



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE AGUASCALIENTES**

**CENTRO DE CIENCIAS DEL DISEÑO Y DE LA
CONSTRUCCIÓN**

TESIS

**IMPLEMENTACIÓN DE MODELOS CONSTITUTIVOS
AVANZADOS MEDIANTE ANÁLISIS NUMÉRICO NO LINEAL EN
CONCRETO REFORZADO**

PRESENTA

M.I.C. Juan Antonio Hernández Andrade

**PARA OPTAR POR EL GRADO DE DOCTORADO EN CIENCIAS DE
LOS ÁMBITOS ANTRÓPICOS**

TUTOR

Dr. José Ángel Ortiz Lozano

CO-TUTOR

**Dr. Wilmer Julián Carrillo León
Universidad Militar Nueva Granada, UMNG, Colombia**

ASESORA

Dra. Silvia Rodríguez Narciso

Aguascalientes, Ags., 14 de octubre de 2024

Autorizaciones



**CARTA DE VOTO APROBATORIO
INDIVIDUAL**

M. en Ing. Amb. Ma. Guadalupe Lira Peralta
DECANA DEL CENTRO DE CIENCIAS DEL DISEÑO Y DE LA CONSTRUCCIÓN

PRESENTE

Por medio del presente como **TUTOR** designado del estudiante **JUAN ANTONIO HERNÁNDEZ ANDRADE** con ID **88116** quien realizó *la tesis* titulado: **IMPLEMENTACIÓN DE MODELOS CONSTITUTIVOS AVANZADOS MEDIANTE ANÁLISIS NUMÉRICO NO LINEAL EN CONCRETO REFORZADO**, un trabajo propio, innovador, relevante e inédito y con fundamento en el Artículo 175, Apartado II del Reglamento General de Docencia doy mi consentimiento de que la versión final del documento ha sido revisada y las correcciones se han incorporado apropiadamente, por lo que me permito emitir el **VOTO APROBATORIO**, para que *el* pueda proceder a imprimirla así como continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del grado.

Pongo lo anterior a su digna consideración y sin otro particular por el momento, me permito enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE

"Se Lumen Proferre"

Aguascalientes, Ags., a 21 de noviembre de 2024.


Dr. José Ángel Ortiz Lozano
Tutor de tesis

c.c.p.- Interesado

c.c.p.- Secretaría Técnica del Programa de Posgrado

CARTA DE VOTO APROBATORIO
INDIVIDUAL

M. en Ing. Amb. Ma. Guadalupe Lira Peralta
DECANA DEL CENTRO DE CIENCIAS DEL DISEÑO Y DE LA CONSTRUCCIÓN

PRESENTE

Por medio del presente como **CO-TUTOR** designado del estudiante **JUAN ANTONIO HERNÁNDEZ ANDRADE** con ID **88116** quien realizó *la tesis* titulado: **IMPLEMENTACIÓN DE MODELOS CONSTITUTIVOS AVANZADOS MEDIANTE ANÁLISIS NUMÉRICO NO LINEAL EN CONCRETO REFORZADO**, un trabajo propio, innovador, relevante e inédito y con fundamento en el Artículo 175, Apartado II del Reglamento General de Docencia doy mi consentimiento de que la versión final del documento ha sido revisada y las correcciones se han incorporado apropiadamente, por lo que me permito emitir el **VOTO APROBATORIO**, para que *el* pueda proceder a imprimirla así como continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del grado.

Pongo lo anterior a su digna consideración y sin otro particular por el momento, me permito enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"Se Lumen Proferre"

Aguascalientes, Ags., a 21 de noviembre de 2024.



Dr. Wilmer Julián Carrillo León
Co-Tutor de tesis

c.c.p.- Interesado
c.c.p.- Secretaría Técnica del Programa de Posgrado

**CARTA DE VOTO APROBATORIO
INDIVIDUAL**

M. en Ing. Amb. Ma. Guadalupe Lira Peralta
DECANA DEL CENTRO DE CIENCIAS DEL DISEÑO Y DE LA CONSTRUCCIÓN

PRESENTE

Por medio del presente como **ASESORA** designado del estudiante **JUAN ANTONIO HERNÁNDEZ ANDRADE** con ID *88116* quien realizó *la tesis* titulado: **IMPLEMENTACIÓN DE MODELOS CONSTITUTIVOS AVANZADOS MEDIANTE ANÁLISIS NUMÉRICO NO LINEAL EN CONCRETO REFORZADO**, un trabajo propio, innovador, relevante e inédito y con fundamento en el Artículo 175, Apartado II del Reglamento General de Docencia doy mi consentimiento de que la versión final del documento ha sido revisada y las correcciones se han incorporado apropiadamente, por lo que me permito emitir el **VOTO APROBATORIO**, para que *el* pueda proceder a imprimir/*la* así como continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del grado.

Pongo lo anterior a su digna consideración y sin otro particular por el momento, me permito enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE

“Se Lumen Proferre”

Aguascalientes, Ags., a 21 de noviembre de 2024.



Dra. Silvia Rodríguez Narciso
Asesora de tesis

c.c.p.- Interesado
c.c.p.- Secretaría Técnica del Programa de Posgrado

Fecha de dictaminación dd/mm/aaaa: 25/11/2024

NOMBRE: Juan Antonio Hernández Andrade ID 88116

PROGRAMA: Doctorado en Ciencias de los Ámbitos Antrópicos LGAC (del posgrado): Estudios y proyectos en ingeniería civil

TIPO DE TRABAJO: (X) Tesis () Trabajo Práctico

TÍTULO: Implementación de modelos constitutivos avanzados mediante análisis numérico no lineal en concreto reforzado

IMPACTO SOCIAL (señalar el impacto logrado): El planteamiento de los modelos permite hacer la estimación del comportamiento de elementos estructurales, los cuales pueden retroalimentar la normatividad existente.

INDICAR SI NO N.A. (NO APLICA) SEGÚN CORRESPONDA:

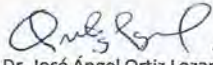
INDICAR	SI	NO	N.A. (NO APLICA)	SEGÚN CORRESPONDA:
Elementos para la revisión académica del trabajo de tesis o trabajo práctico:				
SI				El trabajo es congruente con las LGAC del programa de posgrado
SI				La problemática fue abordada desde un enfoque multidisciplinario
SI				Existe coherencia, continuidad y orden lógico del tema central con cada apartado
SI				Los resultados del trabajo dan respuesta a las preguntas de investigación o a la problemática que aborda
SI				Los resultados presentados en el trabajo son de gran relevancia científica, tecnológica o profesional según el área
SI				El trabajo demuestra más de una aportación original al conocimiento de su área
SI				Las aportaciones responden a los problemas prioritarios del país
NO				Generó transferencia del conocimiento o tecnológica
SI				Cumple con la ética para la investigación (reporte de la herramienta antiplagio)
El egresado cumple con lo siguiente:				
SI				Cumple con lo señalado por el Reglamento General de Docencia
SI				Cumple con los requisitos señalados en el plan de estudios (créditos curriculares, optativos, actividades complementarias, estancia, predoctoral, etc)
SI				Cuenta con los votos aprobatorios del comité tutorial, en caso de los posgrados profesionales si tiene solo tutor, podrá liberar solo el tutor
N.A.				Cuenta con la carta de satisfacción del Usuario
SI				Coincide con el título y objetivo registrado
SI				Tiene congruencia con cuerpos académicos
SI				Tiene el CVU del Conacyt actualizado
SI				Tiene el artículo aceptado o publicado y cumple con los requisitos institucionales (en caso que proceda)
En caso de Tesis por artículos científicos publicados				
N.A.				Aceptación o Publicación de los artículos según el nivel del programa
N.A.				El estudiante es el primer autor
N.A.				El autor de correspondencia es el Tutor del Núcleo Académico Básico
N.A.				En los artículos se ven reflejados los objetivos de la tesis, ya que son producto de este trabajo de investigación.
N.A.				Los artículos integran los capítulos de la tesis y se presentan en el idioma en que fueron publicados
N.A.				La aceptación o publicación de los artículos en revistas indexadas de alto impacto

Con base a estos criterios, se autoriza se continúen con los trámites de titulación y programación del examen de grado: Sí No

FIRMAS

Elaboró:

* NOMBRE Y FIRMA DEL CONSEJERO SEGÚN LA LGAC DE ADSCRIPCIÓN:


Dr. José Ángel Ortiz Lozano

NOMBRE Y FIRMA DEL SECRETARIO TÉCNICO:


Dra. Leticia Jacinto Robles Cueilar

* En caso de conflicto de intereses, firmará un revisor miembro del NAB de la LGAC correspondiente distinto al tutor o miembro del comité tutorial, asignado por el Decano


Revisó:

NOMBRE Y FIRMA DEL SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO:


Dr. Mario Ernesto Espalza Díaz de León

Autorizó:

NOMBRE Y FIRMA DEL DECANO:


M. en Ing. Amb. Ma. Guadalupe Lira Peralta

Nota: procede el trámite para el Depto. de Apoyo al Posgrado

En cumplimiento con el Art. 105C del Reglamento General de Docencia que a la letra señala entre las funciones del Consejo Académico: ... Cuidar la eficiencia terminal del programa de posgrado y el Art. 105F las funciones del Secretario Técnico, llevar el seguimiento de los alumnos.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE AGUASCALIENTES

Juan Antonio Hernández Andrade:

Por medio de la presente, se hace constar que el libro digital: *Nuevas perspectivas sobre la ciudad y su contexto antrópico*, coordinado por el Dr. Alejandro Acosta Collazo y la Dra. Rocío Ramírez Villalpando, y en el cual usted es autor principal del capítulo: "Modelos constitutivos en análisis estructural" (páginas 271-285), fue publicado por el Departamento Editorial UAA en este año. Asimismo, se garantiza que el documento fue rigurosamente dictaminado por expertos en modalidad doble ciego y cuenta con el registro ISBN: 978-607-8909-59-9. Para los fines legales que el interesado requiera, se extiende la presente constancia de publicación.

Sin otro particular por el momento, le envío un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Aguascalientes, 4 de diciembre de 2023.

"Se Lumen Proferre"

M.E. Martha Esparza Ramírez

Jefa del Departamento Editorial



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE AGUASCALIENTES
DIRECCIÓN GENERAL
DE DIFUSIÓN Y VINCULACIÓN

c.c.p. Archivo

Agradecimientos

Primeramente, agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnología (CONAHCyT), por el apoyo económico otorgado desde el año 2021 hasta el 2023 para realizar los estudios de Doctorado, así como a la Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA) por seguir siendo parte de mi desarrollo profesional.

Mi más sincero agradecimiento a mi tutor de tesis el Dr. José Ángel Ortiz Lozano por su acertada orientación, soporte, tiempo y conocimiento, a mi co-tutor el Dr. Julián Carrillo y mi asesora la Dra. Silvia Rodríguez Narciso, por el entusiasmo y dedicación que me brindaron para que esta tesis llegará a tener un excelente nivel académico.

Finalmente agradezco a mis hermanos Enoc, Fernando y la *Bebé* por su apoyo emocional hasta el día hoy, así como a mi madre Norma Patricia Andrade García y a mi padre Miguel Ángel Hernández Soriano, por su dedicación a su familia, infundiéndome valores y el gusto de estudiar y seguir progresando en la vida.

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS



*En memoria de Miguel Ángel Hernández Soriano.
Aunque no me acompañaste al final de este viaje, sé que siempre estarás para cuidarnos.
Te amo papá.*

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

ÍNDICE GENERAL

Índice de Tablas	4
Índice de Figuras	6
Símbolos	9
Resumen	13
Abstract	14
INTRODUCCIÓN	15
Planteamiento y Justificación del Problema	16
Objetivos	17
Alcances de la Tesis	17
Hipótesis	18
Metodología	18
CAPÍTULO I ESTADO DEL ARTE.....	19
1.1 Impacto de los Modelos Constitutivos en el Análisis Estructural.....	20
1.2 Impacto de Fibras de Refuerzo al Concreto	20
1.3 Modelos Constitutivos	21
1.4 Ejemplos de Modelos Constitutivos.....	22
1.5 Análisis Lineal y No Lineal	28
CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO	34
2.1 Planteamiento General	35
2.2 Modelos Constitutivos en el Análisis Estructural	36
2.3 NTC para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto	38
2.3.1 Criterios de Diseño	38
2.3.2 Estados Límite de Falla	39
2.3.3 Concreto reforzado con fibras	43
2.4 Reglamento para Concreto Estructural de Acuerdo al ACI.....	44
2.4.1 Criterios de Diseño	44
2.4.2 Estados Límite de Diseño	45
2.5 Ejemplo de Modelos Constitutivos en Software.....	48

2.5.1 ABAQUS.....	48
2.5.2 Modelo General	49
2.5.3 Modelo Constitutivo Plástico	50
2.5.4 Modelo Constitutivo Inelástico para Concreto.....	52
2.5.5 Modelo de Agrietamiento.....	54
2.6 Análisis No Lineal.....	56
2.6.1 Método del Elemento Finito.....	56
2.6.2 Método de Diferencias Finitas.....	57
2.6.3 Método del Elemento Discreto.....	58
2.6.4 Método del Elemento Aplicado.....	59
CAPÍTULO III METODOLOGÍA	62
3.1 Campaña Experimental	63
3.1.1 Trabajo de campo y laboratorio.....	63
3.1.2 Análisis Estadístico	63
3.2 Resultados	68
3.3 Comprobación de Hipótesis	68
3.4 Evaluación de Resultados	69
CAPÍTULO IV TRABAJO DE CAMPO Y LABORATORIO	70
4.1 Especímenes y Pruebas de Laboratorio.....	71
CAPÍTULO V RESULTADOS	77
5.1 Resultados de Laboratorio.....	78
5.2 Estimación del Modelo de Regresión Lineal Múltiple	79
5.3 Análisis de Varianza (ANOVA)	85
5.4 Desarrollo de Modelos Constitutivos.....	86
5.4.1 Modelo Constitutivo del Esfuerzo a Compresión	86
5.4.2 Modelo Constitutivo del Módulo de Elasticidad.....	89
5.4.3 Modelo Constitutivo del Esfuerzo Residual a Tensión	91
5.4.4 Evaluación con Base de Datos	93
5.4.5 Modelo en ABAQUS	94
5.5 Factor de Predicción.....	100
5.6 Discusión de Resultados	103

CONCLUSIONES 108
REFERENCIAS..... 112
ANEXOS..... 118



Índice de Tablas

Tabla 1. Características del Concreto Reforzado de Hassoun & Al-Manaseer (2008).36

Tabla 2. Propiedades del Concreto Clase 1.....38

Tabla 3. Factores de resistencia.39

Tabla 4. Valores del factor ϕ45

Tabla 5. Análisis de varianza.65

Tabla 6. Propiedades geométricas y mecánicas de las fibras de refuerzo.71

Tabla 7. Variables de las fibras.73

Tabla 8. Características de los agregados.74

Tabla 9. Resultados promedio del laboratorio.78

Tabla 10. Modelos de regresión lineal múltiple completo para el esfuerzo a compresión.80

Tabla 11. Modelos de regresión lineal múltiple reducidos para el esfuerzo a compresión.80

Tabla 12. Análisis de varianza para el modelo a compresión.....81

Tabla 13. Modelos de regresión lineal múltiple completo para el módulo de elasticidad.....82

Tabla 14. Modelos de regresión lineal múltiple reducidos para el módulo de elasticidad.....82

Tabla 15. Análisis de varianza para el modelo al módulo de elasticidad.83

Tabla 16. Modelos de regresión lineal múltiple completo para el esfuerzo residual a tensión.....84

Tabla 17. Análisis de varianza para el modelo al esfuerzo residual a tensión.84

Tabla 18. Evaluación de los modelos a compresión en concreto con SFR.87

Tabla 19. Evaluación de los modelos a compresión en concreto con PFR.87

Tabla 20. Error relativo de los modelos del módulo de elasticidad.....90

Tabla 21. Parámetros estadísticos.....93

Tabla 22. Porcentaje de especímenes contra ϵ_{rm}93

Tabla 23. Evaluación de modelos a compresión con base de dato para SFR..94

Tabla 24. Evaluación de modelos a compresión con base de dato para PFR..94

Tabla 25. Evaluación de modelos empleando base de dato para módulo de elasticidad.....94

Tabla 26. Cuadro comparativo entre el modelo mecánico y el modelo lineal.99

Tabla 27. Evaluación de modelos empleando base de dato para SFR y factor de predicción. 102

Tabla 28. Evaluación de modelos empleando base de dato para PFR y factor de predicción. 102

Tabla 29. Evaluación de modelos empleando base de datos para módulo de elasticidad y factor de predicción..... 103

Tabla 30. Características de un modelo constitutivo mecánico con respecto a un modelo constitutivo lineal..... 110

Índice de Figuras

Figura 1. Características del análisis lineal y no lineal.....29

Figura 2. Interacción de una partícula.....29

Figura 3. Resultados de Rusiński et al. (2004).31

Figura 4. Ejemplo de análisis de la investigación de Crespi et al. (2015).....32

Figura 5. Ejemplo de análisis de la investigación de Kujawa et al. (2020).....32

Figura 6. Microestructura de acero al carbón de Cuevas-Arteaga et al. (2012).
.....37

Figura 7. Microestructura del concreto de Hild et al. (2003).37

Figura 8. Dassault Systemes Simulia Corp. de *3D Design & Engineering Software - Dassault Systèmes®*.49

Figura 9. Comportamiento uniaxial del concreto simple de *3D Design & Engineering Software - Dassault Systèmes®*.....53

Figura 10. Falla superficial del concreto en plano de esfuerzos de 3D Design & Engineering Software - Dassault Systèmes®.54

Figura 11. Comportamiento de agrietamiento basado en la energía de fractura de 3D Design & Engineering Software - Dassault Systèmes®.55

Figura 12. Representación del método de elemento finito basado Hutton (2004).56

Figura 13. Modelo del método de elemento finito basado Hutton (2004).....57

Figura 14. Representación de interacción de partículas en el DEM de *3D Design & Engineering Software - Dassault Systèmes®*, 2021.....59

Figura 15. Grados de libertad en análisis AEM de Eraky et al., 2021.....60

Figura 16. Punto de contacto y elementos de análisis para el AEM de Eraky et al., 2021.60

Figura 17. Forma de las fibras de refuerzo.72

Figura 18. Pruebas de laboratorio.75

Figura 19. Diagrama de esfuerzo residual empleando y basado en la norma EN 14651..... 76

Figura 20. Análisis de valores predichos y valores residuales en modelo a resistencia a compresión. 81

Figura 21. Análisis de valores predichos y valores residuales en modelo al módulo de elasticidad..... 83

Figura 22. Análisis de valores predichos y valores residuales en modelo al esfuerzo residual a tensión. 85

Figura 23. Análisis de medias para la relación de Poisson..... 86

Figura 24. Comparación de modelos de compresión..... 88

Figura 25. Análisis de dispersión de datos en los modelos de compresión.... 89

Figura 26. Comparación de modelos del módulo de elasticidad. 90

Figura 27. Análisis de dispersión de datos en los modelos del módulo de elasticidad..... 91

Figura 28. Comparación del modelo del esfuerzo residual a tensión. 92

Figura 29. Análisis de dispersión de datos en el modelo del esfuerzo residual a tensión. 92

Figura 30. Diagrama esfuerzo – deformación de un espécimen de concreto (SFR04)..... 95

Figura 31. Modelo de cilindro de concreto en ABAQUS..... 96

Figura 32. Modelo de presión de ABAQUS..... 96

Figura 33. Análisis de resultados en ABAQUS..... 97

Figura 34. Modelo de viga de concreto reforzado con fibras en ABAQUS.... 97

Figura 35. Modelo de desplazamiento de nodos..... 98

Figura 36. Modelo de esfuerzos a compresión. 98

Figura 37. Modelo de esfuerzos a tensión..... 99

Figura 38. Modelo de daño a tensión..... 99

Figura 39. Comparación a la resistencia a compresión entre los valores observados y los valores obtenidos por el modelo desarrollado..... 101

Figura 40. Comparación al módulo de elasticidad entre los valores observados y los valores obtenidos por el modelo desarrollado..... 101

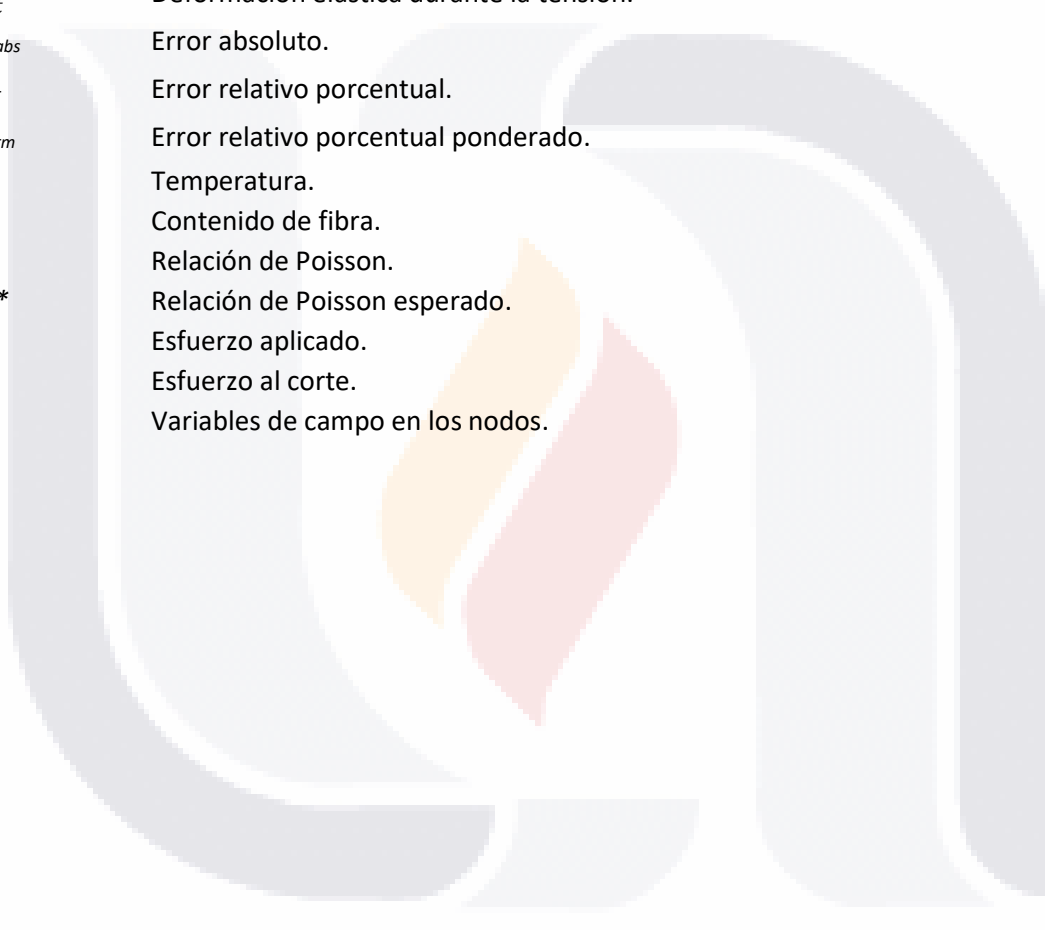


Símbolos

A	Área del elemento conectado al resorte, método del elemento aplicado.
A_1	Área de contacto cargada a compresión.
A_f	Área de la sección transversal de la fibra.
A_g	Área bruta de la sección transversal del elemento sujeto a flexión.
A_s	Área del refuerzo de la viga de tensión.
A'_s	Área del acero a compresión.
A_{st}	Área total del refuerzo longitudinal no pre-esforzado.
b	Ancho de la sección.
B_n	Resistencia al aplastamiento del área cargada A_1 .
b_w	Ancho del alma o diámetro de la sección circular.
d	Peralte efectivo.
D	Cargas muertas, o momentos y fuerzas internas correspondientes.
$d_{x,y}$	Distancia entre dos resortes.
d'	Distancia entre el centroide del acero a compresión y la fibra extrema a compresión.
d_c	Factor de daño.
D^{el}	Matriz dependiente de la temperatura.
D_f	Dosificación de la fibra.
d_i	Distancia entre dos centros de las partículas.
d_p	Distancia de la fibra extrema en compresión al centroide de los tendones de presfuerzo.
$d\epsilon_d^{el}$	Tasa de desplazamiento elástico.
$d\epsilon^{el}$	Tasa de desplazamiento total para la detección de agrietamiento.
$d\epsilon_t^{pl}$	Es la tasa de desplazamiento plástica asociada con el agrietamiento superficial.
E	Módulo de Young.
E_q	Efecto de carga producidos por el sismo o momentos y fuerzas internas correspondientes.
e	Valor esperado al error.
E^*	Módulo de elasticidad esperado.
F	Cargas debidas al peso y presión de fluidos con densidades bien definidas y alturas máximas controlables, o momentos y fuerzas internas correspondientes.
f_b	Resistencia a aplastamiento.
f'_c	Resistencia a la compresión, diseño a la resistencia a la compresión.
f''_c	Esfuerzo uniforme de compresión en el concreto.
f'_c^*	Resistencia a la compresión proyectada.
$f_{e,3}$	Esfuerzo residual para una deflexión de 3 mm, de acuerdo a JCI-SF4 (1983).

