



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE AGUASCALIENTES

CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

TESIS

MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DE FENÓMENOS DE
DEGRADACIÓN Y SU IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

PRESENTA

Pedro Abraham Montoya Calzada

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS CON OPCIÓN A LA COMPUTACIÓN

TUTORES

Dr. Rogelio Salinas Gutiérrez

Dra. Silvia Rodríguez Narciso

COMITÉ TUTORAL

Dr. Netzahualcóyotl Castañeda Leyva

Aguascalientes, Ags. Junio de 2026

Autorizaciones



CARTA DE VOTO APROBATORIO

MTRO. GUILLERMO DOMÍNGUEZ AGUILAR
DECANO DEL CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS
P R E S E N T E

Por medio del presente como **CODIRECTOR** designado del estudiante **PEDRO ABRAHAM MONTOYA CALZADA** con ID 254890 quien realizó la tesis titulada: **MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DE FENÓMENOS DE DEGRADACIÓN Y SU IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL**, un trabajo propio, innovador, relevante e inédito y con fundamento en la fracción IX del Artículo 43 del Reglamento General de Posgrados, doy mi consentimiento de que la versión final del documento ha sido revisada y las correcciones se han incorporado apropiadamente, por lo que me permito emitir el **VOTO APROBATORIO**, para que él pueda continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del grado.

Pongo lo anterior a su digna consideración y sin otro particular por el momento, me permito enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"Se Lumen Proferre"
Aguascalientes, Ags., a 15 de junio de 2026.

Dr. Rogelio Salinas Gutiérrez
Codirector de tesis

c.c.p.- Interesado
 c.c.p.- Coordinación del Programa de Posgrado

Elaborado por: Depto. Apoyo al Posgrado.
 Revisado por: Depto. Control Escolar/Depto. Gestión Integral.
 Aprobado por: Depto. Control Escolar/ Depto. Apoyo al Posgrado.

Código: DO-SEE-FO-07
 Actualización: 02
 Emisión: 13/08/25



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE AGUASCALIENTES

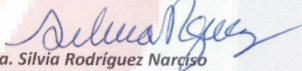
CARTA DE VOTO APROBATORIO

MTRO. GUILLERMO DOMÍNGUEZ AGUILAR
DECANO DEL CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS
P R E S E N T E

Por medio del presente como **CODIRECTORA** designada del estudiante **PEDRO ABRAHAM MONTOYA CALZADA** con ID 254890 quien realizó la tesis titulada: **MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DE FENÓMENOS DE DEGRADACIÓN Y SU IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL**, un trabajo propio, innovador, relevante e inédito y con fundamento en la fracción IX del Artículo 43 del Reglamento General de Posgrados, doy mi consentimiento de que la versión final del documento ha sido revisada y las correcciones se han incorporado apropiadamente, por lo que me permito emitir el **VOTO APROBATORIO**, para que *él* pueda continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del grado.

Pongo lo anterior a su digna consideración y sin otro particular por el momento, me permito enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"Se Lumen Proferre"
Aguascalientes, Ags., a 15 de junio de 2026.


Dra. Silvia Rodríguez Narciso
Codirectora de tesis

c.c.p.- Interesado
c.c.p.- Coordinación del Programa de Posgrado

Elaborado por: Depto. Apoyo al Posgrado.
Revisado por: Depto. Control Escolar/Depto. Gestión Integral.
Aprobado por: Depto. Control Escolar/ Depto. Apoyo al Posgrado.

Código: DO-SEE-FO-07
Actualización: 02
Emisión: 13/08/25



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE AGUASCALIENTES

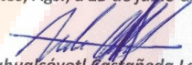
CARTA DE VOTO APROBATORIO

MTRO. GUILLERMO DOMÍNGUEZ AGUILAR
DECANO DEL CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS
P R E S E N T E

Por medio del presente como **ASESOR** designado del estudiante **PEDRO ABRAHAM MONTOYA CALZADA** con ID 254890 quien realizó la tesis titulada: **MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DE FENÓMENOS DE DEGRADACIÓN Y SU IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL**, un trabajo propio, innovador, relevante e inédito y con fundamento en la fracción IX del Artículo 43 del Reglamento General de Posgrados, doy mi consentimiento de que la versión final del documento ha sido revisada y las correcciones se han incorporado apropiadamente, por lo que me permito emitir el **VOTO APROBATORIO**, para que él pueda continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del grado.

Pongo lo anterior a su digna consideración y sin otro particular por el momento, me permito enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"Se Lumen Proferre"
Aguascalientes, Ags., a 15 de junio de 2026.


Dr. Netzahualcōyotl Castañeda Leyva
Asesor de tesis

c.c.p.- Interesado
c.c.p.- Coordinación del Programa de Posgrado

Elaborado por: Depto. Apoyo al Posgrado.
Revisado por: Depto. Control Escolar/Depto. Gestión Integral.
Aprobado por: Depto. Control Escolar/ Depto. Apoyo al Posgrado.

Código: DO-SEE-FO-07
Actualización: 02
Emisión: 13/08/25



**DICTAMEN DE LIBERACIÓN ACADÉMICA
PARA INICIAR LOS TRÁMITES DEL EXAMEN DE GRADO**



Fecha de dictaminación (dd/mm/aaaa): 20/07/2026

NOMBRE: Pedro Abraham Montoya Calzada **ID** 254890

PROGRAMA: Maestría en Ciencias con Opción a la Computación **LGAC (del posgrado):** Computación - Inteligencia Artificial

MODALIDAD DEL PROYECTO DE GRADO: Tesis (x) ***Tesis por artículos científicos** () ****Tesis por Patente** () **Trabajo Práctico** ()

TITULO: MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DE FENÓMENOS DE DEGRADACIÓN Y SU IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Esta investigación contribuye al desarrollo de metodologías para el análisis de fenómenos de degradación y la estimación de la vida útil remanente de sistemas. Además, los métodos desarrollados fueron implementados en paquetes de software de libre acceso.

IMPACTO SOCIAL (señalar el impacto logrado): Esta investigación contribuye al desarrollo de metodologías para el análisis de fenómenos de degradación y la estimación de la vida útil remanente de sistemas. Además, los métodos desarrollados fueron implementados en paquetes de software de libre acceso.

INDICAR SEGÚN CORRESPONDA: **SI, NO, NA (No Aplica)**

<i>Elementos para la revisión académica del trabajo de tesis o trabajo práctico:</i>	
SI	El trabajo es congruente con las LGAC del programa de posgrado
SI	La problemática fue abordada desde un enfoque multidisciplinario
SI	Existe coherencia, continuidad y orden lógico del tema central con cada apartado
SI	Los resultados del trabajo dan respuesta a las preguntas de investigación o a la problemática que aborda
SI	Los resultados presentados en el trabajo son de gran relevancia científica, tecnológica o profesional según el área
SI	El trabajo demuestra más de una aportación original al conocimiento de su área
NO	Las aportaciones responden a los problemas prioritarios del país
SI	Generó transferencia del conocimiento o tecnológica
SI	Cumple con la ética para la Investigación (reporte de la herramienta antiplagio)
<i>El egresado cumple con lo siguiente:</i>	
SI	Cumple con lo señalado por el Reglamento General de Posgrados
SI	Cumple con los requisitos señalados en el plan de estudios (créditos curriculares, optativos, actividades complementarias, estancia, predoctoral, etc.)
SI	Cuenta con los votos aprobatorios del comité tutorial
NA	Cuenta con la carta de satisfacción del Usuario (En caso de que corresponda)
SI	Coincide con el título y objetivo registrado
SI	Tiene congruencia con cuerpos académicos
SI	Tiene el CVU de la SECITI actualizado
NA	Tiene el o los artículos aceptados o publicados y cumple con los requisitos institucionales (en caso de que proceda)
<i>**En caso de Tesis por artículos científicos publicados (completar solo si la tesis fue por artículos)</i>	
NA	Aceptación o Publicación de los artículos en revistas indexadas de alto impacto según el nivel del programa
NA	El (la) estudiante es el primer autor(a)
NA	El (la) autor(a) de correspondencia es el Director (a) del Núcleo Académico
NA	En los artículos se ven reflejados los objetivos de la tesis, ya que son producto de este trabajo de investigación.
NA	Los artículos integran los capítulos de la tesis y se presentan en el idioma en que fueron publicados
<i>**En caso de Tesis por Patente</i>	
NA	Cuenta con la evidencia de solicitud de patente en el Departamento de Investigación (anexarla al presente formato)

Con base en estos criterios, se autoriza continuar con los trámites de titulación y programación del examen de grado:

SI X
No _____

FIRMAS

Elaboró:
*NOMBRE Y FIRMA DEL(LA) CONSEJERO(A) SEGÚN LA LGAC DE ADSCRIPCIÓN: Dr. Rogelio Salinas Gutiérrez

* En caso de conflicto de intereses, firmará un revisor miembro del NA de la LGAC correspondiente distinto al director o miembro del comité tutorial, asignado por el Decano.

NOMBRE Y FIRMA DEL COORDINADOR DE POSGRADO: Dra. Mariana Alfaro Gómez

Revisó:
NOMBRE Y FIRMA DEL SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO: Dra. Iliana Ernestina Medina Ramírez

Autorizó:
NOMBRE Y FIRMA DEL DECANO: Mtro. Guillermo Domínguez Aguilar

Nota: procede el trámite para el Depto. de Apoyo al Posgrado

En cumplimiento con el Art. 24 fracción V del Reglamento General de Posgrado, que a la letra señala entre las funciones del Consejo Académico: Proponer criterios y mecanismos de selección, permanencia, egreso y titulación de estudiantes para asegurar la eficiencia terminal y la titulación y el Art. 28 fracción IX, atender, asesorar y dar el seguimiento del estudiantado desde su ingreso hasta su titulación.

Elaborado por: D. Apoyo al Posg.
Revisado por: D. Control Escolar/D. Gestión de Calidad.
Aprobado por: D. Control Escolar/ D. Apoyo al Posg.

Código: DO-SEE-FO-15
Actualización: 02
Emisión: 12/08/25

Agradecimientos

Agradezco a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIH-TI), por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría.

A la Universidad Autónoma de Aguascalientes, en especial al Departamento de Estadística, por el apoyo recibido durante este proceso.

Agradezco a mis tutores, el Dr. Rogelio Salinas Gutiérrez y la Dra. Silvia Rodríguez Narciso, por su guía, paciencia y apoyo durante el desarrollo de esta tesis.

A mi asesor, el Dr. Nezahualcóyotl Castañeda Leyva, por sus comentarios y sugerencias para mejorar este trabajo.

A mis profesores y compañeros de la maestría, por las conversaciones, observaciones y apoyo a lo largo de esta etapa.

Agradezco Dios, por permitirme concluir esta etapa, a mi esposa Lupita, por su amor, paciencia y apoyo durante todo este proceso y a mi mamá, por su apoyo constante y por estar siempre presente.

Índice general

Autorizaciones	
Índice de tablas	3
Índice de figuras	4
Acrónimos	7
Resumen	8
Abstract	9
Introducción	10
1. Fundamentos teóricos de los procesos de degradación	16
1.1. Modelos de regresión	18
1.2. Procesos estocásticos	18
2. Estado del arte	25
2.1. Una característica de degradación	25
2.2. Múltiples características de degradación	27
3. Modelación	29
3.1. Modelos univariados	29
3.2. Modelos multivariados	33
4. Inferencia	36
4.1. Algoritmo EM	36
4.2. Inferencia para el modelo Wiener	38
4.3. Inferencia para el modelo de reversión a la media	41

4.4. Inferencia para el modelo en 2 dimensiones	43
4.5. Inferencia y construcción del índice de degradación	47
4.6. Estimación de la vida útil remanente	49
5. Estudio de simulación	53
5.1. Proceso de Wiener	53
5.2. Proceso de reversión a la media	56
5.3. Proceso de Wiener en 2 dimensiones	58
5.4. Vida útil remanente con el proceso de Wiener	62
5.5. Vida útil remanente con el proceso de reversión a la media	66
5.6. Vida útil remanente con el proceso de Wiener en 2 dimensiones	69
6. Aplicación	72
6.1. Filtros industriales	72
6.2. Motores turbofan	76
Discusión de resultados	83
Conclusiones	85
Referencias	88

Índice de tablas

5.1. Valores estimados de los parámetros del modelo de desgaste (5.1) y (5.2), con respectivos indicadores de precisión.	54
5.2. Valores estimados de los parámetros del modelo de desgaste (5.3), con respectivos indicadores de precisión.	56
5.3. Valores estimados de los parámetros del modelo de desgaste (5.4), con respectivos indicadores de precisión.	59
5.4. Desempeño de los modelos.	65
5.5. Desempeño de los modelos.	68
5.6. Desempeño de los modelos.	71
6.1. Comparación del desempeño predictivo de los modelos para la estimación de la RUL en el conjunto de datos de filtros industriales.	76
6.2. Variables operacionales y mediciones de sensores del conjunto de datos C-MAPSS.	77
6.3. Comparación del desempeño predictivo de los modelos para la estimación de la RUL en el conjunto de datos C-MAPSS.	81

Índice de figuras

1.	Ilustración de los conceptos de tiempo de vida y vida útil remanente (RUL).	11
5.1.	Simulación del proceso de degradación de la primera característica, de $K= 50$ unidades, según la EDE (5.1).	54
5.2.	Simulación del proceso de degradación de la primera característica, de $K= 50$ unidades, según la EDE (5.2).	54
5.3.	Distribuciones empíricas de los estimadores de los parámetros del modelo de degradación (5.1) y (5.2). La línea roja indica el respectivo valor real del parámetro.	55
5.4.	Simulación del proceso de degradación de la primera característica, de $K= 50$ unidades, según la EDE (5.3).	56
5.5.	Distribuciones empíricas de los estimadores de los parámetros del modelo de degradación (5.3). La línea roja indica el respectivo valor real del parámetro.	57
5.6.	Gráfico de pares de los estimadores de los parámetros del modelo de degradación (5.3).	58
5.7.	Simulación del proceso de degradación, de $K= 50$ unidades, según la EDE (5.4).	59
5.8.	Distribuciones empíricas de los estimadores de los parámetros del modelo de degradación (5.4). La línea roja indica el respectivo valor real del parámetro.	60
5.9.	Gráfico de pares de los estimadores de los parámetros del modelo de degradación (5.4).	61
5.10.	Trayectorias de degradación simuladas para $K = 100$ unidades. La línea roja indica el nivel crítico de falla y las trayectorias terminan en distintos instantes debido a la presencia de censura.	62

5.11. Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de Wiener.	64
5.12. Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de reversión a la media.	64
5.13. Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de regresión.	65
5.14. Trayectorias de degradación simuladas para $K = 100$ unidades. La línea roja indica el nivel crítico de falla y las trayectorias terminan en distintos instantes debido a la presencia de censura.	66
5.15. Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de reversión a la media.	67
5.16. Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo Wiener.	67
5.17. Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de regresión.	68
5.18. Trayectorias de degradación simuladas para $K = 100$ unidades. La línea roja indica el nivel crítico de falla y las trayectorias terminan en distintos instantes debido a la presencia de censura.	70
5.19. Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo Wiener con dependencia.	70
5.20. Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo Wiener independiente.	71
6.1. Datos de entrenamiento del conjunto de datos de filtros industriales.	73
6.2. Datos de prueba del conjunto de datos de filtros industriales.	73
6.3. Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo Wiener.	74
6.4. Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de reversión a la media.	75
6.5. Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de regresión.	75
6.6. Mediciones de los sensores T50 y NRf para tres unidades observadas hasta la falla.	78
6.7. Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de Wiener con las variables $T50$ y NRf	80

6.8. Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el índice con las variables $T50$ y NRf . 80

6.9. Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el índice con 11 variables. 81



Acrónimos

C-MAPSS Commercial Modular Aero-Propulsion System Simulation.

EM Expectation-Maximization.

MCMC Markov Chain Monte Carlo.

MCMC-EM Markov Chain Monte Carlo Expectation-Maximization.

MCEM Monte Carlo Expectation-Maximization.

RUL Remaining Useful Life (Vida Útil Remanente).

EDE Ecuación Diferencial Estocástica.

MLE Maximum Likelihood Estimation (Estimación por Máxima Verosimilitud).

OU Ornstein-Uhlenbeck.

CRAN Comprehensive R Archive Network.

NASA National Aeronautics and Space Administration.

PHM Prognostics and Health Management.

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

Resumen

Los fenómenos de degradación permiten estudiar el deterioro de un sistema antes de que ocurra la falla, proporcionando información útil para estimar la vida útil remanente y apoyar decisiones de mantenimiento predictivo. En esta tesis se modelan fenómenos de degradación mediante procesos estocásticos, considerando modelos univariados, una extensión bivariada y un índice de salud. En particular, se estudian modelos basados en el proceso de Wiener y en el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, incorporando efectos aleatorios para representar la heterogeneidad entre unidades y la variabilidad propia de las trayectorias observadas.

La inferencia de los modelos se realiza mediante el algoritmo EM y variantes basadas en simulación Monte Carlo mediante cadenas de Markov, debido a que la presencia de efectos aleatorios dificulta maximizar la función de verosimilitud de manera directa. Además, se desarrolla un procedimiento basado en simulación para estimar la vida útil remanente de unidades parcialmente observadas, generando trayectorias futuras condicionadas a la información disponible.

También se considera el uso de índices de salud para resumir información multivariada en una sola señal de degradación. Este enfoque resulta útil cuando se tienen múltiples sensores, aunque requiere contar con unidades que hayan llegado hasta el fallo para construir adecuadamente el índice.

Los modelos se evalúan mediante estudios de simulación y aplicaciones con datos reales. Finalmente, los métodos estudiados se implementan y hacen públicos mediante los paquetes de R `degradr` y `mixediffusion`.

Palabras claves: procesos de degradación, procesos estocásticos, efectos aleatorios, algoritmo EM, MCMC-EM, vida útil remanente.

Abstract

Degradation phenomena allow the deterioration of a system to be studied before failure occurs, providing useful information to estimate the remaining useful life and support predictive maintenance decisions. In this thesis, degradation phenomena are modeled by means of stochastic processes, considering univariate models, a bivariate extension, and a health index. In particular, models based on the Wiener process and the Ornstein–Uhlenbeck process are studied, incorporating random effects to represent heterogeneity between units and the inherent variability of the observed trajectories.

Model inference is carried out using the EM algorithm and variants based on Monte Carlo simulation through Markov chains, due to the fact that the presence of random effects makes it difficult to maximize the likelihood function directly. In addition, a simulation-based procedure is developed to estimate the remaining useful life of partially observed units, generating future trajectories conditioned on the available information. The use of health indices to summarize multivariate information into a single degradation signal is also considered. This approach is useful when multiple sensors are available, although it requires units that have reached failure in order to properly construct the index.

The models are evaluated through simulation studies and applications with real data. Finally, the studied methods are implemented and made publicly available through the R packages `degradr` and `mixeddiffusion`.

Keywords: degradation processes, stochastic processes, random effects, EM algorithm, MCMC-EM, remaining useful life, health index.

Introducción

Con la creciente adopción de nuevas tecnologías en la industria, obtener datos representativos de la confiabilidad de un producto, sistema o componente, se ha vuelto cada vez más asequible, en este contexto, el tener herramientas estadísticas que puedan transformar esos datos en información valiosa para la industria es muy relevante.

La confiabilidad se define como: la capacidad de un elemento (sistema, componente, producto) para funcionar como se requiere en un contexto operativo establecido y durante un periodo de tiempo establecido Rausand y Hoyland (2003).

Existen varios tipos de estudio en confiabilidad, como se describen a continuación. Pruebas tradicionales: se registran únicamente tiempos de falla de las unidades; pruebas de vida acelerada: las unidades se someten a niveles altos de esfuerzo; pruebas de degradación: cuando existe alguna característica cuyo desgaste sobre el tiempo esta relacionado con la confiabilidad.

Los estudios de degradación suelen aportar más información sobre la confiabilidad, pues permiten observar la evolución del deterioro antes de que ocurra la falla. Al trabajar con datos de degradación generalmente se esta interesado en dos distribuciones: la distribución del tiempo de vida y/o la distribución del tiempo de vida útil remanente.

La forma funcional de la degradación puede ser lineal, cóncava o convexa, y dependiendo del sistema las mediciones pueden presentar un comportamiento monótono creciente o bien mostrar fluctuaciones debidas a variación operacional, ruido de medición o cambios en las condiciones de uso. En muchos procesos industriales la tendencia general es creciente, pero la señal observada no siempre crece de manera estricta en cada instante, lo que hace necesario emplear modelos capaces de representar tanto la tendencia como la variabilidad alrededor de ella.

El análisis de fenómenos de degradación ha adquirido una importancia creciente en la industria moderna debido a que los sistemas actuales suelen ser altamente confiables y pueden operar durante largos periodos antes de presentar una falla observable. En estos escenarios, registrar exclusivamente tiempos de falla resulta impráctico, costoso o directamente inviable, ya que podría requerir meses o incluso años de operación continua para obtener información suficiente. En contraste, las señales de degradación permiten obtener evidencia temprana del deterioro antes del fallo y facilitan el monitoreo del estado real del componente a lo largo de su vida útil.

Además, el uso de datos de degradación permite abordar dos perspectivas fundamentales en confiabilidad. En primer lugar, posibilita el estudio del comportamiento poblacional mediante la construcción de curvas típicas de deterioro y la estimación de la distribución del tiempo a falla para un conjunto de unidades. En segundo lugar, y de manera especialmente relevante para aplicaciones industriales, permite realizar predicciones individuales: al observar una porción de la trayectoria de una unidad específica, es posible actualizar su estado actual y estimar su vida útil remanente (RUL). Esta última perspectiva es esencial para estrategias modernas de mantenimiento predictivo, donde las decisiones se toman a nivel unidad y no únicamente a nivel población.

Modelos utilizados en degradación

Los modelos que se utilizan, han resultado ser eficaces en muchas situaciones, cada uno de ellos, presentan algunas limitaciones. En primer lugar, una parte importante de los enfoques utilizados se basa en ajustes de modelos de regresión. Estos métodos son ampliamente utilizados por su sencillez y porque son rápidos de implementar, no obstante, una de sus limitantes es que asumen independencia en las observaciones a través del tiempo.

Por otro lado, algunos modelos estocásticos empleados en la literatura suponen que la degradación es estrictamente monótona. Este tipo de aproximaciones resulta adecuado

cuando el deterioro crece continuamente en el tiempo, pero son incapaces de representar procesos con oscilaciones. Esta restricción limita su aplicabilidad en escenarios donde la señal observada no crece de manera estricta, aun cuando la tendencia general sea creciente.

Finalmente, en sistemas donde se registran múltiples características de degradación simultáneamente, con frecuencia, se modelan de forma independiente o se combinan mediante la construcción de índices que reflejen la degradación del sistema.

Motivación para el uso e implementación computacional de procesos estocásticos

El uso de procesos estocásticos en la modelación de fenómenos de degradación permite capturar la dinámica temporal del deterioro, así como la variabilidad inherente asociada a condiciones operativas.

Por otro lado, a pesar de su solidez teórica, la adopción de estos modelos en aplicaciones reales se puede ver limitada, principalmente debido a la complejidad en su inferencia y a la ausencia de implementaciones accesibles para usuarios no especializados en procesos estocásticos.

En este contexto, además del desarrollo metodológico, esta tesis enfatiza la implementación computacional de los modelos propuestos. Se desarrollan herramientas en el lenguaje R que permiten realizar estimación, simulación y predicción del RUL a partir de datos observados, reduciendo la barrera técnica para su aplicación práctica.

Objetivo de la tesis

Modelar fenómenos de degradación mediante procesos estocásticos y su implementación computacional.

Contribuciones principales

Las contribuciones de esta tesis se centran en el desarrollo teórico, inferencial y computacional de un marco estocástico para la modelación de fenómenos de degradación. De manera específica, las principales aportaciones son:

1. **Modelación de fenómenos de degradación univariados y multivariados.** Se modelan fenómenos de degradación que pueden tener una o varias características de degradación.
2. **Desarrollo de procedimientos de inferencia.** Se derivan las expresiones necesarias para estimar los parámetros de los modelos propuestos.
3. **Implementación computacional reproducible en R.** Se desarrollan paquetes en el software R que permiten realizar estimación, simulación y predicción de manera accesible, reduciendo la brecha entre la teoría de procesos estocásticos y su aplicación práctica en contextos industriales.
4. **Estudio de desempeño en datos simulados y reales.** Se realiza una evaluación del comportamiento inferencial y predictivo de los modelos utilizados.

