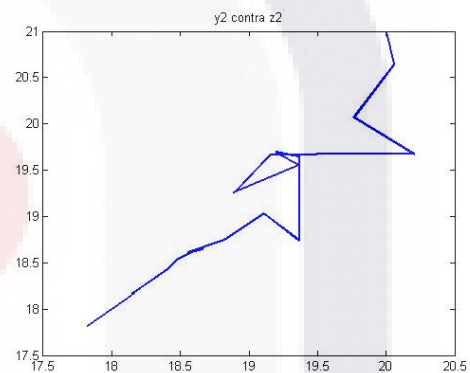


Figura C.22: y_2 contra z_2

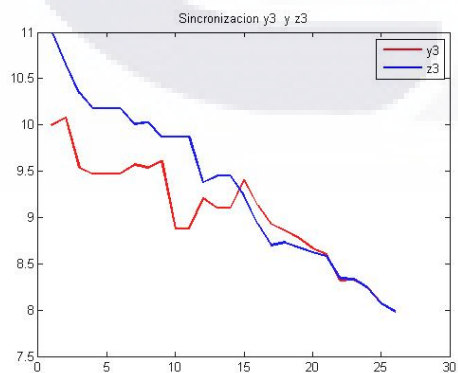


Figura C.23: Sincronización y_3 y z_3

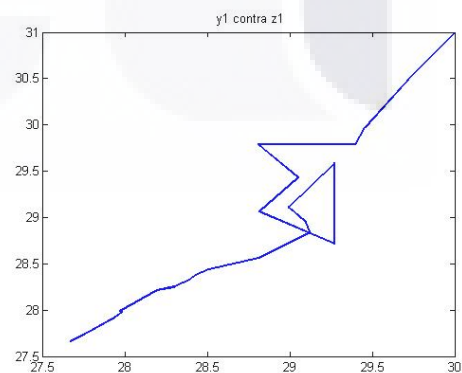


Figura C.24: y_3 contra z_3

Experimento número 5 con 230 iteraciones con 0,0011 de valor final en la función objetivo.

```

>> main(30,20,10,31,21,11)
fc =
    2.0424
j =
    2
K =
    2
Caot_end =
    0.0011

j =
    230
K =
    49
Caot_end =
    0.0011

>> Prueba
exp_lya1 =
    -0.1455
exp_lya2 =
    -0.1641
exp_lya3 =
    -0.1777
    
```

Figura C.25: Experimento 5 con 230 iteraciones.

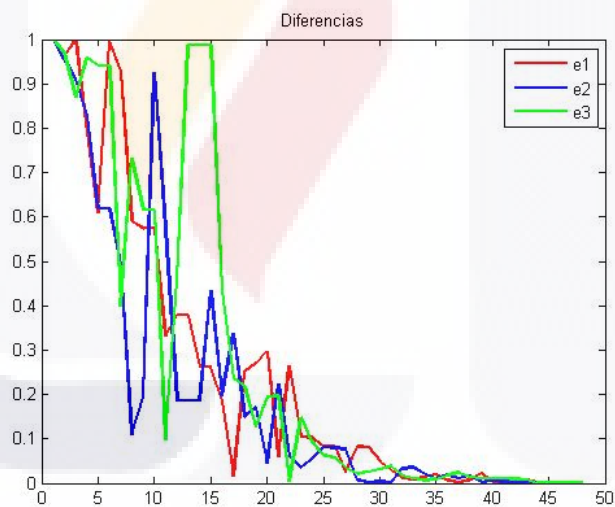


Figura C.26: Diferencias con 100 iteraciones.