F_p, f_c	Factor de predicción para la resistencia a la compresión.
F_p, ME	Factor de predicción para el módulo de elasticidad.
f_{st}	Esfuerzo a la tensión esperado.
f_{sw}	Esfuerzo a flexión esperado.
f_t	Esfuerzo a la tensión.
f_w	Esfuerzo a la flexión.
f_y	Esfuerzo especificado de fluencia del acero de refuerzo.
$F\epsilon$	Deformación total.
G	Módulo de corte.
G_f	Energía fracturada.
H	Cargas debidas al peso y empuje del suelo, del agua en el suelo, u otros materiales o momentos y fuerzas internas correspondientes.
$H_{i,\alpha}$	Conjunto de parámetros de endurecimiento.
IR	Índice de refuerzo.
K	Es la relación longitud/diámetro de la fibra.
L_c	Cargas vivas, o momentos y fuerzas internas correspondientes.
l_f/d_f	Relación entre la longitud y el diámetro de la fibra.
L_r	Cargas vivas de cubierta, o momentos y fuerzas internas correspondientes.
M	Tipo de material de la fibra.
m, a	Constantes de Huang.
ME	Módulo de elasticidad.
ME^*	Módulo de elasticidad proyectada.
M_f	Momento flexionante que actúa en la sección.
M_R	Resistencia de diseño a flexión.
M_{R_x}	Momento resistente de diseño alrededor del eje X.
M_{R_y}	Momento resistente de diseño alrededor del eje Y.
M_u	Momento flexionante de diseño.
M_{ux}	Momento de diseño alrededor del eje X.
M_{uy}	Momento de diseño alrededor del eje Y.
N	Función de interpolación.
n	Número de muestra.
N_u	Fuerza de diseño de compresión normal al plano crítico en la revisión por fuerza cortante por fricción.
N_u'	Carga axial mayorada normal a la sección transversal, considerar positiva para compresión y negativa para tensión.
p	Perímetro.
$P_{n(max)}$	Máximo valor permitido de resistencia axial nominal de la sección transversal.
P_R	Carga normal resistente de diseño aplicada con las excentricidades e_x y e_y .

P_{RO}	Carga axial resistente de diseño.
P_{Rx}	Carga normal resistente de diseño aplicada con una excentricidad (e_x) en un plano de simetría.
P_{Ry}	Carga normal resistente de diseño aplicada con una excentricidad (e_y) en un plano de simetría.
PU	Fuerza axial de diseño.
R	Cargas por lluvia, o momento y fuerzas internas correspondientes.
s	Cargas por nieve, o momentos y fuerzas internas correspondientes.
S	Desviación estándar.
S^2	Varianza.
T	Espesor del elemento.
Te	Tenacidad.
Th	Efectos acumulados de variación de temperatura, flujo plástico, retracción, asentamiento diferencial, y retracción de concreto de retracción compensada.
u	Agrietamiento.
U	Resistencia requerida para resistir las cargas mayoradas o momentos y fuerzas internas correspondientes.
U^*	Densidad potencial de energía de deformación
V	Fuerza cortante que actúa en la sección.
v	Velocidad.
V_c	Resistencia nominal al cortante proporcionada por el concreto.
V_{cR}	Fuerza cortante de diseño.
V_f	Volumen, cantidad de fibra.
V_n	Resistencia nominal al cortante.
V_s	Resistencia nominal al cortante proporcionada por el esfuerzo cortante.
V_u	Fuerza cortante mayorada en la sección considerada.
W	Cargas por viento, o momento y fuerzas internas correspondientes.
x	Variable regresora
Y	Variable independiente
y	Valor observado.
\hat{y}	Valor calculado.
α_d	Constante de Wei.
$\alpha_{f,c}$	Constantes de Liang.
$\alpha_{f,\varepsilon}$	Constante de calidad de fibra, Dhakal.
β	Coefficiente de regresión parcial.
δ	Densidad.
δ_f	Deflexión.
δ'	Distancia de penetración entre dos partículas.
ε	Deformación.
ε^*	Deformación esperada.
$\dot{\varepsilon}$	Tasa de desplazamiento total.



$\dot{\varepsilon}^{el}$	Tasa de cambio de desplazamiento elástico.
$\dot{\varepsilon}^{pl}$	Tasa de cambio de desplazamiento plástico.
ε_c^{in}	Deformación inelástica durante la compresión.
ε_{0c}^{el}	Deformación elástica durante la compresión.
ε_c^{pl}	Deformación elástica durante la compresión.
ε_t^{ck}	Deformación inelástica durante la tensión.
ε_{0t}^{el}	Deformación elástica durante la tensión.
ε_t^{pl}	Deformación elástica durante la tensión.
ε_{abs}	Error absoluto.
ε_r	Error relativo porcentual.
ε_{rm}	Error relativo porcentual ponderado.
ϑ	Temperatura.
λ	Contenido de fibra.
ν	Relación de Poisson.
ν^*	Relación de Poisson esperado.
σ	Esfuerzo aplicado.
τ	Esfuerzo al corte.
φ	Variables de campo en los nodos.

Resumen

Los modelos constitutivos describen el comportamiento de un material al ser sometido a una acción. Este trabajo abarca una extensa campaña experimental y numérica, con el fin de plantear modelos que describan el comportamiento mecánico del concreto reforzado con fibras de acero o polipropileno, así como la evaluación del modelo de daño plástico empleado en ABAQUS. Se tiene como objetivo conocer cómo afecta la cantidad de variables en el desarrollo de modelos constitutivos. La campaña experimental consistió en la elaboración de 91 cilindros de concreto y 111 vigas de concreto, los cuales se subdividieron dependiendo del tipo de fibra que se empleó y su dosificación. Las propiedades de las fibras que se usaron para el desarrollo de los modelos son el tipo de material, geometría, dosificación, densidad, contenido de fibra, resistencia a la tensión, módulo de Young e índice de refuerzo. Para indicar cuáles propiedades tienen mayor influencia sobre el modelo se empleó análisis de varianza y el modelo de regresión lineal múltiple. Como resultados se obtuvo que, para la resistencia a la compresión, la diferencia porcentual menor entre el modelo desarrollado con respecto a los resultados obtenidos en el laboratorio fue de 4.63 %, usando fibras de polipropileno; para el módulo de elasticidad, el modelo desarrollado para fibras de acero obtuvo la mejor semejanza con una diferencia porcentual de 3.15 % con respecto a los resultados del laboratorio; finalmente el modelo para el esfuerzo residual a tensión, en fibras de acero, obtuvo una diferencia porcentual de 9.54 %. Para el modelo empleado en software, se tiene el mejor ajuste a un modelo a compresión de 5.45 % empleando fibras de polipropileno. Se realizó una segunda evaluación con una base de datos diferentes, y así determinar un factor de proximidad que al aplicarlo asemeje al valor real.

Palabras clave: modelo constitutivo, fibras de refuerzo, análisis no lineal, análisis de varianza, modelos de regresión lineal múltiple

Abstract

Constitutive models describe the behavior of a material when subjected to an action. This paper consists of an extensive experimental and numerical campaign, for the numerical approach of several models that describe the mechanical behavior of concrete reinforced with steel or polypropylene fibers, as well as the evaluation with the plastic damage model used in ABAQUS. The objective is to know how the number of variables affects the development of constitutive models. An experimental campaign consisted of the preparation of 91 concrete cylinders and 111 concrete beams, which were subdivided depending on the type of fiber used and its dosage. The fiber properties used for the development of the models are the type of material, geometry, dosage, density, fiber content, tensile strength, Young's modulus and reinforcement index. To indicate which properties are most influential on the model, the analysis of variance and the multiple linear regression model were used. As a result, it was obtained that for the compressive stress, the closest percentage difference between the developed model with respect to the results obtained in the laboratory was 4.63 %, using polypropylene fibers; for the modulus of elasticity, the model developed for steel fibers obtained the best similarity with a percentage difference of 3.15 % with respect to the laboratory results, finally the model for the tensile residual stress, in steel fibers, obtained a percentage difference of 9.54 %. For the model used in software, their best fit is a 5.45 % compression model using polypropylene fibers. A second evaluation was carried out with a different database, in order to determine a proximity factor that, when applied, resembles the real value.

Keywords: constitutive model, fiber reinforced, structural design, nonlinear analysis, analysis of variance.



INTRODUCCIÓN

¿Por qué el concreto tiene buena resistencia a la compresión, pero no a la tensión?, ¿Por qué al aplicar un tipo de esfuerzo a diferentes materiales, los resultados no son iguales?, ¿Cuándo un material se comporta elástica o inelásticamente? Estas son solo algunas preguntas que se han planteado y se han respondido a lo largo de la historia, mediante teorías y trabajo experimental. Varias de estas teorías no solo desean explicar el fenómeno, sino que también predecirlo. Los modelos constitutivos son un ejemplo de ello. Estos modelos plantean matemáticamente el comportamiento mecánico de un material ante un esfuerzo, al conocer y/o establecer variables para su efectividad.

Planteamiento y Justificación del Problema

¿Por qué se requiere conocer el comportamiento de un material?

Los distintos materiales que emplea el hombre desde el acero para la construcción, hasta la madera para la fabricación de utensilios de cocina son sometidos a diferentes fenómenos (esfuerzos mecánicos, diferencia de temperatura, exposición a químicos, elementos colindantes, entre otros). Estos fenómenos provocan una alteración en las partículas de los materiales, ajustando su estructura, la cual puede regresar a su estado original o provocar una deformación permanente.

En el área de la construcción, es indispensable conocer el comportamiento mecánico de un material ante un esfuerzo, conocer a qué tipo de acción es pertinente emplear un tipo de material o cuando se requiere reforzar un elemento estructural.

¿Qué implica un modelo constitutivo?

Son diversos los modelos que se han propuesto, y cada uno de ellos varía de acuerdo a sus fundamentos y las variables a utilizar. Algunos de los fundamentos están basados en teorías del comportamiento mecánico, el empleo de modelos estadísticos o mediante las experiencias observadas en el laboratorio. Las variables a considerar pueden ser las propiedades del material, el tipo de esfuerzo al que será aplicado, condiciones externas, análisis en distintas etapas de trabajo (elástico y/o plástico), entre otros. Para llegar a una solución, se requiere la interacción de estas condiciones, conllevando el desarrollo de

modelos constitutivos complejos que requieren herramientas especializadas (softwares) para la solución del problema. Estos últimos modelos se vuelven complicados por la cantidad de variables a emplear y su interacción interna con el elemento a analizar.

Objetivos

Objetivo General

Evaluar la confiabilidad de los modelos constitutivos avanzados, con respecto al desarrollo de modelos constitutivos lineales y modelos encontrados en la bibliografía, aplicando dichos modelos en elementos de concreto reforzado con fibra.

Objetivos Particulares

- A. Selección de casos de estudios de campañas experimentales propias de la Universidad Autónoma de Aguascalientes y/u otras investigaciones para su simulación y modelado.
- B. Desarrollo de modelos constitutivos empleando modelos y análisis estadísticos.
- C. Modelación de casos de estudio empleando el software ABAQUS.
- D. Validación de resultados reales mediante la simulación del modelo seleccionado.

Alcances de la Tesis

Se desea demostrar la confiabilidad del uso de modelos constitutivo avanzados para el análisis estructural, además de la estimación de nuevos modelos que describan el comportamiento del concreto reforzado con fibras ante el esfuerzo a compresión, módulo de elasticidad, relación de Poisson y esfuerzo residual a flexión.

En ocasiones se evita el empleo de modelos constitutivos complejos debido se requiere analizar y comprender sus fundamentos mecánicos y el empleo de software especializado. Aun así, no se considera un amplio uso en diferentes casos de estudio y la diversidad de resultados obtenidos al emplear este tipo de programas. Para la validación del proyecto, se evaluarán los diversos modelos existentes aplicándolos en casos de estudio propios y obtenidos en la bibliografía.

Hipótesis

Existe una diferencia al aplicar modelos constitutivos de acuerdo con la cantidad de variables y condiciones utilizadas.

Metodología

Primeramente, se debe estudiar el tema, revisar bibliografía e investigaciones existentes para realizar el planteamiento del problema; así como la investigación y selección de las herramientas de cálculo y de software que se requieren para el desarrollo de la tesis.

A continuación, se necesita investigar los modelos constitutivos que existen en la bibliografía, así como el planteamiento de nuevos modelos empleando herramientas estadísticas. Para ello se requiere el compendio de información, la cual consiste en el ensaye de especímenes de concreto simple y reforzado con fibras. Por las características del trabajo, los datos a recolectar y procesar, así como los tipos y presentación de los resultados que se obtienen, este trabajo consiste en una investigación cuantitativa.

Los modelos a emplear deben describir el comportamiento de los especímenes de concreto ensayado. Para corroborar la eficiencia de los modelos, estos serán sometidos a una base de datos externa.

Se prosigue con el empleo del programa ABAQUS, en el cual se estudia y se analiza los diversos modelos existentes en su biblioteca. Una vez seleccionado el modelo, se aplica en los casos de estudio para su evaluación con respecto a los modelos planteados y los modelos bibliográficos

Finalmente se evalúan los resultados obtenidos por los modelos desarrollados, bibliográficos y el software. Se identificarán las condiciones en donde el empleo de software es recomendado, el tipo y cantidad de variables que requiere cada uno de estos modelos y su complejidad de uso.



CAPÍTULO I
ESTADO DEL ARTE

1.1 Impacto de los Modelos Constitutivos en el Análisis Estructural

El diseño y el proceso de la construcción han evolucionado a la par con el desarrollo de las bases y modelos matemáticos, así como de la tecnología, mejorando las técnicas en obra y en gabinete. Un ejemplo de lo anterior es la manera de calcular los esfuerzos y respuestas que existen sobre las diferentes estructuras de una obra, por ejemplo, cargas y momentos internos y externos aplicados en la estructura, empuje de suelos, efectos del viento y sismos, entre otros. Este análisis se debe a la diversidad de materiales empleados en los diversos tipos de infraestructura; desde la misma tierra, hasta la creación de nuevos materiales, por ejemplo, el acero, el cual es una aleación de hierro con carbono, que, dependiendo de su porcentaje y temple, cambia sus propiedades de dureza y elasticidad. La variabilidad existente de materiales provoca la exhaustiva investigación de su comportamiento mecánico para la comercialización.

Cada uno de estos materiales se comportan estructuralmente de una manera única. Como no se cuenta con una solución universal para todos los problemas de diseño, se han desarrollado fórmulas que solucionen o se acerquen a ello bajo ciertas circunstancias o parámetros. A su vez, se han creado técnicas que ayuden a explicar y dar solución al comportamiento de los materiales bajo dichas ecuaciones, un ejemplo de ello son los análisis lineales y no lineales.

1.2 Impacto de Fibras de Refuerzo al Concreto

El empleo de fibras de refuerzo en el concreto provee rigidez, control de grietas y mayor ductilidad al concreto simple, mejorando su durabilidad (Shankar & R.M.Karthikeyan, 2021). La durabilidad de un concreto se puede definir como la capacidad de mantener niveles confiables de capacidad de servicio durante su vida útil de diseño (Paul et al., 2020).

El nivel de influencia de las fibras sobre el concreto, cómo el tipo de material de la fibra, su contenido, su geometría, su orientación, entre otros factores, pueden incrementar o disminuir las propiedades mecánicas del concreto. Un ejemplo de ello son Ferrara & Meda (2006), quienes analizaron la influencia entre la distribución de la fibra, su trabajabilidad y

las respuestas mecánicas de fibras de acero en elementos de techo prefabricados. López Carreño et al. (2015) emplearon un método inductivo para conocer la orientación y la cantidad de fibra en un concreto reforzado con fibras, el cual consiste en medir el cambio de inductancia en un campo magnético en muestras de concreto reforzado con fibras de acero.

Se requiere analizar el comportamiento del concreto reforzado con fibras (FRC) para conocer cómo es que mejora las propiedades mecánicas, dos ejemplos de ellos es la tenacidad y el esfuerzo residual, los cuales están relacionados con la energía que presenta el concreto después de llegar a su punto de fractura. Martinelli et al. (2016), diseñaron losas elevadas en Italia empleando fibra de acero, analizaron el esfuerzo residual en seis losas de misma sección, pero con diferente dosificación de fibras. Pujadas et al. (2016) realizaron el análisis de seis losas suspendidas planas con macro fibra de plástico, cuyos resultados muestran una mejora en el esfuerzo residual al mejorar la ductilidad de las losas después del agrietamiento.

1.3 Modelos Constitutivos

Los modelos constitutivos consisten en la descripción del comportamiento de un volumen al aplicarle un esfuerzo externo mediante expresiones matemáticas. Algunos de estos modelos son meramente teóricos, mientras otros son empíricos o una combinación de ellos. Su sistema de ecuaciones pueden ser simple o extremadamente complejas, dependiendo del material y las condiciones a la cuales está sometida, por ejemplo considerar si el material es isotrópico o anisotrópico, su geometría, condiciones frontera, esfuerzos internos y externos, entre otros (Arnold et al., 1990). No se ha establecido una forma única para clasificar los modelos constitutivos, pero en su mayoría se les cataloga de acuerdo al grado de ecuación aplicado o al estado de respuestas mecánica, por ejemplo:

1. Modelos lineales o no lineales: los cuales dependen de la linealidad de las variables en la ecuación.
2. Modelos elásticos,
3. Modelos plásticos,
4. Modelos elastoplásticos,

5. Modelos viscosos,
6. Modelos de fractura,
7. Modelos estáticos o dinámicos: si se considera la influencia del tiempo en el modelo, entre otros.

Enzo (1971), Han & Chen (1987), González-Cueto et al. (2013) y Brake (2018), son algunos de los autores que emplean o clasifican los modelos de acuerdo a la descripción anterior. En la presente tesis, se clasificaron los modelos de acuerdo al grado de dificultad para analizar. Si el modelo depende solamente de una ecuación de primer grado, se identificará como modelo lineal; por el contrario, si el modelo requiere variables en un estado mecánico específico, se nombrará modelo mecánico.

Jara et al. (2015) evaluaron diversas fuentes de cálculo de la resistencia a la falla en el concreto confinado para determinar el espesor de recubrimiento de refuerzo de fibra de polipropileno en columnas de puentes dañadas por efectos sísmicos en México, esta investigación comparó 18 fuentes de cálculo, existiendo una gran dispersión entre los resultados debido a que los modelos de cálculo aplicados por cada uno de los autores están basados en modelos experimentales y analíticos.

1.4 Ejemplos de Modelos Constitutivos

Numerosos modelos se han planteado para describir la relación del esfuerzo – deformación en el concreto. Bauchau & Craig (2009) afirma que “la mayoría de los modelos constitutivos prácticos están basados en datos empíricos, y en varios tipos de leyes constitutivas que se han propuesto para representar diversos tipos de comportamiento de los materiales en experimentos observados”. Se presentan a continuación, en forma cronológica, algunos autores que describen su propio modelo.

Gao et al. (1997) consiguieron mejoras en las características del concreto ligero al emplear fibras de refuerzo de acero. Usaron como variables el volumen de fibra agregado (V_f) y su relación geométrica longitud/diámetro (l_f/d_f). Las respuestas mecánicas que

estudiaron fueron el esfuerzo a la tensión (Ecuación 1.1), esfuerzo a la flexión (Ecuación 1.2), módulo de elasticidad (Ecuación 1.3) y la relación de Poisson (Ecuación 1.4), las ecuaciones de dichas propiedades se presentan a continuación:

Esfuerzo a la tensión

$$f_{st} = 0.94f_t(1 - V_f) + 3.02V_f l_f / d_f \quad \text{Ec. 1.1}$$

Esfuerzo a la flexión

$$f_{sw} = 0.92f_w(1 - V_f) + 4.19V_f l_f / d_f \quad \text{Ec. 1.2}$$

Módulo de Elasticidad

$$E^* = E(1 + 0.173V_f l_f / d_f) \quad \text{Ec. 1.3}$$

Relación de Poisson

$$\nu^* = \nu(1 - 0.172V_f l_f / d_f) \quad \text{Ec. 1.4}$$

Donde:

f_{st} = esfuerzo a la tensión del concreto ligero reforzada con fibras de acero,

f_t = esfuerzo a la tensión del concreto ligero,

f_{sw} = esfuerzo a la flexión del concreto ligero reforzada con fibras de acero,

f_w = esfuerzo a la flexión del concreto ligero,

E^* = módulo de elasticidad del concreto ligero reforzado con fibras de acero,

E = módulo de elasticidad del concreto ligero,

ν^* = relación de Poisson del concreto ligero reforzado con fibras de acero,

ν = relación de Poisson del concreto ligero.

Dhakai et al. (2005) tuvieron mejoras en la resistencia a la compresión (f'_c , Ecuación 1.5) y su deformación correspondiente (ϵ , Ecuación 1.6), empleado fibras de acero como refuerzo, obteniendo las siguientes ecuaciones:

Relación a la resistencia a la compresión:

$$\frac{f_p}{f'_c} = 1 + 20\alpha_f V_f \quad \text{Ec. 1.5}$$

Relación a la deformación:

$$\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon} = 1 + 2000\alpha_\varepsilon V_f^2 \tag{Ec. 1.6}$$

Donde $\alpha_{f,\varepsilon}$ es una constante que dependerá de la calidad de la fibra, tomando el valor de 1 siendo de buena calidad, sino tomará el valor de 0.5.