Estructura de la tesis

La tesis se organiza en seis capítulos. En el Capítulo 1 se presentan los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo del trabajo, incluyendo conceptos de confiabilidad, fenómenos de degradación, vida útil remanente, modelos de regresión, procesos estocásticos de difusión y técnicas de fusión de datos para la construcción de índices de degradación.

En el Capítulo 2 se realiza una revisión del estado del arte sobre modelación de fenómenos de degradación. Se describen trabajos representativos para una y múltiples características de degradación, considerando modelos de regresión, procesos estocásticos e índices de salud.

En el Capítulo 3 se presentan los modelos de degradación considerados en esta tesis. Se introducen modelos univariados basados en procesos de Wiener y Ornstein–Uhlenbeck con efectos aleatorios, así como una extensión multivariada y un enfoque basado en índices de degradación.

En el Capítulo 4 se desarrollan los procedimientos de inferencia para los modelos propuestos. Se presenta el algoritmo EM, sus variantes basadas en simulación Monte Carlo y los métodos utilizados para la estimación de la vida útil remanente.

En el Capítulo 5 se evalúa el desempeño de los modelos mediante estudios de simulación. Se analiza tanto la calidad de la estimación de parámetros como la capacidad predictiva de los modelos para la estimación de la vida útil remanente.

En el Capítulo 6 se presentan aplicaciones con datos reales de filtros industriales y motores turbofan. Finalmente, se discuten los resultados obtenidos y se presentan las conclusiones generales del trabajo.



Capítulo 1

Fundamentos teóricos de los procesos de degradación

En este capítulo se presentan los conceptos teóricos necesarios para el desarrollo de esta tesis, incluyendo definiciones básicas de degradación y vida útil remanente, modelos de regresión utilizados en la literatura, procesos estocásticos de difusión y algunos de los enfoques más empleados para modelar fenómenos de degradación univariados y multivariados.

Definición 1.1. *Un proceso de degradación es una familia de variables aleatorias*

$$\{Y_{kt} : t \geq 0\},$$

que describe la evolución en el tiempo t , de una característica medible de un componente ó sistema cuyo comportamiento está asociado con su deterioro o pérdida de funcionalidad. La falla del sistema ocurre cuando la trayectoria alcanza un umbral crítico D , en este caso, el tiempo a la falla es

$$T = \inf\{t \geq 0 : Y_{kt} \geq D\}.$$

Así, Y_{kt} es la degradación de la unidad k en el tiempo t .

El nivel crítico D generalmente es un valor fijo, pero en ocasiones D puede ser una variable aleatoria.

Definición 1.2 (Distribución del tiempo de vida). *La **distribución del tiempo de vida** describe la incertidumbre asociada al tiempo requerido para que un proceso de degradación alcance el nivel crítico de falla D , cuando la observación inicia en $t = 0$.*

Su función de distribución está dada por

$$F_T(t) = P(T \leq t), \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

Esta distribución representa la probabilidad de que la trayectoria de degradación de una unidad nueva alcance el nivel crítico de falla D antes o en el instante t .

Definición 1.3 (Distribución de vida útil remanente). *Sea $t_c > 0$ un instante de observación tal que la unidad continúa operando. La **distribución de vida útil remanente** (Remaining Useful Life, RUL) describe la incertidumbre asociada al tiempo restante hasta que el proceso de degradación alcance el nivel crítico de falla D . Su función de distribución está dada por*

$$F_{RUL}(t) = P(T - t_c \leq t \mid T > t_c), \quad t \geq 0. \quad (1.2)$$

Esta distribución representa la probabilidad de que la trayectoria de degradación de una unidad en funcionamiento alcance el nivel crítico de falla D dentro de los próximos t instantes de tiempo, dado que la unidad ha sobrevivido hasta el instante de observación t_c .

Para el caso de múltiples características de degradación se define el proceso de degradación como $\mathbf{Y}_{kt} = \{(Y_{kt}^1, \dots, Y_{kt}^J), t \geq 0\}$ y $\mathbf{D} = (D_1, \dots, D_J)$ es el vector de niveles críticos de falla asociados a cada característica. Los elementos de \mathbf{D} pueden ser constantes o variables aleatorias.

Para cada característica $j = 1, \dots, J$, el tiempo de falla se define como

$$T_j = \inf\{t \geq 0 : Y_{kt}^j \geq D_j\}.$$

La definición del tiempo de falla global del sistema depende del criterio de falla adoptado.

Los casos particulares más comunes son:

- **Sistema en serie:**

$$T = T_{(1)} = \min_{1 \leq j \leq J} T_j.$$

El sistema falla cuando cualquiera de las características alcanza su nivel crítico.

- **Sistema en paralelo:**

$$T = T_{(J)} = \max_{1 \leq j \leq J} T_j.$$

El sistema falla cuando todas las características han alcanzado sus respectivos niveles críticos.

1.1. Modelos de regresión

Un modelo de regresión de efectos mixtos, en su forma general, caracteriza la degradación de la siguiente manera,

$$Y_{kti} = \eta(t_i; \phi, \theta_k) + \varepsilon_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots, K, i = 1, 2, \dots, n_k$$

$$\varepsilon_{ki} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \dots, n_k$$

Donde K es el número total de unidades, n_k es el número de mediciones para la unidad k , i es el índice de tiempo y k es el índice de unidad, ϕ vector de parámetros de efectos fijos, común a todas las unidades, θ_k vector de efectos aleatorios para la unidad k y tiene distribución F_θ con vector de parámetros Φ_θ , $\eta(t_i; \phi, \theta_k)$ es una relación funcional que describe la degradación y cuya forma puede establecerse a partir del comportamiento observado del fenómeno, principios físicos o conocimiento previo del sistema.

En muchos casos, la distribución de θ_k se asume que es normal multivariada, así,

$$\theta_k \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_\theta, \Sigma_\theta).$$

De esta manera, el vector de parámetros del modelo es $\Phi = (\phi, \boldsymbol{\mu}_\theta, \Sigma_\theta, \sigma^2)$.

1.2. Procesos estocásticos

Procesos de difusión

Definición 1.4. Sea $\{Y(t), t \in T\}$ un proceso estocástico a tiempo continuo y de estado continuo. La media infinitesimal $m(y, t)$ y la varianza infinitesimal $v(y, t)$ se definen, respectivamente, por

$$m(y, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[Y(t + \varepsilon) - Y(t) \mid Y(t) = y], \quad (1.3)$$

$$v(y, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[(Y(t + \varepsilon) - Y(t))^2 \mid Y(t) = y]. \quad (1.4)$$

Definición 1.5. Un proceso estocástico $\{Y(t), t \in t \geq 0\}$, se dice que es gaussiano si el vector aleatorio $(Y(t_1), \dots, Y(t_n))$ tiene distribución normal multivariada, para cualquier n y para cualquier colección de tiempos $0 = t_0 < t_1, \dots < t_n$.

Definición 1.6. Un proceso estocástico $\{Y(t), t \geq 0\}$, se dice Markoviano si

$$P(Y(t_n) \leq y_n \mid Y(t_i), t_i \leq t_{n-1}) = P(Y(t_n) \leq y_n \mid Y(t_{n-1})),$$

donde $t_{n-1} < t_n$.

Definición 1.7. Un proceso estocástico markoviano en tiempo continuo y estado continuo $\{Y(t), t \geq 0\}$, con espacio de estados en un intervalo (a, b) , se denomina proceso de difusión si satisface:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P(|Y(t + \varepsilon) - Y(t)| > \delta \mid Y(t) = y) = 0, \tag{1.5}$$

para todo $\delta > 0$ y todo $y \in (a, b)$, y si sus parámetros infinitesimales están definidos por las funciones $m(y, t)$ y $v(y, t)$ y son continuas en y y t . Lefebvre (2007).

Procesos de Wiener

El proceso de difusión más importante y a partir del cual se construyen otros procesos es, el proceso Wiener, o movimiento Browniano que se define a continuación.

Definición 1.8. Un proceso estocástico $\{W(t), t \geq 0\}$ se denomina proceso de Wiener, o movimiento Browniano, si cumple:

1. $W(0) = 0$ casi seguramente.
2. Tiene incrementos independientes; es decir, para cualesquiera $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, las variables aleatorias

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

son independientes.

3. Tiene incrementos estacionarios; es decir, para todo $t, h \geq 0$,

$$W(t + h) - W(t) \stackrel{d}{=} W(h) - W(0).$$

4. Para todo $t > 0$,

$$W(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t).$$

5. Sus trayectorias son continuas casi seguramente.

El proceso de Wiener constituye la base de una amplia familia de procesos de difusión utilizados en modelación estocástica. Sus propiedades de proceso gaussiano, incrementos independientes y la continuidad de trayectorias lo convierten en el bloque fundamental a partir del cual se construyen modelos más generales. Dado que es la base para construir otros modelos, el siguiente teorema es importante para garantizar que tales modelos existan y sean únicos.

Teorema 1 (Teorema de existencia y unicidad Øksendal (2003)). Sea $T > 0$ y sean

$$m(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

funciones medibles tales que satisfacen la condición de Lipschitz

$$|m(y, t)| + |v(y, t)| \leq C_1(1 + |y|), \quad (1.6)$$

para toda $y \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, T]$, donde $C_1 > 0$ es una constante.

Supóngase además que

$$|m(y, t) - m(z, t)| + |v(y, t) - v(z, t)| \leq C_2|y - z|, \quad (1.7)$$

para toda $y, z \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, T]$, con $C_2 > 0$ una constante.

Sea Z una variable aleatoria independiente del movimiento Browniano $\{W_t, t \geq 0\}$ y tal que

$$E(|Z|^2) < \infty.$$

Entonces, la ecuación diferencial estocástica

$$dY(t) = m(Y(t), t) dt + v(Y(t), t) dW_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

con condición inicial

$$Y(0) = Z,$$

posee una única solución continua $\{Y(t), t \in [0, T]\}$ adaptada a la filtración generada

por Z y $\{W_t, t \geq 0\}$, y además

$$E \left[\int_0^T |Y(t)|^2 dt \right] < \infty.$$

Una de las variantes del proceso de Wiener es el *Browniano con deriva*. Este proceso incorpora una tendencia determinista (lineal en el tiempo) y se define como la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dY_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (1.8)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es el coeficiente de deriva y $\sigma > 0$ es el parámetro de difusión. Esta ecuación diferencial estocástica (EDE), tiene solución explícita dada por

$$Y_t = Y_0 + \mu t + \sigma W_t. \quad (1.9)$$

El tiempo de primera pasada

$$T = \inf\{t > 0 : Y_t = D\}$$

tiene distribución **Inversa Gaussiana** $IG(\mu_{IG}, \lambda_{IG})$, cuyos parámetros son

$$\mu_{IG} = \frac{D - Y_0}{\mu}, \quad \lambda_{IG} = \frac{(D - Y_0)^2}{\sigma^2}.$$

Cuando el proceso modela degradación, esta distribución coincide con la distribución del tiempo de vida, por lo que el modelo resulta especialmente atractivo debido a su fórmula analítica.

El Browniano con deriva presenta una limitación para la modelación de degradación: la varianza crece linealmente en el tiempo, $\text{Var}(Y_t) = \sigma^2 t$. Esto implica que, conforme avanza el tiempo, las trayectorias se dispersan de manera cada vez más pronunciada, lo cual, en ocasiones, no coincide con el comportamiento físico de sistemas reales, en los que la degradación suele evolucionar alrededor de una tendencia local relativamente estable. Esta expansión no controlada del proceso podría dificultar la predicción del estado futuro y del RUL, especialmente para señales cuyo nivel de variabilidad no aumenta indefinidamente.

Proceso Ornstein–Uhlenbeck

El proceso de Ornstein–Uhlenbeck (OU) es un proceso de difusión gaussiano que incorpora un mecanismo de reversión a la media. Este proceso se define como la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dY_t = \lambda(\mu - Y_t) dt + \sigma dW_t, \quad (1.10)$$

donde $\lambda > 0$ es el parámetro de velocidad de reversión, $\mu \in \mathbb{R}$ es el nivel de equilibrio o media de largo plazo, $\sigma > 0$ es el parámetro de difusión y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Wiener.

La dinámica del proceso está gobernada por dos componentes: la deriva $\lambda(\mu - Y_t)$, que empuja al proceso hacia el nivel μ , y el término estocástico σdW_t , que introduce fluctuaciones aleatorias. El parámetro λ controla la rapidez con la que el proceso regresa a su media, mientras que σ determina la magnitud de las oscilaciones alrededor de la tendencia.

La solución explícita de la ecuación diferencial estocástica está dada por

$$Y_t = \mu + (Y_0 - \mu)e^{-\lambda t} + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW_s. \quad (1.11)$$

En consecuencia, el proceso es gaussiano y su distribución condicional es normal. En particular

$$\mathbb{E}[Y_t | Y_0] = \mu + (Y_0 - \mu)e^{-\lambda t}, \quad (1.12)$$

$$\text{Var}(Y_t | Y_0) = \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}). \quad (1.13)$$

A diferencia del proceso de Wiener con deriva, cuya varianza crece linealmente en el tiempo, el proceso de Ornstein–Uhlenbeck presenta varianza creciente y convergente cuando $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(Y_t) = \frac{\sigma^2}{2\lambda}.$$

Esta propiedad lo hace particularmente adecuado para modelar señales que evolucionan alrededor de una tendencia estable, permitiendo representar fluctuaciones locales con dispersión acotada.

Otro proceso ampliamente utilizado es el proceso Gamma, modelo útil para describir

fenómenos de degradación estrictamente crecientes. Un proceso $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ es Gamma si posee incrementos independientes y estacionarios y satisface

$$Y_t - Y_s \sim \text{Gamma}(\alpha(t - s), \beta), \quad 0 \leq s < t,$$

donde $\alpha > 0$ es el parámetro de tasa temporal y $\beta > 0$ el parámetro de escala. De esta forma, Y_t tiene distribución Gamma con esperanza $\mathbb{E}[Y_t] = \alpha t / \beta$ y varianza $\text{Var}(Y_t) = \alpha t / \beta^2$. Ambas funciones son crecientes de manera lineal en el tiempo.

El proceso Gamma resulta apropiado para representar mecanismos de deterioro acumulativo e irreversibles, tales como corrosión uniforme, desgaste por abrasión o acumulación de daño. No obstante, su tendencia estrictamente monótona podría limitar su aplicación a señales de degradación que presentan fluctuaciones, estabilización temporal o comportamiento no-monótono.

Fusión de datos e índice de degradación

Los sistemas modernos de monitoreo modernos suelen registrar simultáneamente múltiples características, generando un proceso de degradación de naturaleza multivariada. Una aproximación común para manejar esta complejidad consiste en construir un *índice de degradación* (Health Index, HI) univariado que condense la información multivariada en una sola variable latente. Bajo esta perspectiva, las características de degradación se proyectan sobre un espacio de menor dimensión o se combinan mediante técnicas estadísticas, y el índice resultante se modela mediante métodos univariados como los modelos de regresión. Este enfoque proporciona una solución práctica, pero introduce fuentes adicionales de error debidas a la reducción artificial de la dimensión y puede perder dependencia estructural relevante entre características.

El índice se construye fusionando la información de múltiples características de degradación; generalmente, se hace mediante una combinación lineal. Así, un índice de degradación se define como:

$$h_{kt} = w_1 Y_{kt}^1 + w_2 Y_{kt}^2 + \dots + w_J Y_{kt}^J \tag{1.14}$$

donde w_j representa el peso asociado a la característica de degradación j , con $j = 1, \dots, J$. Los pesos pueden ser fijados a priori a partir de conocimiento experto o estimados a partir de los datos.

El objetivo de un índice de degradación es resumir la información contenida en múltiples características de degradación en una única variable que describa el estado de

degradación del sistema.

Una vez construido el índice de degradación, el problema de estimación de la vida útil regresa al caso univariado. Donde D_h es el nivel crítico asociado al índice de degradación, tal nivel crítico, dado que el índice de degradación se construye a partir de una transformación de múltiples características, su escala no tiene interpretación física directa. En consecuencia, definir un nivel crítico D_h es un problema adicional, porque dicho umbral no suele estar asociado de manera natural a una condición observable del sistema.



TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

Capítulo 2

Estado del arte

2.1. Una característica de degradación

Uno de los enfoques más utilizados para modelar la degradación se presenta en Lu y Meeker (1993), donde la degradación se modela mediante un modelo de regresión de efectos mixtos de la forma

$$Y_{kti} = \eta(t_i; \phi, \theta_k) + \varepsilon_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad i = 1, 2, \dots, n_k,$$

$$\varepsilon_{ki} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

$$\theta_k \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_\theta, \Sigma_\theta).$$

Para la inferencia de los parámetros, los autores consideran un procedimiento de estimación de dos etapas computacionalmente eficiente. En la primera etapa, el modelo se ajusta de manera independiente a cada unidad mediante mínimos cuadrados, obteniendo estimaciones de los efectos aleatorios $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_K$. En la segunda etapa, estas estimaciones se utilizan para estimar los parámetros poblacionales $\boldsymbol{\mu}_\theta$ y Σ_θ , así como los efectos fijos del modelo.

Una vez estimada la distribución de los efectos aleatorios, los autores utilizan el modelo ajustado para obtener la distribución del tiempo de falla inducida por la trayectoria de degradación.

Los modelos de regresión con efectos mixtos representan una primera aproximación para describir trayectorias de degradación, al capturar la variación entre unidades mediante parámetros aleatorios. Sin embargo, tal como se discute en N. Gebraeel (2006), estos

modelos presentan algunas limitantes: la formulación clásica asume errores independientes e idénticamente distribuidos, lo que ignora la correlación temporal característica de señales de degradación reales. Evidencia empírica presentada en N. Gebraeel (2006) muestra que estas simplificaciones pueden conducir a predicciones deficientes del tiempo remanente de vida cuando la estructura estocástica del proceso no es modelada adecuadamente.

Los procesos de Wiener también han sido muy utilizados en degradación, diversos trabajos han empleado variantes del proceso de Wiener para modelar trayectorias de degradación. Whitmore (1995) incorpora explícitamente errores de medición, modelando la degradación mediante un proceso de Wiener con efectos fijos y el error en las mediciones las modela con ruido normal independiente al proceso de degradación, esto es, la degradación real se modela con:

$$Y_{kt} = Y_{k0} + \mu t + \sigma W_{kt},$$

y la degradación observada, es:

$$X_{kt} = Y_{kt} + \varepsilon_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots, K, i = 1, 2, \dots, n_k$$

$$\varepsilon_{ki} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \dots, n_k.$$

Whitmore (1995) desarrolló la inferencia por máxima verosimilitud en este escenario. Hove y Mlambo (2022) muestran que el Browniano con deriva reproduce adecuadamente la acumulación aleatoria de daño, validándolo mediante simulaciones y aplicaciones reales. Por su parte, N. Gebraeel (2006) utilizan un componente Browniano para capturar la variabilidad del proceso en modelos exponenciales de degradación.

Por otro lado, Ye et al. (2013) extienden el modelo propuesto por Whitmore (1995) al incorporar efectos aleatorios lineales para modelar la heterogeneidad entre unidades, manteniendo el error de medición gaussiano. Además, desarrollan procedimientos de inferencia por máxima verosimilitud para la estimación de los parámetros y muestran que su modelo incluye como casos particulares al proceso de Wiener clásico y al modelo de Whitmore (1995).

Por otro lado, Deng, Barros y Grall (2016) proponen modelar la degradación mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck de efectos fijos dependiente del tiempo, el cual permite describir trayectorias con fluctuaciones alrededor de una tendencia general de deterioro. El proceso se define mediante una ecuación diferencial estocástica en la que

la función media de degradación puede especificarse de forma flexible y las fluctuaciones se modelan mediante un término Browniano. Los autores desarrollan la inferencia mediante máxima verosimilitud utilizando la densidad de transición exacta del proceso y estiman la vida útil remanente a partir de tiempos de primer cruce de un umbral de falla. Los resultados muestran que el modelo proporciona una representación adecuada de procesos de degradación con correlación temporal y variabilidad no monótona.

Procesos Gamma y otros procesos de Lévy también han sido ampliamente utilizados en la literatura, (véase H. Wang, Xu y Mi (2015), Y. Shi et al. (2020), P. Wang, Gao y Woyczynski (2021)).

2.2. Múltiples características de degradación

Con el incremento en la disponibilidad de tecnología para monitorear degradación, surgió la necesidad de modelar más de una característica de degradación.

Para el caso de 2 características se han utilizado procesos estocásticos de manera conjunta, como en Han, Li y Chen (2023), donde se desarrolla un modelo estocástico con función cópula para la predicción de la vida útil restante (RUL) de tuberías submarinas sujetas a degradación por corrosión y fatiga utilizando procesos gamma (corrosión) y Wiener respectivamente y creando un modelo conjunto con cópulas para capturar dependencias complejas.

En los casos con 2 o más características de degradación, se han utilizado técnicas como componentes principales (PCA), ver R et al. (2019), para la fusión de datos y construcción de índices, sin embargo, uno de los primeros esfuerzos en esta dirección fue presentado por Liu, N. Z. Gebraeel y J. Shi (2013), quienes propusieron una metodología de fusión de datos para construir un índice de salud (*health index*) a partir de múltiples características de degradación. La metodología busca obtener una señal compuesta que preserve propiedades deseables para aplicaciones de pronóstico, tales como la monotonidad de la degradación y una baja variabilidad en el umbral de falla entre unidades.

Se mostró que el enfoque mejoró respecto al uso individual de las características, no obstante, los autores señalan que el procedimiento de fusión y el modelado de la degradación se realizaban de manera independiente. Como consecuencia, no existía garantía de que el índice de salud obtenido fuera el más adecuado para el modelo de degradación utilizado posteriormente en las tareas de pronóstico.

Con el objetivo de superar esta limitación, Liu y Huang (2016) propusieron una meto-

dología que integra la construcción del índice de salud con el proceso de modelado de la degradación. Este enfoque permite obtener índices de salud más adecuados para las tareas de pronóstico y constituye una de las principales referencias en el desarrollo de metodologías basadas en índices de degradación obtenidos mediante fusión de datos. Esta estrategia de reducción ha sido formalizada en Liu y Huang (2016), donde se propone un método semi-paramétrico de fusión de datos para obtener un índice que minimice simultáneamente los errores de ajuste del modelo de degradación y la variabilidad del umbral de falla. El resultado es un índice que captura de manera más estable la condición del sistema.

La metodología propuesta por Liu y Huang (2016) consta de 4 pasos:

1. Recopilación de señales basadas en la degradación provenientes de múltiples sensores.
2. Caracterización de los patrones de degradación de las señales.
3. Entrenamiento de los pesos óptimos para combinar los datos de múltiples sensores, minimizando tanto los errores de ajuste del modelo como la varianza en el umbral de fallo.
4. Construcción del índice de salud a partir de los pesos óptimos obtenidos.

El modelo de degradación utilizado para modelar el índice es un polinomio de grado $p \geq 1$, que es un caso particular del modelo de regresión de Lu y Meeker (1993).

Fuera de los índices de degradación contruidos mediante modelos estadísticos, cuando existen múltiples características de degradación también se han desarrollado enfoques basados en redes neuronales. En Guo et al. (2017), las características más relevantes extraídas de señales de vibración son seleccionadas mediante criterios de monotonicidad y correlación, para posteriormente ser fusionadas mediante una red neuronal recurrente y obtener un indicador de salud univariado. Al igual que otros enfoques de fusión de datos, la construcción del indicador de salud se realiza en una etapa previa al modelado de la degradación.

Capítulo 3

Modelación

En este capítulo se describen los modelos que se consideran para caracterizar las trayectorias de degradación junto con algunas de sus características.

Para el caso univariado, el fenómeno de degradación se modelará mediante variantes de los procesos de Wiener (1.8) y Ornstein–Uhlenbeck (1.10). Para el caso multivariado, la degradación se modela mediante la extensión al caso bivariado del proceso (1.8) así como el índice de degradación propuesto por Liu y Huang (2016).