Cuadro C.4: Tabla: Solución y evolución con 230 iteraciones $g=4$.

y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	e_1	e_2	e_3
30	20	10	31	21	11	1	1	1
30.0191	20.0511	9.977	30.9794	21.0062	10.9463	0.9602	0.955	0.9693
30.046	20.011	10.0273	31.046	20.9233	10.8958	1	0.9123	0.8685
30.1309	20.0355	9.9697	30.922	20.8643	10.9281	0.7912	0.8288	0.9583
30.1721	20.1866	9.9624	30.7812	20.8056	10.9024	0.6091	0.619	0.94
29.7847	20.1866	9.9624	30.7812	20.8056	10.9024	0.9965	0.619	0.94
29.828	20.1449	10.238	30.7565	20.6361	10.6385	0.9284	0.4912	0.4004
29.996	20.3335	10.0721	30.5871	20.4427	10.8053	0.5911	0.1092	0.7331
29.9512	20.1255	10.3583	30.5255	20.3206	10.9751	0.5743	0.1952	0.6168
29.9512	19.3965	10.3583	30.5255	20.3206	10.9751	0.5743	0.9242	0.6168
30.1486	19.661	10.6848	30.4799	20.2357	10.7827	0.3313	0.5748	0.0979
29.9316	19.8098	10.4485	30.309	19.9948	10.9052	0.3774	0.185	0.4566
29.9316	19.8098	9.9171	30.309	19.9948	10.9052	0.3774	0.185	0.9881
29.9316	19.8098	9.9171	29.6713	19.9948	10.9052	0.2604	0.185	0.9881
29.9316	19.8098	9.9171	29.6713	19.375	10.9052	0.2604	0.4349	0.9881
29.9689	19.7637	10.1504	29.7832	19.5662	10.5844	0.1857	0.1975	0.434
29.7208	19.7392	10.1064	29.7359	19.4001	10.3427	0.0151	0.3392	0.2363
29.5073	19.5648	9.9152	29.7578	19.4154	10.1335	0.2505	0.1494	0.2183
29.5745	19.4584	9.812	29.8447	19.629	9.9406	0.2702	0.1706	0.1286
29.4005	19.5863	9.7439	29.6967	19.6328	9.9396	0.2962	0.0465	0.1957
29.5348	19.5476	9.8712	29.5953	19.3247	10.0677	0.0605	0.223	0.1965
29.7024	19.4233	9.9587	29.4386	19.3634	9.9617	0.2638	0.0599	0.003
29.4661	19.2322	9.8912	29.3616	19.267	9.7429	0.1045	0.0348	0.1483
29.3366	19.0558	9.7245	29.2334	19.1117	9.6314	0.1032	0.0559	0.0931
29.2866	19.0295	9.6888	29.2044	19.1099	9.6268	0.0822	0.0804	0.0621
29.2488	18.9898	9.6475	29.1655	19.07	9.5892	0.0834	0.0801	0.0583
29.2057	18.9972	9.4933	29.2312	18.9205	9.5286	0.0254	0.0766	0.0353
29.1709	18.9529	9.505	29.2542	18.9592	9.4836	0.0833	0.0062	0.0214
29.202	18.9846	9.4762	29.2835	18.9822	9.4506	0.0815	0.0024	0.0256
29.2328	18.8671	9.4043	29.2815	18.8633	9.4353	0.0487	0.0038	0.031
29.1758	18.8126	9.3304	29.2052	18.8118	9.3691	0.0294	8.58E-04	0.0387
29.1461	18.7854	9.2998	29.1582	18.7531	9.317	0.0121	0.0323	0.0171
29.0979	18.7303	9.2474	29.1073	18.6947	9.2577	0.0094	0.0356	0.0103
29.1084	18.73	9.2569	29.0952	18.71	9.2505	0.0132	0.02	0.0064
29.0993	18.714	9.2416	29.0792	18.7023	9.2322	0.0201	0.0117	0.0094
29.08	18.7236	9.215	29.0741	18.7057	9.1967	0.006	0.0178	0.0183
28.9272	18.5727	9.0701	28.9288	18.5613	9.0463	0.0016	0.0115	0.0237
28.8965	18.5369	9.0238	28.9032	18.52	9.0375	0.0067	0.017	0.0137
28.8295	18.4638	8.9938	28.8072	18.4616	8.9833	0.0222	0.0021	0.0105
28.7878	18.4187	8.9603	28.7864	18.4258	8.9707	0.0013	0.0071	0.0104
28.7442	18.375	8.9139	28.7391	18.3783	8.9243	0.0051	0.0033	0.0104
28.6242	18.2555	8.794	28.6177	18.2566	8.8039	0.0065	0.001	0.0099
28.4793	18.1116	8.65	28.4729	18.1105	8.6578	0.0064	0.0011	0.0078
28.4455	18.0821	8.6195	28.4427	18.0807	8.6194	0.0028	0.0013	7.83E-05
28.3632	18.0014	8.5378	28.3608	18	8.5379	0.0024	0.0015	1.27E-04
28.2869	17.9254	8.4621	28.285	17.924	8.4613	0.0019	0.0015	8.45E-04
28.2228	17.8615	8.3988	28.2217	17.8617	8.3976	0.0011	1.67E-04	0.0012
28.1835	17.8223	8.3582	28.1825	17.8226	8.3584	9.27E-04	3.80E-04	1.97E-04