Yazıcı et al., (2007), plantearon ecuaciones para la compresión (Ecuación 1.7), a la tensión (Ecuación 1.8) y a la flexión (Ecuación 1.9) de ensayos en forma de cubos y vigas, ambos reforzados con fibras de acero.

Esfuerzo a la compresión

$$f_c^* = 50.4869 + 0.0434 \times \frac{l_f}{d_f} + 1.9667 \times V_f (\%) \tag{Ec. 1.7}$$

Esfuerzo a la tensión

$$f_{st} = 2.2121 + 0.0077 \times \frac{l_f}{d_f} + 1.4233 \times V_f (\%) \tag{Ec. 1.8}$$

Esfuerzo a la flexión

$$f_{sw} = 0.8261 + 0.0638 \times \frac{l_f}{d_f} + 3.0000 \times V_f (\%) \tag{Ec. 1.9}$$

Otro caso es el de Liang et al., (2016), quienes plantearon la relación esfuerzo – deformación en su sección elástica (Ecuación 1.10) y en su sección plástica (Ecuación 1.11), empleados en especímenes de concreto reforzado con fibras de polipropileno:

- En la sección elásticas ($\varepsilon \leq \varepsilon_{t,r}$)

$$\sigma = E\varepsilon_{t,r}x \tag{Ec. 1.10}$$

- En la sección plástica ($\varepsilon > \varepsilon_{t,r}$)

$$\sigma = \left[\frac{\rho_t}{\alpha_t(x - 1)^{1.7} + x} \right] E_c \varepsilon_{t,r} x \tag{Ec. 1.11}$$

Donde $x = \varepsilon/\varepsilon_{t,r}$; $\rho_t = f_{t,r}/E_c\varepsilon_{t,r}$; $\varepsilon_{t,r} = f_{t,r}^{0,54} \times 65 \times 10^{-6}$ y $\alpha_t = 0.312f_{t,r}^2$.
Siendo $\varepsilon_{t,r}$ la deformación máxima correspondiente al $f_{t,r}$.

Timothy et al. (2016) propusieron una relación entre el desplazamiento y el esfuerzo a la compresión (Ecuaciones 1.12 y 1.13) en especímenes de concreto empleando fibras de refuerzo.

$$f(f'_c, \varepsilon) = \tilde{f}'_c - t(\varepsilon) \leq 0 \tag{Ec. 1.12}$$

$$df_{tf} + \tau(y)\rho A_f^{-1} dy = 0 \tag{Ec. 1.13.}$$

Donde \tilde{f}'_c (Ecuación 1.14), representa la resistencia media en las tres direcciones (x, y, z) y el desplazamiento esta dado por la separación de los elementos durante el agrietamiento (\tilde{u} , Ecuación 1.15):

$$\tilde{f}'_c = \sqrt{f_{c_n}'^2 + f_{c_r}'^2 + f_{c_s}'^2} \quad \alpha = \max(\tilde{u}) - \tilde{u}_0 \tag{Ec. 1.14}$$

$$\tilde{u} = \sqrt{u_n^2 + \left(\frac{u_r^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_s^2}{2}\right)^2} \tag{Ec. 1.15}$$

La tensión de la fibra (f_{if}) tiene conexión con el esfuerzo de corte (τ) y la geometría de la misma (perímetro, p , y el área de la sección, A_f).

Marar et al., (2017) propusieron la relación de incremento del esfuerzo a cortante (τ , Ecuación 1.16) del concreto reforzado con fibras de acero, y con ello una relación directa con el esfuerzo a compresión (Ecuación 1.17):

$$\tau = 26.74V_f + 34.52 \tag{Ec. 1.16}$$

$$\tau = 0.75(f'_c)^{0,77} + 0.14\beta V_f (l_f/d_f) \tag{Ec. 1.17}$$

Xu et al., (2018) plantearon dos funciones para calcular el esfuerzo (Ecuación 1.18) y su deformación (Ecuación 1.19) empleando fibras de acero y polipropileno:

$$f_c'^* = f_c'(1 + 0.179\lambda_{sf} + 0.341\lambda_{pf}) \quad \text{Ec. 1.18}$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon(1 + 0.55\lambda_{sf} + 0.303\lambda_{pf}) \quad \text{Ec. 1.19}$$

$$\varepsilon = 263.3\sqrt{f_c'} \cdot 10^{-6}$$

$$\lambda_f = \frac{V_f l_f}{d_f}$$

Por otro lado, Liang et al., (2020), obtuvieron una relación de la respuesta a compresión usando fibra de polipropileno (Ecuaciones 1.20 – 1.22) en diversas cantidades:

$$\frac{f_c'^*}{f_c'} = \alpha_f k_f \lambda_f + \alpha_c k_c \lambda_c \quad \text{Ec. 1.20}$$

$$\lambda_f = \frac{m_f}{m_f + m_c} \quad \text{Ec. 1.21}$$

$$\lambda_c = \frac{m_c}{m_f + m_c} \quad \text{Ec. 1.22}$$

Donde:

k = es la relación longitud/diámetro de la fibra;

λ = es el contenido de la fibra;

m_f = es la cantidad de fibra fina contenida;

m_c = es la cantidad de fibra gruesa contenida;

$\alpha_f = 0.003$; y

$\alpha_c = 0.018$.

Huang et al., (2020) emplearon fibras de polipropileno y de acero en especímenes de concreto, de donde obtuvieron la relación de esfuerzo – deformación en su parte elástica (Ecuación 1.23) e inelástica (Ecuación 1.24):

$$f_c'^* = (1 - D)E\varepsilon K_{V_f} K_{\dot{\varepsilon}} \tag{Ec. 1.23}$$

$$d_c = 0; \text{ cuando } \varepsilon \leq \varepsilon_q$$

$$d_c = 1 - e^{-[(\varepsilon - \varepsilon_q)^m/a]}; \text{ cuando } \varepsilon > \varepsilon_q \tag{Ec. 1.24}$$

- En el caso de un concreto reforzado con fibras de polipropileno:

$$K_{V_f} = 1 + 524.9V_f - 164002V_f^2$$

$$K_{\dot{\varepsilon}} = 1.331 + 0.90lg\dot{\varepsilon}$$

- En el caso de un concreto reforzado con fibras de acero:

$$K_{V_f} = 47.83189ln(V_f + 0.90737) + 5.65857$$

$$K_{\dot{\varepsilon}} = 1.3312 + 0.904lg\dot{\varepsilon}$$

Donde:

d_c = Factor de daño;

ε_q = Deformación umbral o máxima del daño acumulativo; y

$\dot{\varepsilon}$ = Tasa de deformación ($1.45 \times 10^{-4}/s$).

Las variables m y a , son constantes del material.

Nguyen et al. (2022) empleo el modelo de daño plástico de ABAQUS, y encontró que, al aumentar la cantidad de fibras de refuerzo de acero en losas de concreto, aumentaba linealmente el esfuerzo a la flexión (Ecuación 1.25).

$$f_{sw} = 0.0664V_f + 6.22 \tag{Ec. 1.25}$$

Otro caso es el de Wei et al., (2022), quienes describen la curva esfuerzo – deformación del concreto reforzado con fibra de polipropileno dependiendo si se encuentra en la etapa elástica (Ecuación 1.26) o plástica (Ecuación 1.27)

- En la sección elástica de la curva ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_p$)

$$f_c^{I*} = \left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_p} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \right)^2 \right] f_c' \tag{Ec. 1.26}$$

- En la sección plástica de la curva ($\varepsilon_p \leq \varepsilon$)

$$f_c^{I*} = \left[\frac{\varepsilon/\varepsilon_p}{\alpha_d(\varepsilon/\varepsilon_p - 1)^2 + \varepsilon/\varepsilon_p} \right] f_c' \tag{Ec. 1.27}$$

$$\varepsilon_p = -0.004 + 0.0003f_c' - 3E^{-0.6f_c'}$$

Donde α_d pueden tener un valor entre 0.4 a 4, dependiendo de la edad del concreto, disminuye su valor entre más edad tiene.

1.5 Análisis Lineal y No Lineal

Un material no siempre se comporta en forma lineal, por lo tanto, plantear un sistema lineal que lo describa también se vuelve complejo. Un análisis no lineal plantea que la deformación varía de acuerdo a los cambios de esfuerzos aplicados (ABAQUS 2017), tal como se presenta en la Figura 1, donde el cambio de deformación en el análisis lineal, permanece igual al cambio de los esfuerzos aplicados, mientras que en el análisis no lineal, la tasa de deformación, no permanece constante al cambio de esfuerzos. El análisis lineal es conveniente emplear para semejar lo que se desea diseñar, por otro lado, el análisis no lineal se utiliza para la aproximación numérica a la solución, debido que es común el uso de ecuaciones diferenciales parciales.

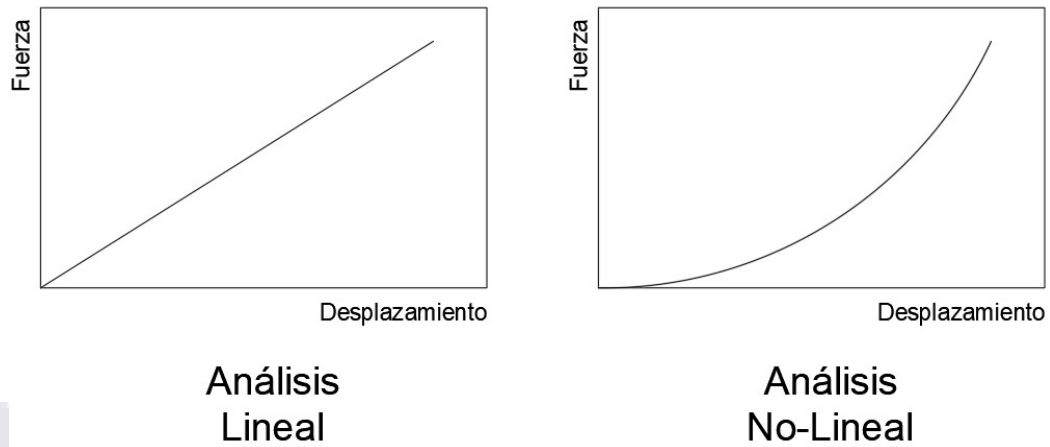


Figura 1. Características del análisis lineal y no lineal.

El funcionamiento de un análisis no lineal se debe plantear que cada elemento estructural es representado como un volumen unitario, el cual ésta compuesto por pequeñas partículas que forman una malla (Figura 2). Cada una de estas partículas tiene propiedades físicas semejantes a las partículas colindantes; al momento de que una partícula sufra un cambio en sus propiedades por intervención de algún tipo de esfuerzo, este ejercerá un diferencial sobre las partículas adyacentes, esto se conoce como como estado de frontera. La interacción se expande sobre todo el volumen, dicho fenómeno genera un sistema de ecuaciones que varía de acuerdo a las propiedades del volumen y las fuerzas que trabajan sobre él.

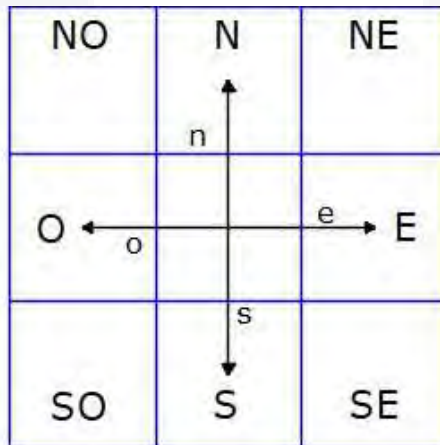


Figura 2. Interacción de una partícula.

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

Este método es empleado debido a su proximidad numérica con relación a las condiciones de frontera, es decir, las variables dependientes satisfacen las ecuaciones diferenciales (Hutton, 2004). Anteriormente, el análisis lineal era el único planteamiento empleado debido a la incapacidad de adquisición de programas computacionales con herramientas de análisis no lineales. Recientemente esto ha cambiado al existir en el mercado digital una amplia gama de softwares de los cuales uno puede escoger la herramienta de utilidad partiendo de complejidad y costos de licencia.

Los fenómenos que afectan la fuerza sobre un elemento o estructura se pueden dividir en dos grupos: la no linealidad geométrica y la no linealidad de material. La primera es debida a las cargas y fuerzas sobre el elemento, ocasionando una deformación. Esta deformación está categorizada generalmente como área elástico y plástico. El primero consiste en que el elemento no experimenta deformaciones permanentes, es decir, es capaz de recuperar su forma original, por otro lado, si se habla de una deformación plástica, esta perdurara a lo largo del tiempo. Se han generado diversos modelos matemáticos para conocer la respuesta correcta del comportamiento de materiales. Un caso de ello son Mageirou et al. (2002), quienes analizaron el pandeo de columnas y placas de acero S275 mediante esfuerzos de compresión, proponiendo la combinación de varias variables: esfuerzo sobre columna y placa de acero, la no linealidad del material, geometría no línea y la combinación de las últimas dos; como conclusión expusieron que el comportamiento más acercado a la realidad es el uso de la no linealidad tanto en material como en geometría.

Un caso semejante fue realizado por Rusiński et al. (2004), quienes analizaron por el modelo de elemento finito (ABAQUS) el ensayo a esfuerzo axial de veinte vigas de acero DOCOL 800DP de pared delgada soldadas por puntos de soldadura. Su objetivo principal es identificar el comportamiento de las vigas de acuerdo a los puntos de soldadura, es decir que las condiciones de unión (frontera) entre los elementos deben influir al comportamiento de deformación del elemento; obtuvieron como resultados que las deformaciones vistas en los ensayos son semejantes al modelo analizado en ABAQUS, Figura 3.

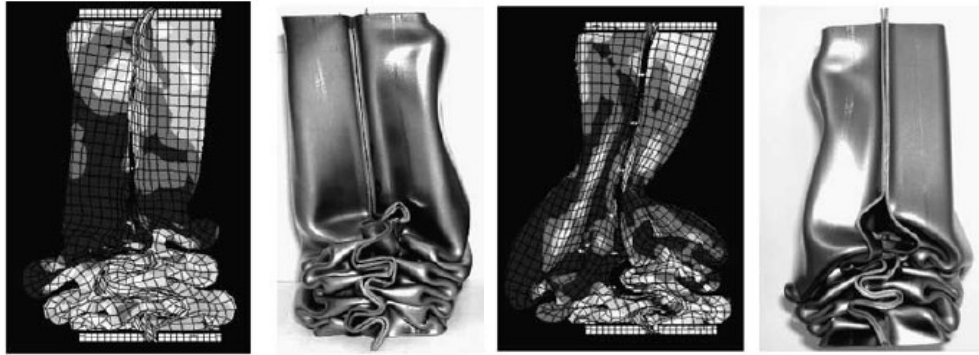


Figura 3. Resultados de Rusiński et al. (2004).

El análisis no lineal ha sido tan favorable que se ha empleado no solamente en los análisis materiales, sino también en estructuras. Ajmal et al. (2013) compararon el comportamiento sísmico en un edificio de ocho pisos en Madinah, Arabia Saudita, cuyo edificio fue diseñado solamente con cargas de gravedad con elementos de concreto y acero, mostrando fallas en la parte superior del edificio provocados por los momentos generados por las cargas axiales y desplazamientos en los muros provocando ruptura en el concreto y acero, para evitar lo anterior se propuso el reforzamiento con concreto de alta resistencia (45 MPa) y el uso de *CFRP* (polímero reforzado con fibra de carbono), esto incrementó la capacidad de carga lateral de los marcos, reduciendo la vulnerabilidad sísmica. Yapıcı et al. (2016) simularon cargas sísmicas en edificios de hasta 40 pisos, modelando de forma elástica (por medio de marcos) e inelásticamente (elemento finito) las columnas y muros, obteniendo las curvas de rigidez lateral y las curvas de empuje.

Este tipo de análisis no es exclusivo en nuevas edificaciones, sino que también se ha usado en edificaciones históricas, teniendo una oportunidad para documentar las actividades sobre los daños y la preservación del inmueble patrimonial. Uno de estos casos es el de Crespi et al. (2015), analizaron una construcción de mampostería (Castel Masegra) del siglo XI en Sondrio, Italia. Su objetivo es el levantamiento y análisis de todo el edificio mediante un modelo de elemento finito (Figura 4) considerando las irregularidades y complejidad del estado actual de la edificación, así como el comportamiento mecánico de la estructura; su

procedimiento consistió en generar un modelo en 3D usando escáner laser, obteniendo una nube de 720,393 puntos.



Figura 4. Ejemplo de análisis de la investigación de Crespi et al. (2015).

Un segundo caso de análisis de daños en edificaciones históricas empleando modelos no lineales es el caso de una iglesia del siglo XIV al norte de Polonia en la aldea de Gnojewo (Kujawa et al., 2020), siendo el objetivo el análisis y origen de las fracturas en las paredes de mampostería (Figura 5). De forma semejante al caso anterior, emplearon el programa ABAQUS y un sistema de escaneo laser para el modelado; en donde las fracturas de la edificación son reflejadas en el análisis numérico.

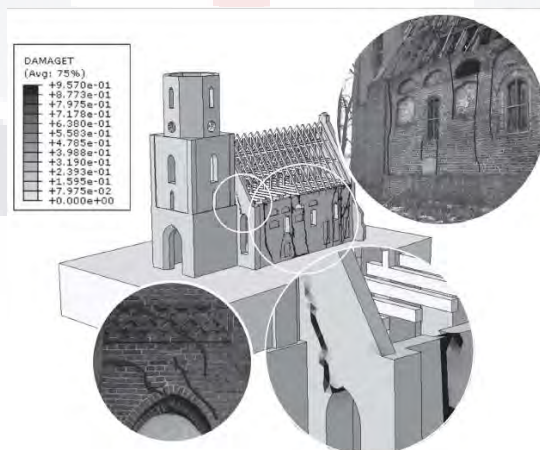


Figura 5. Ejemplo de análisis de la investigación de Kujawa et al. (2020).

Una de las desventajas del modelado de edificaciones es la gran capacidad de memoria computacional requerida, debido que, a mayor precisión de los elementos, se requiere programas más sofisticados, así como un alto almacenaje de información. Esto se refleja económicamente debido a los equipos de cómputo que se requieren y a los largos tiempos de ejecución. Para evitar lo anterior, Akar & Willner (2019) realizó análisis no lineal rápidos en vigas empotrada de un extremo y libre en el otro extremo, este análisis consiste en convertir las fuerzas no lineales internas en fuerzas externas, obteniendo resultados favorables.





CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO

2.1 Planteamiento General

De acuerdo a Cervera Ruiz & Blanco Díaz (2002) y Cervera Ruiz & Blanco Díaz, Elena (2014).:

“El objetivo de la resistencia de materiales es determinar la respuesta de las estructuras (estados de tensión y deformación) al estar sometidas a diferentes acciones, las cuales deben soportar durante su construcción y su vida útil, para el dimensionamiento de cada uno de los elementos estructurales. Algunas de las acciones que actúan sobre las estructuras son permanentes (el peso propio, cargas muertas, acciones reológicas, entre otros) y otras son variables (viento, nieve, sismos, incendios, inundaciones, entre otros), lo que lleva a satisfacer los criterios de resistencia que están establecidos en la normatividad”.

Los modelos constitutivos buscan mantener el equilibrio de esfuerzos y momentos externos e internos, es decir, intentan predecir el comportamiento de un material (o volumen) ante los distintos tipos de esfuerzo (compresión, tensión, flexión, cortante o torsión). Runesson, (2006) indica que, en la mecánica de materiales, los modelos constitutivos son el sistema de ecuaciones que mantienen en balance las ecuaciones de movimiento, es decir, la relación esfuerzo – deformación.

El presente estudio está enfocado al análisis en concreto reforzado con fibras de acero y polipropileno. En el siglo XIX se creó el concreto reforzado y se utiliza en la mayoría de los elementos estructurales como trabes, columnas, marcos, losas, muros y cimentación, en donde la interacción del concreto con el acero o con algún tipo de fibras, le permite mejorar su rendimiento en su estado elástico. La interacción de los materiales se vuelve compleja debido al diferencial mecánico de cada uno de ellos. Siendo un elemento de construcción muy competitivo, en la Tabla 1 se presentan algunas ventajas y desventajas del concreto reforzado.

Tabla 1. Características del Concreto Reforzado de Hassoun & Al-Manaseer (2008).

Ventajas	Desventajas
Alto esfuerzo a la compresión	Poco esfuerzo a la tensión (cerca del 10% de su esfuerzo a la compresión)
Mayor resistencia al fuego	Requiere mezclado y curado adecuado para que no afecte su capacidad mecánica final
Larga vida útil y bajo costo de mantenimiento	El costo del moldeado es relativamente caro
Para ciertos elementos estructurales tales como presas y cimentación, es el material de construcción más económico	Menor esfuerzo a la compresión, en comparación de un elemento de acero
Puede tomar la forma deseada	Desarrollo de agrietamiento por efectos de contracción

2.2 Modelos Constitutivos en el Análisis Estructural

Existen diversos planteamientos de modelos constitutivos debido que el análisis esfuerzo – deformación de cada uno de los materiales es único, principalmente cuando interacciona con otros. Un ejemplo de lo anterior es el caucho, el cuál es un material que tiene una respuesta puramente elástica, es decir, absorbe la mayoría de la energía mientras que; el acero exhibe una ductilidad más allá de su rendimiento; la arena reordena sus partículas en donde su interacción mecánica principal es la fricción; o simplemente el concreto que no cuenta con ductilidad y se vuelve frágil.

Cada material cuenta con propiedades físicas, químicas y mecánicas únicas, por ejemplo, el acero al carbón cuenta con una microestructura que permite un alto grado de ductilidad (Figura 6), debido que los elementos se reajustan, por otra parte, el concreto cuenta con una microestructura compuesta por diversos elementos (cemento, grava y arena) (Figura 7), como existe un diferencial en las propiedades mecánicas de cada elemento, lo convierte en un material quebradizo ante ciertos tipos de esfuerzo.

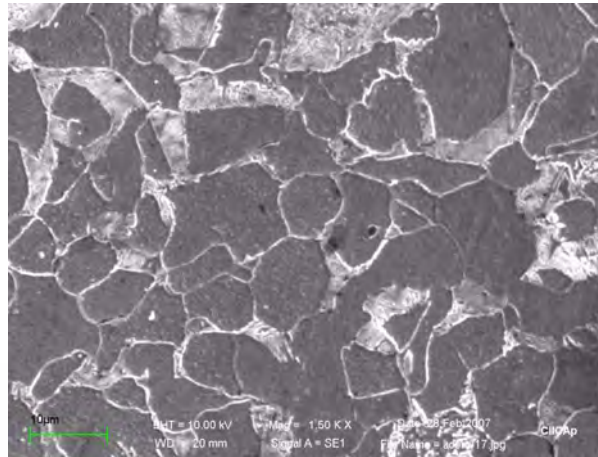


Figura 6. Microestructura de acero al carbón de Cuevas-Arteaga et al. (2012).

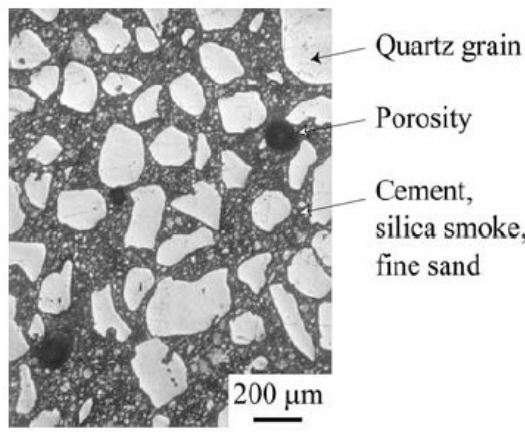


Figura 7. Microestructura del concreto de Hild et al. (2003).