3.1. Modelos univariados

Sea $Y_{kt} \in \mathbb{R}$ la característica de degradación observada de la unidad k en el tiempo $t \geq 0$, para $k = 1, \dots, K$. La característica se modela con una de las siguientes dos ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dY_{kt} = \mu(a_k, t)dt + \sigma dW_{kt} \tag{3.1}$$

y

$$dY_{kt} = \lambda(\mu(a_k, t) - Y_{kt})dt + \sigma dW_{kt}, \tag{3.2}$$

con efectos aleatorios

$$a_k \sim \mathcal{N}(\mu_a, \sigma_a^2). \tag{3.3}$$

con $\mu_a \in \mathbb{R}$, $\sigma_a^2 > 0$, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$ y $\{W_{kt}\}$ es un movimiento browniano multivariado estándar.

Los parámetros globales λ , σ , μ_a y σ_a^2 son compartidos por todas las unidades, mientras que los efectos aleatorios $\{a_k\}_{k=1}^K$ modelan la heterogeneidad entre trayectorias. Los

efectos aleatorios se asumen independientes entre unidades, así como independientes del mencionado movimiento browniano multivariado. En particular, los efectos aleatorios introducen variabilidad individual en la dinámica de degradación de cada unidad, mientras que los parámetros globales describen el comportamiento promedio del sistema.

Los modelos (3.1) y (3.2) satisfacen las condiciones del Teorema de existencia y unicidad presentado en el Capítulo anterior. En consecuencia, ambas ecuaciones diferenciales estocásticas consideradas poseen una única solución fuerte continua. En particular, para el modelo (3.1), la condición de Lipschitz (1.6) respecto a la variable de estado se satisface trivialmente, ya que la deriva no depende de Y_{kt} . Por otro lado, en el modelo (3.2), la deriva es lineal respecto a Y_{kt} , por lo que también satisface dicha condición de Lipschitz.

Las condiciones del Teorema de existencia y unicidad pueden dejar de cumplirse para ciertas funciones de deriva $\mu(a_k, t)$ que presenten discontinuidades, singularidades o crecimiento explosivo en intervalos finitos de tiempo. Por ejemplo,

$$\mu(a_k, t) = \tan(t),$$

pueden generar derivas no acotadas en un tiempo finito. Sin embargo, las funciones de deriva consideradas en este trabajo corresponden a formas funcionales regulares y continuas, tales como potencias, raíces, funciones trigonométricas y exponenciales, definidas en intervalos finitos de tiempo, por lo que satisfacen las condiciones requeridas por el Teorema de existencia y unicidad.

Para el modelo (3.1), dada a_k , la solución de la ecuación diferencial estocástica es

$$Y_{kt} = Y_{k0} + \int_0^t \mu(a_k, s)ds + \sigma W_{kt}, \tag{3.4}$$

con distribución condicional:

$$Y_{kt}|Y_{k0} \sim \mathcal{N}(\mu_{Y_{kt}}(a_k), \sigma^2 t), \tag{3.5}$$

donde

$$\mu_{Y_{kt}}(a_k) = Y_{k0} + \int_0^t \mu(a_k, s)ds.$$

Este es un proceso de Markov gaussiano con incrementos independientes, la distribución de los incrementos, condicionada a a_k , también es normal:

$$(Y_{kt} - Y_{ks})|a_k \sim \mathcal{N}\left(\int_s^t \mu(a_k, u)du, \sigma^2(t-s)\right), \quad t > s. \quad (3.6)$$

El vector de parámetros del modelo (3.1) es

$$\Phi = (\mu_a, \sigma_a^2, \sigma).$$

Sea $\mathbf{Y}_{kt} = (Y_{kt_0}, \dots, Y_{kt_{n_k}})$ la degradación observada de la unidad k a través del tiempo, sea $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_K)$ el vector de efectos aleatorios asociados a la deriva de cada unidad experimental y $\Delta Y_{ki} = Y_{kt_i} - Y_{kt_{i-1}}$ el incremento de degradación en los tiempos t_i y t_{i-1} . Con $\Delta \mathbf{Y}_k = (\Delta Y_{k1}, \dots, \Delta Y_{kn_k})$ el vector de incrementos de la unidad k y $\Delta = \{\Delta \mathbf{Y}_k\}_{k=1}^K$ los incrementos observados de las K unidades. Note que, para una unidad k en el tiempo t_i la distribución conjunta de a_k y del incremento ΔY_{ki} esta dada por

$$f(a_k, \Delta Y_{ki}; \Phi) = f(a_k; \mu_a, \sigma_a) f(\Delta Y_{ki}; a_k, \sigma^2). \quad (3.7)$$

Así, al integrar respecto al efecto aleatorio a_k , la distribución marginal de ΔY_{ki} es

$$f(\Delta Y_{ki}; \sigma^2) = \int f(a_k; \mu_a, \sigma_a) f(\Delta Y_{ki}; a_k, \sigma^2) da_k. \quad (3.8)$$

Por lo anterior, la función de verosimilitud está dada por:

$$\mathcal{L}(\Phi; \Delta) = \prod_{k=1}^K \int f(a_k; \mu_a, \sigma_a^2) \prod_{i=1}^{n_k} f(\Delta Y_{ki} | a_k, \sigma) da_k. \quad (3.9)$$

Debido a la complejidad de la integral respecto a los efectos aleatorios, la obtención de estimadores en forma cerrada resulta difícil para formas funcionales generales de $\mu(a_k, t)$. Por lo que en este trabajo se emplea el algoritmo EM para realizar la inferencia de los parámetros; el cual se describirá en el próximo capítulo.

Por otro lado, la solución de la ecuación diferencial estocástica para el modelo (3.2) es:

$$Y_{kt} = Y_0 e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \mu(a_k, s) ds + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dW_s, \quad (3.10)$$

con distribución:

$$Y_{kt}|Y_{k0} \sim \mathcal{N}(\mu_{Y_{kt}}, \sigma_{Y_{kt}}^2), \quad (3.11)$$

donde

$$\mu_{Y_{kt}} = Y_0 e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \mu(a_k, s) ds, \quad (3.12)$$

y

$$\sigma_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}). \quad (3.13)$$

El proceso (3.2) es un proceso de Markov gaussiano, pero no tiene incrementos independientes. Para hacer inferencia de este modelo conviene utilizar la función de transición $Y_{kt}|Y_{ks}$, con $s < t$, que también tiene distribución normal,

$$Y_{kt}|Y_{ks} \sim \mathcal{N}(\mu_{Y_{kt}|Y_{ks}}(a_k), \sigma_{Y_{kt}|Y_{ks}}^2(\lambda, \sigma^2)), \quad (3.14)$$

con

$$\mu_{Y_{kt}|Y_{ks}}(a_k) = Y_{ks} e^{-\lambda(t-s)} + \lambda \int_s^t e^{-\lambda(t-u)} \mu(a_k, u) du \quad (3.15)$$

y

$$\sigma_{Y_{kt}|Y_{ks}}^2(\lambda, \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda(t-s)}). \quad (3.16)$$

Donde el vector de parámetros del modelo (3.2) es

$$\Phi = (\mu_a, \sigma_a^2, \lambda, \sigma).$$

Sean $\mathbf{Y}_{kt} = (Y_{kt_0}, \dots, Y_{kt_{n_k}})$ la trayectoria de degradación observada de la unidad k a través del tiempo. $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_K)$ el vector de efectos aleatorios asociados a la deriva de cada unidad experimental. Entonces $\mathbf{Y} = \{Y_k\}_{k=1}^K$ los datos observados. La función de verosimilitud está dada por

$$\mathcal{L}(\Phi; \mathbf{Y}) = \prod_{k=1}^K \int f(a_k; \mu_a, \sigma_a^2) \prod_{i=1}^{n_k} f(Y_{kt_i} | Y_{kt_{i-1}}; a_k, \lambda, \sigma) da_k.$$

Debido a la existencia de la integral respecto a los efectos aleatorios y a la forma funcional de la media condicional (3.15), en general, no es posible obtener estimadores en forma cerrada. Por lo que en este trabajo se emplea el algoritmo EM para realizar la inferencia de los parámetros.

3.2. Modelos multivariados

Cuando la vida de una unidad o sistema depende de más de una característica de degradación, se considera una extensión bidimensional del proceso (3.1). Para 2 o más características se utilizará el índice de degradación propuesto en Liu y Huang (2016).

Proceso de Wiener en 2 dimensiones

Sea $\mathbf{Y}_{kt} = (Y_{kt}^1, Y_{kt}^2) \in \mathbb{R}^2$ el proceso de degradación con dos características de la unidad k , observado en el tiempo $t > 0$, la degradación se modela mediante la ecuación diferencial estocástica bidimensional:

$$\begin{pmatrix} dY_{kt}^1 \\ dY_{kt}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1(a_k^1, t) \\ \mu_2(a_k^2, t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_{kt}^1 \\ dW_{kt}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k &= [a_k^1, a_k^2]^\top \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}_a, \Sigma_a), \\ \boldsymbol{\mu}_a &= [\mu_{a^1}, \mu_{a^2}] \\ \Sigma_a &= \begin{pmatrix} \sigma_{a^1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{a^2}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los valores a_k^1 y a_k^2 representan efectos aleatorios específicos de la unidad k , los cuales introducen heterogeneidad entre unidades. Los parámetros $\sigma_{a^1}^2$ y $\sigma_{a^2}^2$ corresponden a las varianzas de dichos efectos aleatorios y cuantifican la variabilidad existente entre las trayectorias medias de degradación de distintas unidades.

Por otra parte, Σ es la matriz de difusión del proceso estocástico. En particular, σ_{11} y σ_{22} determinan la intensidad de la variabilidad estocástica asociada a las características Y^1 y Y^2 , respectivamente; mientras que σ_{21} induce dependencia entre ambas características mediante la difusión compartida por los movimientos Brownianos subyacentes.

Al resolver se tiene (3.17):

$$\begin{aligned} Y_{kt}^1 &= Y_{k0}^1 + \int_0^t \mu_1(a_k^1, s) ds + \sigma_{11} W_{kt}^1 \\ Y_{kt}^2 &= Y_{k0}^2 + \int_0^t \mu_2(a_k^2, s) ds + \sigma_{21} W_{kt}^1 + \sigma_{22} W_{kt}^2. \end{aligned}$$

Sea

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

y

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{a}_k) = \begin{pmatrix} Y_{k0}^1 + \int_0^t \mu_1(a_k^1, s) ds \\ Y_{k0}^2 + \int_0^t \mu_2(a_k^2, s) ds \end{pmatrix},$$

entonces.

$$\Sigma \Sigma^\top = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{11} \sigma_{21} \\ \sigma_{11} \sigma_{21} & \sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} Y_{kt}^1 \\ Y_{kt}^2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{a}_k), t \Sigma \Sigma^\top). \quad (3.18)$$

El proceso (3.17) es gaussiano y tiene incrementos independientes con distribución:

$$\begin{pmatrix} Y_{kt}^1 - Y_{ks}^1 \\ Y_{kt}^2 - Y_{ks}^2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} m_1(a_k^1) \\ m_2(a_k^2) \end{pmatrix}, (t-s) \Sigma \Sigma^\top \right), \quad (3.19)$$

donde

$$m_j(a_k^j) = \int_s^t \mu_j(a_k^j, u) du, \quad j = 1, 2. \quad (3.20)$$

Para obtener las distribuciones marginal y condicional de los incrementos, se utiliza el resultado que indica que cualquier subconjunto de variables de una distribución normal multivariante tiene distribución normal. Además, si

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right),$$

entonces

$$Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \Sigma_{11})$$

y

$$Y_2 | Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_2 + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (y_1 - \mu_1), \Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}).$$

Aplicando este resultado a los incrementos del proceso (3.17) se obtienen las distribuciones marginal y condicional que se presentan a continuación.

$$Y_{kt}^1 - Y_{ks}^1 \sim \mathcal{N}(m_1(a_k^1), (t-s)\sigma_{11}^2) \quad (3.21)$$

y

$$(Y_{kt}^2 - Y_{ks}^2) | (Y_{kt}^1 - Y_{ks}^1) \sim \mathcal{N}(m_{2|1}(a_k^1, a_k^2, \sigma_{11}, \sigma_{21}), (t-s)\sigma_{22}^2), \quad (3.22)$$

con

$$m_{2|1}(\mathbf{a}_k) = m_2(a_k^2) + \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}} ((Y_{kt}^1 - Y_{ks}^1) - m_1(a_k^1)). \quad (3.23)$$

El vector de parámetros del modelo (3.17) es

$$\Phi = (\mu_{a^1}, \sigma_{a^1}^2, \mu_{a^2}, \sigma_{a^2}^2, \sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{22}),$$

y la función de verosimilitud puede escribirse como

$$\mathcal{L}(\Phi; \Delta) = \prod_{k=1}^K \int f(\mathbf{a}_k; \mu_a, \Sigma_a) \prod_{i=1}^{n_k} f(\Delta_{Y_{ki}^1}; a_k^1, \sigma_{11}) f(\Delta_{Y_{ki}^2}; \Delta_{Y_{ki}^1}, \mathbf{a}_k, \sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{22}) d\mathbf{a}_k,$$

donde

$$\Delta_{Y_{ki}^j} = Y_{kt_i}^j - Y_{kt_{i-1}}^j, \quad j = 1, 2.$$

Fusión de datos

Para el caso en donde se tienen 2 o más características de degradación, se construirá un índice y se modelará con un modelo de regresión, siguiendo la metodología propuesta en Liu y Huang (2016). Así, el índice se modela como:

$$h_{kt_i} = \sum_{\ell=0}^r \theta_k^{(\ell)} t_i^\ell + \varepsilon_{kt_i}, \quad \varepsilon_{kt_i} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (3.24)$$

Donde h_{kt_i} es el índice observado, construido como combinación lineal de las J características de degradación, de la unidad k en el tiempo t_i , para $i = 1, \dots, n_k$, r es el grado del polinomio y $\Gamma_k = (\theta_k^{(0)}, \dots, \theta_k^{(r)})^\top$ es el vector de efectos aleatorios y se supone que tiene una distribución normal multivariada,

$$\Gamma_k \sim \mathcal{N}_{r+1}(\mathbf{u}^0, \Sigma^0).$$

Donde \mathbf{u}^0 es el vector de medias poblacionales de los coeficientes del modelo de degradación y Σ^0 es la matriz de varianzas y covarianzas que describe la variabilidad y dependencia entre dichos coeficientes.

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

Capítulo 4

Inferencia

En este capítulo se desarrollan los procedimientos de inferencia utilizados para los modelos propuestos. Debido a la presencia de efectos aleatorios y a la complejidad de las funciones de verosimilitud resultantes en los modelos basados en ecuaciones diferenciales estocásticas, la estimación se realiza mediante el algoritmo EM, que se verá a detalle en este capítulo, y variantes basadas en simulación Monte Carlo. También se verá la construcción e inferencia del índice de degradación y además, se presenta el procedimiento utilizado para la estimación de la vida útil remanente.

4.1. Algoritmo EM

El algoritmo EM Dempster, Laird y Rubin (1977) es un algoritmo ampliamente utilizado por su flexibilidad y aplicabilidad en diferentes problemas de la inferencia estadística, este algoritmo permite obtener estimadores bajo la presencia de datos faltantes o latentes, que no son observados directamente, pero que se pueden observar de forma indirecta a través de los datos que sí son observables directamente.

En problemas de datos incompletos se distinguen dos fuentes de información: los datos completos, denotados por \mathbf{x} , y los datos observados, denotados por \mathbf{y} . Los datos observados constituyen únicamente una parte de los datos completos, por lo que existe una función que relaciona ambos conjuntos de información. En consecuencia, aunque únicamente se observa una realización \mathbf{y} , se asume la existencia de una variable latente \mathbf{x} que contiene toda la información necesaria para formular el modelo probabilístico completo.

La densidad de los datos observados esta dada por:

$$g(\mathbf{y}; \Phi) = \int f(\mathbf{x}; \Phi) d\mathbf{x}.$$

Donde $f(\mathbf{x}; \Phi)$, que depende del vector de parámetros Φ , es la densidad de los datos completos.

El propósito del algoritmo EM es encontrar un valor de Φ que maximiza $g(\mathbf{y}; \Phi)$ dada la observación de \mathbf{y} . Para lograr esto, en cada iteración del algoritmo EM $\Phi^{(p)} \rightarrow \Phi^{(p+1)}$ se define como sigue:

1. **Paso E (Expectativa):** Este paso consiste en calcular la función

$$Q(\Phi; \Phi^{(p)}) = \mathbb{E} \left[\ln f(\mathbf{x}; \Phi) | \mathbf{y}, \Phi^{(p)} \right] \tag{4.1}$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{y}, \Phi^{(p)}} \left[\ln f(\mathbf{x}; \Phi) \right] \tag{4.2}$$

2. **Paso M (Maximizar):** Obtener

$$\Phi^{(p+1)} = \arg \max_{\Phi} Q(\Phi; \Phi^{(p)}).$$

En la práctica, alguno de los dos pasos, o ambos, pueden presentar complicaciones para realizarlos, es por eso que existen variantes del algoritmo para tratar cada uno de esos problemas. Cuando el paso E resulta complicado y calcular la esperanza de forma analítica es imposible, se realiza una aproximación de la esperanza mediante simulación Monte Carlo basada en cadenas de Markov (MCMC). A esta variante se le conoce como MCMC-EM Wei y Tanner (1990) y su algoritmo es el siguiente:

Sea $\{\mathbf{x}^{(m)}\}_{m=1}^M$ una muestra generada de la distribución condicional $f(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \Phi^{(p)})$ mediante un esquema MCMC. Entonces, el paso E se aproxima por

$$\widehat{Q}_M(\Phi; \Phi^{(p)}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \log f(\mathbf{x}^{(m)}; \Phi). \tag{4.3}$$

El algoritmo MCMC-EM queda entonces definido por:

1. **Paso E (Monte Carlo):** Generar $\{\mathbf{x}^{(m)}\}_{m=1}^M \sim f(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \Phi^{(p)})$ vía MCMC y calcular $\widehat{Q}_M(\Phi; \Phi^{(p)})$.

2. **Paso M:** Obtener

$$\Phi^{(p+1)} = \arg \max_{\Phi} \widehat{Q}_M(\Phi; \Phi^{(p)}).$$

Otra variante del algoritmo EM es el algoritmo Expectation–Conditional Maximization (ECM) McLachlan y Krishnan (2008), el cual resulta útil cuando el paso M no puede realizarse en forma analítica y/o se tiene que maximizar de manera conjunta una gran cantidad de parámetros.

La idea central consiste en descomponer el parámetro Φ en bloques $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_S)$, donde S es el número de parámetros a estimar, y reemplazar la maximización conjunta del paso M por una secuencia de maximizaciones condicionales.

En la iteración p , el algoritmo ECM se define como:

1. **Paso E:** Calcular

$$Q(\Phi; \Phi^{(p)}) = \mathbb{E} \left[\log f(\mathbf{x}; \Phi) \mid \mathbf{y}, \Phi^{(p)} \right].$$

2. **Pasos CM (Conditional Maximization):** Para $s = 1, \dots, S$, actualizar

$$\Phi_s^{(p+1)} = \arg \max_{\Phi_s} Q(\Phi_1^{(p+1)}, \dots, \Phi_{s-1}^{(p+1)}, \Phi_s, \Phi_{s+1}^{(p)}, \dots, \Phi_S^{(p)}).$$

En caso que ambos pasos del algoritmo EM se compliquen, puede ser necesario aplicar ambas variantes, como MCMC-ECM.

4.2. Inferencia para el modelo Wiener

A continuación, se presentan los pasos para llevar a cabo la inferencia del modelo 3.1, para esto, se aprovecha la propiedad de incrementos independientes y gaussianos.

Por las propiedades de (3.6), sabemos que

$$\Delta Y_{ki} \sim \mathcal{N}(\mu_{\Delta Y_{ki}}(a_k, t_i), \sigma^2 \Delta_{kt_i}), \quad \Delta_{kt_i} = t_i - t_{i-1}. \quad (4.4)$$

Donde $\mu_{\Delta Y_{ki}}(a_k, t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mu(a_k, s) ds$, $\mathbf{x} = (\Delta, \mathbf{a})$ son los datos completos, \mathbf{a} son efectos que no se pueden observar directamente y $\Phi = (\mu_a, \sigma_a^2, \sigma^2)$ es el vector de parámetros.

De (3.3) y (4.4) tenemos que la función de verosimilitud completa es:

$$\mathcal{L}(\Phi; \mathbf{x}) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp \left\{ -\frac{(a_k - \mu_a)^2}{2\sigma_a^2} \right\} \prod_{k=1}^K \prod_{i=1}^{n_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \Delta_{kt_i}}} \exp \left\{ -\frac{(\Delta Y_{ki} - \mu_{\Delta Y_{ki}}(a_k, t_i))^2}{2\sigma^2 \Delta_{kt_i}} \right\}, \quad (4.5)$$

y

$$\begin{aligned} \ell(\Phi; \mathbf{x}) = & \frac{1}{-2} \sum_{k=1}^K \left(\ln \sigma_a^2 + \frac{(a_k - \mu_a)^2}{\sigma_a^2} \right) + \\ & \frac{1}{-2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left(\ln \sigma^2 + \frac{(\Delta Y_{ki} - \mu_{\Delta Y_{ki}}(a_k, t_i))^2}{\sigma^2 \Delta_{kt_i}} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

La función Q es:

$$Q(\Phi; \Phi^{(p)}) = \mathbb{E}_{\mathbf{a}|\mathbf{Y}, \Phi^{(p)}} [\ell(\Phi; \mathbf{x})], \quad (4.7)$$

para simplificar la notación en lo que sigue esa esperanza se denotará por $\mathbb{E}_{\mathbf{a}|\cdot}[\ell(\Phi; \mathbf{x})]$, de este modo, la función resultante es:

$$\begin{aligned} Q(\Phi; \Phi^{(p)}) = & \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^K \left(\ln \sigma_a^2 + \frac{\mathbb{E}_{a_k|\cdot} [(a_k - \mu_a)^2]}{\sigma_a^2} \right) + \\ & \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left(\ln \sigma^2 + \frac{\mathbb{E}_{a_k|\cdot} [(\Delta Y_{ki} - \mu_{\Delta Y_{ki}}(a_k, t_i))^2]}{\sigma^2 \Delta_{kt_i}} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para el paso M,

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu_a} = \frac{-1}{2\sigma_a^2} \sum_{k=1}^K [2\mu_a - 2\mathbb{E}_{a_k|\cdot}[a_k]] = 0 \quad (4.9)$$

$$\iff \mu_a^{(p+1)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_{a_k|\cdot}[a_k] \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_a^2} = \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{\sigma_a^2} - \frac{\mathbb{E}_{a_k|\cdot}[a_k^2] - 2\mu_a \mathbb{E}_{a_k|\cdot}[a_k] + \mu_a^2}{\sigma_a^4} \right] = 0 \quad (4.11)$$

$$\iff \sigma_a^{2(p+1)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left[\mathbb{E}_{a_k|\cdot}[a_k^2] - 2\mu_a^{(p+1)} \mathbb{E}_{a_k|\cdot}[a_k] + \mu_a^{(p+1)2} \right] \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma^2} = \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left[\frac{1}{\sigma^2} - \frac{\mathbb{E}_{a_k|\cdot} [(\Delta Y_{ki} - \mu_{\Delta Y_{ki}}(a_k, t_i))^2]}{\sigma^4 \Delta_{kt_i}^2} \right] = 0 \quad (4.13)$$

$$\iff \sigma^{2(p+1)} = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \frac{1}{\Delta_{kt_i}} \mathbb{E}_{a_k|\cdot} [(\Delta Y_{ki} - \mu_{\Delta Y_{ki}}(a_k, t_i))^2]}{\sum_{k=1}^K n_k} \quad (4.14)$$

Para calcular la $\mathbb{E}_{a_k|\cdot}[\cdot]$ de las expresiones (4.10), (4.12) y (4.14) se requiere la distribu-

ción condicional de $a_k | \Delta Y_k, \Phi^{(p)}$. Por el teorema de Bayes, se tiene que

$$f(a_k; \Delta Y_k, \Phi^{(p)}) \propto \exp \left\{ -\frac{(a_k - \mu_a^{(p)})^2}{2\sigma_a^{2(p)}} \right\} \prod_{i=1}^{n_k} \exp \left\{ -\frac{(\Delta Y_{ki} - \mu_{\Delta Y_{ki}}(a_k, t_i))^2}{2\sigma^{2(p)} \Delta_{kt_i}} \right\}. \quad (4.15)$$

Esta distribución posterior se puede obtener de forma analítica cuando $\mu(a_k, t)$ es lineal respecto a t . Por tal motivo, la distribución posterior y las esperanzas requeridas en el paso M del algoritmo se aproximan mediante MCMC, llegando así a la variante MCMC-EM Wei y Tanner (1990). El algoritmo completo queda así:

En la iteración $p + 1$, se generan muestras

$$a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(M)} \sim f(a_k | \Delta Y_k, \Phi^{(p)}), \quad k = 1, \dots, K,$$

vía MCMC. Con estas muestras, se aproximan las esperanzas del paso E por:

$$\widehat{\mathbb{E}}_{a_k | \cdot} [a_k] := \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M a_k^{(m)}, \quad (4.16)$$

$$\widehat{\mathbb{E}}_{a_k | \cdot} [a_k^2] := \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (a_k^{(m)})^2, \quad (4.17)$$

$$\widehat{\mathbb{E}}_{a_k | \cdot} [(\Delta Y_{ki} - \mu_{\Delta Y_{ki}}(a_k, t_i))^2] := \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\Delta Y_{ki} - \mu_{\Delta Y_{ki}}(a_k^{(m)}, t_i) \right)^2, \quad i = 1, \dots, n_k. \quad (4.18)$$

Sustituyendo estas aproximaciones en las expresiones (4.10), (4.12) y (4.14), se obtienen las actualizaciones del algoritmo MCMC-EM:

$$\mu_a^{(p+1)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M a_k^{(m)} \right) \quad (4.19)$$

$$\sigma_a^{2(p+1)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left[\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (a_k^{(m)})^2 \right) - 2\mu_a^{(p+1)} \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M a_k^{(m)} \right) + (\mu_a^{(p+1)})^2 \right] \quad (4.20)$$

$$\sigma^{2(p+1)} = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \frac{\frac{1}{M \Delta_{kt_i}} \sum_{m=1}^M \left(\Delta Y_{ki} - \mu_{\Delta Y_{ki}}(a_k^{(m)}, t_i) \right)^2}{\sum_{k=1}^K n_k}. \quad (4.21)$$

Como parte de la aportación de este trabajo, la inferencia para este modelo se imple-

mentó en la librería **mixeddiffusion**, Montoya Calzada et al. (2026) del software R Core Team (2025).