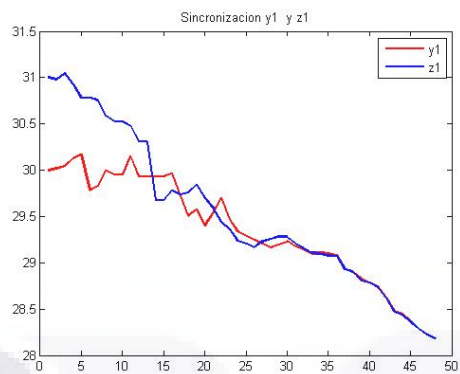


Figura C.27: Sincronización y_1 y z_1

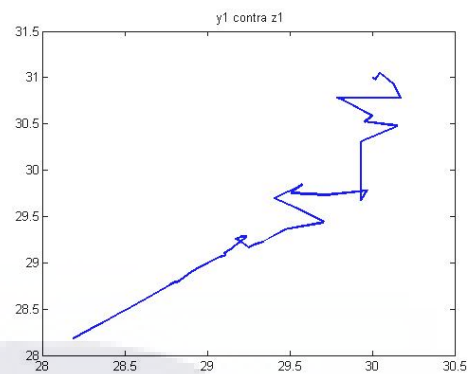


Figura C.28: y_1 contra z_1

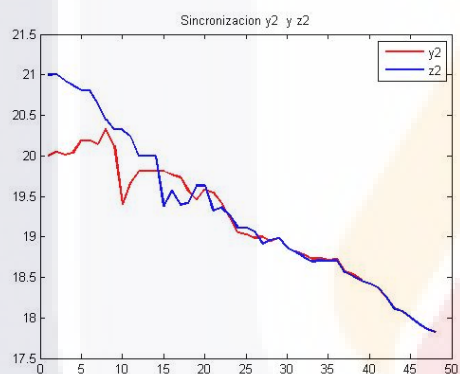


Figura C.29: Sincronización y_2 y z_2

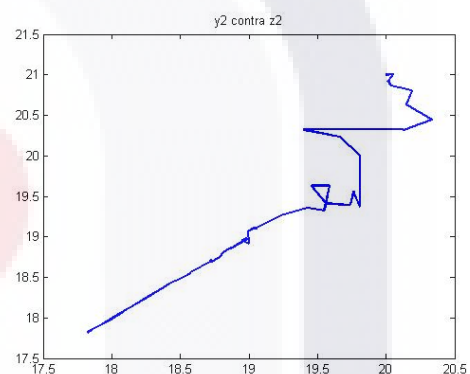


Figura C.30: y_2 contra z_2

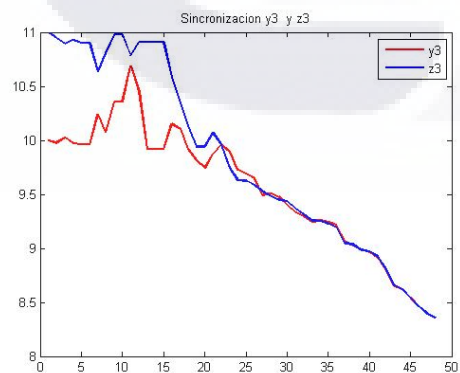


Figura C.31: Sincronización y_3 y z_3

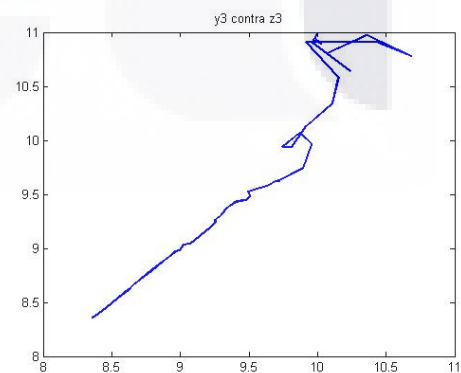


Figura C.32: y_3 contra z_3

Bibliografía

- [1] Henry DI Abarbanel, Nikolai F Rulkov, y Mikhail M Sushchik. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach. *Physical Review E*, 53(5):4528, 1996.
- [2] Iván Aponte. Recocido simulado y búsqueda tabú para el problema de predicción de la estructura terciaria de proteínas.
- [3] TL Carroll y LM Pecora. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett*, 64(8):821–830, 1990.
- [4] Sun Changzhi, Chen Zhifei, y Li Hongmei. Chaotic optimization and taboo search algorithms for design of underwater thruster motor. En *Electrical Machines and Systems, 2003. ICEMS 2003. Sixth International Conference on*, tomo 1, págs. 149–152. IEEE, 2003.
- [5] Oscar German Duarte Velasco. Análisis de sistemas dinámicos. 2002.
- [6] FL Dubeibe. Cálculo del máximo exponente de lyapunov con mathematica. *Revista Colombiana de Física*, 45(1), 2013.
- [7] Juana Graciela Fernández. Caracterización y filtrado de señales. 2005.
- [8] Andrea García, Ángela Restrepo, y Juan D Velásquez. Búsqueda aleatoria repetitiva basada en caos. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, 12(22):137–146, 2013.
- [9] Francisco Herrera. Introducción a los algoritmos metaheurísticos. *Ciencias de la Computación e IA*, 2006.