Para el planteamiento de una teoría que determine el comportamiento de un elemento estructural, es necesario plantear las variables a emplear, por ejemplo, el tipo de material, tipo de esfuerzo sometido, propiedades mecánicas (capacidad de elasticidad/plasticidad, resistencia a los esfuerzos, dureza, módulo de Young, entre otros), así como los efectos externos como la temperatura y la corrosión. Planteando matemáticamente (Ecuación 2.1) las variables anteriores, se obtiene:

$$f_i = (\alpha, \beta, \gamma, \dots) \tag{Ec. 2.1}$$

En la ecuación anterior, la función f_i describe el comportamiento de i material y depende de diversas variables o condiciones $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ que pueden representar, propiedades

mecánicas del material, esfuerzos aplicados, temperatura, condiciones de unión, entre otros; volviendo al sistema más complejo debido a la integración e interacción de estas variables.

Los modelos constitutivos se pueden emplear en las normativas para el diseño de diversos elementos estructurales de concreto, pero estos modelos se deben desarrollar de tal manera que la información sea sencilla de obtener, así como la forma de calcular, ya que estas normativas serán empleadas por ingenieros o investigadores en diferentes condiciones.

2.3 NTC para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto

2.3.1 Criterios de Diseño

La información y ecuaciones que se presentan en este apartado, se obtuvieron de Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto (2017). La normativa en México establece dos clases de concreto de acuerdo con su peso volumétrico en estado fresco, esta investigación se enfocará en la clase I. De acuerdo con la normativa las propiedades que debe cumplir dicho concreto se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Propiedades del Concreto Clase 1.

Propiedad	Valor
Peso volumétrico	22 kN/m ³ (2.2 t/m ³)
Resistencia a la compresión (f'_c)	25 MPa (250 kg/cm ²)
Resistencia media a tensión (\bar{f}_t)	$0.47\sqrt{f'_c}$ en MPa ($1.5\sqrt{f'_c}$ en kg/cm ²)
Resistencia media a tensión o módulo de ruptura (\bar{f}_f)	$0.63\sqrt{f'_c}$ en MPa ($2\sqrt{f'_c}$ en kg/cm ²)
Módulo de elasticidad (E_c) para concretos con agregado grueso calizo	$4,400\sqrt{f'_c}$ en MPa ($14,000\sqrt{f'_c}$ en kg/cm ²)
Módulo de elasticidad (E_c) para concretos con agregado grueso basáltico	$3,500\sqrt{f'_c}$ en MPa ($11,000\sqrt{f'_c}$ en kg/cm ²)
Contracción por secado final (ϵ_{cf})	0.001
Flujo plástico	2.0

Módulo de elasticidad (E_a) para el acero de refuerzo	2×10^5 MPa (2×10^6 kg/cm ²)
---	--

2.3.2 Estados Límite de Falla

De acuerdo con la normativa:

“Las estructuras deben dimensionarse de modo que la resistencia de diseño de toda sección con respecto a cada fuerza o momento interno que en ella actúe, sea igual o mayor que el valor de diseño de dicha fuerza o momentos internos. Las resistencias de diseño deben incluir el correspondiente factor de resistencia, FR”.

Los factores de resistencia (FR) se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3. Factores de resistencia.

Diseño	Valor F_R
Para flexión	0.9
Para cortante y torsión	0.75
Para transmisión de flexión y cortante en losas o zapatas	0.65
Para flexocompresión cuando el elemento falla en tensión	0.75
Para aplastamiento	0.65

A continuación, se presentan el cálculo de algunas propiedades mecánicas del concreto de interés.

Resistencia a flexión

Secciones rectangulares sin acero de compresión (Ecuaciones 2.2 - 2.4).

$$M_R = F_R A_s f_y d (1 - 0.5 q)$$

Ec. 2.2

$$q = \frac{pf_y}{f_c''} \tag{Ec. 2.3}$$

$$p = \frac{A_s}{bd} \tag{Ec. 2.4}$$

Donde:

- M_R = resistencia de diseño a flexión, N-mm (kg-mm);
- b = ancho de la sección, mm (cm);
- d = peralte efectivo, mm (cm);
- f_c'' = esfuerzo uniforme de compresión en el concreto, MPa (kg/cm²); y
- A_s = área del refuerzo de la viga de tensión, mm² (cm²).

a) Secciones rectangulares con acero de compresión (Ecuaciones 2.5 – 2.6).

$$M_R = F_R \left[(A_s - A_s')f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) + A_s'f_y(d - d') \right] \tag{Ec. 2.5}$$

$$a = \frac{(A_s - A_s')f_y}{f_c'' b} \tag{Ec. 2.6}$$

Donde:

- a = profundidad del bloque equivalente de esfuerzos, mm (cm);
- A_s' = área del acero a compresión, mm² (cm²);
- f_y = esfuerzo especificado de fluencia del acero de refuerzo, MPa (kg/cm²); y
- d' = distancia entre el centroide del acero a compresión y la fibra extrema a compresión, mm (cm)

Resistencia a flexocompresión (en dos dimensiones)

a) Para $P_R/P_{R0} \geq 1$ (Ecuación 2.7).

$$P_R = \frac{1}{\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{R0}}} \tag{Ec. 2.7}$$

Donde:

- P_R = carga normal resistente de diseño aplicada con las excentricidades e_x y e_y , N (kg);
- P_{R0} = carga axial resistente de diseño suponiendo $e_x = e_y = 0$, N (kg);

P_{Rx} = carga normal resistente de diseño aplicada con una excentricidad (e_x) en un plano de simetría, N (kg); y

P_{Ry} = carga normal resistente de diseño aplicada con una excentricidad (e_y) en un plano de simetría, N (kg);

b) Para $P_R/P_{R0} < 1$ (Ecuación 2.8).

$$\frac{M_{ux}}{M_{Rx}} + \frac{M_{uy}}{M_{Ry}} \leq 1.0 \quad \text{Ec. 2.8}$$

Donde:

M_{ux} y M_{uy} = momento de diseño alrededor de los ejes X e Y, N-mm (kg-cm); y

M_{Rx} y M_{Ry} = momento resistente de diseño alrededor de los mismos ejes, N-mm (kg-cm).

Resistencia a fuerza cortante

a) Elementos sin presfuerzo

a. Si $p < 0.015$ (Ecuación 2.9).

$$V_{cR} = F_R(0.2 + 20p)0.3\sqrt{f'_c}bd \quad \text{Ec. 2.9}$$

b. Si $p \geq 0.015$ (Ecuación 2.10)

$$V_{cR} = F_R \left(3.5 - 2.5 \frac{M_f}{Vd} \right) 0.16\sqrt{f'_c}bd \quad \text{Ec. 2.10}$$

Donde:

V_{cR} = es la fuerza cortante de diseño, N (kg);

M_f = momento flexionante que actúa en la sección, N-mm (kg-cm); y

V = fuerza cortante que actúa en la sección, N (kg).

Elementos anchos: cuando el ancho, b , no sea mayor que cuatro veces el peralte efectivo, d , el espesor no sea mayor de 600 mm y la relación M_f/Vd no exceda de 2.0, la fuerza resistente, V_{cR} , se calcula con la Ecuación 2.10.

b) Elementos sujetos a flexión y carga axial

a. Flexocompresión, cuando se cumple $|P_u| < F_R (0.7f'_c{}^{Ag} + 200A_s)$

Si $p < 0.15$ (Ecuación 2.11)

$$V_{CR} = F_R(0.2 + 20p) \left(1 + 0.07 \frac{P_u}{A_g} \right) 0.3\sqrt{f'_c}bd \quad \text{Ec. 2.11}$$

Si $p \geq 0.15$ (Ecuación 2.12)

$$V_{CR} = F_R \left(1 + 0.07 \frac{P_u}{A_g} \right) 0.16\sqrt{f'_c}bd \quad \text{Ec. 2.12}$$

Donde:

A_g = área bruta de la sección transversal, mm² (cm²); y
 P_u = fuerza axial de diseño, N (kg).

b. Flexotensión

Si $p < 0.15$ (Ecuación 2.13)

$$V_{CR} = F_R(0.2 + 20p) \left(1 + 0.03 \frac{P_u}{A_g} \right) 0.3\sqrt{f'_c}bd \quad \text{Ec. 2.13}$$

Si $p \geq 0.15$ (Ecuación 2.14)

$$V_{CR} = F_R \left(1 + 0.03 \frac{P_u}{A_g} \right) 0.16\sqrt{f'_c}bd \quad \text{Ec. 2.14}$$

c) Elementos presforzados: donde $\frac{V_{dp}}{M_f} \leq 1$ (Ecuación 2.15)

$$V_{CR} = F_R \left(0.05\sqrt{f'_c} + 5 \frac{V_{dp}}{M_f} \right) bd \quad \text{Ec. 2.15}$$

Donde d_p es la distancia de la fibra extrema en compresión al centroide de los tendones de presfuerzo en mm (cm).

d) Elementos sin presfuerzo sometidos únicamente a cortante y flexión: donde

$$\frac{V_u d}{M_u} \leq 1 \text{ (Ecuación 2.16).}$$

$$V_{CR} = F_R \left(0.16\sqrt{f'_c} + 17p \frac{V_u d}{M_u} \right) bd \quad \text{Ec. 2.16}$$

Donde:

V_u = fuerza cortante de diseño, N (kg); y

M_u = momento flexionante de diseño, N-mm (kg-cm).

e) Elementos sometidos a compresión axial (Ecuación 2.17)

$$V_{CR} = F_R 0.29\sqrt{f'_c} bd \sqrt{1 + \frac{0.29N_u}{A_g}} \quad \text{Ec. 2.17}$$

Donde N_u , es la fuerza de diseño de compresión normal al plano crítico en la revisión por fuerza cortante por fricción, N (kg).

Resistencia a aplastamiento

En apoyos de miembros estructurales y otras superficies sujetas a presiones de contacto o aplastamiento, el esfuerzo de diseño (f_b) no se tomará mayor que $F_R 0.85 f'_c$.

2.3.3 Concreto reforzado con fibras

De acuerdo con la normativa:

“Se debe considerar al concreto reforzado con fibras como un concreto con capacidad de deformación, resistencia al impacto, absorción de energía y resistencia a tensión incrementadas. El incremento en estas propiedades variará desde sustanciales hasta nulo dependiendo de la cantidad y tipo de fibras empleados. Para aplicaciones estructurales, las fibras de acero se usan como refuerzo complementario de las barras de refuerzo. Las fibras

de acero pueden inhibir las grietas satisfactoriamente y mejorar la resistencia al deterioro del material como consecuencia de fatiga, impacto, y contracción por secado o esfuerzos térmicos”.

Las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto (2017) cuentan con diversos apartados sobre el criterio de diseño del concreto reforzado con fibras, alguno de ellos, se presentan a continuación.

Resistencia a compresión

Los incrementos en la resistencia a compresión del concreto varían desde nulo en la mayor parte de los casos hasta 20 por ciento para concretos que incluyen 2%, por volumen, de fibras. Las fibras mejoran la tenacidad del concreto, es decir, la capacidad para absorber energía durante la deformación.

Resistencia a la tensión

La resistencia del concreto reforzado con fibras de acero a tensión directa es del mismo orden que la del concreto sin refuerzo; su tenacidad puede ser uno o dos órdenes de magnitud más grande, debido a la fricción desarrollada durante la extracción de la fibra a ambos lados de la grieta.

Resistencia a la flexión

La resistencia a flexión última generalmente se incrementa en relación con el volumen de fibras y la relación de aspecto.

Contracción por secado y flujo plástico

Las fibras de acero tienen poco efecto en la contracción por secado libre del concreto reforzado con fibras de acero. Sin embargo, cuando la contracción por secado está restringida, las fibras de acero reducen sustancialmente la cantidad y el ancho promedio de las grietas.

2.4 Reglamento para Concreto Estructural de Acuerdo al ACI

2.4.1 Criterios de Diseño

La información y ecuaciones que se presentan en este apartado, se obtuvieron de *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-05, 2005)*.

De acuerdo a esta normativa:

“La resistencia de diseño proporcionada por un elemento, sus conexiones con otros elementos, así como sus secciones transversales, en términos de flexión, carga axial, cortante y torsión, deben tomarse como la resistencia nominal calculada de acuerdo con los requisitos y suposiciones de este reglamento, multiplicada por los factores ϕ de reducción de resistencia”.

Los valores de ϕ se presentan en la Tabla 4.

Tabla 4. Valores del factor ϕ .

Diseño	Valor ϕ
Tensión	0.90
Compresión	0.70
Cortante y torsión	0.75
Aplastamiento	0.65
Zonas de anclaje de postensado	0.85
Modelos puntal-tensor y puntales, tensores, zonas de nodos y áreas de apoyo en esos modelos	0.75
Flexión en elementos pretensados	0.75

2.4.2 Estados Límite de Diseño

Resistencia de diseño

La resistencia requerida debe ser por lo menos igual al efecto de las cargas mayoradas entre las Ecuaciones 2.18 y 2.24.

$$U = 1.4(D + F)$$

Ec. 2.18

$$U = 1.2(D + F + T) + 1.6(L_c + H) + 0.5(L_r \text{ ó } s \text{ ó } R) \quad \text{Ec. 2.19}$$

$$U = 1.2D + 1.6(L_r \text{ ó } s \text{ ó } R) + (1.0L_c \text{ ó } 0.87W) \quad \text{Ec. 2.20}$$

$$U = 1.2D + 1.6W + 1.0L_c + 0.5(L_r \text{ ó } s \text{ ó } R) \quad \text{Ec. 2.21}$$

$$U = 1.2D + 1.0E_q + 1.0L_c + 0.2s \quad \text{Ec. 2.22}$$

$$U = 0.9D + 1.6W + 1.6H \quad \text{Ec. 2.23}$$

$$U = 0.9D + 1.0E_q + 1.6H \quad \text{Ec. 2.24}$$

Donde:

- U = resistencia requerida para resistir las cargas mayoradas o momentos y fuerzas internas correspondientes;
- D = cargas muertas, o momentos y fuerzas internas correspondientes;
- F = cargas debidas al peso y presión de fluidos con densidades bien definidas y alturas máximas controlables, o momentos y fuerzas internas correspondientes;
- T = efectos acumulados de variación de temperatura, flujo plástico, retracción, asentamiento diferencial, y retracción de concreto de retracción compensada;
- L_c = cargas vivas, o momentos y fuerzas internas correspondientes;
- H = cargas debdas al peso y empuje del suelo, del agua en el suelo, u otros materiales o momentos y fuerzas internas correspondientes;
- L_r = cargas vivas de cubierta, o momentos y fuerzas internas correspondientes;
- s = cargas por nieve, o momentos y fuerzas internas correspondientes;
- R = cargas por lluvia, o momentos y fuerzas internas correspondientes;
- W = cargas por viento, o momentos y fuerzas internas correspondientes; y
- E_q = efecto de carga producidos por el sismo o momentos y fuerzas internas correspondientes.

Resistencia a cortante

El diseño de secciones transversales sometidas a cortante debe cumplir con la Ecuación 2.25 y 2.26.

$$\phi V_n \geq V_u \quad \text{Ec. 2.25}$$

$$V_n = V_c + V_s \quad \text{Ec. 2.26}$$

Donde:

- V_n = resistencia nominal al cortante;
- V_u = fuerza cortante mayorada en la sección considerada;
- V_c = resistencia nominal al cortante proporcionada por el concreto;
- V_s = resistencia nominal al cortante proporcionada por el esfuerzo cortante

a) Concreto no presforzado

Para elementos sometidos únicamente a cortante y flexión (Ecuación 2.27).

$$V_c = \left(\frac{\sqrt{f'_c}}{6} \right) b_w d \quad \text{Ec. 2.27}$$

Para elementos sometidos a compresión axial (Ecuación 2.28)

$$V_c = \left(1 + \frac{N_u}{14A_g} \right) \left(\frac{\sqrt{f'_c}}{6} \right) b_w d \quad \text{Ec. 2.28}$$

Para elementos sometidos a tensión axial significativa (Ecuación 2.29)

$$V_c = \left(1 + \frac{0.3N_u'}{A_g} \right) \left(\frac{\sqrt{f'_c}}{6} \right) b_w d_p \quad \text{Ec. 2.29}$$

Donde:

b_w = ancho del alma o diámetro de la sección circular, mm; y

N_u' = carga axial mayorada normal a la sección transversal, considerar positiva para compresión y negativa para tensión, N.

b) Concreto presforzado (Ecuación 2.30)

$$V_c = \left(\frac{\sqrt{f'_c}}{20} + 5 \frac{V_u d_p}{M_u} \right) b_w d \quad \text{Ec. 2.30}$$

Resistencia a la tensión

a) Para elementos no presforzados con refuerzo en espiral (Ecuación 2.31).

$$\phi P_{n(max)} = 0.85\phi [0.85f'_c(A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \quad \text{Ec. 2.31}$$

b) Para elementos no presforzados con estribos (Ecuación 2.32).

$$\varphi P_{n(max)} = 0.80\varphi[0.85f'_c(A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \quad Ec. 2.32$$

Donde:

$P_{n(max)}$ = máximo valor permitido de resistencia axial nominal de la sección transversal, N; y

A_{st} = área total del refuerzo longitudinal no presforzado (barras o perfiles de acero), mm².

Resistencia al aplastamiento (Ecuación 2.33)

$$B_n \leq 0.85f'_c A_1 \quad Ec. 2.33$$

Donde:

B_n = resistencia nominal al aplastamiento, N; y

A_1 = área de contacto cargada a compresión, mm².

2.5 Ejemplo de Modelos Constitutivos en Software

2.5.1 ABAQUS

ABAQUS, pertenece a Dassault Systemes Simulia Corp. (Figura 8), es un compendio de programas de simulación y modelación estructural que emplea el análisis lineal y no lineal, por medio del análisis de elemento finito. El modelado de materiales que abarca son metales, polímeros, compuestos, concreto, entre otros. Entre sus principales procesos de análisis se encuentran:

1. Esfuerzo estructural,
2. Modelos de materiales hiperelásticos como el caucho,
3. Análisis de rigidez de secciones sólidas,
4. Transferencia de calor,
5. Mecánica de agrietamiento.



Figura 8. Dassault Systemes Simulia Corp. de 3D Design & Engineering Software - Dassault Systèmes®.

2.5.2 Modelo General

En ABAQUS, se asume que existe una relación entre la tasa de deformación elástica e inelástica (Ecuación 2.34):

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{pl} \tag{Ec. 2.34}$$

Donde:

- $\dot{\epsilon}$ = es la tasa de desplazamiento total;
- $\dot{\epsilon}^{el}$ = es la tasa de cambio de desplazamiento elástico;
- $\dot{\epsilon}^{pl}$ = es la tasa de cambio de desplazamiento plástico.

Una suposición general es que la deformación total, F (Ecuación 2.35), está constituida de una deformación inelástica seguida de una deformación puramente elástica.

$$F \epsilon = F^{el} \cdot F^{pl} \tag{Ec. 2.35}$$

Si se considera legítima la propuesta de las ecuaciones anteriores, la tasa de deformación se expresa en el Ecuación 2.36.

$$\dot{\epsilon} = sym(L) = sym(F \cdot F^{-1}) = sym\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{Ec. 2.36}$$

Donde v es la velocidad y x es la posición en un punto de la materia, además que la deformación elástica es pequeña. El modelo más simple de la respuesta elástica (elasticidad lineal, Ecuación 2.37) en ABAQUS es:

$$\sigma = D^{el}; \varepsilon^{el} \tag{Ec. 2.37}$$

Donde σ es esfuerzo y D^{el} es una matriz que depende de la temperatura, pero no de la deformación. Una extensión del comportamiento de tipo elástico es el modelo hipo elástico (Ecuación 2.38):

$$\dot{\sigma} = D^{el}; \dot{\varepsilon}^{el} \tag{Ec. 2.38}$$

Donde ahora D^{el} puede depender de la deformación, haciendo este caso no lineal. Las propiedades elásticas son fuertemente dependientes al volumen de deformación. El comportamiento elástico más general es el modelo hiperelástico, el cual asume que existe una densidad potencial de energía de deformación (U^*) del cual, el esfuerzo es definido en la Ecuación 2.39.

$$\sigma = \frac{\partial U^*}{\partial \varepsilon} \tag{Ec. 2.39}$$

2.5.3 Modelo Constitutivo Plástico

Los modelos plásticos se plantean de acuerdo al grado de modelo de dependencia o independencia. Un modelo de grado independiente es aquella cuya respuesta no depende de la tasa de deformación, mientras que un modelo de grado dependiente está en función del grado de deformación del material. La respuesta puramente elástica (ausencia de deformación plástica) se representa en la Ecuación 2.39.

En muchos modelos de plasticidad, la elasticidad se considera lineal. La función, f , define el límite de la región puramente elástica (Ecuación 2.40).

$$f_i(\sigma, \theta, H_{i,\alpha}) < 0 \tag{Ec. 2.40}$$

Para un sistema i , donde θ es la temperatura, $H_{i,\alpha}$ es un conjunto de parámetros de endurecimiento. El subíndice α , muestra que existen diversos modelos de endurecimiento, y se especificará cuando se defina el modelo plástico.

Cuando el material se presenta en la zona inelástica, la deformación se describe en la Ecuación 2.41.

$$d\varepsilon^{pl} = \sum id\lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial \sigma} \tag{Ec. 2.41}$$

Donde $g_i(\sigma, \theta, H_{i,\alpha})$ son el flujo potencial para el i -ésimo sistema y $d\lambda_i$ es la tasa de cambio del tiempo, dt , para un modelo de grado dependiente o una medición escalar la cantidad de flujo plástico en el i -ésimo sistema, cuyo valor es determinado para los requerimientos para satisfacer la condición $f_i = 0$, para un flujo plástico de un modelo de grado independiente. Para aquellos sistemas donde $f_i < 0$, $d\lambda_i = 0$.

El grado de deformación de acuerdo con el incremento de tiempo ($t + \Delta t$) esta dado por la Ecuación 2.42.

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^{el} + \Delta\varepsilon^{pl} \tag{Ec. 2.42}$$

Se integra el valor total de cada medida de deformación como la suma de los valores de esa deformación al inicio del incremento, girado para tener en cuenta el movimiento de cuerpo rígido durante el incremento (Hughes & Winget, 1980), y el incremento de deformación (Ecuación 2.43).

$$\Delta\varepsilon = sym \left[\frac{\partial \Delta x}{\partial \left(x_t + \frac{1}{2} \Delta x \right)} \right] \tag{Ec. 2.43}$$

Permitiendo el análisis de deformación de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl}$$

Volviéndose algebraico el problema (Ec. 2.34), el cual se debe resolver la ecuación del modelo constitutivo para el estado al final del incremento. Para ello se ocupan las siguientes ecuaciones:

*Esfuerzo elástico: $\sigma = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon^{el}}$

*La regla de flujo integrada: $d\varepsilon^{pl} = \sum_i \Delta\lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial \sigma}$

*La regla de rigidez integrada: $\Delta H_{i,\alpha} = \Delta\lambda_i h_{i,\alpha}$

*Y para modelos de grado independiente, la función de rendimiento: $f_i = 0$

*O para sistemas activos (sistemas donde $f_i < 0$ se tiene $\Delta\lambda_i = 0$).