4.3. Inferencia para el modelo de reversión a la media

A continuación se presentan los pasos para llevar a cabo la inferencia del modelo (3.2), para esto se utiliza la distribución de transición y la propiedad de Markov.

Sea $\mathbf{X} = (\mathbf{Y}, \mathbf{a})$ los datos completos y $\Phi = (\mu_a, \sigma_a^2, \sigma^2, \lambda)$ el vector de parámetros.

De 3.3 y 3.14 se obtiene la función de verosimilitud completa:

$$\mathcal{L}(\phi; \mathbf{x}) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp\left\{-\frac{(a_k - \mu_a)^2}{2\sigma_a^2}\right\} \prod_{k=1}^K \prod_{i=1}^{n_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}^2(\lambda, \sigma^2)}} \exp\left\{-\frac{\left(Y_{kt_i} - \mu_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}(a_k)\right)^2}{2\sigma_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}^2(\lambda, \sigma^2)}\right\} \quad (4.22)$$

y

$$\begin{aligned} \ell(\Phi; \mathbf{x}) = & \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^K \left(\ln \sigma_a^2 + \frac{(a_k - \mu_a)^2}{\sigma_a^2} \right) + \\ & \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left(\ln \sigma_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}^2(\lambda, \sigma^2) + \frac{\left(Y_{kt_i} - \mu_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}(a_k)\right)^2}{\sigma_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}^2(\lambda, \sigma^2)} \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

La función Q es:

$$\begin{aligned} Q(\Phi; \Phi^{(p)}) = & \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^K \left(\ln \sigma_a^2 + \frac{\mathbb{E}_{a_k|\cdot}[(a_k - \mu_a)^2]}{\sigma_a^2} \right) + \\ & \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left(\ln \sigma_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}^2(\lambda, \sigma^2) + \frac{\mathbb{E}_{a_k|\cdot} \left[\frac{\left(Y_{kt_i} - \mu_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}(a_k)\right)^2}{\sigma_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}^2(\lambda, \sigma^2)} \right]}{\sigma_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}^2(\lambda, \sigma^2)} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Para el paso M note que el primer término de la expresión (4.24) es igual al primer término de la expresión (4.8). Por lo que

$$\mu_a^{(p+1)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_{a_k|\cdot}[a_k] \quad (4.25)$$

y

$$\sigma_a^{2(p+1)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left[\mathbb{E}_{a_k|\cdot} [a_k^2] - 2\mu_a^{(p+1)} \mathbb{E}_{a_k|\cdot} [a_k] + \mu_a^{(p+1)2} \right]. \quad (4.26)$$

En el segundo término de la expresión (4.24) no hay una fórmula analítica para actualizar de manera conjunta tanto $\lambda^{(p+1)}$ como $\sigma^{2(p+1)}$. Pero, utilizando la variante ECM se puede obtener la actualización de $\lambda^{(p+1)}$ numéricamente, esto es:

$$\lambda^{(p+1)} = \arg \max_{\lambda} \left[\frac{-1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left(\ln \sigma_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}^2(\lambda, \sigma^{2(p)}) + \frac{\mathbb{E}_{a_k|\cdot} \left[\left(Y_{kt_i} - \mu_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}(a_k) \right)^2 \right]}{\sigma_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}^2(\lambda, \sigma^{2(p)})} \right) \right]. \quad (4.27)$$

Así,

$$\sigma^{2(p+1)}(\lambda^{(p+1)}) = \frac{2\lambda^{(p+1)}}{\sum_{k=1}^K n_k} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left[\frac{\mathbb{E}_{a_k|\cdot} \left[\left(Y_{kt_i} - \mu_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}(a_k) \right)^2 \right]}{1 - e^{-2\lambda^{(p+1)}(t_i - t_{i-1})}} \right]. \quad (4.28)$$

Para calcular las esperanzas $\mathbb{E}_{a_k|\cdot}[\cdot]$ de las expresiones (4.25), (4.26), (4.27) y (4.28) se requiere la distribución de $a_k|Y_{kt}, \Phi^{(p)}$. Por el teorema de Bayes, se tiene

$$f(a_k; \mathbf{Y}_{kt}, \Phi^{(p)}) \propto \exp \left\{ -\frac{(a_k - \mu_a^{(p)})^2}{2\sigma_a^{2(p)}} \right\} \prod_{i=1}^{n_k} \exp \left\{ -\frac{\left(Y_{kt_i} - \mu_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}(a_k) \right)^2}{2\sigma_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}^2(\lambda^{(p)}, \sigma^{2(p)})} \right\}. \quad (4.29)$$

De nuevo la distribución posterior (4.29) se obtiene de forma analítica cuando $\mu(a_k, t)$ es lineal respecto a t . en cambio, cuando $\mu(a_k, t)$ no es lineal, la distribución posterior y las esperanzas requeridas en el paso M del algoritmo se aproximan mediante MCMC, llegando así a la variante MCMC-ECM. El algoritmo completo queda de la siguiente forma:

En la iteración $p + 1$, se genera un muestra aleatorio vía MCMC

$$a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(M)} \sim f(a_k | Y_{kt}, \Phi^{(p)}) \quad k = 1, \dots, K.$$

Luego, la actualización de los parámetros es:

$$\mu_a^{(p+1)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M a_k^{(m)} \right), \quad (4.30)$$

$$\sigma_a^{2(p+1)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left[\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (a_k^{(m)})^2 \right) - 2\mu_a^{(p+1)} \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M a_k^{(m)} \right) + (\mu_a^{(p+1)})^2 \right], \quad (4.31)$$

$$\lambda^{(p+1)} = \arg \max_{\lambda} \left[\frac{-1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left(\ln \sigma_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}^2(\lambda, \sigma^{2(p)}) + \frac{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\left(Y_{kt_i} - \mu_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}(a_k^{(m)}) \right)^2 \right]}{\sigma_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}^2(\lambda, \sigma^{2(p)})} \right) \right], \quad (4.32)$$

$$\sigma^{2(p+1)}(\lambda^{(p+1)}) = \frac{2\lambda^{(p+1)}}{\sum_{k=1}^K n_k} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left[\frac{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\left(Y_{kt_i} - \mu_{Y_{kt_i}|Y_{kt_{i-1}}}(a_k^{(m)}) \right)^2 \right]}{1 - e^{-2\lambda^{(p+1)}(t_i - t_{i-1})}} \right]. \quad (4.33)$$

La inferencia para este modelo se implementó en la librería **mixeddiffusion** Montoya Calzada et al. (2026) del software R Core Team (2025).

4.4. Inferencia para el modelo en 2 dimensiones

Suponer que se tienen K unidades experimentales, y por cada unidad se observa $\mathbf{Y}_{kt} = (\mathbf{Y}_{kt_0}, \dots, \mathbf{Y}_{kt_{n_k}}) \in \mathbb{R}^{n_k \times 2}$. Sean $\mathbf{a}_k = (a_{k1}, a_{k2})$, $\mathbf{a} = \{\mathbf{a}_k\}_{k=1}^K$,

$$\Delta_{Y_{ki}} = \mathbf{Y}_{kt_i} - \mathbf{Y}_{kt_{i-1}} = \begin{pmatrix} \Delta_{Y_{kt_i}^1} = Y_{kt_i}^1 - Y_{kt_{i-1}}^1 \\ \Delta_{Y_{kt_i}^2} = Y_{kt_i}^2 - Y_{kt_{i-1}}^2 \end{pmatrix},$$

y $\Delta \mathbf{Y}_k = (\Delta \mathbf{Y}_{k1}, \dots, \Delta \mathbf{Y}_{kn_k})$. Entonces, $\Delta = \{\Delta \mathbf{Y}_k\}_{k=1}^K$ son los datos observados, $\mathbf{X} = (\Delta, \mathbf{a})$ los datos completos y $\Phi = (\mu_{a^1}, \sigma_{a^1}^2, \mu_{a^2}, \sigma_{a^2}^2, \sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{22})$ el vector de parámetros.

Por lo anterior, la función de verosimilitud completa es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi; \mathbf{x}) &= \prod_{k=1}^K \frac{1}{(2\pi)^{2/2} |\Sigma_a|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{a}_k - \boldsymbol{\mu}_a)^\top \Sigma_a^{-1} (\mathbf{a}_k - \boldsymbol{\mu}_a) \right\} \\ &\prod_{k=1}^K \prod_{i=1}^{n_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta_{kt_i} \sigma_{11}^2}} \exp \left\{ -\frac{(\Delta Y_{kt_i}^1 - m_1(a_k^1))^2}{2\Delta_{kt_i} \sigma_{11}^2} \right\} * \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta_{kt_i} \sigma_{22}^2}} \exp \left\{ -\frac{(\Delta Y_{kt_i}^2 - m_{2|1}(a_k^1, a_k^2, \sigma_{11}, \sigma_{21}))^2}{2\Delta_{kt_i} \sigma_{22}^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

y la función de log verosimilitud completa:

$$\begin{aligned} \ell(\Phi; \mathbf{x}) &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left[\ln \sigma_{a^1}^2 + \frac{(a_k^1 - \mu_{a^1})^2}{\sigma_{a^1}^2} + \ln(\sigma_{a^2}^2) + \frac{(a_k^2 - \mu_{a^2})^2}{\sigma_{a^2}^2} \right] \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left[\ln \sigma_{11}^2 + \frac{(\Delta Y_{kt_i}^1 - m_1(a_k^1))^2}{\sigma_{11}^2 \Delta_{kt_i}} \right] \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left[\ln \sigma_{22}^2 + \frac{(\Delta Y_{kt_i}^2 - m_{2|1}(a_k^1, a_k^2, \sigma_{11}, \sigma_{21}))^2}{\sigma_{22}^2 \Delta_{kt_i}} \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Entonces la función Q resulta en:

$$\begin{aligned} Q(\Phi; \Phi^{(p)}) &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left[\ln \sigma_{a^1}^2 + \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [(a_k^1 - \mu_{a^1})^2]}{\sigma_{a^1}^2} + \ln(\sigma_{a^2}^2) + \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [(a_k^2 - \mu_{a^2})^2]}{\sigma_{a^2}^2} \right] \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left[\ln \sigma_{11}^2 + \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [(\Delta Y_{kt_i}^1 - m_1(a_k^1))^2]}{\sigma_{11}^2 \Delta_{kt_i}} \right] \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left[\ln \sigma_{22}^2 + \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [(\Delta Y_{kt_i}^2 - m_{2|1}(a_k^1, a_k^2, \sigma_{11}, \sigma_{21}))^2]}{\sigma_{22}^2 \Delta_{kt_i}} \right]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Se define:

$$Q_1(\sigma_{11}^2) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left[\ln \sigma_{11}^2 + \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [(\Delta Y_{kt_i}^1 - m_1(a_k^1))^2]}{\sigma_{11}^2 \Delta_{kt_i}} \right] \quad (4.37)$$

y

$$Q_2(\sqrt{\sigma_{11}^2}, \sigma_{21}, \sigma_{22}^2) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left[\ln \sigma_{22}^2 + \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{a}_k| \cdot} \left[\left(\Delta Y_{kti}^2 - m_{2|1}(a_k^1, a_k^2, \sigma_{11}, \sigma_{21}) \right)^2 \right]}{\sigma_{22}^2 \Delta_{kti}} \right]. \quad (4.38)$$

La actualización del paso M para los parámetros de la distribución de los efectos mixtos es análoga a los modelos en una dimensión, así como la actualización de σ_{22}^2 , para σ_{21} note que

$$\begin{aligned} Q_2(\cdot) &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left[\ln \sigma_{22}^2 + \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{a}_k| \cdot} \left[\left(\Delta Y_{kti}^2 - m_{2|1}(a_k^1, a_k^2, \sigma_{11}, \sigma_{21}) \right)^2 \right]}{\sigma_{22}^2 \Delta_{kti}} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \left[\ln \sigma_{22}^2 + \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{a}_k| \cdot} \left[\left(\Delta Y_{kti}^2 - \left(m_2(a_k^2) + \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}} (\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1)) \right) \right)^2 \right]}{\sigma_{22}^2 \Delta_{kti}} \right], \end{aligned} \quad (4.39)$$

y

$$\begin{aligned} &\left(\Delta Y_{kti}^2 - \left(m_2(a_k^2) + \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}} (\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1)) \right) \right)^2 = (\Delta Y_{kti}^2)^2 \\ &- 2\Delta Y_{kti}^2 \left(m_2(a_k^2) + \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}} (\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1)) \right) \\ &+ \left(m_2(a_k^2) + \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}} (\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1)) \right)^2 \\ &= (\Delta Y_{kti}^2)^2 - 2\Delta Y_{kti}^2 m_2(a_k^2) - 2\Delta Y_{kti}^2 \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}} (\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1)) \\ &+ m_2(a_k^2)^2 + 2m_2(a_k^2) \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}} (\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1)) + \left(\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}} (\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1)) \right)^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Como se busca maximizar respecto σ_{21} , resulta que

$$\begin{aligned} Q_2 &\propto \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \mathbb{E}_{\mathbf{a}_k| \cdot} \left[\Delta Y_{kti}^2 (\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1)) - m_2(a_k^2) (\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1)) \right] \\ &- \frac{\sigma_{21}^2}{2\sigma_{11}^2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \mathbb{E}_{\mathbf{a}_k| \cdot} \left[(\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1))^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Al derivar Q_2 respecto a σ_{21} e igualar a 0 se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_2}{\sigma_{21}} &= \frac{1}{\sigma_{11}} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [\Delta Y_{kti}^2 (\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1)) - m_2(a_k^2) (\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1))] \\ &\quad - \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}^2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [(\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1))^2] = 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sigma_{21} &= \sigma_{11} \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [\Delta Y_{kti}^2 (\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1)) - m_2(a_k^2) (\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1))]}{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [(\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1))^2]} \\ &= \sigma_{11} \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [(\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1)) (\Delta Y_{kti}^2 - m_2(a_k^2))]}{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [(\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1))^2]}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

De este modo, las actualizaciones del paso M resultan en:

$$\mu_{a_j}^{(p+1)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [a_k^j] \quad (4.44)$$

$$\sigma_{a_j}^{2(p+1)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left[\mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [a_k^{j2}] - 2\mu_{a_j}^{(p+1)} \mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [a_k^j] + (\mu_{a_j}^{(p+1)})^2 \right] \quad (4.45)$$

$$\sigma_{11}^{2(p+1)} = \arg \max_{\sigma_{11}^2} \left[Q_1(\sigma_{11}^2) + Q_2(\sqrt{\sigma_{11}^2}, \sigma_{21}^{(p)}, \sigma_{22}^{2(p)}) \right] \quad (4.46)$$

$$\sigma_{21}^{(p+1)} = \sigma_{11}^{(p+1)} \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [(\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1)) (\Delta Y_{kti}^2 - m_2(a_k^2))]}{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot [(\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1))^2]} \quad (4.47)$$

$$\sigma_{22}^{2(p+1)} = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \frac{1}{\Delta_{kti}} \mathbb{E}_{\mathbf{a}_k} \cdot \left[\left(\Delta Y_{kti}^2 - m_{2|1}(a_k^1, a_k^2, \sigma_{11}^{(p+1)}, \sigma_{21}^{(p+1)}) \right)^2 \right]}{\sum_{k=1}^K n_k}. \quad (4.48)$$

Para estimar las esperanzas de las expresiones anteriores, en la iteración $p + 1$, para cada unidad $k = 1, \dots, K$, se generan muestras

$$\mathbf{a}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{a}_k^{(M)} \sim f(\mathbf{a}_k \mid \mathbf{Y}_{kt}, \Phi^{(p)}),$$

vía un esquema Metropolis-within-Gibbs, como se muestra enseguida:

- Inicializar $\mathbf{a}_k^{(0)} = (a_{k1}^{(0)}, a_{k2}^{(0)})$.
- Para $m = 1, \dots, M$:

1. Simular

$$a_{k1}^{(m)} \sim f\left(a_{k1} \mid a_{k2}^{(m-1)}, \Delta \mathbf{Y}_k, \Phi^{(p)}\right) \quad (\text{vía Metropolis-Hastings}).$$

2. Simular

$$a_{k2}^{(m)} \sim f\left(a_{k2} \mid a_{k1}^{(m)}, \Delta \mathbf{Y}_k, \Phi^{(p)}\right) \quad (\text{vía Metropolis-Hastings}).$$

Así, la actualización del paso M resulta en

$$\mu_{aj}^{(p+1)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M a_k^{j(m)}, \quad (4.49)$$

$$\sigma_{aj}^{2(p+1)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (a_k^{j(m)})^2 - 2\mu_{aj}^{(p+1)} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M a_k^{j(m)} + (\mu_{aj}^{(p+1)})^2 \right], \quad (4.50)$$

$$\sigma_{11}^{2(p+1)} = \arg \max_{\sigma_{11}^2} \left[Q_1(\sigma_{11}^2) + Q_2(\sqrt{\sigma_{11}^2}, \sigma_{21}^{(p)}, \sigma_{22}^{(p)}) \right], \quad (4.51)$$

$$\sigma_{21}^{(p+1)} = \sigma_{11}^{(p+1)} \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\left(\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1(m)) \right) \left(\Delta Y_{kti}^2 - m_2(a_k^2(m)) \right) \right]}{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\left(\Delta Y_{kti}^1 - m_1(a_k^1(m)) \right)^2 \right]}. \quad (4.52)$$

$$\sigma_{22}^{2(p+1)} = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \frac{1}{\Delta_{kti} M} \sum_{m=1}^M \left(\Delta Y_{kti}^2 - m_{2|1} \left(a_k^1(m), a_k^2(m), \sigma_{11}^{(p+1)}, \sigma_{21}^{(p+1)} \right) \right)^2}{\sum_{k=1}^K n_k}. \quad (4.53)$$

4.5. Inferencia y construcción del índice de degradación

Para construir el índice de degradación, Liu y Huang (2016) proponen minimizar simultáneamente el error de ajuste del modelo de degradación y la varianza estimada del

umbral de falla D_h . La calidad del ajuste se cuantifica mediante una suma ponderada de los residuales del modelo polinomial.

Sea

$$e_{kt} = h_{kt} - \Psi_k \Gamma_k$$

el residual asociado a la unidad k en el tiempo t al ajustar el modelo de degradación. Sea c_{kt} el coeficiente de peso del residual e_{kt} , y definamos la matriz diagonal de pesos:

$$\mathbf{c}_k = \text{diag}(c_{kt_1}, \dots, c_{kt_{n_k}}) \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k},$$

así como el vector de residuales

$$\mathbf{e}_k = (e_{kt_1}, \dots, e_{kt_{n_k}})^\top \in \mathbb{R}^{n_k}.$$

El vector de efectos aleatorios para la unidad k puede estimarse mediante un método de mínimos cuadrados ponderados:

$$\Gamma_k = (\Psi_k^\top \mathbf{c}_k^2 \Psi_k)^{-1} (\Psi_k^\top \mathbf{c}_k^2 Y_k \cdot \mathbf{w}),$$

donde $Y_k \in \mathbb{R}^{n_k \times J}$ contiene las observaciones de las J características de degradación para la unidad k y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^J$ es el vector de pesos propuesto para construir el índice de degradación.

Los residuales ponderados se expresan como

$$\mathbf{c}_k \mathbf{e}_k = \mathbf{c}_k Y_k \cdot \mathbf{w} - \mathbf{c}_k \Psi_k \Gamma_k = (I - H_k) \mathbf{c}_k Y_k \cdot \mathbf{w},$$

donde la matriz de proyección asociada al ajuste ponderado es:

$$H_k = \mathbf{c}_k \Psi_k (\Psi_k^\top \mathbf{c}_k^2 \Psi_k)^{-1} \Psi_k^\top \mathbf{c}_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}.$$

Para capturar la variabilidad del umbral de falla entre unidades, sea $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{K \times J}$ la matriz que contiene las últimas observaciones antes de la falla para cada unidad (filas) y cada característica de degradación (columnas). Sea

$$\mathbf{D} = \frac{1}{K-1} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{O}}{K} \right)$$

una matriz de centrado, donde \mathbf{I} es la matriz identidad y \mathbf{O} la matriz de unos. Sea $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{J \times J}$ una matriz diagonal que representa la dirección de degradación (aquí asumida como $\mathbf{M} = I$).

Entonces, el problema de optimización para determinar los pesos óptimos \mathbf{w} se formula como

$$\min_{\mathbf{w}} \left\{ (1 - \gamma) \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\mathbf{c}_k \mathbf{e}_k)^\top \mathbf{c}_k \mathbf{e}_k + \gamma \mathbf{w}^\top \mathbf{Y}^\top \mathbf{D} \mathbf{Y} \mathbf{w} \right\}, \quad (4.54)$$

sujeto a las restricciones

$$\mathbf{w}^\top \mathbf{M}^\top \mathbf{1} = 1, \quad \mathbf{M} \mathbf{w} \geq 0,$$

Donde $0 < \gamma < 1$ es un parámetro de ponderación especificado por el usuario que controla la importancia relativa de los dos componentes de la función objetivo.

Tal como se demuestra en Liu y Huang (2016), el problema (4.54) puede reformularse como un problema de optimización cuadrática con restricciones lineales, que puede resolverse de manera eficiente mediante algoritmos estándar. La metodología está implementada en la librería **degradr** Montoya Calzada et al. (2025) en el lenguaje de programación R Core Team (2025).

4.6. Estimación de la vida útil remanente

Procesos de difusión

Los pasos para obtener la estimación de la RUL para una unidad, para los modelos (3.1), (3.2) y (3.17), son los siguientes:

1. Actualizar los parámetros (μ_a, σ_a^2) dada la degradación observada de la unidad.
2. Obtener la distribución de la RUL (1.2).
3. Utilizar dicha distribución para obtener cuantiles, promedios e intervalos de predicción para la RUL.

Sin embargo, para los modelos utilizados, debido a la forma funcional de la deriva y a los efectos aleatorios, no es posible actualizar los parámetros (μ_a, σ_a^2) , ni obtener la distribución de la RUL de forma analítica, por esto, la estimación de la RUL se obtiene mediante un enfoque de simulación.