- [10] Juan Angel Rodríguez Liñán y Jesús de León Morales. Control de sistemas caóticos. *CIENCIA-UANL*, 11(1):5, 2008.

- [11] Juan Ángel Rodríguez Liñán y Jesús de León Morales. Sincronización generalizada en orden reducido para sistemas caóticos. *Ingenierías*, 12(45):2, 2009.
- [12] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [13] M Lorenzo. Influencia del ruido gaussiano correlacionado en la sincronización de los sistemas caóticos. *PhD Physics thesis, Santiago de Compostela, Chile*, 2000.
- [14] Carlos Lourenço y Agnessa Babloyantz. Control of chaos in networks with delay: A model for synchronization of cortical tissue. *Neural Computation*, 6(6):1141–1154, 1994.
- [15] Oscar Lozano. Busqueda tabu. 2003.
- [16] Stephen Lynch. *Dynamical Systems with Applications Using Maple*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [17] Eduardo Morales. Busqueda, optimizacion y aprendizaje. 2004.
- [18] Manuel Loaiza Ramirez. Diseño y simulación de un criptosistema caótico para comunicaciones seguras. 2006.
- [19] Alicia Cirila Riojas Cañari. Búsqueda tabú : conceptos, algoritmo y aplicación al problema de las n-reinas. 2005.
- [20] Enrique Cisneros Saldaña. Diseño de observadores de modos deslizantes para sincronización caótica y comunicaciones seguras. 2006.
- [21] Edward R Scheinerman. *Invitation to dynamical systems*. Courier Corporation, 2012.
- [22] Cesar Moreno Sierra. Sincronización de sistemas caóticos. 2006.
- [23] Christine A Skarda y Walter J Freeman. How brains make chaos in order to make sense of the world. *Behavioral and brain sciences*, 10(02):161–173, 1987.
- [24] Gerard Vidal. Sincronización y control de sistemas dinámicos en régimen de caos espacio-tempora. 2011.