2.5.4 Modelo Constitutivo Inelástico para Concreto

El modelo constitutivo está basado en la teoría de daño plástico escalar o por el modelo de agrietamiento. Para el caso de concreto armado, se utiliza la combinación del modelo estándar, utilizando el modelo de concreto simple con elementos de armadura. Las varillas se definen individualmente o incrustadas en superficie orientada, que utilizan la teoría de deformación y que pueden ser utilizados para el propio reforzamiento.

Estos elementos están superpuestos en una malla y son usados con modelos estándar de plasticidad metálica que describen el comportamiento del material de la armadura. Este modelado permite al comportamiento del concreto ser considerado independiente de la armadura.

Lo importante en el modelado de concreto es el estado de fragilidad (agrietamiento). El agrietamiento ocurre cuando los esfuerzos alcanzan la falla superficial. Estas fallas son conocidas como el primer y el segundo esfuerzo invariante de tensión (p y q , respectivamente) de Coulomb.

Cuando el concreto trabaja principalmente a compresión, el modelo se basa a la teoría elásto - plástica. Se emplean el flujo asociado y el endurecimiento (rigidez) isotrópico. El flujo asociado predice la deformación volumétrica inelástica. Además, cuando el concreto es sometido a altos esfuerzos de presión, muestra respuesta inelástica. La respuesta de compresión y agrietamiento del concreto ante el comportamiento uniaxial se describe en la Figura 9.

Cuando el concreto se somete a compresión, inicialmente se presenta la respuesta elástica. A medida que incrementa la tensión, se produce un esfuerzo no recuperable (inelástico) y la respuesta del material se ablanda. En la Figura 10, se representan la falla superficial y la máxima resistencia en el espacio de tensiones.

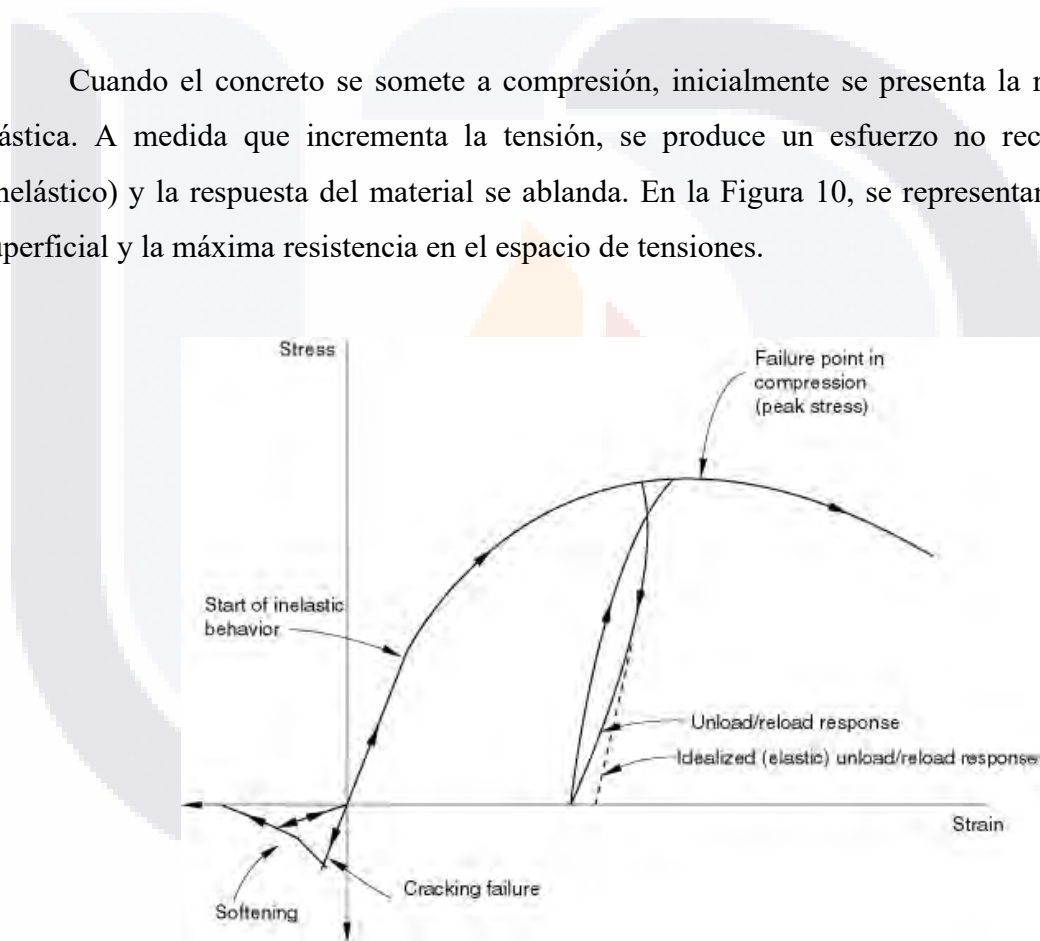


Figura 9. Comportamiento uniaxial del concreto simple de 3D Design & Engineering Software - Dassault Systèmes®.

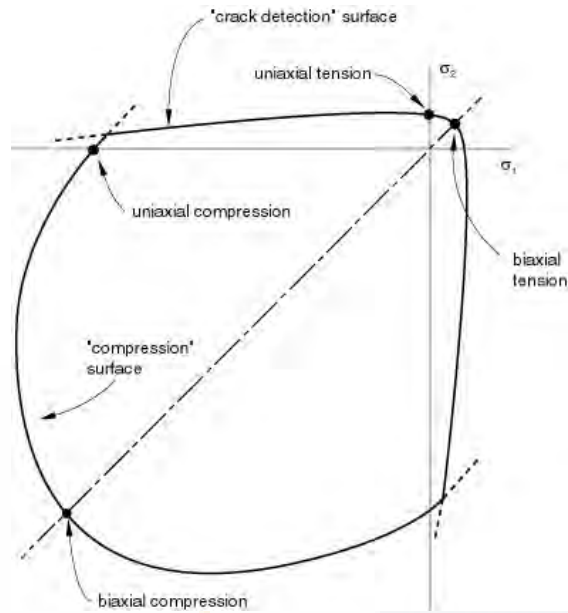


Figura 10. Falla superficial del concreto en plano de esfuerzos de 3D Design & Engineering Software - Dassault Systèmes®.

2.5.5 Modelo de Agrietamiento

Cuando se analiza el concreto en un estado post agrietamiento, se emplea el concepto de fracturas frágiles de Hillerborg et al. (1976), por otro lado, si se analiza el modelo por daño plástico, se emplea la teoría de los modelos de Lubliner et al. (1989) y Lee & Fenves (1998). Para el modelo de dirección de agrietamiento está basado en Rots & Blaauwendraad (1989).

El modelo emplea una superficie de plasticidad de detección de grietas, en el espacio de tensión para determinar cuando el agrietamiento toma lugar y su orientación. El daño elástico es usado para describir el comportamiento post falla. Se asume que la energía de fractura requiere formar un área unitaria de la grieta superficial, G_f (Ecuación 2.44), la cual es una propiedad del material. Este valor se puede calcular del esfuerzo a tensión en función al desplazamiento de apertura de grieta (Figura 11).

$$G_f = \int \sigma_t du \tag{Ec. 2.44}$$

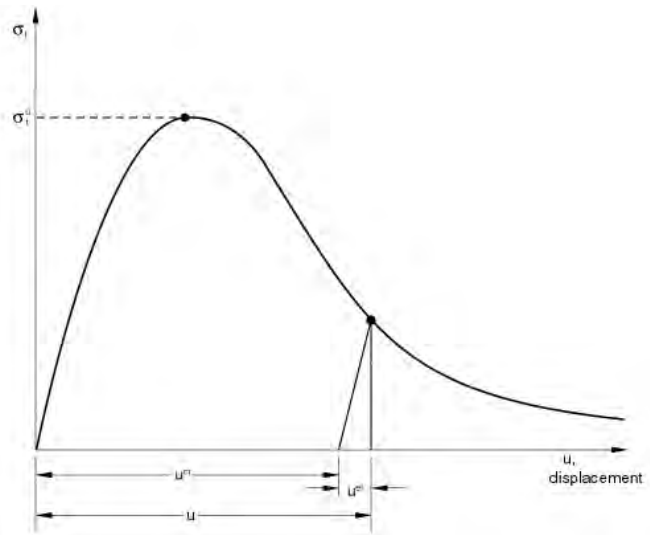


Figura 11. Comportamiento de agrietamiento basado en la energía de fractura de 3D Design & Engineering Software - Dassault Systèmes®.

Los valores de G_f varían de 40 N/m (para un concreto de $\sigma_c^u \approx 20 \text{ MPa}$) hasta 120 N/m (para un concreto de $\sigma_c^u \approx 40 \text{ MPa}$). Se considera una propiedad de material, ya que, si es eliminada la parte del desplazamiento elástico, u^{el} , la relación entre el esfuerzo y el desplazamiento restante, $u^{cr} = u - u^{el}$, se ajusta, siendo indiferente al tamaño del espécimen. En caso del concreto reforzado, la relación $\sigma - u^{cr}$ debe representar la acción del vínculo entre el concreto y las barras de refuerzo, incrementado el valor de G_f ,

Tasa de deformación

Se descompone la deformación elástica en la Ecuación 2.45.

$$d\varepsilon^{el} = d\varepsilon_d^{el} + d\varepsilon_t^{pl} \tag{Ec. 2.45}$$

Donde:

$d\varepsilon^{el}$ = tasa de desplazamiento mecánica total para la detección de agrietamiento

$d\varepsilon_d^{el}$ = tasa de desplazamiento elástica

$d\varepsilon_t^{pl}$ = es la tasa de desplazamiento plástica asociada con el agrietamiento superficial

2.6 Análisis No Lineal

Si se requiere emplear un análisis no lineal, se debe conocer la diferencia entre los diversos métodos existentes. Donde dependerá del planteamiento de cómo se representa el volumen a analizar y su interacción interna de partículas.

2.6.1 Método del Elemento Finito

De acuerdo a Hutton (2004), el análisis del método de elemento finito o Finite Element Method (*FEM*) está basado en un volumen dado, el cual se conoce sus propiedades físicas, dicho volumen está compuesto por infinitos elementos $P(x,y)$, donde en cada uno de los elementos deben de cumplir con una o varias ecuaciones. En la Figura 12 se representa un cuerpo bidimensional con una variable de campo $\phi(x,y)$ y está compuesta por elementos o partículas $P(x,y)$, Figura 12a. Al integrar dos elementos más y unirlos, se genera un triángulo, elemento finito (Figura 12b). Cada uno de los vértices es conocido como nodo y tienen la función de unir otros elementos finitos (Figura 12c), además de que el valor de cada uno de los nodos representa las propiedades del cuerpo.

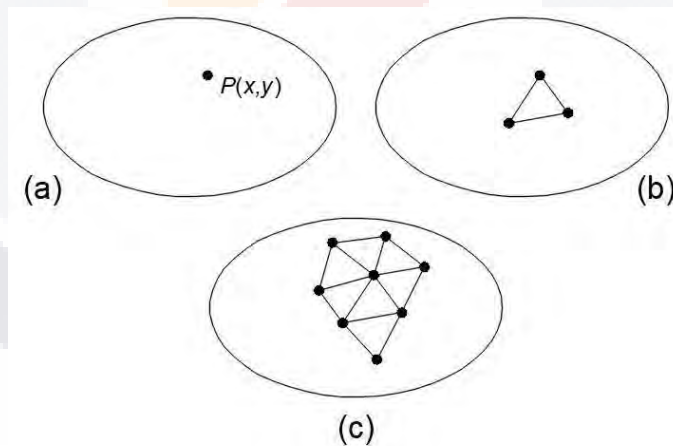


Figura 12. Representación del método de elemento finito basado Hutton (2004), a) cuerpo bidimensional con una variable de campo $\phi(x,y)$, b) elemento finito de tres nodos, c) malla de elemento finito.

Al ser calculado las variables de campo en los nodos, se obtiene el valor del elemento finito por la interpolación del valor de los nodos. En esto consiste el método de elemento

finito, ejemplificando el modelo de tres nodos (Figura 12.b), la variable de campo se describe como Ecuación 2.46.

$$\phi(x, y) = N_1(x, y)\phi_1 + N_2(x, y)\phi_2 + N_3(x, y)\phi_3 \quad \text{Ec. 2.46}$$

Donde ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 son los valores de las variables de campo en los nodos, y N_1, N_2 y N_3 son las funciones de interpolación, también conocidas como funciones de forma. Estas funciones no necesariamente deben ser de interpolación, sino deben representar la variación de las variables de campo. Para representar este método en cuerpos mayores, se emplean mallas. Uno de los inconvenientes de este análisis, son los cuerpos con bordes curvilíneos, debido a que cada uno de los elementos del mallado debe medir la misma distancia ($dx \times dy$), como se muestra en la Figura 13. Si se emplea un mallado muy amplio (Figura 13a), se descarta el análisis en los bordes, para corregir esto, al disminuir el tamaño de los elementos de la malla como se observa en la Figura 13b, se abarca aún más superficie. Lo anterior se puede repetir, hasta el punto donde es microscópico la superficie que no está dentro de la malla. Lo anterior generaría un mayor número de elementos finitos, generando un sistema de ecuaciones aún más complejo, que, traducido en trabajo computacional, sería igual a mayor tiempo de ejecución y mayor memoria de cálculo.

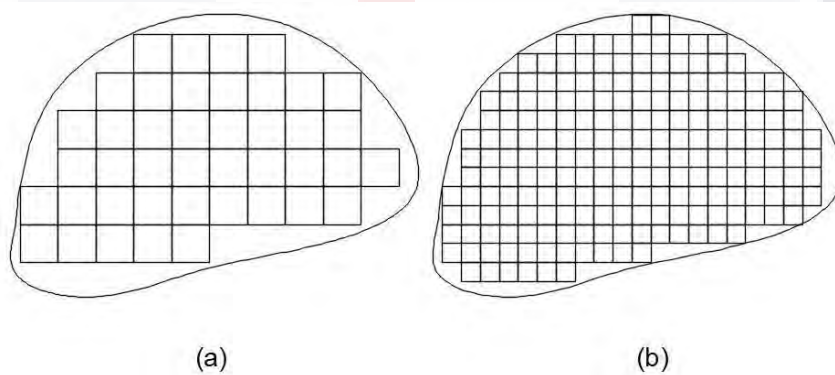


Figura 13. Modelo del método de elemento finito basado Hutton (2004), a) mallado de elementos cuadrados en cuerpo curvilíneo, b) mallado refinado en cuerpo curvilíneo.

2.6.2 Método de Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas o Finite Difference Method (*FDM*) está basado en la definición de la derivada de una función $f(x)$ (Ecuación 2.47).

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{Ec. 2.47}$$

Donde x es una variable independiente. Al derivar, usando finitos valores de Δx , se obtiene la Ecuación 2.48.

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &\approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}; \\ \frac{df}{dx} + x &= 0; \\ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + x &= 0; \\ f(x + \Delta x) &= f(x) - x(\Delta x). \end{aligned} \tag{Ec. 2.48}$$

La solución de la ecuación diferencial proporciona una constante (A) de integración, dicha constante es determinada bajo una condición (inicial o de frontera) que debe satisfacer. Una diferencia entre el método de elemento finito y el modelo de diferencias finitas es que en el primero, la variación de la variable de campo se integra mediante interpolación, mientras que, para el segundo caso, esta es calculada solamente en un punto. En ambos casos, entre más finito se realice el análisis se resultado se asemeja más a la realidad.

2.6.3 Método del Elemento Discreto

El método de elemento discreto o Discrete Element Method (*DEM*), es un método intuitivo en donde partículas discretas se encuentran con otras partículas durante una simulación dinámica. Cada una de estas partículas representa un nodo con un específico radio. Cada nodo tiene un grado de libertad de desplazamiento y de rotación lo que les permite interactuar con otros nodos (Figura 14). En esta representación gráfica, se presentan tres casos de interacción de partículas. El primero, las dos partículas están solamente tocando sin deformarse, en el segundo caso existe deformación sin penetración entre partículas debido al

empuje entre ellas y, finalmente se encuentra el caso de dos partículas rígidas que se empujan entre ellas y existe poca penetración. Donde d_i es la distancia entre los dos centros de las partículas y r es el radio de las partículas.

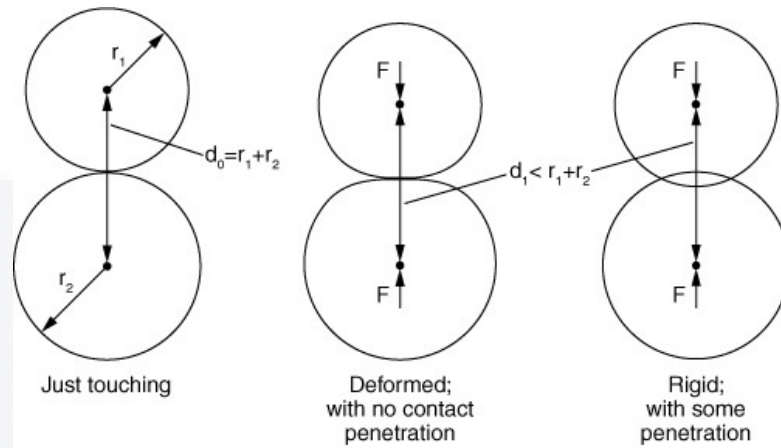


Figura 14. Representación de interacción de partículas en el DEM de *3D Design & Engineering Software - Dassault Systèmes®*, 2021.

La aproximación del DEM se expresa con δ' , que corresponde la distancia de penetración entre las dos partículas (Ecuación 2.49), matemáticamente se expresa como:

$$\delta' = r_1 + r_2 - d_i \tag{Ec. 2.49}$$

2.6.4 Método del Elemento Aplicado

De acuerdo a Eraky et al., (2021), el método de elemento aplicado o Applied Element Method (AEM) se basa en un cuerpo que se encuentra dividido en pequeños elementos rígidos, dichos elementos están conectados entre ellos por resortes en sentido normal y de corte. El planteamiento de sus ecuaciones depende de los grados de libertad, los cuales están en función en las dimensiones estudiadas, tres grados de libertad en un análisis en dos dimensiones, o, seis grados de libertad en un análisis en tres dimensiones (Figura 15).

Su fundamento matemático, consiste en la generación de una matriz de rigidez (Ecuación 2.50) por cada elemento de acuerdo con el punto de contacto y el esfuerzo y deformación aplicado (Figura 16).

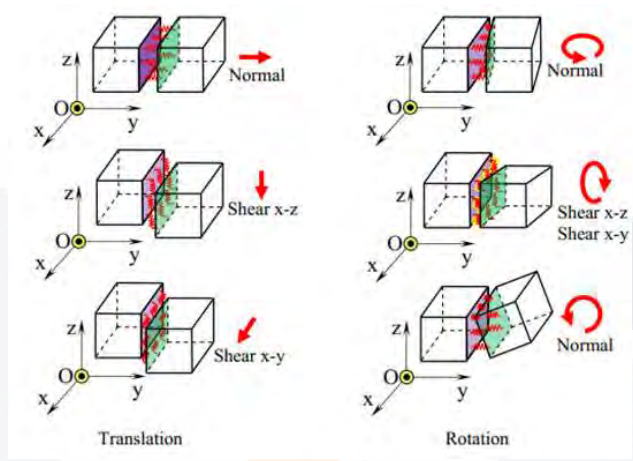


Figura 15. Grados de libertad en análisis AEM de Eraky et al., 2021.

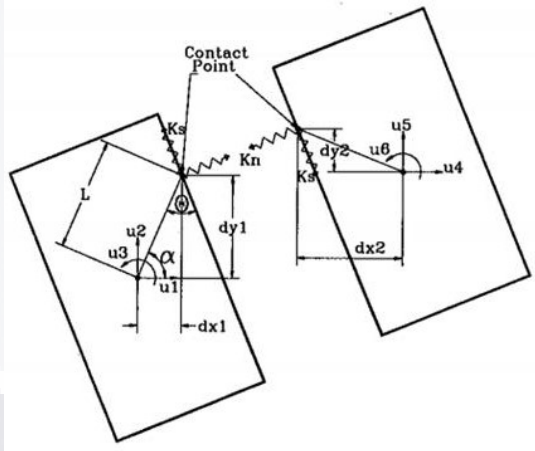


Figura 16. Punto de contacto y elementos de análisis para el AEM de Eraky et al., 2021.

$k_n \sin^2(\theta + \alpha)$ $+k_s \cos^2(\theta + \alpha)$	$-k_n \sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \alpha)$ $+k_s \sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \alpha)$	$k_s L \sin(\alpha) \cos(\theta + \alpha)$ $-k_n L \cos(\alpha) \sin(\theta + \alpha)$
$-k_n \sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \alpha)$ $+k_s \sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \alpha)$	$k_s \sin^2(\theta + \alpha)$ $+k_n \cos^2(\theta + \alpha)$	$k_n L \cos(\alpha) \cos(\theta + \alpha)$ $+k_s L \sin(\alpha) \sin(\theta + \alpha)$
$k_s L \sin(\alpha) \cos(\theta + \alpha)$ $-k_n L \cos(\alpha) \sin(\theta + \alpha)$	$k_n L \cos(\alpha) \cos(\theta + \alpha)$ $+k_s L \sin(\alpha) \sin(\theta + \alpha)$	$k_n L^2 \cos^2(\alpha)$ $+k_s L^2 \sin^2(\alpha)$

Ec. 2.50

Donde la distancia L y los ángulos α y θ se representan en la Figura 16. Para la rigidez a esfuerzos normales (k_n , Ecuación 2.51) y cortante (k_s , Ecuación 2.52), se calculan de la siguiente manera:

$$k_n = \frac{E \times d \times Th}{a} \quad \text{Ec. 2.51}$$

$$K_s = \frac{G \times d \times Th}{a} \quad \text{Ec. 2.52}$$

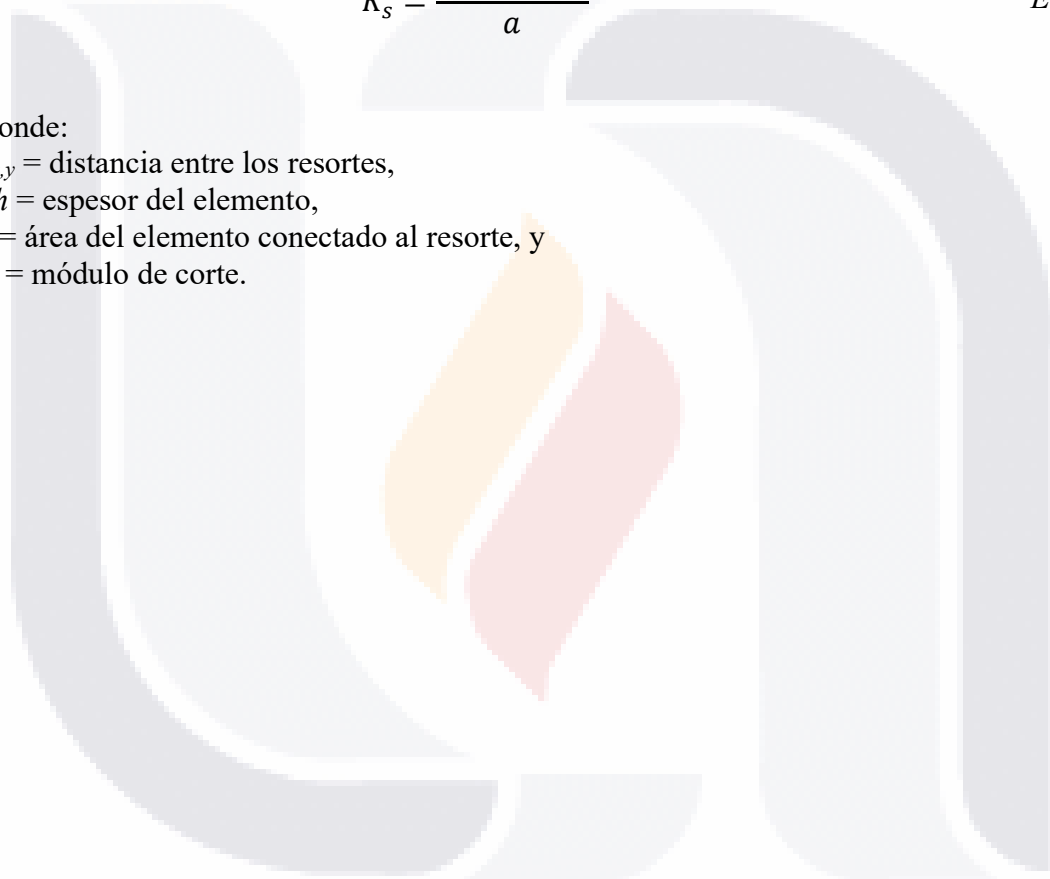
Donde:

$d_{x,y}$ = distancia entre los resortes,

Th = espesor del elemento,

a = área del elemento conectado al resorte, y

G = módulo de corte.