El proceso de estimación del RUL para una unidad es el siguiente:

1. para la unidad k , se genera una muestra aleatoria de tamaño M .

$$\mathbf{a}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{a}_k^{(M)} \sim f(\mathbf{a}_k \mid \mathbf{Y}_{kt}, \Phi).$$

2. Para cada muestra $\mathbf{a}_k^{(m)}$, con $m = 1, \dots, M$, se simula la trayectoria futura del proceso a partir del último tiempo observado t_c y del último valor observado de la degradación Y_{kt_c} , hasta que la trayectoria alcanza por primera vez el umbral de falla D :

$$\{Y_{k(t_c+s)}^{(m)} : s > 0\},$$

y se registra el tiempo a la falla

$$T_k^{(m)} = \inf\{s > 0 : Y_{k(t_c+s)}^{(m)} \geq D\}.$$

3. La muestra aleatoria

$$T_k^{(1)}, \dots, T_k^{(M)}$$

constituye una aproximación Monte Carlo de la distribución predictiva de la RUL de la unidad k . A partir de esta muestra se estiman medidas resumen como la media, la mediana, cuantiles e intervalos de predicción para la RUL.

Notar que si $t_c = 0$ el procedimiento nos da una aproximación Monte Carlo de la distribución del tiempo de vida.

Índice de degradación

Una vez que se tienen estimaciones para los parámetros de Γ_k y σ^2 del modelo (3.24), las observaciones in-situ de nuevas unidades son usadas para actualizar los parámetros de forma bayesiana, esto es, se utilizan los datos de degradación observados en una unidad que está en funcionamiento para actualizar los parámetros, Este enfoque fue propuesto inicialmente por N. Gebraeel (2006), pero se implementa de forma independiente, sin considerar la correlación entre los parámetros. Liu y Huang (2016), por otra parte, actualiza todos los parámetros de manera conjunta, como se muestra a continuación:

Sea $h_k = (h_{kt_1}, \dots, Y_{kt_{n_k}})^\top$ la secuencia de mediciones recopiladas de la unidad k en los tiempos t_1, t_2, \dots, t_{n_k} . Entonces, por las propiedades de la distribución normal, se sigue que la distribución posterior de Γ_k es una normal multivariada con:

$$\Gamma_k \mid h_k \sim \mathcal{N}_{r+1}(\mathbf{u}^1, \Sigma^1). \quad (4.55)$$

donde

$$\mathbf{u}^1 = \left(\frac{\Psi_k^\top \Psi_k}{\sigma^2} + (\Sigma^0)^{-1} \right)^{-1} \left(\frac{\Psi_k^\top h_k}{\sigma^2} + (\Sigma^0)^{-1} \mathbf{u}^0 \right),$$

$$\Sigma^1 = \left(\frac{\Psi_k^\top \Psi_k}{\sigma^2} + (\Sigma^0)^{-1} \right)^{-1},$$

y

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t_1 & \cdots & t_1^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{n_k} & \cdots & t_{n_k}^r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k \times (r+1)}.$$

Donde \mathbf{u}^1 es el vector de medias posteriores de los coeficientes del modelo de degradación y Σ^1 es la matriz de covarianzas posterior que cuantifica la incertidumbre y dependencia entre dichos coeficientes después de incorporar las observaciones de la unidad.

En Liu y Huang (2016), se supone que el umbral de falla es una variable aleatoria: $D_h \sim \mathcal{N}(u^d, v^d)$, donde u^d y v^d son estimados a partir de los tiempos de falla históricos. La trayectoria de degradación proyectada hacia adelante se expresa como

$$h_{k(t_{n_k}+t)} = \theta_k^{(0)} + \cdots + \theta_k^{(p)} (t_{n_k} + t)^r + \varepsilon_{k(t_{n_k}+t)},$$

la cual es normalmente distribuida con media

$$\tilde{u}_{k(t_{n_k}+t)} = [1, (t_{n_k} + t), \cdots, (t_{n_k} + t)^r] \mathbf{u}^1,$$

y varianza

$$\tilde{\sigma}_{k(t_{n_k}+t)}^2 = [1, (t_{n_k} + t), \cdots, (t_{n_k} + t)^r] \Sigma^1 [1, (t_{n_k} + t), \cdots, (t_{n_k} + t)^r]^\top.$$

Entonces, la función de distribución del RUL condicionado en h_k es:

$$F_{T_k|h_k}(t) = P(T_k \leq t | h_k) = \Phi \left(\frac{\tilde{u}_{kt_{n_k}+t} - u^d}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{kt_{n_k}+t}^2 + v^d}} \right) = \Phi(g(t)). \quad (4.56)$$

Con

$$g(t) = \frac{\tilde{u}_{kt_{n_k}+t} - u^d}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{kt_{n_k}+t}^2 + v^d}}.$$

Dado que el tiempo a la falla es no negativo, la distribución condicionada en $T_k \geq 0$ es

$$P(T_k \leq t \mid h_k, T_k \geq 0) = \frac{\Phi(g(t)) - \Phi(g(0))}{1 - \Phi(g(0))}. \quad (4.57)$$

Si el umbral de falla D_h es fijo, entonces

$$F_{T_h|h_k}(t) = 1 - \Phi\left(\frac{D_h - \tilde{u}_{kt_{n_k}+t}}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{kt_{n_k}+t}^2}}\right) = 1 - \Phi(g_2(t)). \quad (4.58)$$

Con

$$g_2(t) = \frac{D_h - \tilde{u}_{kt_{n_k}+t}}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{kt_{n_k}+t}^2}}.$$

Por lo tanto, la distribución condicionada y truncada en $T_k \geq 0$ es

$$P(T_k \leq t \mid h_k, T_k \geq 0) = \frac{\Phi(g_2(0)) - \Phi(g_2(t))}{\Phi(g_2(0))}. \quad (4.59)$$

Capítulo 5

Estudio de simulación

Con el objetivo de evaluar el desempeño de los procedimientos propuestos, en este capítulo se realizan diversos estudios de simulación. Los experimentos permiten analizar el comportamiento de los estimadores obtenidos mediante los métodos de inferencia desarrollados, así como la capacidad predictiva de los modelos para la estimación de la vida útil remanente bajo distintos escenarios de degradación.

5.1. Proceso de Wiener

Para evaluar el desempeño de la inferencia del modelo 3.1 se simulan $K = 50$ unidades de los siguientes dos procesos independientes:

$$dY_{kt}^1 = \sqrt{a_k^1} dt + \sqrt{20} dW_{kt}^1, \quad \text{con } Y_{k0}^1 = 0, \quad (5.1)$$

$$dY_{kt}^2 = a_k^2 dt + \sqrt{10} dW_{kt}^2, \quad \text{con } Y_{k0}^2 = 0, \quad (5.2)$$

con

$$a_k^j \sim \mathcal{N}(\mu_{a^j} = 5, \sigma_{a^j}^2 = 0.5), \quad j = 1, 2.$$

Los tiempos de observación son: con incrementos de una unidad, desde $t = 0$ hasta $t = 5$, y luego con incrementos de 0.1, para $t \in (5, 10]$. En las figuras 5.1 y 5.2 se presenta una simulación de ambos procesos de degradación (5.1) y (5.2).

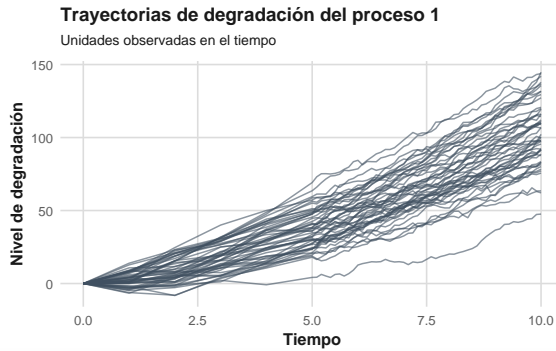


Figura 5.1: Simulación del proceso de degradación de la primera característica, de $K=50$ unidades, según la EDE (5.1).

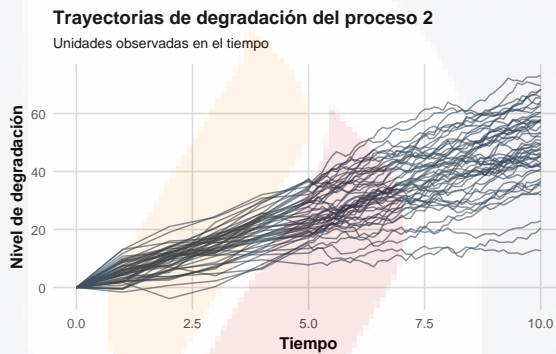


Figura 5.2: Simulación del proceso de degradación de la primera característica, de $K=50$ unidades, según la EDE (5.2).

Para tal muestra, se hace inferencia utilizando la librería Montoya Calzada et al. (2026), con un máximo de 50 iteraciones.

Esto se repite un total de 1000 veces para obtener una distribución empírica de los estimadores de los parámetros.

Parámetro	Valor real	Media	Bias	Varianza	MSE	RMSE	Error relativo
μ_{a^1}	5	5.00436	0.00436	0.01604	0.01604	0.12667	0.00087
$\sigma_{a^1}^2$	0.5	0.50028	0.00028	0.02618	0.02616	0.16173	0.00057
σ_1^2	20	20.00131	0.00131	0.26668	0.26641	0.51615	0.00007
μ_{a^2}	5	4.99857	-0.00143	0.03088	0.03085	0.17563	-0.00029
$\sigma_{a^2}^2$	0.5	0.58372	0.08372	0.05896	0.06591	0.25674	0.16744
σ_2^2	10	9.99312	-0.00688	0.07120	0.07118	0.26680	-0.00069

Tabla 5.1: Valores estimados de los parámetros del modelo de desgaste (5.1) y (5.2), con respectivos indicadores de precisión.

Distribuciones empíricas de los estimadores

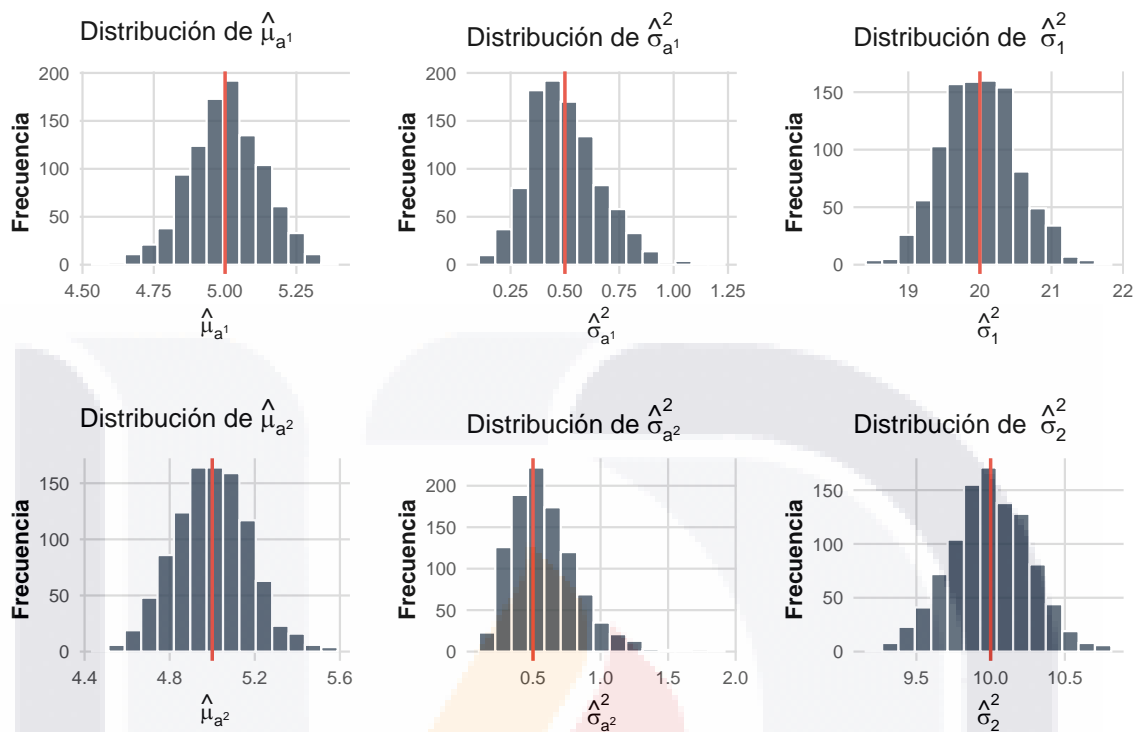


Figura 5.3: Distribuciones empíricas de los estimadores de los parámetros del modelo de degradación (5.1) y (5.2). La línea roja indica el respectivo valor real del parámetro.

De la tabla 5.1 y la figura 5.3 se observa que, para los tres parámetros del proceso de degradación (5.1), los estimadores presentan un desempeño satisfactorio. El sesgo estimado y el error relativo son prácticamente nulos, mientras que las distribuciones empíricas de $\hat{\mu}_{a1}$ y $\hat{\sigma}_1^2$ son aproximadamente simétricas y están centradas en los valores reales. Por otra parte, la distribución de $\hat{\sigma}_{a1}^2$ exhibe una ligera asimetría positiva, fenómeno común en la estimación de parámetros de varianza.

Para el proceso de degradación (5.2), la tabla 5.1 y la figura 5.3 muestran resultados igualmente satisfactorios para μ_{a2} y σ_2^2 , cuyos estimadores presentan distribuciones aproximadamente simétricas y centradas en los valores verdaderos. Sin embargo, la distribución de $\hat{\sigma}_{a2}^2$ muestra una asimetría positiva más pronunciada y una mayor dispersión. Esto se refleja en el sesgo positivo observado, indicando que el procedimiento de estimación tiende a sobrestimar la variabilidad de los efectos aleatorios en este escenario donde la función $\mu(a_k, t)$ no es lineal.

5.2. Proceso de reversión a la media

Para evaluar el desempeño de la inferencia del proceso (3.2) se simuló un proceso de degradación con $K = 50$ unidades del proceso.

$$dY_{kt} = 0.75(a_k t - Y_{kt})dt + \sqrt{10}dW_{kt}, \quad Y_{k0} = 0, \quad (5.3)$$

con

$$a_k \sim \mathcal{N}(\mu_a = 5, \sigma_a^2 = 0.5).$$

Los tiempos de observación son: con incrementos de una unidad, desde $t = 0$ hasta $t = 5$, y luego con incrementos de 0.1, para $t \in (5, 10]$. En la figura 5.4 se presenta una simulación del proceso de degradación (5.3).

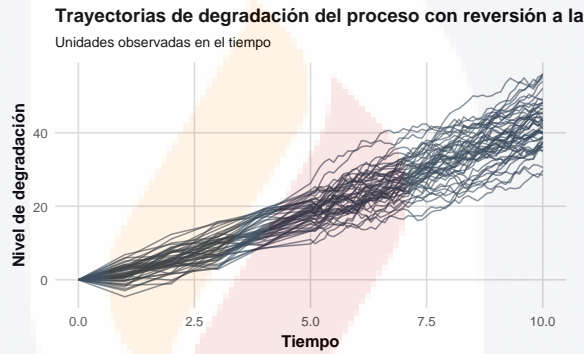


Figura 5.4: Simulación del proceso de degradación de la primera característica, de $K=50$ unidades, según la EDE (5.3).

Para tal muestra, se hace inferencia utilizando la librería Montoya Calzada et al. (2026), con un máximo de 50 iteraciones.

Esto se repite un total de 1000 veces para obtener una distribución empírica de los estimadores de los parámetros.

Parámetro	Valor real	Media	Bias	Varianza	MSE	RMSE	Error relativo
μ_a	5	4.96399	-0.03601	0.10926	0.11044	0.33233	-0.00720
σ_a	0.5	0.47168	-0.02832	0.01220	0.01299	0.11398	-0.05663
σ^2	10	9.96316	-0.03684	0.08163	0.08291	0.28794	-0.00368
λ	0.75	0.83231	0.08231	0.01561	0.02237	0.14956	0.10974

Tabla 5.2: Valores estimados de los parámetros del modelo de desgaste (5.3), con respectivos indicadores de precisión.

Distribuciones empíricas de los estimadores

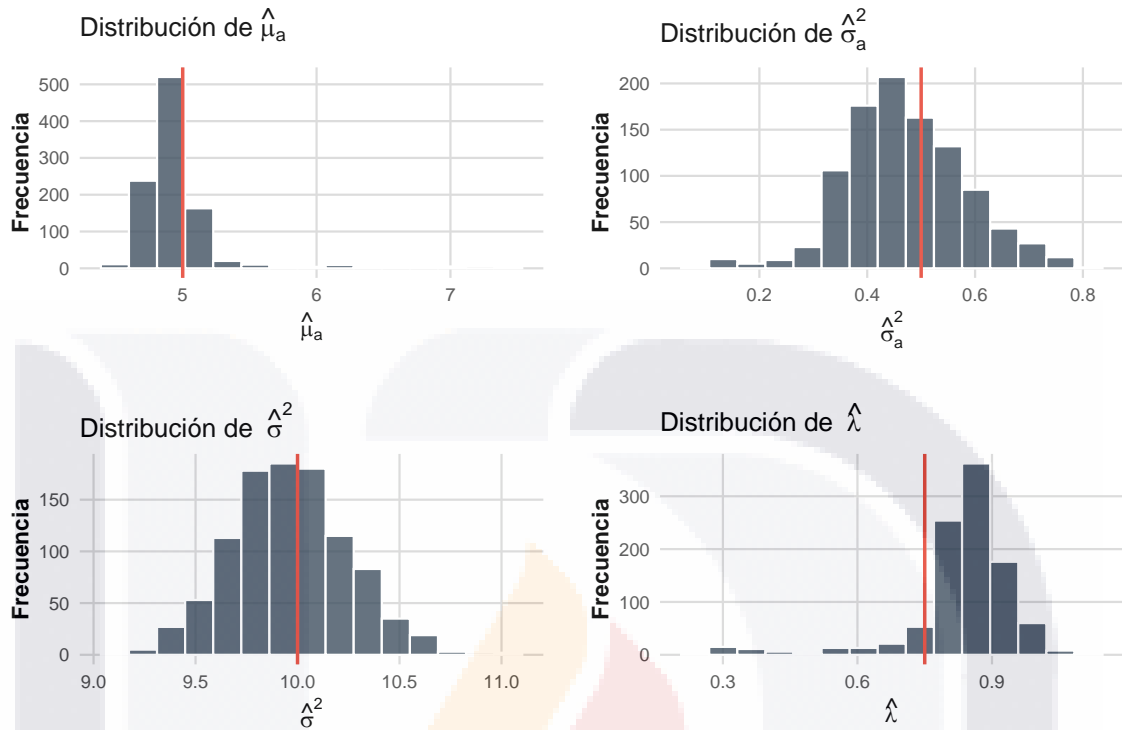


Figura 5.5: Distribuciones empíricas de los estimadores de los parámetros del modelo de degradación (5.3). La línea roja indica el respectivo valor real del parámetro.

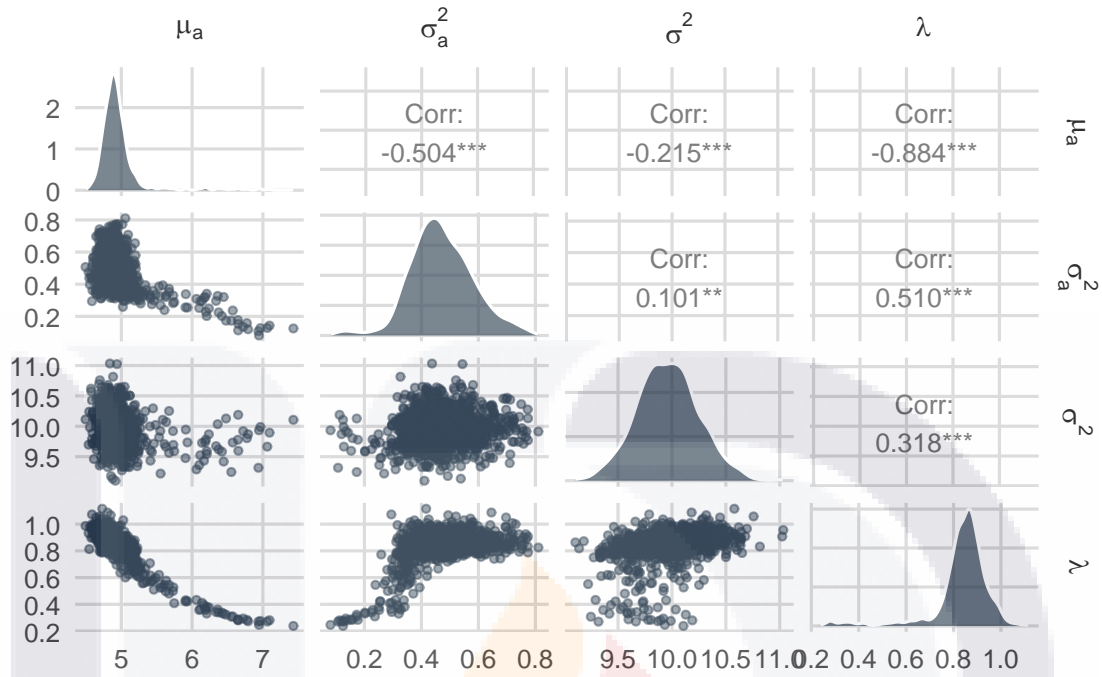


Figura 5.6: Gráfico de pares de los estimadores de los parámetros del modelo de degradación (5.3).

De la tabla 5.2 y las figuras 5.5 y 5.6 se observa que los estimadores de μ_a , σ_a^2 y σ^2 presentan un comportamiento satisfactorio. Las distribuciones empíricas de $\hat{\sigma}_a^2$ y $\hat{\sigma}^2$ son aproximadamente simétricas y están centradas en los valores verdaderos, mientras que $\hat{\mu}_a$ muestra una dispersión reducida, aunque con una ligera asimetría positiva.

Por otra parte, la distribución empírica de $\hat{\lambda}$ presenta una asimetría negativa y se encuentra desplazada hacia valores mayores que el parámetro real, lo que indica un sesgo positivo del estimador. Además, la figura 5.6 muestra una fuerte dependencia negativa entre $\hat{\mu}_a$ y $\hat{\lambda}$, esto indica que distintos pares de valores de estos parámetros producen trayectorias de degradación similares. Esto dificulta la estimación precisa de λ y explica la mayor variabilidad observada en su distribución empírica.

5.3. Proceso de Wiener en 2 dimensiones

Para evaluar el desempeño de la inferencia del modelo (3.17) se simulan $K = 50$ unidades del modelo:

$$\begin{pmatrix} dY_{kt}^1 \\ dY_{kt}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_k^1 t} \\ a_k^2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sqrt{20} & 0 \\ 3 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_{kt}^1 \\ dW_{kt}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

con

$$\left[a_k^1, a_k^2 \right]^\top \sim \mathcal{N}_2 \left(\boldsymbol{\mu}_a = (5, 5), \Sigma_a = \text{diag}(0.5, 0.5) \right).$$

Los tiempos de observación son: con incrementos de una unidad, desde $t = 0$ hasta $t = 5$, y luego con incrementos de 0.1, para $t \in (5, 10]$. En la figura 5.7 se presenta una simulación del proceso de degradación (5.4).

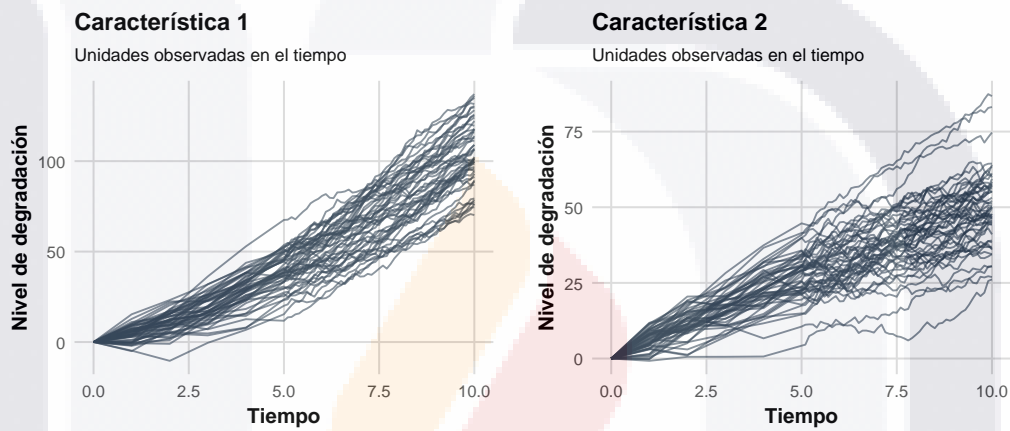


Figura 5.7: Simulación del proceso de degradación, de $K= 50$ unidades, según la EDE (5.4).

Para tal muestra, se hace inferencia utilizando el algoritmo MCMC-ECM con un máximo de 50 iteraciones.

Esto se repite un total de 1000 veces para obtener una distribución empírica de los estimadores de los parámetros.

Parámetro	Valor real	Media	Bias	Varianza	MSE	RMSE	Error relativo
μ_{a^1}	5	5.00028	0.00028	0.01765	0.01764	0.13280	0.00006
$\sigma_{a^1}^2$	0.5	0.49896	-0.00104	0.06672	0.06665	0.25817	-0.00207
μ_{a^2}	5	5.00908	0.00908	0.03578	0.03583	0.18928	0.00182
$\sigma_{a^2}^2$	0.5	0.47665	-0.02335	0.02112	0.02165	0.14713	-0.04670
σ_1^2	20	20.01927	0.01927	0.80898	0.80854	0.89919	0.00096
σ_2^2	5	4.99611	-0.00389	0.01838	0.01837	0.13555	-0.00078
σ_{21}	3	3.00044	0.00044	0.01665	0.01664	0.12899	0.00015

Tabla 5.3: Valores estimados de los parámetros del modelo de desgaste (5.4), con respectivos indicadores de precisión.

Distribuciones empíricas de los estimadores

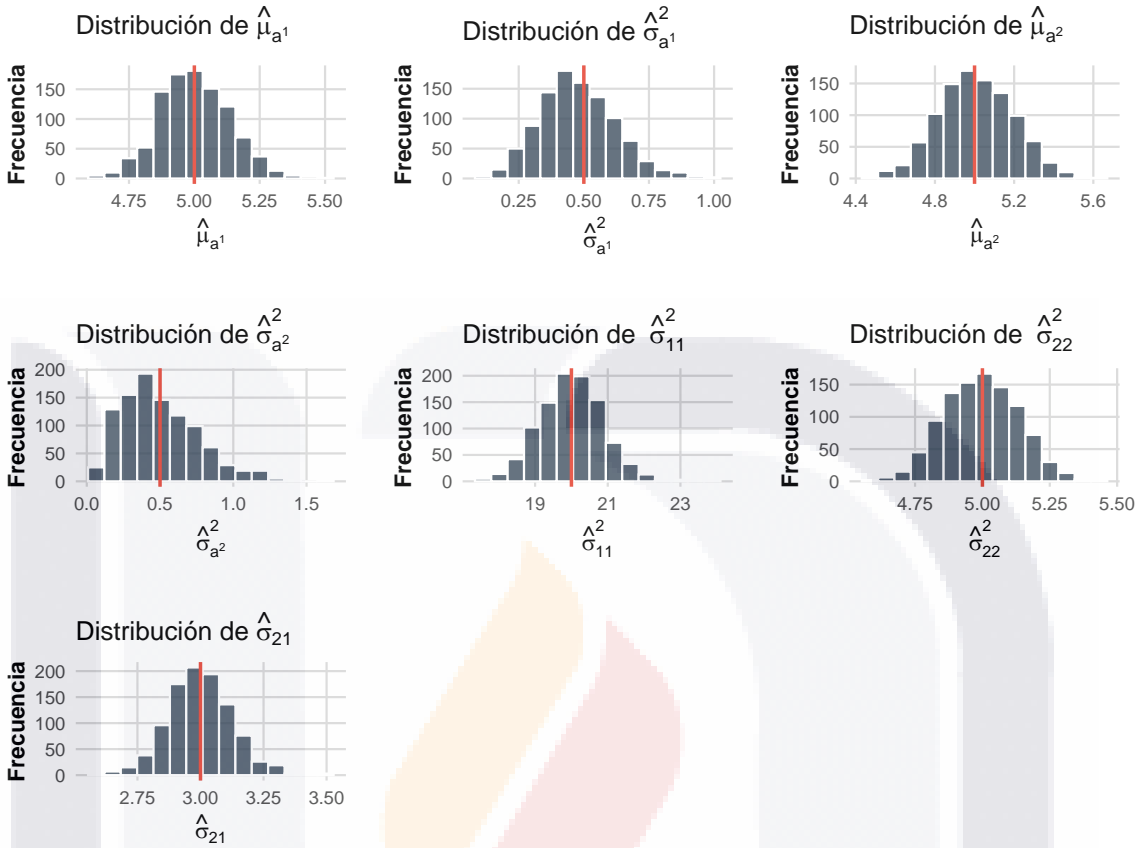


Figura 5.8: Distribuciones empíricas de los estimadores de los parámetros del modelo de degradación (5.4). La línea roja indica el respectivo valor real del parámetro.

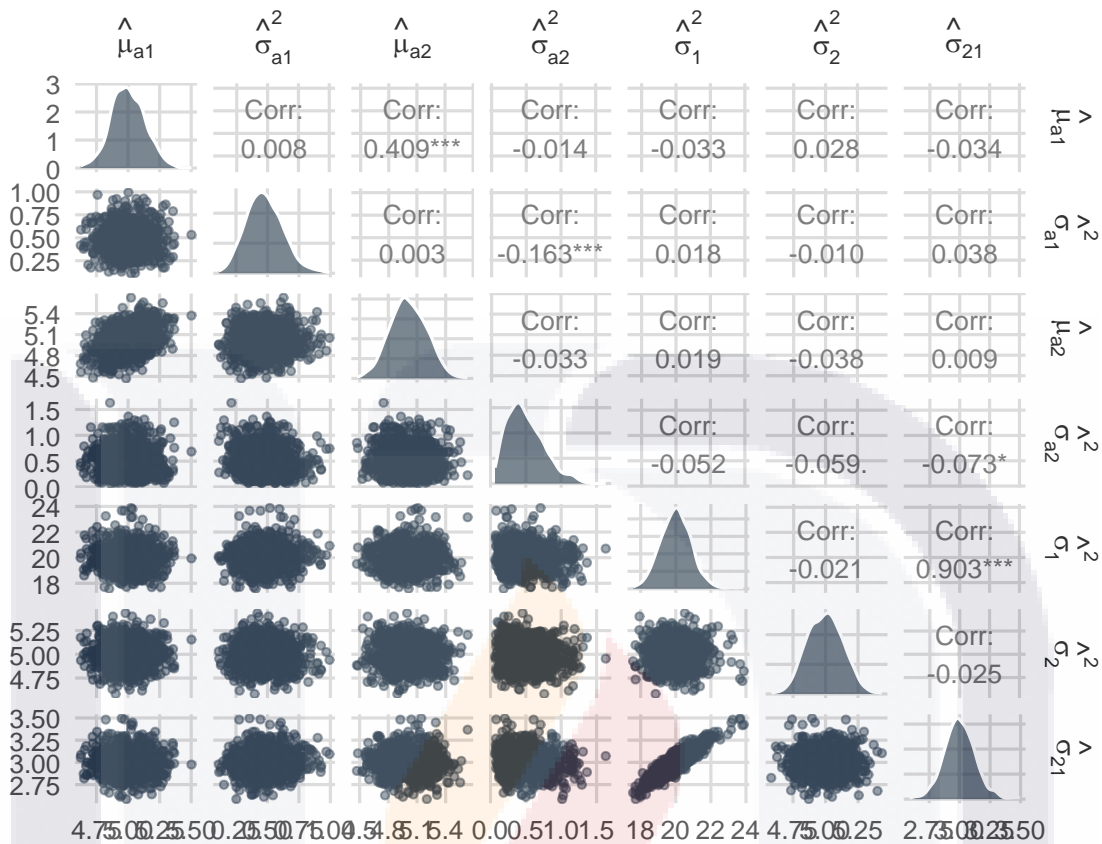


Figura 5.9: Gráfico de pares de los estimadores de los parámetros del modelo de degradación (5.4).

Los resultados de las simulaciones para este modelo fueron satisfactorios. De la tabla 5.3 y las figuras 5.8 y 5.9 se observa que los estimadores de todos los parámetros presentan sesgos prácticamente nulos y errores relativos muy pequeños. Además, las distribuciones empíricas son aproximadamente simétricas y están centradas en los valores verdaderos, lo que sugiere que el procedimiento de estimación es capaz de recuperar adecuadamente los parámetros del modelo.

Solo en los estimadores de los parámetros de la varianza de los efectos aleatorios, σ_{a1}^2 y σ_{a2}^2 , cuyas distribuciones muestran una ligera asimetría positiva y una dispersión mayor que la observada en los parámetros de localización. Este comportamiento es habitual en la estimación de parámetros de varianza.

Por otra parte, la figura 5.9 muestra una fuerte dependencia positiva entre los estimadores de σ_1^2 y σ_{21} , con una correlación aproximada de 0.903. Esto indica que ambos parámetros tienden a compensarse mutuamente durante el proceso de estimación, lo

que podría incrementar la variabilidad de los estimadores aun cuando no se observe un sesgo apreciable.

5.4. Vida útil remanente con el proceso de Wiener

Se simulan $K = 100$ unidades hasta el fallo $D = 50$ del modelo

$$dY_{kt} = a_k dt + \sqrt{5}dW_{kt}, \quad Y_{k0} = 0, \tag{5.5}$$

con efectos aleatorios

$$a_k \sim \mathcal{N}(\mu_a = 5, \sigma_a^2 = 0.5).$$

La solución de la EDE (5.5) dados a_k y Y_{k0} es:

$$Y_{kt} = a_k t + \sqrt{5}W_{kt} \tag{5.6}$$

Se simula desde $t_0 = 0$ con incrementos de 0.1. Se registra el tiempo en el que cada unidad cruza el nivel crítico $D = 50$ y se trunca la degradación observada de cada unidad en un tiempo aleatorio $t \in [4, t_{fallo})$. Así, se obtiene la siguiente muestra donde se simula un escenario donde todas las unidades tienen censura.

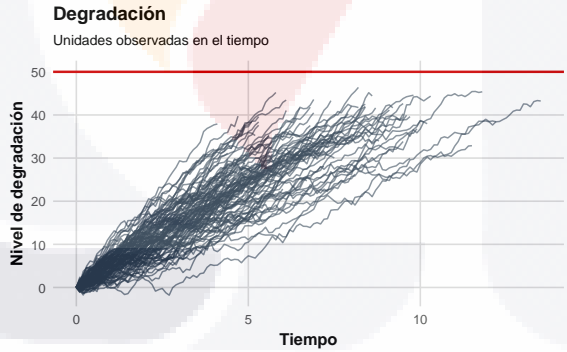


Figura 5.10: Trayectorias de degradación simuladas para $K = 100$ unidades. La línea roja indica el nivel crítico de falla y las trayectorias terminan en distintos instantes debido a la presencia de censura.

Para tal muestra, se hace inferencia de los parámetros utilizando la librería **mixedifusion**, luego, se estima la distribución de la RUL para cada unidad como se mostró en el capítulo anterior y se toma la mediana como predicción puntual de la RUL. También se estima la RUL con un modelo de reversión a la media (3.2) con $\mu(a_k, t) = a_k t$ y con

el fin de tener una comparación, también se utiliza un modelo de regresión polinomial de grado 1 con efectos mixtos implementado en la librería **degradr** Montoya Calzada et al. (2025).

Para comparar la calidad de las predicciones de la RUL se utilizará el Error cuadrático (SE) y el error absoluto (AE) definidos a continuación. Para una unidad k se define el error cuadrático como:

$$SE_k = (RUL_k - \hat{RUL}_k)^2 \tag{5.7}$$

y el error absoluto como:

$$AE_k = |RUL_k - \hat{RUL}_k|, \tag{5.8}$$

donde RUL_k es el tiempo de vida útil remanente observado de la unidad k y \hat{RUL}_k es la vida útil remanente estimada para la unidad k .

A partir de los errores individuales se calculan las siguientes medidas de desempeño. El error cuadrático medio (MSE) se define como

$$MSE = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K SE_k, \tag{5.9}$$

donde K es el número total de unidades evaluadas.

La variabilidad de los errores cuadráticos se cuantifica mediante la varianza de los errores cuadráticos (VAR SE), definida por

$$VARSE = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (SE_k - MSE)^2. \tag{5.10}$$

De manera análoga, el error absoluto medio (MAE) se define como

$$MAE = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K AE_k, \tag{5.11}$$

y la variabilidad de los errores absolutos se mide mediante la varianza de los errores absolutos (VAR AE), dada por

$$VARAE = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (AE_k - MAE)^2. \tag{5.12}$$

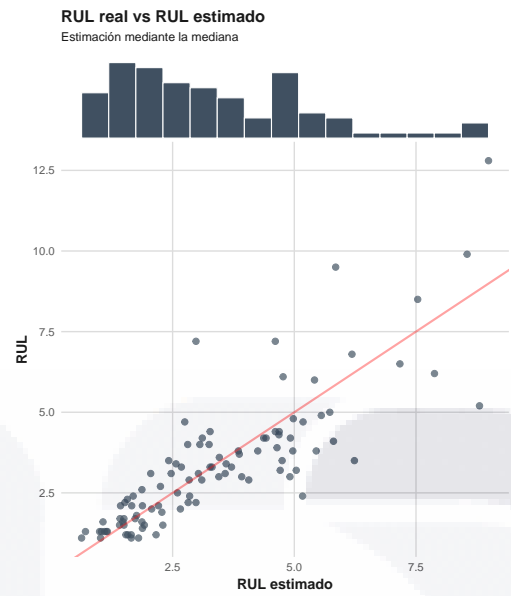


Figura 5.11: Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de Wiener.

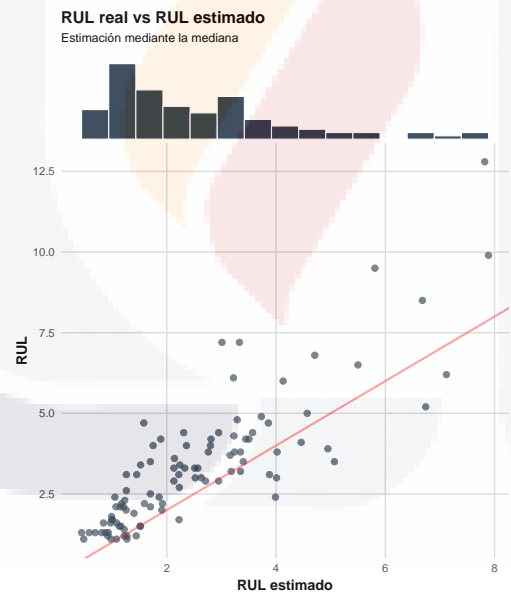


Figura 5.12: Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de reversión a la media.

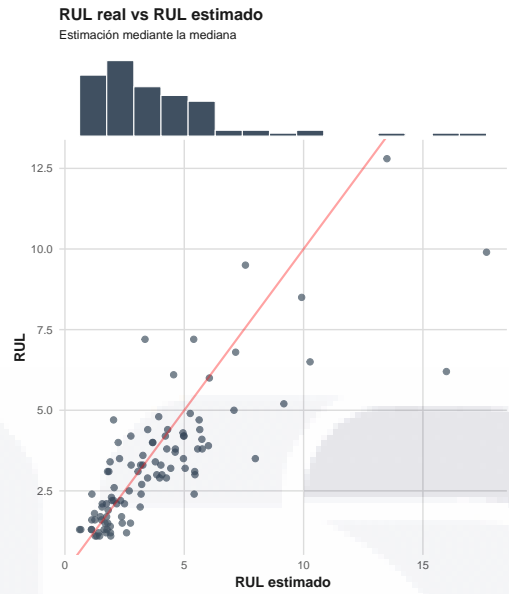


Figura 5.13: Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de regresión.

Modelo	MSE	VAR SE	MAE	VAR AE
Wiener	1.3483	9.5971	0.791	0.7299
Reversión a la medio	1.8755	14.1006	1.0191	0.8453
Regresión	3.262	133.1717	1.1069	2.0573

Tabla 5.4: Desempeño de los modelos.

De las figuras 5.11, 5.12 y 5.13 se puede observar que, en general, los tres modelos presentan un buen desempeño en la estimación de la RUL. Como se esperaba, existe mayor variabilidad en las predicciones de las unidades con valores de RUL mayores. Esto se debe a que dichas unidades se encuentran todavía lejos del umbral de falla y, por lo tanto, la información observada sobre su trayectoria de degradación es menor, y es de esperar una mayor incertidumbre en la predicción de la RUL para esas unidades. Además, como se esperaba, el modelo con mejores resultados es el modelo del cual fue generada la muestra, seguido del proceso de reversión a la media (4.24) y por ultimo, el modelo con peor desempeño fue el modelo de regresión del paquete Montoya Calzada et al. (2025).

5.5. Vida útil remanente con el proceso de reversión a la media

Se simulan $K = 100$ unidades hasta el fallo $D = 50$ del modelo

$$dY_{kt} = 0.75(a_k t - Y_{kt})dt + \sqrt{10}dW_{kt}, \quad Y_{k0} = 0, \tag{5.13}$$

con efectos aleatorios

$$a_k \sim \mathcal{N}(\mu_a = 5, \sigma_a^2 = 0.5).$$

La solución a la EDE (5.13) dados a_k y Y_{k0} es:

$$Y_{kt} = a_k \left(t - \frac{1}{0.75} + \frac{e^{-0.75t}}{0.75} \right) + \sqrt{10}e^{-0.75t} \int_0^t e^{0.75s} dW_{kt}.$$

Se simula desde $t_0 = 0$ con incrementos de 0.1. Se registra el tiempo en el que cada unidad cruza el nivel crítico D y se trunca la degradación observada de cada unidad en un tiempo aleatorio $t \in [4, t_{fallo})$. Así, se obtiene la siguiente muestra donde se simula un escenario donde todas las unidades tienen censura.

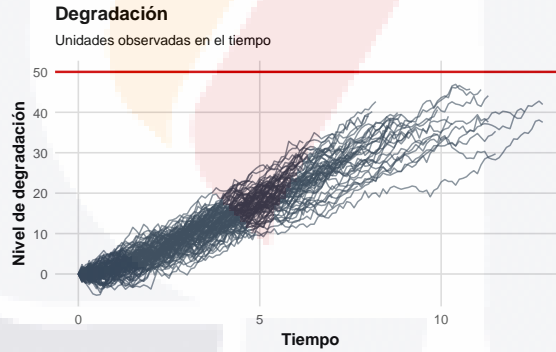


Figura 5.14: Trayectorias de degradación simuladas para $K = 100$ unidades. La línea roja indica el nivel crítico de falla y las trayectorias terminan en distintos instantes debido a la presencia de censura.

Para esta muestra muestra, se hace inferencia de los parámetros utilizando la librería **mixeddiffusion**, luego, se estima la RUL. También se estima la RUL con un modelo Wiener (3.1) con $\mu(a_k, t) = a_k$ y con el fin de tener una comparación, también se utiliza un modelo de regresión polinomial de grado 1 con efectos mixtos implementado en la librería **degradr** Montoya Calzada et al. (2025).

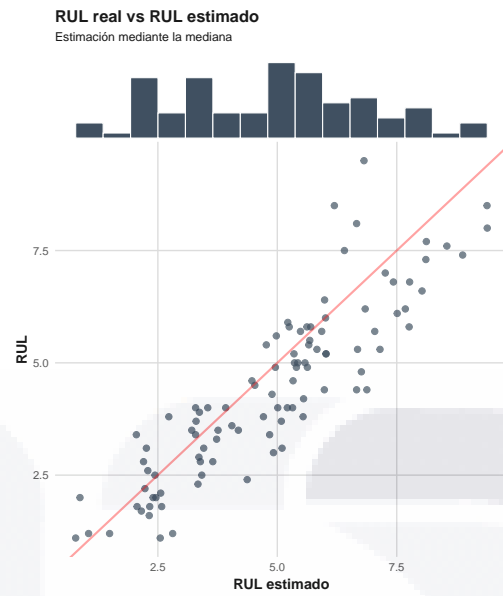


Figura 5.15: Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de reversión a la media.

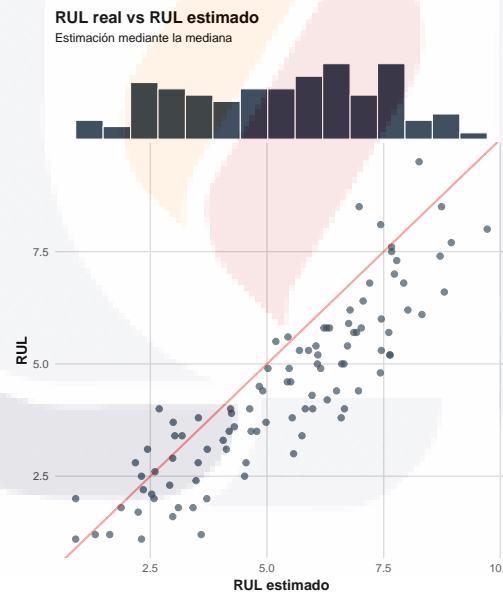


Figura 5.16: Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo Wiener.

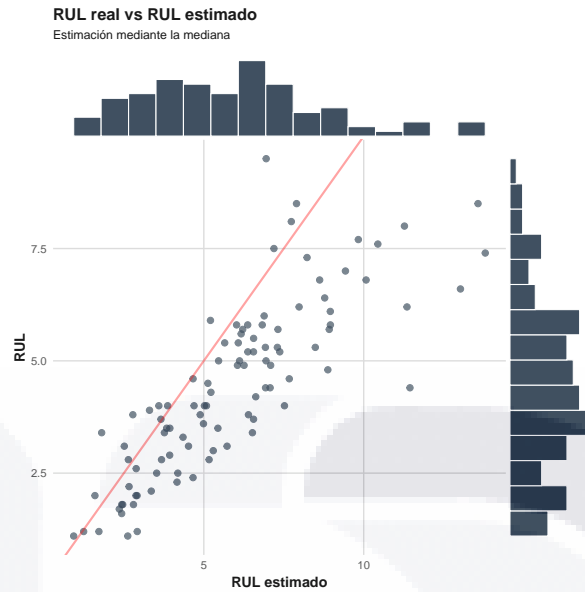


Figura 5.17: Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de regresión.

Modelo	MSE	VAR SE	MAE	VAR AE
Reversión a la medio	1.095949	2.224375	0.8334	0.4054484
Wiener	1.7006	3.9341	1.0736	0.5534
Regresión	4.640521	71.28896	1.63726	1.979699

Tabla 5.5: Desempeño de los modelos.

De las 5.15, 5.16 y 5.17 vemos que de nuevo, los dos modelos de difusión tienen un buen desempeño, pero el modelo de regresión tiende a sobre estimar la RUL, en los tres casos hay una clara relación lineal y, a diferencia del caso anterior, no se observa de manera tan evidente que la varianza crezca para unidades con RUL mayor. Y de nuevo, el mejor desempeño lo tuvo el modelo del cual se generaron las muestras y el peor desempeño fue el modelo de regresión, esto muestra que, cuando los datos tienen dinámicas temporales más complejas, los modelos de regresión pueden llegar a tener complicaciones, pues, el modelo Wiener, aun no siendo el modelo de donde se generaron las muestras, tiene resultados buenos. Este comportamiento también se pudo ver en el ejemplo anterior, donde el modelo de reversión a la media sigue siendo competitivo, aún cuando las muestras no fueron generadas con dicho modelo y, el modelo de regresión también obtuvo resultados deficientes.