**CAPÍTULO III
METODOLOGÍA**

3.1 Campaña Experimental

3.1.1 Trabajo de campo y laboratorio

Para la validación de la hipótesis, se requieren datos obtenidos de una muestra, la cual, por la naturaleza de la investigación es de tipo cuantitativo. Debido que las muestras utilizadas son numéricas y son analizadas, calificadas e interpretadas estadísticamente. La muestra poblacional del estudio consiste en especímenes cilíndricos y prismáticos de concreto simple y reforzado con fibras de acero o polipropileno, las cuales poseerán propiedades únicas que los diferenciara entre sí.

No todos los modelos emplean las mismas variables, algunos modelos solo emplean propiedades mecánicas del concreto o de las fibras, otros modelos dependerán del tipo de ensayo y espécimen (cilindro, viga o losa), y unos más, se enfocan en el volumen y geometría del material de refuerzo. El presente estudio, las variables a emplear se enfocan en las propiedades físicas y mecánicas de las fibras de refuerzo, y no a las propiedades del concreto.

Se registrarán diversas respuestas mecánicas del concreto: resistencia a la compresión, módulo de elasticidad, relación de Poisson y esfuerzo residual a flexión. De los resultados obtenidos en el laboratorio, se emplearán herramientas probabilísticas para detectar una posible correlación entre las respuestas del concreto con respecto a las propiedades de la fibra. Si se detecta una relación entre la respuesta y las propiedades, se planteará una ecuación que estime el comportamiento de dicha relación. De lo contrario, se concluirá que no existe una relación confiable entre las propiedades de las fibras y las respuestas mecánicas del concreto reforzado con las mismas. También se empleará diversos modelos vistos en la bibliografía, así como un software de diseño estructural para plantear la validación de los modelos desarrollados.

3.1.2 Análisis Estadístico

En el trabajo de tesis se propone un nuevo modelo constitutivo, el cual está basado en un modelo de regresión múltiple, el cual se desarrollará a partir de la información del estudio. Para indicar qué variables influyen más ante las respuestas mecánicas de los especímenes, se

estima un modelo de regresión lineal múltiple y en otros casos un análisis de varianza tipo ANOVA.

Un modelo de regresión lineal múltiple es una relación matemática que describe el comportamiento de una variable de respuesta Y , en relación con k variables independientes o también llamadas variables de respuestas, las cuales se denotan como x_1, x_2, \dots, x_k . Dicho modelo se representa en la ecuación 3.1.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + e \quad \text{Ec. 3.1}$$

Donde los parámetros β_i , para $i = 1, 2, \dots, k$ se les llaman coeficientes de regresión y representa el cambio esperado en la respuesta de Y por cambio unitario de x_i , cuando las demás variables se mantienen constantes. Estos parámetros también son conocidos como coeficientes de regresión parciales. El término e es un componente aleatoria del error y se asume que tiene una distribución normal de media 0 y varianza sigma cuadrada (Montgomaery & Runger, 2003).

Para medir la significancia del modelo propuesto, prueba la hipótesis:

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$; contra

$H_1: \beta_i \neq 0$, para algún i , donde $i = 1, 2, \dots, k$.

- 1) En H_0 se afirma que ninguna de las variables regresoras contribuye significativamente al modelo.
- 2) En H_1 se afirma que al menos una de las variables de regresión contribuye significativamente al modelo de regresión.

Para aprobar H_0 se emplea el valor observado del estadístico F , y su p -valor, los cuales se obtienen del análisis de varianza para la regresión presentado en la Tabla 5. Cabe aclarar

que este análisis de varianza es un análisis general de las diferentes propiedades probabilísticas de una muestra, como la regresión, su error, valor F , entre otros; a diferencia del análisis de varianza tipo ANOVA, que solo analiza las medias poblacionales.

Si el valor F es pequeño o cercano a cero (p -valor grande), entonces no se rechaza la hipótesis H_0 . Sin embargo, si el valor F es grande (p -valor valor pequeño, cercano a cero), la hipótesis H_0 es rechazada.

Tabla 5. Análisis de varianza.

Tabla de análisis de varianza				
Fuente	g.l.	SS	MS	F
Regresión	p	$\sum_{i=0}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$\frac{\sum_{i=0}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{p}$	$\frac{MS_R}{MS_E}$
Error	$n - (p + 1)$	$\sum_{i=0}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$\frac{\sum_{i=0}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - (p + 1)}$	
Total	$n - 1$	$\sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y})^2$		

Si H_0 es rechazada, significa que al menos una de las variables independientes está relacionada con la respuesta. Para conocer la significancia de marginal de cada variable independiente, se considera realizar pruebas de hipótesis de la forma:

$$H_0: \beta_i = 0, \text{ contra } H_1: \beta_i \neq 0. \text{ Para cada } i = 1, 2, \dots, k.$$

Para aprobar H_0 se emplea el valor observado de un estadístico t , y su p – valor. Si el valor t es pequeño o cercano a cero (p – valor grande), entonces no se rechaza la hipótesis H_0 . Si el valor de t es grande (p – valor pequeño, cercano a cero), conllevaría al rechazo de la hipótesis H_0 . En este trabajo se considera variables significativas aquellas con un valor p menor o igual a 0.05.

Si alguna propiedad estudiada no fuera posible estimar un modelo de regresión, se considerará únicamente el análisis de varianza para identificar que propiedades influyen en las repuestas mecánicas del concreto.

El análisis de varianza o ANOVA, permite comparar simultáneamente todas las medias cuando hay más de dos poblaciones (Montesdeoca, 2007). En otras palabras, el análisis de varianza prueba la hipótesis de que las medias poblacionales son iguales.

Para determinar la capacidad de predicción de los modelos propuestos con respecto a los valores obtenidos en laboratorio, se emplearon dos medidas de ajuste: el error matemático y el coeficiente de determinación.

La primera medida es utilizada en diversos métodos numéricos para representar operaciones y cantidades matemática exactas (Chapra & Canale, 2007). Para emplear este tipo de error, se requiere calcular primeramente el error absoluto (ϵ_{abs} , Ecuación 3.2), el cual es la diferencia absoluta entre el valor calculado (\hat{y}) y el valor observado, prueba de laboratorio (y), cuyo resultado tendrá las mismas unidades a los dos tipos de valor:

$$\epsilon_{abs} = |\hat{y} - y| \tag{Ec. 3.2}$$

El resultado solo indica la discrepancia entre los valores. Para conocer qué tan cercano o alejado es el valor del espécimen que se pronostica con respecto al valor real, se emplea el error relativo porcentual (ϵ_r , Ecuación 3.3). Este nuevo tipo de error es la división del error absoluto con respecto al valor observado, obteniendo un valor adimensional, al multiplicarlo por 100 se obtiene el valor porcentual (%).

$$\epsilon_r = \frac{|\hat{y} - y|}{y} \times 100 \tag{Ec. 3.3}$$

Como el modelo se prueba en diversos especímenes, es posible obtener un único resultado representativo, mediante el cálculo del error relativo porcentual promedio (ponderado) (ε_{rm} , Ecuación 3.4):

$$\varepsilon_{rm} = \frac{\sum_{i=0}^n \varepsilon_r}{n} \quad \text{Ec. 3.4}$$

Donde n , representa el número de muestras.

El objetivo de emplear la medida del error matemático es conocer qué tanto difieren porcentualmente los valores calculados con respecto a los obtenidos en laboratorio. Si un modelo se ajusta bien, los valores de error serán cercanos a 0.

La segunda medida es el coeficiente de determinación, el cual se emplea para evaluar el ajuste del modelo. Esta medida representa el porcentaje de la variabilidad que el modelo estimado explica sobre los valores observados de la variable de respuesta. Su valor se encuentra entre 0 y 100, al ser más cercano a 100, indica que el modelo representa un buen ajuste y que los valores predichos con el modelo son similares a los obtenidos en el laboratorio.

Una vez evaluados los modelos con respecto a sus valores obtenido en laboratorio, se indaga y expone nuevos casos de estudio obtenidos de la bibliografía. Se vuelven a evaluar (con el error matemático) todos los modelos utilizados en la etapa anterior con estos nuevos estudios, con la finalidad de corroborar la confiabilidad de cada uno de los modelos.

Finalmente se hace la propuesta de un factor que, al multiplicarlo, se obtenga un valor de proximidad de la propiedad mecánica del concreto al agregar fibra de refuerzo. Esto se debe que no siempre se cuenta con la cantidad de datos (propiedades) necesaria para aplicar algún modelo. La obtención de este factor es a través del análisis de los modelos desarrollados con respecto a todos los especímenes analizados en este trabajo, para considerar todas las variaciones que pudieran existir.

3.2 Resultados

En el capítulo IV se presentan las características físicas y mecánicas de las diversas fibras a emplear, así como el procedimiento y normativa empleada para la obtención de los resultados en el laboratorio. Se agruparán los especímenes de acuerdo al tipo de material de la fibra y su dosificación empleada, presentando las diversas respuestas mecánicas por grupo de concreto reforzado.

Una vez obtenido los resultados de laboratorio, se procede a realizar el análisis de varianza con los valores F y p , así como el ANOVA para identificar que propiedades de las fibras influyen más a las respuestas mecánicas. Si se encuentra una correlación entre las propiedades de la fibra y una respuesta mecánica, se procede a plantear un modelo que describa dicha relación, empleando el modelo de regresión lineal múltiple. En caso contrario se concluye que las propiedades de las fibras no representan alguna relación con respecto a las propiedades del concreto reforzado.

Se evalúan cada uno de los modelos con el error matemático y se identifica cuál de ellos se ajusta mejor a los valores obtenidos en el laboratorio. Posteriormente se aplica en el software seleccionado para corroborar su ajuste con la realidad. Los resultados del análisis anterior se representarán numérica y gráficamente. La representación numérica indica la influencia que tienen los valores empleados entre ellos, siendo resultados objetivos, mientras que, la representación gráfica sirve de apoyo para identificar las áreas con mayor o menor concordancia entre los resultados analizados.

3.3 Comprobación de Hipótesis

La hipótesis planteada sostiene la validez de modelos constitutivos avanzados (mecánicos) con respecto a los tradicionales (lineales), para probar dicha conjetura los resultados de los modelos avanzados deben tener una mayor semejanza con respecto a los resultados obtenidos en el laboratorio. Así que, se plantean las siguientes hipótesis:

1. *Aceptación de la Hipótesis*

Los modelos constitutivos mecánicos (avanzados) presentan un menor error estadístico a los valores deseado, por lo tanto, predicen más adecuadamente la respuesta mecánica ante la aplicación de un tipo de esfuerzo en específico.

2. *Rechazo de la Hipótesis*

Los modelos constitutivos lineales presentan un menor error estadístico a los valores deseado, por lo tanto, predicen más adecuadamente la respuesta mecánica ante la aplicación de un tipo de esfuerzo en específico.

También se deben definir las condiciones de aprobación para el uso de un modelo lineal o un modelo mecánico. Esto se debe a la posibilidad de que en algunos modelos mecánicos se asemejen a la realidad en ciertas propiedades, pero no cubre las demás variables, dando la oportunidad de desarrollar nuevos modelos.

3.4 Evaluación de Resultados

En el apartado de la discusión de resultados, se evaluarán las condiciones con las que se elaboraron los especímenes y las respuestas mecánicas obtenidas, diferenciado entre el concreto simple y un concreto reforzado con fibras. Se calculará los resultados mecánicos de acuerdo a los diversos modelos lineales expuestos en este trabajo, así como el modelo mecánico (empleando el programa ABAQUS). Finalmente, se valorará cada modelo de acuerdo a los resultados obtenidos en el laboratorio.

En el capítulo de conclusiones, se plantearán las ventajas y desventajas de emplear modelos constitutivos mecánicos y modelos lineales. Definiendo las condiciones en donde es favorable emplear un modelo u otro, por ejemplo, cantidad de información, uso de licencias, tipos de resultados obtenidos (numéricos, gráficas o animaciones), tiempos de ejecución, entre otros.



CAPÍTULO IV
TRABAJO DE CAMPO Y
LABORATORIO

4.1 Especímenes y Pruebas de Laboratorio

Se cuenta con un historial de pruebas mecánicas aplicadas en 91 cilindros y 111 vigas de concreto (Grupo Constructor Peasa S.A de C.V., 2012). El estudio consistió en pruebas mecánicas en concreto industrial empleando 6 fibras de refuerzo de acero y 5 fibras de refuerzo de polipropileno. Las pruebas se diseñaron y se probaron de acuerdo a las normas técnicas de la Sociedad Americana para Pruebas y Materiales (American Society for Testing and Materials, ASTM). Del conjunto de especímenes ensayados, se obtuvieron las siguientes respuestas mecánicas:

1. Resistencia a la compresión ($f'c$, MPa),
2. Módulo de elasticidad (ME , GPa),
3. Relación de Poisson (ν), y
4. Esfuerzo residual para una flexión de 3 mm ($f_{e,3}$).

Las propiedades geométricas y mecánicas de las fibras se presentan en la Tabla 6, donde, la expresión l/d_f indica la relación del largo con respecto al diámetro de la fibra, siendo esta una representación geométrica de la fibra. Por otro lado, se realizó una representación de gráfica de cada una de las fibras en la Figura 17.

Tabla 6. Propiedades geométricas y mecánicas de las fibras de refuerzo.

Marca	Material	l/d_f	Resistencia a la tensión (MPa)	ME (GPa)	Forma
Ramgra con estribos	Acero	40	1,072	210	Con gancho
Ramgra ondulada	Acero	29	1,072	210	Ondulada
Tecnor	Acero	50	1,765	210	Simple
Dramix	Acero	66.66	1,160	210	Con gancho
Fibracero	Acero	24.44	1,100	210	Ondulada

Nycon Series I	Acero	1,000	1,100	210	Combinada
MasterFiber STR	Polipropileno	37.67	637	4,300	Simple
MasterFiber Micro	Polipropileno	1,900	552	95,000	Simple
Euclid	Polipropileno	75.75	625	95,000	Simple
Mac Matrix	Polipropileno	61.15	586	95,000	Simple
Nycon Series II	Polipropileno	76	690	95,000	Simple

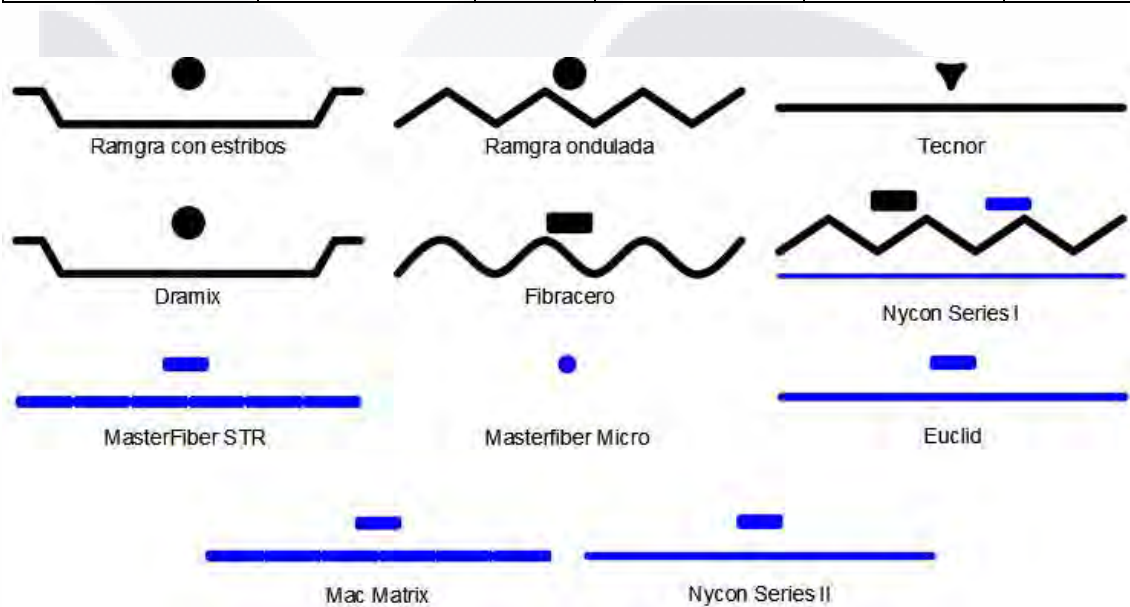


Figura 17. Forma de las fibras de refuerzo.

Una variable de interés, la cual indica la influencia de la fibra sobre el concreto, es el contenido de fibra (V_f , Ecuación 4.1) por unidad de volumen, el cual representa el porcentaje de la cantidad de fibra utilizada (dosificación, D_f) con respecto a su densidad (δ).

$$V_f = \frac{D_f}{\delta} \tag{Ec. 4.1}$$

También se calcula el índice de refuerzo (IR , Ecuación 4.2), el cual indica la influencia de la geometría de la fibra con respecto a la cantidad de fibra por unidad de volumen de concreto.

$$IR = \frac{l_f}{d_f} \times V_f \tag{Ec. 4.2}$$

De los 91 cilindros de concreto de estudio, 38 de ellos contienen fibras de refuerzo de acero (*SFRC*, por sus siglas en ingles Steel Fiber Reinforced Concrete), 37 contienen fibras de acero de polipropileno (*PFRC*, Polypropylene Fiber Reinforced Concrete) y 16 no contienen algún tipo de fibra (*PC*, Plain Concrete) las cuales se identificarán como WF (Without Fiber). De las 111 vigas de concreto, 60 vigas contienen SFR, 50 vigas contienen PFR y solamente una no cuenta con algún tipo de refuerzo.

En la Tabla 7 se presenta la agrupación de las pruebas de laboratorio de acuerdo a la fibra utilizada, su material y su dosificación. Se especifica la cantidad de especímenes utilizados y los valores de las variables antes descritas.

Tabla 7. Variables de las fibras.

Grupo	Fibra	Cilindros	Vigas	D_f (kg/m ³)	δ (kg/m ³)	V_f	IR
WF	WF	16	1	0	0	0	0
SFR01	Ramgra Estribos	2	5	28	7865	0.36%	0.14
SFR02	Ramgra Ondulada	3	1	28	7865	0.36%	0.10
SFR03	Tecnor	3	4	6	7865	0.08%	0.04
SFR04	Dramix	3	6	28	7865	0.36%	0.24
SFR05	Dramix	8	12	20	7865	0.25%	0.17
SFR06	Dramix	8	12	30	7865	0.38%	0.25
SFR07	Dramix	8	12	40	7865	0.51%	0.34
SFR08	Fibracero	2	6	2.7	7865	0.03%	0.01
SFR09	NYCON Series I	1	1	11	4450	0.25%	2.47
PFR01	Masterfiber STR	3	6	2.7	930	0.29%	0.11
PFR02	Masterfiber Microfibra	3	1	1	910	0.11%	2.09
PFR03	Euclid	3	6	3	920	0.33%	0.25
PFR04	Euclid	8	10	2.125	920	0.23%	0.17
PFR05	Euclid	8	12	4.25	920	0.46%	0.35

PFR06	Euclid	8	11	6.375	920	0.69%	0.52
PFR07	Mac Matrix	3	4	2.15	910	0.24%	0.14
PFR08	NYCON Series II	1	1	1.7	910	0.19%	0.14

Los especímenes cilíndricos y prismáticos fueron elaboradas de acuerdo con ASTM C192 (2019). Los especímenes cilíndricos fueron ensayados a compresión y los especímenes prismáticos fueron ensayados a flexión a los 28 días. Los cilindros tienen una altura de 30 cm y un diámetro de 15 cm, mientras que las vigas miden 15 cm de ancho y profundidad, con una longitud de 50 cm. La temperatura ambiente de la elaboración del concreto estaba en un rango de 20-30 °C. Los moldes de concreto reforzado son reposados a temperatura ambiente por 24 h, curándolos y cubriéndolos con una bolsa de plástico para prevenir perdidas de humedad. Al siguiente día se transfieren a un tanque de agua con temperatura de 23 ± 2 °C hasta 24 h previas a la prueba de laboratorio. Las características de los agregados del concreto se presentan en la Tabla 8.

Tabla 8. Características de los agregados.

Componente	Cantidad (kg/m ³)	Densidad (kg/m ³)
Cemento	308.00	3.15
Arena triturada caliza	191.03	2.63
Arena de río	449.03	2.44
Grava triturada riolítica de 20 mm	532.01	2.68
Grava triturada riolítica de 40 mm	650.27	2.62
Agua	185.00	1.00
Aditivo líquido	2.22	1.20

De los especímenes cilíndricos de concreto se obtuvo la resistencia a la compresión (f'_c) de acuerdo a los estándares de ASTM C39 (2018), tal como se observa en la Figura 18A. El módulo de elásticas (ME) y la relación de Poisson (ν) se obtienen de acuerdo a lo establecido en los estándares de ASTM C469 (2014), Figura 18B. Los especímenes prismáticos, Figura 18C, se probaron a flexión por el método de carga en tres puntos

empleando la metodología expuesta en ASTM C78 (2018) para la viga sin fibra y la metodología de ASTM C1609 (2019) para las vigas reforzadas con fibras.

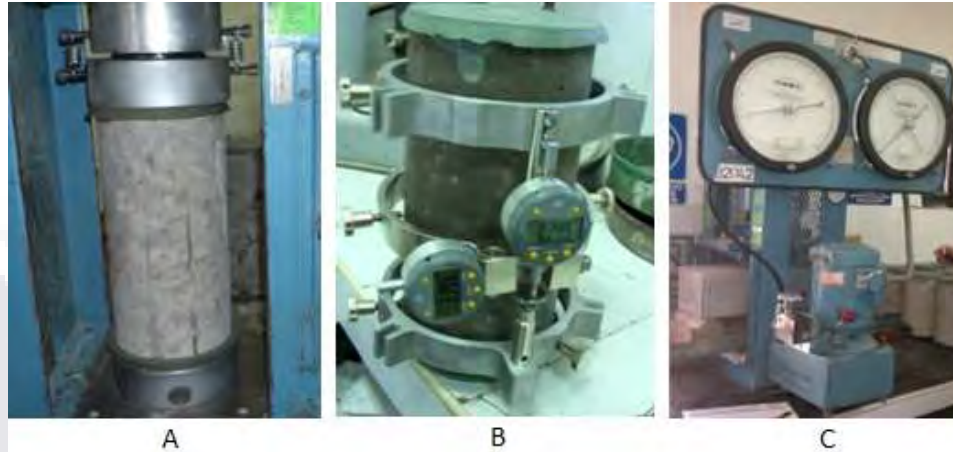


Figura 18. Pruebas de laboratorio. A) Prueba estándar para la obtención a la resistencia a la compresión. B) Prueba estándar para la obtención del módulo de elasticidad y relación de Poisson. C) Prueba estándar para la resistencia a la flexión en tres puntos.

Se ensayan los especímenes prismáticos a flexión, de acuerdo a los estándares de ASTM C1018 (1997) y JCI-SF4 (1983) para obtener el esfuerzo residual a flexión a 3 mm ($f_{e,3}$). El primer método consiste en obtener el índice de tenacidad mediante la gráfica carga – deformación, el cual indica, la capacidad de absorción de energía, siendo el cociente del área bajo la curva hasta una deflexión definida. El segundo método consiste en obtener la suma del esfuerzo a flexión (Ecuación 4.3) y después obtener la falla de la grieta, que es igual a la capacidad de esfuerzo derivada de la carga $P_{e,3}$, la cual se determina al dividir el área bajo la curva carga – deformación por $L/150$ que es la deformación máxima permitida, (Ecuación 4.4). El esfuerzo residual será igual al cociente entre el esfuerzo a flexión permitido sobre el esfuerzo a flexión máximo obtenido, Ecuación 4.5. Como es una relación de esfuerzos, los resultados obtenidos para el esfuerzo residual se presentan en forma porcentual.

$$f_{ct,max} = P_{max} \frac{L}{bh^2} \tag{Ec. 4.3}$$

$$f_{ct,3} = P_{e,3} \frac{L}{bh^2} \tag{Ec. 4.4}$$

$$f_{e,3} = \frac{f_{ct,3}}{f_{ct,max}} \tag{Ec. 4.4}$$

Un método alternativo es emplear la normativa europea EN 14651 (2005), el cual consiste en tener una relación deflexión (δ_f) – CMOD (crack mouth opening displacement), el cual consiste en flexionar un espécimen prismático de concreto con carga en tres puntos. Por medio de la relación entre estos dos parámetros (Ecuación 4.6), se obtiene el esfuerzo residual para j -enésimo elementos de CMOD (Ecuación 4.7) tal como se muestra en la Figura 19.

$$\delta_f = 0.85CMOD + 0.04 \tag{Ec. 4.6}$$

$$f_{e,j} = \frac{3P_{max}L}{2bh^2} \tag{Ec. 4.7}$$

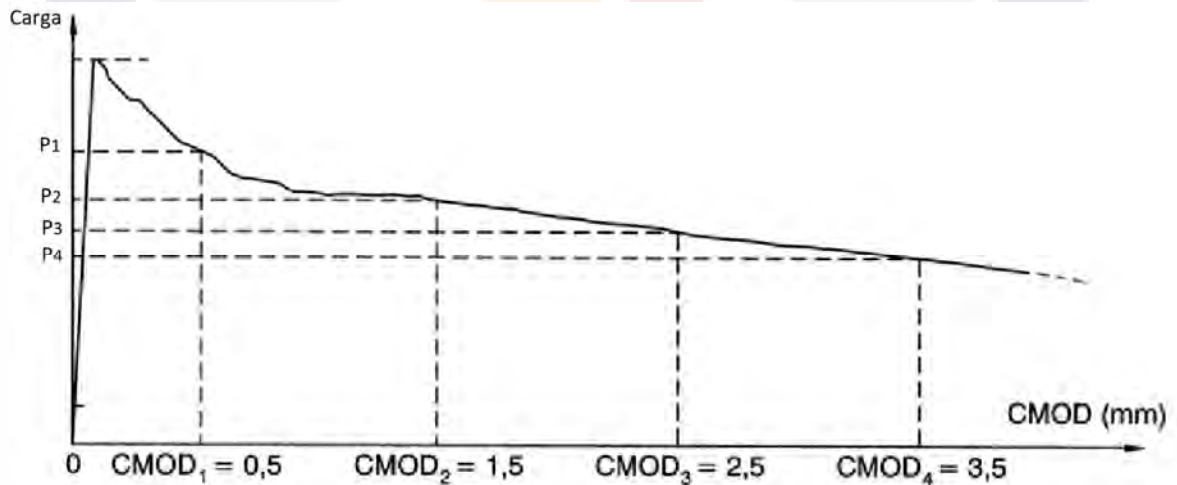


Figura 19. Diagrama de esfuerzo residual empleando y basado en la norma EN 14651.

Soetens & Matthys (2014), Venkateshwaran et al. (2018), Tan et al. (2021) y Blazy et al. (2021) son algunos de los autores que han empleado este método para sus investigaciones.



CAPÍTULO V
RESULTADOS

5.1 Resultados de Laboratorio

Para el desarrollo de los nuevos modelos, se emplearon los ensayos elaborados en el laboratorio. En los Anexos A (cilindros) y B (vigas) se presentan los resultados y gráficas obtenidos en el laboratorio, así como una descripción del procedimiento efectuado. En forma resumida se presentan en la Tabla 9 los valores promedios de f'_c , ME , v y $f_{e,3}$. En el caso del esfuerzo residual a flexión, existen varios grupos que no presentaron este tipo de esfuerzo, por lo que se descartan para su análisis y se registra como *NA* (No Aplica).

Tabla 9. Resultados promedio del laboratorio.

Grupo	f'_cProm (MPa)	MEProm (GPa)	vProm	$f_{e,3}$prom (%)
SFR01	32.97	45.51	0.23	50.60
SFR02	26.73	48.89	0.18	NA
SFR03	30.46	48.50	0.18	51.25
SFR04	32.71	45.20	0.39	57.33
SFR05	31.21	49.18	0.25	45.58
SFR06	32.21	49.03	0.22	51.42
SFR07	31.51	49.56	0.23	53.42
SFR08	32.04	46.49	0.21	42.00
SFR09	28.72	46.41	0.28	NA
PFR01	32.79	45.89	0.22	41.17
PFR02	31.36	47.14	0.31	NA
PFR03	30.73	48.05	0.19	40.83
PFR04	31.50	49.10	0.30	47.00
PFR05	30.54	48.93	0.24	51.75
PFR06	30.36	47.10	0.23	53.55
PFR07	30.23	48.68	0.26	53.75
PFR08	33.42	41.86	0.39	NA

Otra propiedad obtenida de las muestras prismáticas, es la tenacidad (Te), la cual es la capacidad para absorber energía antes de llegar a su fractura, puede calcularse como el área bajo la curva carga – deformación (Marar et al., 2001). Mientras que el esfuerzo residual es la energía que permanece en la ausencia de cargas externas (Cheng & Finnie, 2007). En los anexos C y D se presentan las gráficas cargas – CMOD y tenacidad – CMOD, respectivamente, de los diversos grupos de concreto reforzado estudiados.

5.2 Estimación del Modelo de Regresión Lineal Múltiple

Para este modelo se empleó el paquete R (*R: The R Project for Statistical Computing*), en donde se evaluaron las siguientes propiedades de las fibras:

- Material de la fibra (acero o polipropileno, M),
- Resistencia a la tensión,
- Módulo de Young (E),
- Dosificación (D_f),
- Relación geométrica (l_f/d_f),
- Densidad (δ),
- Contenido de fibra (V_f), e
- Índice de refuerzo (IR).

Se realizó un análisis estadístico para identificar si las propiedades de las fibras influyen en las propiedades mecánicas estudiadas. Se estima un modelo de regresión lineal múltiple que pasa por el origen donde se emplean todas las propiedades de las fibras antes descritas como variables independientes y como variable de respuesta a cada una de las cuatro propiedades mecánicas, fuerza a la compresión ($f_c'^*$), módulo de elasticidad (ME^*), relación de Poisson (ν) y esfuerzo residual a la flexión ($f_{e,3}$). De los cuatro modelos que se estimaron, los correspondientes a la compresión, módulo de elasticidad y el esfuerzo residual a la flexión, presentan un buen ajuste. Para la relación de Poisson no fue posible estimar el modelo debido que, existe una amplia variabilidad en las muestras.

Para comprobar la influencia de cada variable en el modelo, se emplea el análisis de varianza en cada una de ellas. En la Tabla 10 se presentan todas las variables empleadas para la estimación del modelo a compresión, así como el coeficiente, error estándar (*SE*), valor *t* y el valor *p* de cada una de ellas. Como no todas las variables se ajustan, debido al valor *p* establecido, se reduce la estimación del modelo al descartar las variables con menor influencia, este nuevo ajuste se presenta en la Tabla 11, en donde se presentan solamente las variables con mayor influencia y sus valores estadísticos correspondientes.

Tabla 10. Modelos de regresión lineal múltiple completo para el esfuerzo a compresión.

Variable	Coefficiente β_k	SE	t	Valor p
<i>M</i>	31.77	1.786	17.791	$2 \times 10^{-16}***$
l_f/d_f	-0.01129	0.002452	-4.606	$1.89 \times 10^{-5}***$
<i>Tensión</i>	0.0007496	0.002183	-0.343	0.7325
<i>E</i>	0.00002514	0.000013	-1.872	0.06554
<i>D_f</i>	0.006568	0.04821	1.362	0.1776
δ	0.004153	0.000410	10.106	$4.18 \times 10^{-15}***$
<i>V_f</i>	-1072	286.6	-3.74	0.000383***
<i>IR</i>	10.11	1.886	5.363	$1.09 \times 10^{-6}***$

Tabla 11. Modelos de regresión lineal múltiple reducidos para el esfuerzo a compresión.

Variable	Coefficiente β_k	SE	t	Valor p
<i>M</i>	31.38	1.359	23.084	$2 \times 10^{-16}***$
l_f/d_f	-0.01097	0.002251	-4.875	$6.85 \times 10^{-6}***$
<i>E</i>	-0.0000248	0.0000133	-1.867	0.0662*
<i>D_f</i>	0.07193	0.04435	1.622	0.1095
δ	0.004017	0.0001071	37.498	$2 \times 10^{-16}***$
<i>V_f</i>	-1058	281.7	-3.755	0.000362***
<i>IR</i>	9.848	1.707	5.768	$2.15 \times 10^{-7}***$

En la Tabla 12 se tiene el análisis para el modelo a compresión con un valor F de 2649.16, como $F \gg 0$, por lo que se rechaza la hipótesis H_0 , es decir, se confirma que por lo menos una de las variables de regresión contribuye significativamente al modelo.

Tabla 12. Análisis de varianza para el modelo a compresión.

Fuente	g.l.	SS	MS	F
Regresión	7	72081.16	10297.31	2649.16
Error	67	260.43	3.89	
Total	74	72341.59		

A continuación, se representa por medio de gráficas la relación entre los valores predichos y sus valores residuales del modelo a compresión. En la Figura 20A, se presenta un diagrama de dispersión la no linealidad entre los valores predichos y sus valores residuales, además de presentar una varianza uniforme. En la Figura 20B, por medio de un histograma, se aprecia una distribución normal de los valores residuales. Y en la Figura 20C, en un diagrama de dispersión, se muestra la independencia de cada una de las muestras entre sí, es decir, no hay una correlación entre las muestras y su tiempo de realización.

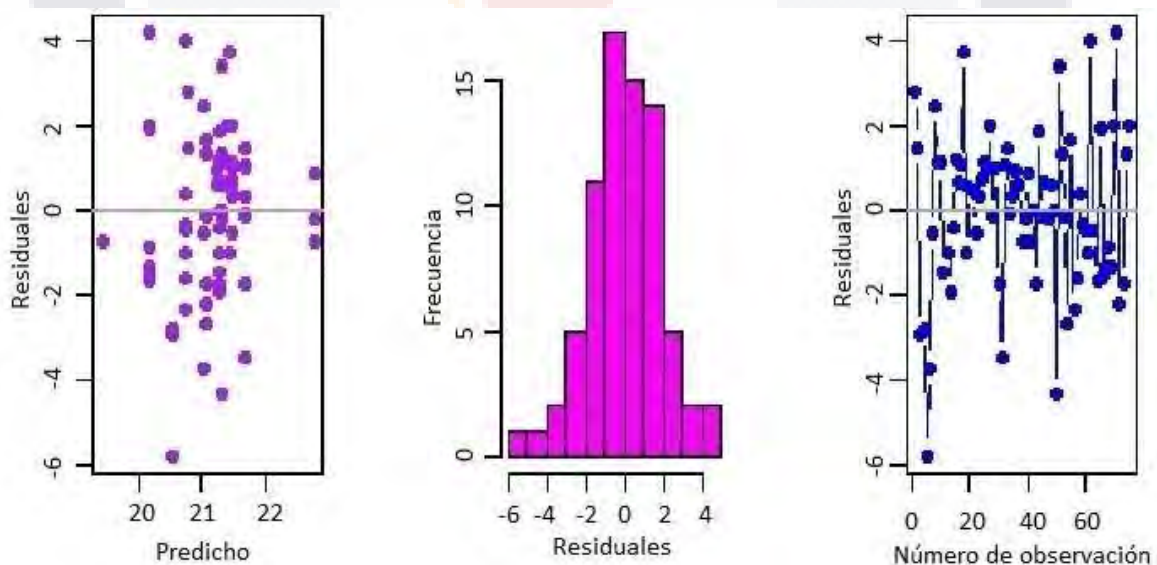


Figura 20. Análisis de valores predichos y valores residuales en modelo a resistencia a compresión. A) Diagrama de linealidad y varianza. B) Diagrama de normalidad. C) Diagrama de independencia.

En la tabla 13 se presentan las variables empleadas para la estimación del modelo del módulo de elasticidad, así como sus coeficientes probabilísticos. En la Tabla 14, se presentan solamente las variables con mejor ajuste en el modelo y sus valores estadísticos correspondientes.

Tabla 13. Modelos de regresión lineal múltiple completo para el módulo de elasticidad.

Variable	Coefficiente β_k	SE	T	Valor p
<i>M</i>	42.48	1.912	22.225	$2 \times 10^{-16}***$
l_f/d_f	-0.01809	0.002625	-6.892	$2.36 \times 10^{-9}***$
<i>Tensión</i>	0.001383	0.002337	0.592	0.556
<i>E</i>	0.00001791	0.0000143	1.246	0.2172
<i>D_f</i>	0.1206	0.05161	2.337	0.0225
δ	0.005926	0.0004399	13.470	$2 \times 10^{-16}***$
<i>V_f</i>	-0.001524	306.8	-4.966	$4.98 \times 10^{-6}***$
<i>IR</i>	15.69	2.019	7.773	$6.17 \times 10^{-11}***$

Tabla 14. Modelos de regresión lineal múltiple reducidos para el módulo de elasticidad.

Variable	Coefficiente β_k	SE	T	Valor p
<i>M</i>	44.53	0.9767	45.595	$2 \times 10^{-16}***$
l_f/d_f	-0.01857	0.00242	-7.672	$7.95 \times 10^{-11}***$
<i>D_f</i>	0.1027	0.04744	2.165	0.0338*
δ	0.006176	0.0001153	53.576	$2 \times 10^{-16}***$
<i>V_f</i>	-1501	300.3	-4.997	$4.22 \times 10^{-6}***$
<i>IR</i>	16.21	1.837	8.823	$6.27 \times 10^{-13}***$

En la Tabla 15 se tiene el análisis para el modelo del módulo de elasticidad con un valor F de 5953.58, como $F \gg 0$, se rechaza la hipótesis H_0 , es decir, que se confirma que por lo menos una de las variables de regresión contribuye significativamente al modelo.

Tabla 15. Análisis de varianza para el modelo al módulo de elasticidad.

Fuente	g.l.	SS	MS	F
Regresión	6	160610.43	26768.41	5953.58
Error	68	305.74	4.50	
Total	74	160916.17		

Se presentan mediante gráficas la relación entre los valores predichos y sus valores residuales del modelo al módulo de elasticidad. En la Figura 21A, se presenta un diagrama de dispersión la no linealidad entre los valores predichos y sus valores residuales, además de presentar una varianza uniforme. En la Figura 21B, por medio de un histograma, se aprecia una distribución normal de los valores residuales. Y en la Figura 21C, en un diagrama de dispersión, se muestra la independencia de cada una de las muestras entre sí, es decir, no hay una correlación entre las muestras y su tiempo de realización.

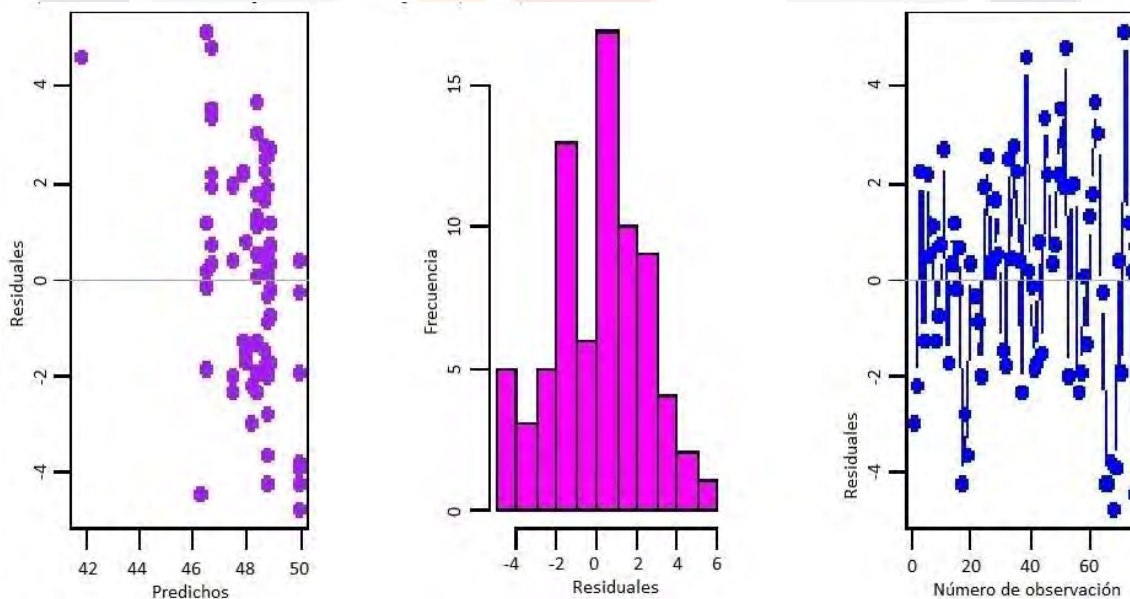


Figura 21. Análisis de valores predichos y valores residuales en modelo al módulo de elasticidad. A) Diagrama de linealidad y varianza. B) Diagrama de normalidad. C) Diagrama de independencia.

En la tabla 16 se presentan las variables empleadas para la estimación del modelo del esfuerzo residual a tensión.

Tabla 16. Modelos de regresión lineal múltiple completo para el esfuerzo residual a tensión.

Variable	Coefficiente β_k	SE	T	Valor p
M	51.69	8.831	5.854	$5.85 \times 10^{-8}****$
l_f/d_f	-0.1744	0.1226	-1.442	0.1581
D_f	0.2208	0.1955	1.129	0.2615
δ	0.007131	0.000747	9.547	$1.17 \times 10^{-15}****$
V_f	-0.005993	362.2	-1.655	0.1012
IR	93.05	44.65	2.084	0.0397***

En la Tabla 17 se tiene el análisis para el modelo al esfuerzo residual a tensión con un valor F de 614.82, como $F \gg 0$, se rechaza la hipótesis H_0 , es decir, que se confirma que por lo menos una de las variables de regresión contribuye significativamente al modelo, en los tres modelos se comprueba que el modelo tiene buen ajuste a los valores obtenidos.

Tabla 17. Análisis de varianza para el modelo al esfuerzo residual a tensión.

Fuente	g.l.	SS	MS	F
Regresión	6	249311.47	41551.91	614.82
Error	68	4595.72	67.58	
Total	74	253907.19		

Semejante que los modelos anteriores, se presenta un diagrama de dispersión la no linealidad entre los valores predichos y sus valores residuales (Figura 22A), además de presentar una varianza uniforme. En la Figura 22B, por medio de un histograma, se aprecia una distribución normal de los valores residuales. Y en la Figura 21C, en un diagrama de dispersión, se muestra la independencia de cada una de las muestras entre sí, es decir, no hay una correlación entre las muestras y su tiempo de realización.

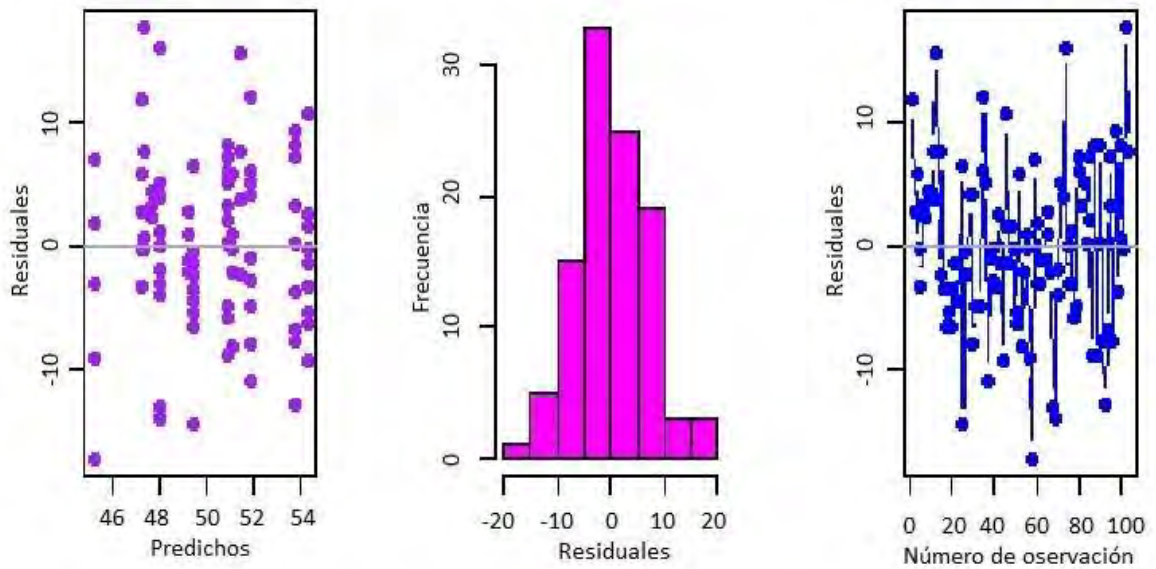


Figura 22. Análisis de valores predichos y valores residuales en modelo al esfuerzo residual a tensión. A) Diagrama de linealidad y varianza. B) Diagrama de normalidad. C) Diagrama de independencia.