5.6. Vida útil remanente con el proceso de Wiener en 2 dimensiones

Se simulan $K = 100$ unidades hasta el fallo $D = (120, 50)$, definiendo el fallo como el instante en que ambas características alcanzan sus respectivos niveles críticos, bajo el modelo

$$\begin{pmatrix} dY_{kt}^1 \\ dY_{kt}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_k^1 t} \\ a_k^2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sqrt{20} & 0 \\ 3 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_{kt}^1 \\ dW_{kt}^2 \end{pmatrix}, \quad Y_{k0}^j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (5.14)$$

Con efectos aleatorios

$$\left[a_k^1, a_k^2 \right]^\top \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}_a = (5, 5), \Sigma_a = \text{diag}(0.5, 0.5)).$$

La solución de la EDE (5.14) es:

$$Y_{kt}^1 = Y_{k0}^1 + \frac{2}{3} \sqrt{a_k^1} t^{3/2} + \sqrt{20} W_{kt}^1, \quad (5.15)$$

$$Y_{kt}^2 = Y_{k0}^2 + a_k^2 t + 3W_{kt}^1 + \sqrt{5} W_{kt}^2. \quad (5.16)$$

Se simula desde $t_0 = 0$ con incrementos de 0.1, se registra el tiempo en el que cada unidad cruza el nivel crítico D y se trunca la degradación observada de cada unidad en un tiempo aleatorio $t \in [4, t_{fallo})$. Así, se obtiene la siguiente muestra donde se simula un escenario donde todas las unidades tienen censura.

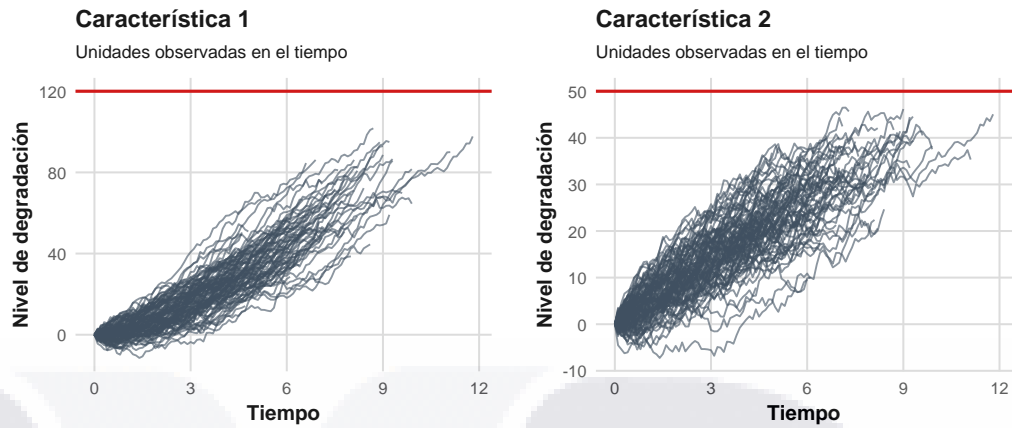


Figura 5.18: Trayectorias de degradación simuladas para $K = 100$ unidades. La línea roja indica el nivel crítico de falla y las trayectorias terminan en distintos instantes debido a la presencia de censura.

Para tal muestra, se estiman los parámetros, luego, se estima la RUL para cada unidad. También se estiman los parámetros suponiendo que las características de degradación son independientes, es decir, para cada característica se estima un modelo unidimensional con el paquete **mixediffusion** y se obtiene una estimación para la RUL para cada unidad.

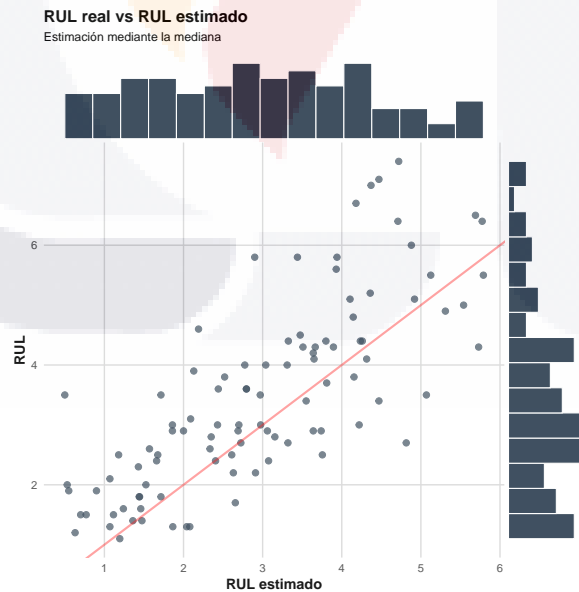


Figura 5.19: Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo Wiener con dependencia.

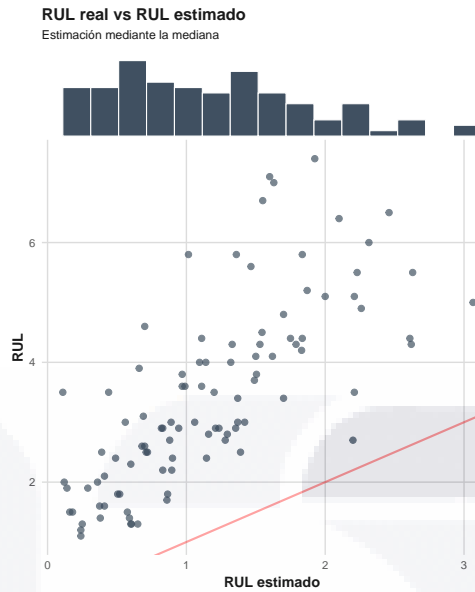


Figura 5.20: Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo Wiener independiente.

Modelo	MSE	VAR SE	MAE	VAR AE
Wiener con dependencia	1.2536	3.7515	0.8749	0.4931
Wiener independiente	6.436	42.7062	2.2763	1.2671

Tabla 5.6: Desempeño de los modelos.

De las figuras 5.19 y 5.20 se ve de nuevo el comportamiento esperado de aumento de varianza para unidades con mayor RUL, y el modelo que considera dependencia entre las características de degradación obtiene un mejor resultado en comparación con el modelo que asume independencia, este ultimo tiende a subestimar la RUL, lo que deja en evidencia que ignorar las posibles dependencias entre las características de degradación puede llevar a resultados menos precisos.

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

Capítulo 6

Aplicación

En este capítulo, los métodos desarrollados en esta tesis se aplican a conjuntos de datos reales con el objetivo de evaluar su utilidad práctica. En particular, se consideran datos de filtros industriales y del conjunto de datos C-MAPSS de motores turbofan. Los resultados obtenidos permiten comparar el desempeño de los distintos modelos en problemas de estimación de la vida útil remanente.

6.1. Filtros industriales

El conjunto de datos sobre filtros industriales Hagmeyer, Mauthe y Zeiler (2021) se origina a partir de un proceso de degradación relevante en aplicaciones industriales. Los filtros presentan un deterioro gradual debido a la acumulación de partículas, lo que permite monitorear su condición y estimar el momento en que dejarán de cumplir su función. Por ello, constituyen un caso representativo de Prognostics and Health Management (PHM), área dedicada al monitoreo de la salud de los sistemas y a la predicción de su vida útil remanente (RUL). El proceso de degradación observado es la obstrucción de los filtros al separar las partículas sólidas del gas. Para ello se utiliza un banco de pruebas, que realiza pruebas automatizadas de la vida útil de los medios filtrantes. Para las pruebas, se emplea polvo que cumple con la norma ISO 12103-1 y con una distribución de tamaño de partícula conocida. El medio filtrante empleado está hecho de material de fibra no tejida orientado aleatoriamente.

Este conjunto de datos fue diseñado para representar la transición de una estrategia de mantenimiento preventivo hacia una estrategia de mantenimiento predictivo en filtros industriales. En este escenario, los reemplazos se realizan inicialmente a intervalos fijos, sin considerar el estado real del componente, mientras que el mantenimiento predictivo

busca utilizar la condición observada del sistema y la estimación de la vida útil remanente para planificar las intervenciones. Para ayudar a la realización del mantenimiento predictivo se han registrado los ciclos de vida de la aplicación estudiada. Sin embargo, el mantenimiento preventivo implementado hasta ahora hace que se reemplacen después de un período de tiempo fijo, independientemente del estado de la pieza degradada. Como resultado, el tiempo de la vida útil no se conoce para la mayoría de los registros y, por lo tanto, están censurados por la derecha. Los datos de entrenamiento así indicados son ejecuciones registradas del filtro hasta un intervalo de reemplazo.

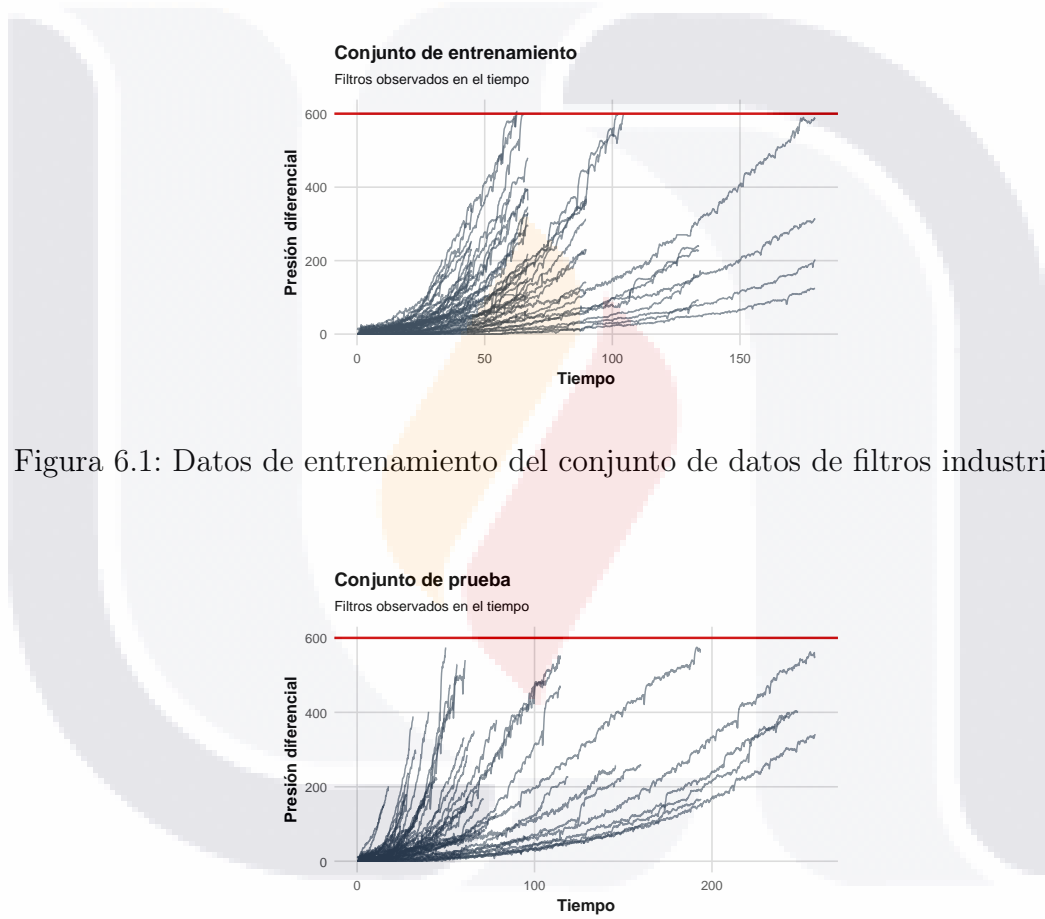


Figura 6.1: Datos de entrenamiento del conjunto de datos de filtros industriales.

Figura 6.2: Datos de prueba del conjunto de datos de filtros industriales.

Para este conjunto de datos se evaluará el desempeño de distintos modelos para la predicción del RUL, los modelos (3.1) y (3.2) y el clásico modelo de regresión polinomial de efectos mixtos de la linbrería Montoya Calzada et al. (2025). En primer lugar, se ajustará un modelo Para el modelo de Wiener (3.1), se considera una deriva dependiente del tiempo dada por

$$\mu(a_k, t) = a_k t.$$

Al resolver la EDE (3.1), se obtiene

$$Y_{kt} = Y_{k0} + a_k \frac{t^2}{2} + \sigma W_{kt}.$$

Por otro lado, para el modelo de reversion a la media (3.2), se considera

$$\mu(a_k, t) = a_k t^2.$$

Al resolver (3.2), la solución es

$$Y_{kt} = Y_{k0} e^{-\lambda t} + a_k \left(t^2 - \frac{2t}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda t} \right) + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dW_{ks}.$$

Finalmente, se considerará un modelo de regresión polinomial cuadrática, el modelo que esta implementado en **degradr**.

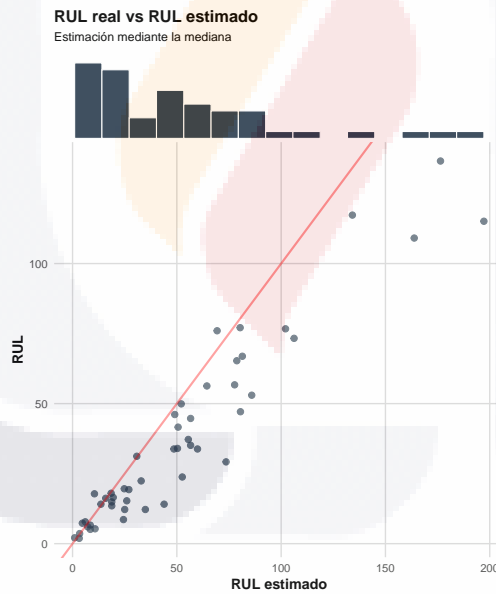


Figura 6.3: Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo Wiener.

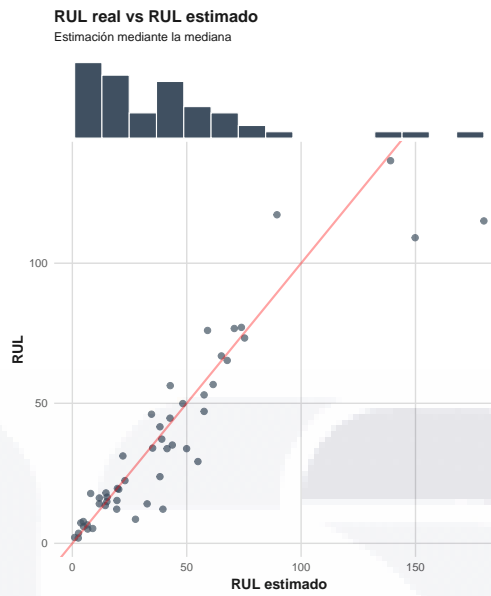


Figura 6.4: Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de reversión a la media.

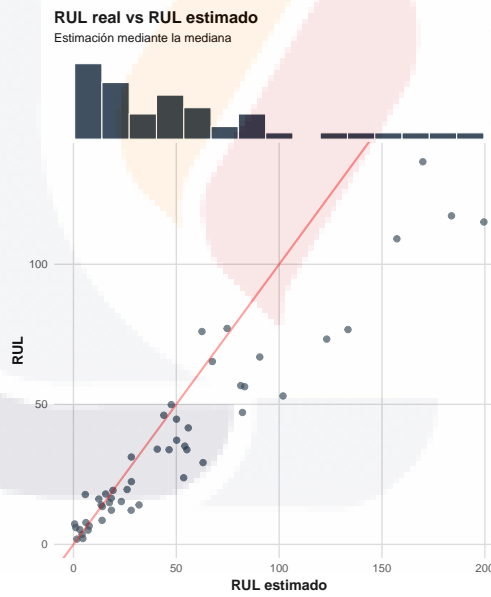


Figura 6.5: Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de regresión.

Modelo	MSE	VAR SE	MAE	VAR AE
Wiener	475.4576	1155950	14.733	263.6697
Reversión a la media	210.5331	414546.1	8.411	142.6409
Regresión	617.8459	1746429	15.82107	375.0404

Tabla 6.1: Comparación del desempeño predictivo de los modelos para la estimación de la RUL en el conjunto de datos de filtros industriales.

De las figuras 6.3, 6.4 y 6.5 se ve el comportamiento esperado de mayor varianza en unidades con RUL mayor, presentando una mayor variabilidad el modelo de regresión junto con la tabla 6.1 se puede ver que el modelo que hace mejores predicciones es el proceso de reversión a la media.

6.2. Motores turbofan

El conjunto de datos de motores turbofan fue desarrollado por la NASA utilizando el simulador *Commercial Modular Aero-Propulsion System Simulation* (C-MAPSS) Frederick, DeCastro y Litt (2007), con el objetivo de generar trayectorias de degradación realistas para el estudio de algoritmos de pronóstico del RUL Saxena et al. (2008). El sistema simulado corresponde a un motor turbofan comercial de gran escala, en el cual se modela la degradación progresiva de distintos módulos del motor, particularmente del compresor de alta presión (*High Pressure Compressor*, HPC), mediante cambios en parámetros de eficiencia y flujo.

El conjunto de datos consiste en series temporales multivariadas obtenidas a partir de diversos sensores del motor durante diferentes ciclos de operación. Cada unidad representa un motor distinto operando bajo condiciones variables. A medida que avanza el tiempo, el motor experimenta degradación progresiva hasta alcanzar una condición de fallo.

La degradación fue generada artificialmente mediante modelos exponenciales de pérdida de eficiencia y flujo, incorporando además ruido de proceso y ruido de medición para simular condiciones más cercanas a aplicaciones reales. El conjunto de datos de entrenamiento incluyen trayectorias completas hasta el fallo y el conjunto de prueba tiene trayectorias censuradas a la derecha, es decir, antes de alcanzar el final de su vida útil. Esto hace que este conjunto de datos sea ampliamente utilizado en problemas de mantenimiento predictivo, pronóstico y modelado de degradación.

Símbolo	Descripción	Unidades
T2	Temperatura total en la entrada del ventilador	°R
T24	Temperatura total a la salida del LPC	°R
T30	Temperatura total a la salida del HPC	°R
T50	Temperatura total a la salida del LPT	°R
P2	Presión en la entrada del ventilador	psia
P15	Presión total en el conducto de bypass	psia
P30	Presión total a la salida del HPC	psia
Nf	Velocidad física del ventilador	rpm
Nc	Velocidad física del núcleo	rpm
epr	Relación de presión del motor ($P50/P2$)	–
Ps30	Presión estática a la salida del HPC	psia
phi	Relación entre flujo de combustible y Ps30	pps/psi
NRf	Velocidad corregida del ventilador	rpm
NRc	Velocidad corregida del núcleo	rpm
BPR	Relación de bypass	–
farB	Relación combustible-aire del quemador	–
htBleed	Entalpía de purga	–
Nf_dmd	Velocidad demandada del ventilador	rpm
PCNfR_dmd	Velocidad corregida demandada del ventilador	rpm
W31	Sangrado de refrigeración del HPT	lbm/s
W32	Sangrado de refrigeración del LPT	lbm/s

Tabla 6.2: Variables operacionales y mediciones de sensores del conjunto de datos C-MAPSS.

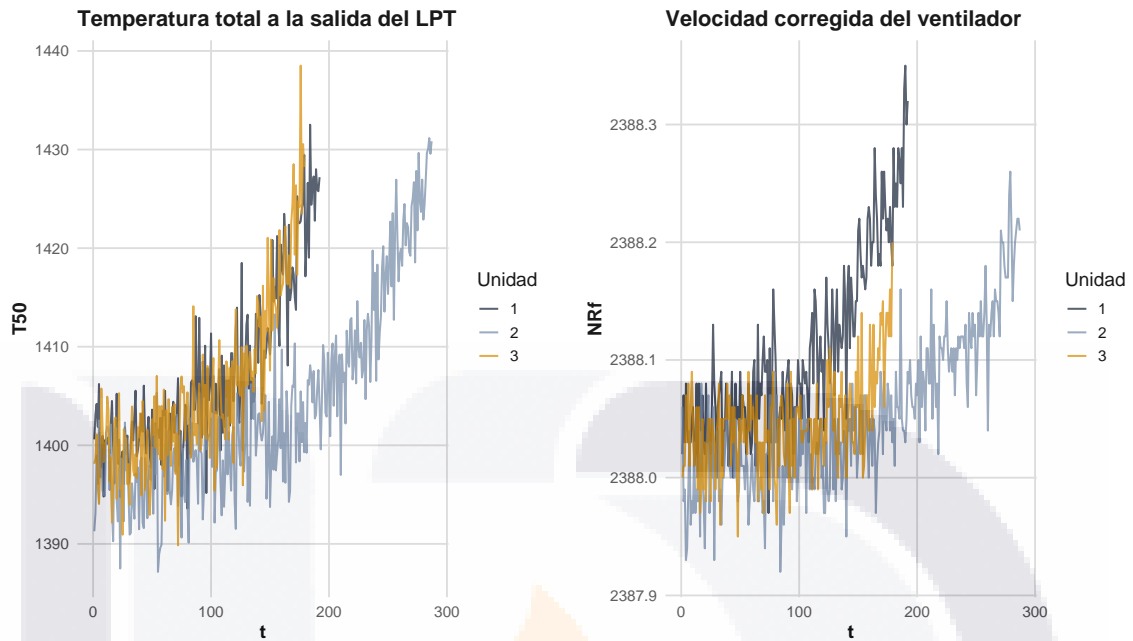


Figura 6.6: Mediciones de los sensores T50 y NRf para tres unidades observadas hasta la falla.

En la modelación de estos datos se considera tres modelos. El primero corresponde al modelo Wiener bivariado con efectos aleatorios (3.17). Los otros dos modelos son basados en el índice de degradación (3.24), estimados mediante la librería `degradr`. La diferencia principal entre los modelos de índice de degradación considerados es el número de variables utilizadas: el primero emplea únicamente dos variables, las mismas que el modelo Wiener, mientras que el segundo incorpora un conjunto más amplio de sensores.

Tanto para el modelo Wiener bivariado, como para el primer modelo de índice de degradación se utilizaron las variables $T50$ y NRf . La variable $T50$ es la temperatura total de la salida de la turbina de baja presión, mientras que NRf corresponde a la velocidad corregida del ventilador. La selección de estas variables no responde a un proceso exhaustivo de búsqueda de la mejor combinación posible de sensores. Un análisis orientado específicamente al conjunto de datos C-MAPSS podría considerar distintas combinaciones. Sin embargo, el objetivo de esta aplicación no es optimizar la selección de 2 variables para C-MAPSS, sino ilustrar y comparar el comportamiento de los modelos propuestos utilizando la misma información de entrada.

Antes del ajuste del modelo Wiener, ambas variables fueron transformadas mediante

$$Y_{kt}^j = \log\{1 + Y_{kt}^j - \min(Y_t^j)\}, \quad j = 1, 2.$$

El modelo Wiener bivariado se especificó considerando, para cada componente, una deriva instantánea lineal en el tiempo. Para la unidad k y la componente j , se consideró

$$\mu_j(a_k^j, t) = a_k^j t.$$

Una diferencia importante entre el modelo Wiener y los modelos basados en índice de degradación es el tratamiento del umbral de fallo. En el modelo Wiener bivariado fue necesario especificar explícitamente un vector de niveles críticos de fallo para las dos componentes. En esta aplicación, dicho umbral se definió utilizando la mediana de los valores finales observados en las unidades del conjunto de entrenamiento.

Como segundo modelo se ajustó un índice de degradación utilizando únicamente las variables $T50$ y NRf . Este modelo construye una representación unidimensional de la degradación a partir de las variables observadas y estima la RUL con base en la evolución del índice de degradación. A diferencia del modelo Wiener, este enfoque no requiere que el usuario especifique manualmente un umbral de fallo para cada variable. Finalmente, se ajustó un tercer modelo de índice de degradación utilizando un conjunto más amplio de variables. En este caso se consideraron las variables

$$T24, T50, P30, Nf, Ps30, phi, NRf, BPR, htBleed, W31, W32.$$

Con el objetivo de orientar sus trayectorias en una dirección compatible con el incremento del deterioro, algunas variables fueron multiplicadas por -1 , específicamente $P30$, phi , $W31$ y $W32$.

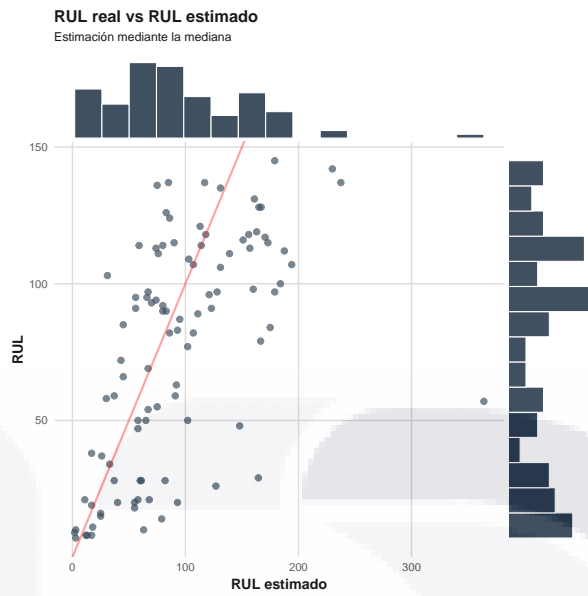


Figura 6.7: Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el modelo de Wiener con las variables $T50$ y NRf .

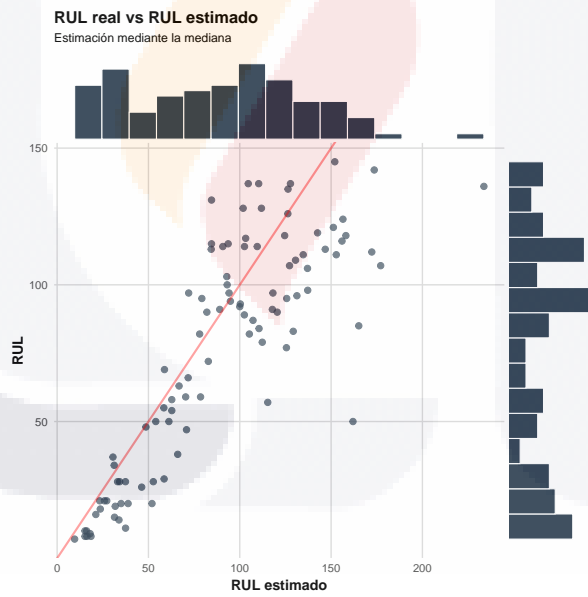


Figura 6.8: Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el índice con las variables $T50$ y NRf .

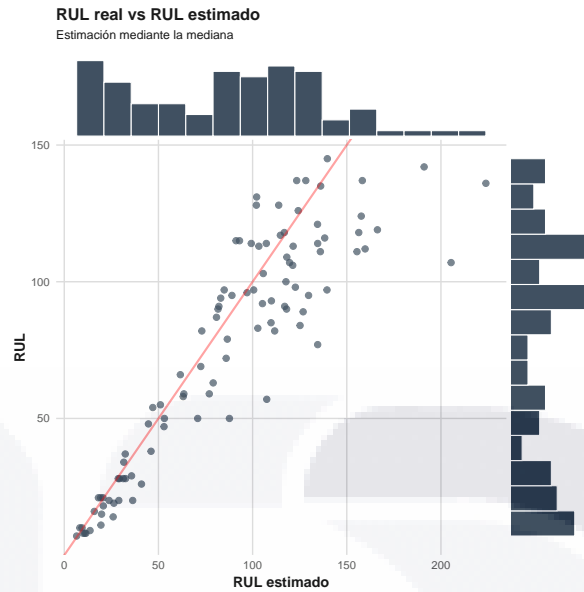


Figura 6.9: Diagrama de dispersión entre la RUL real y la mediana de la distribución predictiva de la RUL obtenida con el índice con 11 variables.

Modelo	MSE	VAR SE	MAE	VAR AE
Wiener	2846.903	94008709	36.695	1515.535
Índice de degradación 2 sensores	833.123	3191563	21.1340	390.382
Índice de degradación 11 sensores	563.863	1824240	15.9590	312.295

Tabla 6.3: Comparación del desempeño predictivo de los modelos para la estimación de la RUL en el conjunto de datos C-MAPSS.

Los resultados muestran que el modelo Wiener bivariado presenta el peor desempeño predictivo entre los tres modelos considerados. En particular, obtiene el mayor MSE y el mayor MAE, lo que indica que sus predicciones puntuales de la RUL se alejan más del valor real. Además, la varianza de los errores cuadráticos y absolutos es considerablemente mayor, sugiriendo una menor estabilidad entre unidades.

El índice de degradación construido con dos sensores mejora de forma importante el desempeño respecto al modelo Wiener. Al utilizar las mismas variables, $T50$ y NRf , este resultado sugiere que la representación mediante un índice de degradación captura, en este conjunto de datos, de manera más efectiva la evolución global de la degradación. Además, al no requerir la especificación manual de un umbral de fallo por variable, evita una fuente adicional de incertidumbre presente en el modelo Wiener.

El mejor desempeño se obtiene con el índice de degradación construido a partir de 11 sensores. Este modelo alcanza el menor MSE y el menor MAE, con una reducción

clara respecto al índice de degradación de dos sensores. Esto indica que incorporar más información del sistema permite caracterizar mejor el estado de degradación de las unidades y mejora la precisión en la estimación del RUL.

En conjunto, los resultados para este conjunto de datos favorecen a los modelos basados en índice de degradación, especialmente al modelo multivariado. La reducción simultánea del error promedio y de la variabilidad de los errores sugiere que este enfoque produce predicciones más precisas y más estables para el conjunto datos C-MAPSS.



Discusión de resultados

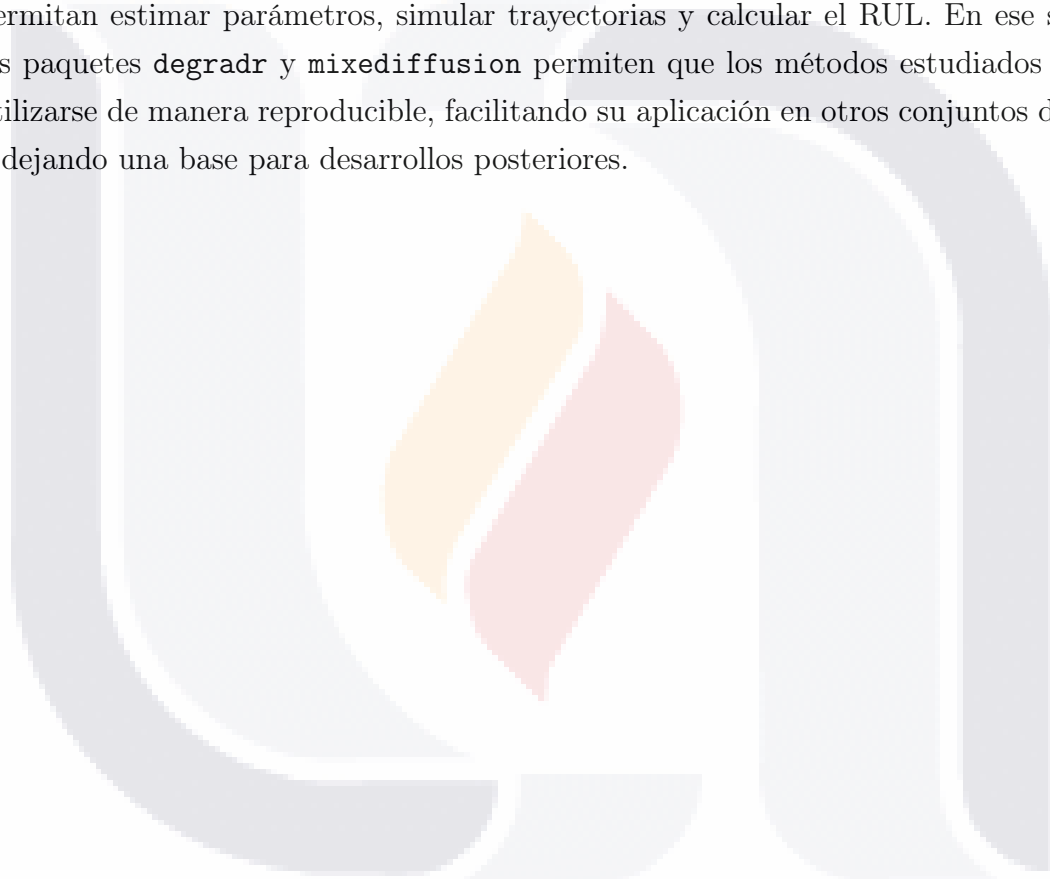
En los estudios de simulación, en particular en la inferencia, se pudo ver un buen desempeño para estimar los parámetros en la mayoría de los modelos, sin embargo, la inferencia para el parámetro de reversión a la media del modelo (3.2) sí tiene complicaciones, se pudo ver una clara tendencia a sobre estimar tal parámetro. En el estudio de simulación para estimar la RUL, los resultados fueron satisfactorios, pues los modelos sí son capaces de estimar la RUL en presencia de datos censurados, en todos los casos el modelo que obtuvo mejor desempeño fue el modelo del cual fue generada la muestra. En la aplicación de los modelos a los conjuntos de datos se pudo ver que, los resultados dependen en gran medida de las características de los datos, para el caso de los filtros industriales, en general el proceso Wiener como un modelo de regresión son buenas aproximaciones, pero el proceso de reversión a la media logró un desempeño muy superior.

Respecto a la estimación de la RUL, los resultados muestran que el enfoque basado en simulación Monte Carlo es una alternativa para obtener una estimación de la distribución de la RUL, lo cual permite obtener medidas como la media, mediana, cuantiles, etc. Sin embargo es costosa computacionalmente y lleva tiempo, en aplicaciones donde se necesite una predicción en tiempo real (in-situ) el método deja de ser viable, en cambio, para los modelos de regresión y el índice de degradación, obtener una predicción del RUL in-situ es viable, lo que facilita su aplicación en esos escenarios donde se requiere tener una predicción rápida.

Por otro lado, en el caso de los motores turbofan, el uso de un índice de degradación resulta útil debido a la presencia de múltiples sensores. Al resumir varias señales en una sola trayectoria, el problema se vuelve más manejable desde el punto de vista de la modelación. Sin embargo, este enfoque también tiene una restricción importante: para construir adecuadamente el índice se requiere información de unidades que hayan llegado hasta el fallo. Esto limita su uso en muchos escenarios donde obtener muestras de unidades que hallan llegado hasta el fallo puede ser muy costoso en tiempo y dinero.

La comparación entre los modelos muestra que no existe un único superior en todos los escenarios. Los índices de degradación son prácticos cuando se dispone de varias características y observaciones hasta el fallo, mientras que los procesos estocásticos ofrecen cierta ventaja cuando se trabaja con datos censurados. Por lo tanto, la elección del modelo debe depender del tipo de datos disponibles y del objetivo del análisis.

Finalmente, los resultados también muestran que la implementación computacional es una parte fundamental del trabajo. Aunque los modelos basados en procesos estocásticos tienen una base teórica sólida, su aplicación práctica requiere herramientas que permitan estimar parámetros, simular trayectorias y calcular el RUL. En ese sentido, los paquetes `degradr` y `mixediffusion` permiten que los métodos estudiados puedan utilizarse de manera reproducible, facilitando su aplicación en otros conjuntos de datos y dejando una base para desarrollos posteriores.



TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

Conclusiones

En esta tesis se desarrolló un marco de modelación para fenómenos de degradación mediante procesos estocásticos, considerando tanto modelos univariados como una extensión bivariada y un índice de degradación. La idea principal fue modelar la evolución del deterioro como un proceso aleatorio dinámico en el tiempo y que presenta variabilidad entre las unidades experimentales. Esta forma de modelar resulta natural en problemas de degradación, ya que en aplicaciones reales no todas las unidades se deterioran de la misma manera, ni las trayectorias observadas siguen siempre un comportamiento completamente suave.

Los modelos que se trabajaron en esta tesis tienen efectos aleatorios, lo que permite modelar heterogeneidad entre unidades. Se trabajó con modelos basados en el proceso de Wiener y en un proceso de reversión a la media. El modelo Wiener resulta útil cuando las características presentan una tendencia de degradación con fluctuaciones aleatorias y el modelo de reversión a la media permite modelar características que siguen, en promedio, una tendencia junto con oscilaciones alrededor de ella.

En la inferencia, debido a los efectos aleatorios en la deriva de los modelos (3.1), (3.1) y (3.17), la función de verosimilitud resultante es muy compleja. Por esto, el algoritmo EM y sus variantes son una herramienta adecuada para la inferencia de los modelos. En la inferencia, el paso E del algoritmo, de manera general, no se puede obtener de forma analítica. Por lo tanto se utilizó el algoritmo MCMC-EM. Las simulaciones vía MCMC aumentan el costo computacional de la inferencia, pero, da mayor flexibilidad en los modelos que se pueden construir.

Una parte importante del trabajo fue la estimación del RUL. En los modelos propuestos, debido a la forma funcional de la deriva y a la presencia de efectos aleatorios, la distribución de la vida útil remanente no se puede obtener de manera analítica. Por lo tanto, se utilizó un enfoque basado en simulación Monte Carlo. Primero se simula vía MCMC muestras de la distribución posterior de los efectos aleatorios dada la información disponible, después, se simulan trayectorias hasta el fallo. Esta estrategia permite obtener

una distribución predictiva del RUL lo que hace posible obtener algunas medidas de interés, como la mediana, la media, algún cuantil o intervalos de predicción.

Los estudios de simulación en la inferencia mostraron que la implementación de los algoritmos pueden recuperar de forma razonable los parámetros en la mayoría de los casos. También se pudo observar el comportamiento de los estimadores y del procedimiento de predicción del RUL cuando se trabaja con datos censurados. Ser capaces de trabajar con datos censurados resulta de mucho interés, pues, en la práctica, muchas veces no se cuenta con unidades que hallan llegado hasta el fallo. Por esto, una ventaja de los procesos estocásticos es que pueden ser ajustados y utilizados aun cuando las unidades no hayan alcanzado el umbral crítico, solo teniendo información parcial de su trayectoria.

En las aplicaciones con datos reales se observó que no existe un modelo que sea mejor para todos los conjuntos de datos. El desempeño depende de las características de los conjuntos de datos, por tal motivo resulta de valor tener variedad de modelos. Para los datos de filtros industriales, los cuales son, en su mayoría, son datos censurados, resultó de utilidad tener modelos capaces de modelar tales datos. En cambio, en los datos de motores turbofan, el uso del índice de degradación permite fusionar características de degradación y hacer predicciones del RUL de manera muy sencilla y precisa.

Sin embargo, el uso de índices de degradación que se utilizó tiene una limitación: para construirlo se requiere una muestra de unidades que ya hayan llegado hasta el fallo, pues la metodología que se utilizó minimiza de manera conjunta el ajuste del modelo y la variabilidad del umbral de falla. Esta es una posible limitación, pues en ocasiones, obtener muestras de unidades hasta el fallo puede ser muy costoso en recursos y tiempo, incluso imposible. A diferencia de los modelos basados en procesos estocásticos que sí pueden trabajar directamente con datos censurados.

En general, el índice de degradación resulta ser una buena opción cuando se tienen múltiples características de degradación y se cuenta con unidades que han llegado hasta el fallo. Sus ventajas principales son que: reducen la dimensión del problema y se obtienen estimaciones de la RUL de manera muy rápida, sin necesidad de hacer simulaciones. Por otro lado, los procesos estocásticos permiten modelar de forma explícita la dinámica temporal y la incertidumbre del proceso de degradación, aunque a costa de una inferencia más compleja y de un mayor esfuerzo computacional.

Otro resultado importante de la tesis fue la implementación computacional de los métodos estudiados. Parte del problema con estos modelos no es solamente teórico, también es práctico, los modelos utilizados para modelar degradación son atractivos, pero en

muchos contextos, su uso puede llegar a ser limitado si no existen herramientas accesibles que faciliten su implementación. En este trabajo, esta parte se abordó mediante el desarrollo y publicación de dos paquetes de R: `degradr`, orientado a la construcción de índices de degradación y modelación de degradación a partir de múltiples características, y `mixediffusion`, enfocado en la inferencia para procesos de difusión con efectos aleatorios. Por lo tanto, los modelos que se trabajaron en esta tesis quedan como herramientas disponibles para que otros usuarios puedan aplicarlos de manera más simple.

Finalmente, esta tesis muestra que los procesos estocásticos son una herramienta flexible para modelar fenómenos de degradación y estimar la RUL en contextos donde existe variabilidad temporal, heterogeneidad entre unidades y censura. Además, la implementación computacional en R contribuye a que estos modelos puedan utilizarse de forma accesible, sin que el usuario tenga que desarrollar desde cero todo el procedimiento. Como trabajo futuro, queda abierta la posibilidad de extender el modelo bivariado (3.17) a más de dos señales, mejorar la eficiencia computacional de los algoritmos MCMC-EM así como estudiar estrategias híbridas que combinen la capacidad de reducción de dimensión de los índices de degradación con la estructura probabilística de los procesos estocásticos.

Referencias

- Dempster, A. P., N. M. Laird y D. B. Rubin (dic. de 1977). “Maximum Likelihood from Incomplete Data Via the EM Algorithm”. En: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 39.1, págs. 1-22. ISSN: 0035-9246. DOI: [10.1111/j.2517-6161.1977.tb01600.x](https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1977.tb01600.x). eprint: https://academic.oup.com/jrsssb/article-pdf/39/1/1/49117094/jrsssb_39_1_1.pdf. URL: <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1977.tb01600.x>.
- Deng, Yingjun, Anne Barros y Antoine Grall (mar. de 2016). “Degradation Modeling Based on a Time-Dependent Ornstein-Uhlenbeck Process and Residual Useful Lifetime Estimation”. En: *IEEE Transactions on Reliability* 65.1, págs. 126-140. ISSN: 1558-1721. DOI: [10.1109/TR.2015.2462353](https://doi.org/10.1109/TR.2015.2462353).
- Frederick, D., J. DeCastro y J. Litt (2007). *User’s Guide for the Commercial Modular Aero-Propulsion System Simulation (C-MAPSS)*. NASA Technical Manual TM2007-215026. NASA Glenn Research Center y U.S. Army Research Laboratory.
- Gebraeel, N. (2006). “Sensory-Updated Residual Life Distributions for Components With Exponential Degradation Patterns”. En: *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering* 3.4, págs. 382-393. DOI: [10.1109/TASE.2006.876609](https://doi.org/10.1109/TASE.2006.876609).
- Guo, Liang et al. (2017). “A recurrent neural network based health indicator for remaining useful life prediction of bearings”. En: *Neurocomputing* 240, págs. 98-109. ISSN: 0925-2312. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.02.045>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925231217303363>.
- Hagmeyer, S., F. Mauthe y P. Zeiler (2021). “Creation of Publicly Available Data Sets for Prognostics and Diagnostics Addressing Data Scenarios Relevant to Industrial Applications”. En: *International Journal of Prognostics and Health Management* 12.2. DOI: [10.36001/ijphm.2021.v12i2.3087](https://doi.org/10.36001/ijphm.2021.v12i2.3087).
- Han, Ziyue, Xinhong Li y Guoming Chen (2023). “A stochastic model for RUL prediction of subsea pipeline subject to corrosion-fatigue degradation.” En: *Process Safety Environmental Protection: Transactions of the Institution of Chemical Engineers*

- Part B* 178. ISSN: 0957-5820. DOI: [10.1016/j.psep.2023.08.042](https://doi.org/10.1016/j.psep.2023.08.042). URL: <https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=8gh&AN=172293099&site=eds-live>.
- Hove, Herbert y Farai Mlambo (2022). “On Wiener Process Degradation Model for Product Reliability Assessment: A Simulation Study”. En: *Modelling and Simulation in Engineering* 2022.1, pág. 7079532. DOI: <https://doi.org/10.1155/2022/7079532>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1155/2022/7079532>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1155/2022/7079532>.
- Lefebvre, M. (2007). *Applied Stochastic Processes*. Universitext. Springer New York. ISBN: 9780387489766. URL: https://books.google.com.mx/books?id=YPEju0_tKnAC.
- Liu, Kaibo, Nagi Z. Gebraeel y Jianjun Shi (2013). “A Data-Level Fusion Model for Developing Composite Health Indices for Degradation Modeling and Prognostic Analysis”. En: *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering* 10.3, págs. 652-664. DOI: [10.1109/TASE.2013.2250282](https://doi.org/10.1109/TASE.2013.2250282).
- Liu, Kaibo y Shuai Huang (2016). “Integration of Data Fusion Methodology and Degradation Modeling Process to Improve Prognostics”. En: *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering* 13.1, págs. 344-354. DOI: [10.1109/TASE.2014.2349733](https://doi.org/10.1109/TASE.2014.2349733).
- Lu, C. Joseph y William O. Meeker (1993). “Using Degradation Measures to Estimate a Time-to-Failure Distribution”. En: *Technometrics* 35.2, págs. 161-174. DOI: [10.1080/00401706.1993.10485038](https://doi.org/10.1080/00401706.1993.10485038). eprint: <https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/00401706.1993.10485038>. URL: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00401706.1993.10485038>.
- McLachlan, G.J. y T. Krishnan (2008). *The EM Algorithm and Extensions*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley. ISBN: 9780470191606. URL: <https://books.google.com.mx/books?id=NBawzaWoWa8C>.
- Montoya Calzada, Pedro Abraham et al. (2025). *degradr: Estimating Remaining Useful Life with Linear Mixed Effects Models*. R package version 1.0.1. DOI: [10.32614/CRAN.package.degradr](https://doi.org/10.32614/CRAN.package.degradr). URL: <https://CRAN.R-project.org/package=degradr>.
- (2026). *mixeddiffusion: Mixed-Effects Diffusion Models with General Drift*. R package version 1.0.0. DOI: [10.32614/CRAN.package.mixeddiffusion](https://doi.org/10.32614/CRAN.package.mixeddiffusion). URL: <https://CRAN.R-project.org/package=mixeddiffusion>.
- Øksendal, Bernt (2003). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. 6.^a ed. Universitext. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-540-04758-2. DOI: [10.1007/978-3-642-14394-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6).

- R, Sabareesh G et al. (nov. de 2019). “PCA based health indicator for remaining useful life prediction of wind turbine gearbox”. En: *Vibroengineering PROCEDIA* 29, págs. 31-36. DOI: [10.21595/vp.2019.21161](https://doi.org/10.21595/vp.2019.21161). URL: <https://doi.org/10.21595/vp.2019.21161>.
- R Core Team (2025). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. URL: <https://www.R-project.org/>.
- Rausand, M y A Hoyland (2003). *System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications*. Wiley. ISBN: 9780471471332. URL: <https://books.google.com.mx/books?id=gkUWz9AA-QEC>.
- Saxena, Abhinav et al. (2008). “Damage propagation modeling for aircraft engine run-to-failure simulation”. En: *2008 International Conference on Prognostics and Health Management*, págs. 1-9. DOI: [10.1109/PHM.2008.4711414](https://doi.org/10.1109/PHM.2008.4711414).
- Shi, Yu et al. (2020). “Multi-dimensional Lévy processes with Lévy copulas for multiple dependent degradation processes in lifetime analysis”. En: *Quality Engineering* 32.3, págs. 434-448. DOI: [10.1080/08982112.2020.1757704](https://doi.org/10.1080/08982112.2020.1757704). eprint: <https://doi.org/10.1080/08982112.2020.1757704>. URL: <https://doi.org/10.1080/08982112.2020.1757704>.
- Wang, Haowei, Tingxue Xu y Qiaoli Mi (2015). “Lifetime prediction based on Gamma processes from accelerated degradation data”. En: *Chinese Journal of Aeronautics* 28.1, págs. 172-179. ISSN: 1000-9361. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2014.12.015>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1000936114002143>.
- Wang, Peng, Robert X. Gao y Wojbor A. Woyczynski (2021). “Lévy Process-Based Stochastic Modeling for Machine Performance Degradation Prognosis”. En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 68.12, págs. 12760-12770. DOI: [10.1109/TIE.2020.3047037](https://doi.org/10.1109/TIE.2020.3047037).
- Wei, Greg C. G. y Martin A. Tanner (1990). “A Monte Carlo Implementation of the EM Algorithm and the Poor Man’s Data Augmentation Algorithms”. En: *Journal of the American Statistical Association* 85.411, págs. 699-704. ISSN: 01621459, 1537274X. URL: <http://www.jstor.org/stable/2290005> (visitado 11-12-2025).
- Whitmore, G A (1995). “Estimating degradation by a wiener diffusion process subject to measurement error”. En: *Lifetime Data Analysis* 1 (3), págs. 307-319. ISSN: 1572-9249. DOI: [10.1007/BF00985762](https://doi.org/10.1007/BF00985762). URL: <https://doi.org/10.1007/BF00985762>.

Ye, Zhi-Sheng et al. (2013). “Degradation Data Analysis Using Wiener Processes With Measurement Errors”. En: *IEEE Transactions on Reliability* 62.4, págs. 772-780. DOI: [10.1109/TR.2013.2284733](https://doi.org/10.1109/TR.2013.2284733).