Para la estimación de los modelos se deben considerar los siguientes criterios:

1. Se consideran todas las propiedades de la fibra para estimar el modelo, ya sean variables independientes o dependientes de otras variables. Se plantea que cada una de ellas aporta de manera individual al sistema, por lo que, la aportación de las variables dependiente es debido a la interacción de las propiedades que la integran,
2. Las variables son significativas en el modelo si su *p valor* es igual o menor a 0.05, sino es así, no se considera la variable para el desarrollo del modelo, y
3. Si una variable depende de otra variable (y cumple con el criterio anterior), se debe incluir en el sistema tanto las variables independientes como la variable dependiente, debido que el modelo de regresión lineal múltiple consiste en la interacción entre las mismas variables y su aportación individual al sistema.

5.3 Análisis de Varianza (ANOVA)

Este análisis también emplea las mismas variables que en el modelo de regresión lineal múltiple, y se evalúan de la misma manera con el valor *p*. En la Figura 23 se presenta gráficamente la interacción entre las medias de grupos de fibras para la relación de Poisson, los especímenes de concreto simple se presentan de color negro, las fibras de acero son

representadas de color azul y las fibras de polipropileno de color rojo. En el diagrama se simboliza con una línea magenta la media de cada uno de los grupos, teniendo una amplia variedad entre ellos, volviendo complicado el planteamiento de una razón numérica común entre los diversos grupos. La variable con mayor impacto es el índice de refuerzo con un valor p de 0.0104 el cual, aunque se acepta dentro del rango de influencia, al ser la única variable, es inconveniente el planteamiento de un modelo numérico.

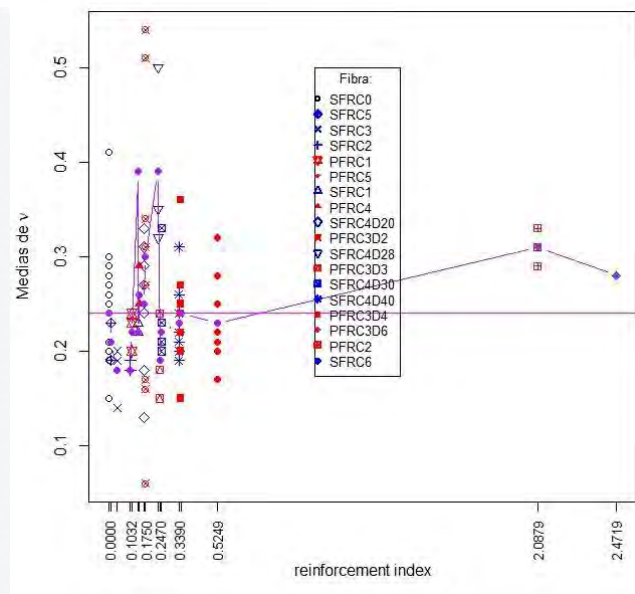


Figura 23. Análisis de medias para la relación de Poisson.

5.4 Desarrollo de Modelos Constitutivos

Para evaluar la confiabilidad de los modelos desarrollados, se comparará con los modelos bibliográficos y posteriormente se volverán a evaluar con otra base de datos, los cuales no se emplearon para el desarrollo de los modelos estimados. Los resultados de los modelos y su error relativo porcentual ponderado de la primera etapa se adjuntan en el anexo E.

5.4.1 Modelo Constitutivo del Esfuerzo a Compresión

Para este primer modelo, se obtuvo una ecuación lineal con siete variables independientes (Ecuación 5.1). El modelo cuenta con un error relativo porcentual ponderado

de 4.74 % y un coeficiente de determinación de 0.9982, es decir, las variables independientes explican el 99.82 % de la variabilidad de los valores observados o, el esfuerzo a compresión es explicado a un 99.82 %, por las siguientes propiedades de la fibra: tipo de material, la relación l_f/d_f , el módulo de Young, la dosificación, la densidad, el contenido de fibra y el índice de refuerzo.

$$f_c^{I*} = 31.38M - 0.01097 \frac{l_f}{d_f} - 0.00002486E + 0.07193D_f + 0.004017\delta - 1058V_f + 9.848IR$$

Ec. 5.1

El valor de M (tipo de material) puede tomar el valor 0 o 1, siendo el valor de 0 si es fibra de acero y toma el valor de 1 si es fibra de polipropileno. Se compara el modelo desarrollado con los diversos modelos presentados en la bibliografía, considerando la evaluación por tipo de material (acero o polipropileno) por separado. En la Tabla 18 se presentan los errores relativos porcentuales ponderados para las fibras de acero de cada uno de los modelos empleados, y en la Tabla 19 se presentan los errores relativos porcentuales ponderados para las fibras de polipropileno.

Tabla 18. Evaluación de los modelos a compresión en concreto con SFR.

Propiedad	Modelos				
	Estimado	Dhakai	Yazici	Xu	Liang
f'c	4.85 %	5.46 %	76.21 %	5.68 %	24.25 %

Tabla 19. Evaluación de los modelos a compresión en concreto con PFR.

Propiedad	Modelo				
	Estimado	Dhakai	Yazici	Xu	Liang
f'c	4.63 %	6.01 %	96.40 %	12.51 %	65.01 %

En la Figura 2A y 24C se compararon los resultados de los diversos modelos (de fibras de acero y polipropileno, respectivamente) con respecto a los resultados experimentales mediante gráficas de líneas, y en la Figura 25A y 25C se analizaron los

modelos de fibras de acero y polipropileno, respectivamente, con gráficas de caja y brazo (caja y bigote), en donde se observa la relación entre los resultados del modelo sobre lo observado. En las Figuras 24B, 24D, 25B y 25D, se descartan aquellos modelos con resultados irregulares (con errores mayores al 20 %) para facilitar su análisis.

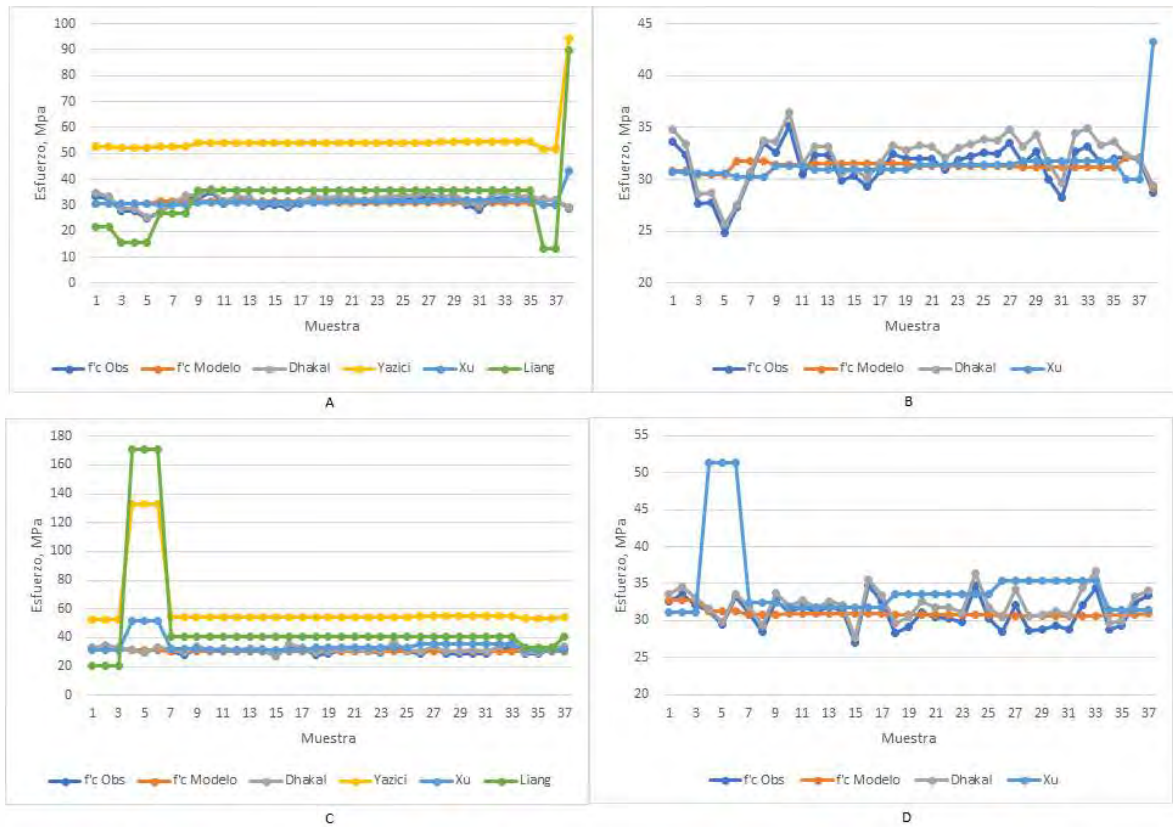


Figura 24. Comparación de modelos de compresión. A) Modelos de SFR. B) Modelos de SFR con $\epsilon_{rm} < 20\%$. C) Modelos de PFR. D) Modelos de PFR con $\epsilon_{rm} < 20\%$.

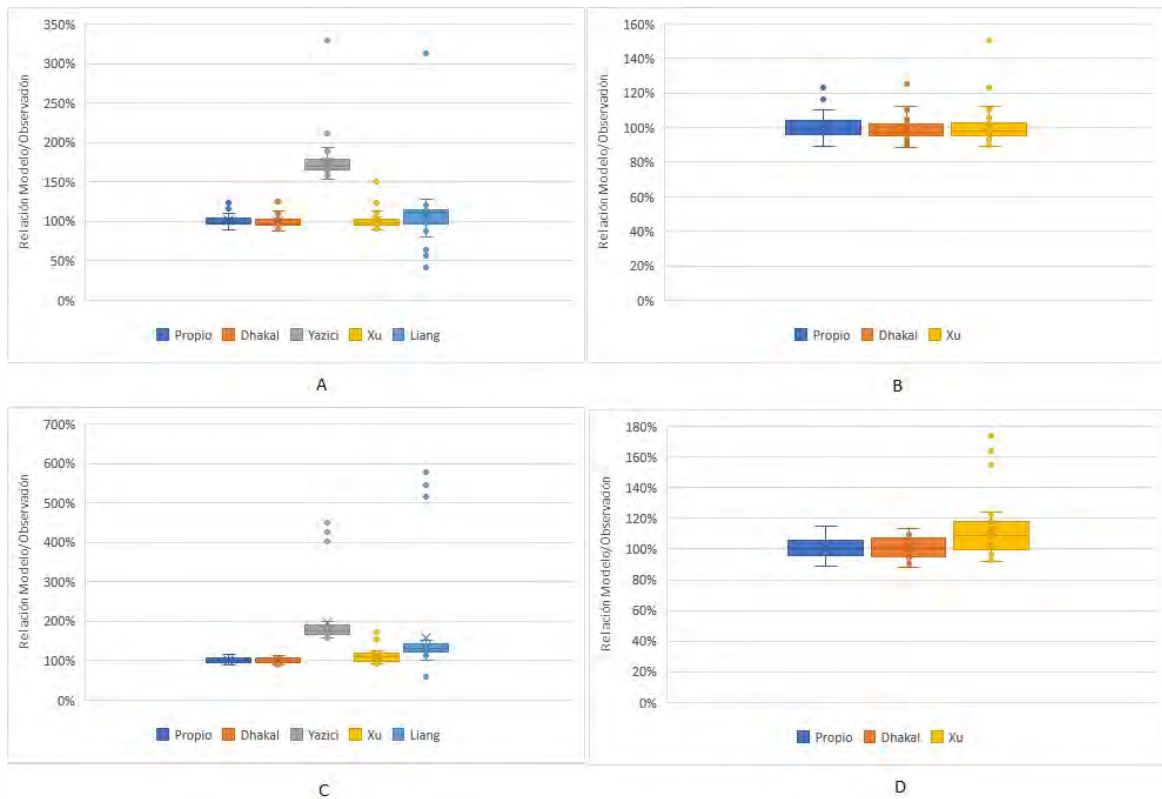


Figura 25. Análisis de dispersión de datos en los modelos de compresión. A) Modelos de SFR. B) Modelos de SFR con $\epsilon_{rm} < 20\%$. C) Modelos de PFR. D) Modelos de PFR con $\epsilon_{rm} < 20\%$.

5.4.2 Modelo Constitutivo del Módulo de Elasticidad

Para este modelo se obtuvo una ecuación lineal con seis variables independientes (Ecuación 5.2). Este modelo tiene un error relativo porcentual ponderado de 3.42 % y un coeficiente de determinación de 0.9982, es decir, las variables independientes explican el 99.82 % de la variabilidad de los valores observados o, el módulo de elasticidad es explicado a un 99.82 %, por las siguientes propiedades de la fibra: tipo de material, la relación l_f/d_f , la dosificación, la densidad, el contenido de fibra y el índice de refuerzo.

$$ME^* = 44.53M - 0.01857 \frac{l_f}{d_f} + 0.1027D_f + 0.006176\delta - 1051V_f + 16.21IR \quad Ec. 5.2$$

El valor de M (tipo de material) puede tomar el valor 0 o 1, siendo el valor de 0 si es fibra de acero y toma el valor de 1 si es fibra de polipropileno. En la Tabla 20 se compara el error relativo del modelo desarrollado junto con el modelo de Gao et al. (1997) con respecto a los resultados de laboratorio, de acuerdo al material de la fibra. En la Figura 26A se compararon los resultados de los dos modelos con respecto a los resultados observados para fibras de acero y en la Figura 26B, es la comparación de los modelos para las fibras de polipropileno. En la Figura 27 se observa la relación entre los resultados del modelo sobre lo observado empelando gráficas de caja y brazo para las fibras de acero y polipropileno (Figuras 27A y 27B, respectivamente).

Tabla 20. Error relativo de los modelos del módulo de elasticidad.

Propiedad	SFR		PFR	
	Estimado	Gao	Estimado	Gao
ME	3.15 %	5.36 %	3.70 %	9.64 %

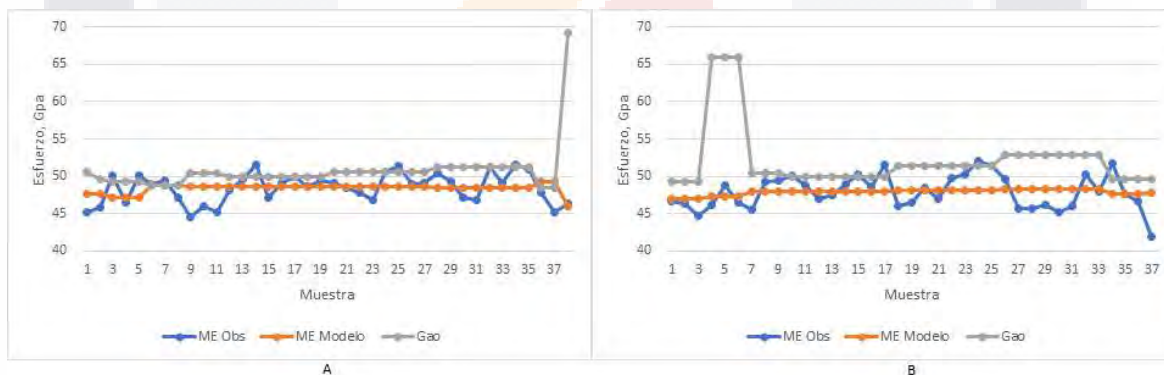


Figura 26. Comparación de modelos del módulo de elasticidad. A) Modelos de SFR. B) Modelos de PFR.

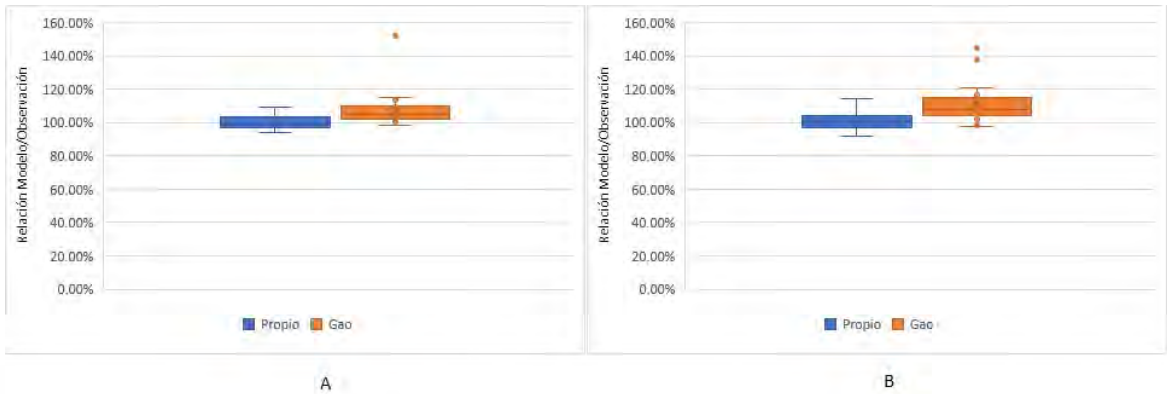


Figura 27. Análisis de dispersión de datos en los modelos del módulo de elasticidad. A) Modelos de SFR. B) Modelos de PFR.

5.4.3 Modelo Constitutivo del Esfuerzo Residual a Tensión

Para este modelo se obtuvo una ecuación lineal con seis variables independientes (Ecuación 5.3). Este modelo tiene un error relativo porcentual ponderado de 10.92 % y un coeficiente de determinación de 0.983, es decir, las variables independientes explican el 98.30 % de la variabilidad de los valores observados o, el esfuerzo residual a tensión es explicado a un 98.30 %, por las siguientes propiedades de la fibra: tipo de material, la relación l_f/d_f , la dosificación, la densidad, el contenido de fibra y el índice de refuerzo.

$$f_{e,3}^* = 51.69M - 0.1744 \frac{l_f}{d_f} + 0.2208D_f + 0.007131\delta - 5993V_f + 93.05IR \quad Ec. 5.3$$

El valor de M (tipo de material) puede tomar el valor 0 o 1, siendo el valor de 0 si es fibra de acero y toma el valor de 1 si es fibra de polipropileno. Existe un error relativo ponderado de 9.54 % entre el modelo y los valores obtenidos en laboratorio para fibras de acero, y un error relativo ponderado de 12.53 % en el caso del modelo para fibras de polipropileno. En la Figura 28A se compararon los resultados del modelo con respecto a los resultados observados para fibras de acero y en la Figura 28B, es la comparación del modelo para las fibras de polipropileno. En la Figura 29 se observa la relación entre los resultados

del modelo sobre lo observado empleando gráficas de caja y brazo para las fibras de acero y polipropileno (Figuras 29A y 29B, respectivamente).

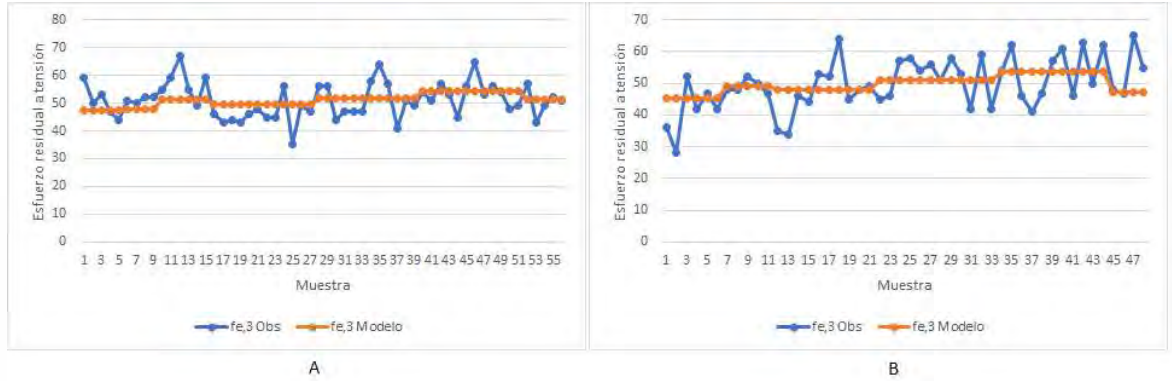


Figura 28. Comparación del modelo del esfuerzo residual a tensión. A) Modelo de SFR. B) Modelo de PFR.

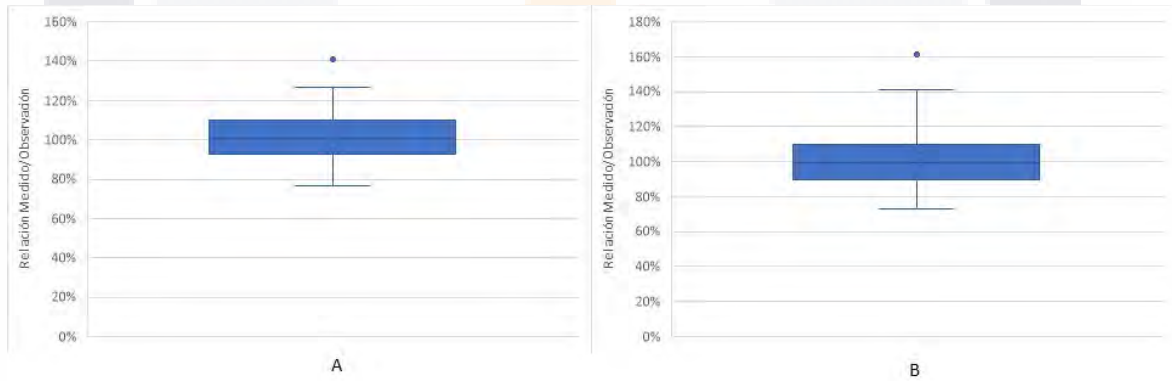


Figura 29. Análisis de dispersión de datos en el modelo del esfuerzo residual a tensión. A) Modelo de SFR. B) Modelo de PFR.

En la Tabla 21, se presentan la desviación estándar (S) y la varianza (S^2) de los valores observados y los valores obtenidos de los modelos. En la Tabla 22 se presentan el porcentaje de los especímenes que tienen valores de ϵ_{rm} menor al 1 %, menor al 5 %, menor al 10 % y valores mayores al 10 %.

Tabla 21. Parámetros estadísticos.

Propiedad	Dato	S	S ²
f_c	Observado	2.03	4.12
	Modelo	0.59	0.34
ME	Observado	2.13	4.54
	Modelo	0.64	0.42
$f_{e,3}$	Observado	7.18	51.51
	Modelo	2.64	6.96

Tabla 22. Porcentaje de especímenes contra ϵ_{rm} .

Modelo	$\epsilon_{rm} \leq 1 \%$	$\epsilon_{rm} \leq 5 \%$	$\epsilon_{rm} \leq 10 \%$	$\epsilon_{rm} > 10 \%$
f_c	12 %	62.67 %	89.33 %	10.67 %
ME	20 %	76 %	98.67 %	1.33 %
$f_{e,3}$	8.65 %	23.08 %	40.38 %	31.73 %

5.4.4 Evaluación con Base de Datos

Es importante conocer la efectividad de los modelos propuestos, por ello se propone evaluarlos con especímenes independientes a las pruebas de laboratorio visto en el Capítulo 4. Para la selección de una nueva base de datos, se debió seleccionar aquellos estudios que consideran las mismas variables con las que se estimaron los modelos de esta investigación.

La base de datos a emplear fue recopilada por Lantsoght (2019), más los resultados de las pruebas de los mismo modelos lineales bibliográficos, obteniendo una muestra total de 612 datos para pruebas a compresión (555 para SFR y 57 para PFR), y 133 datos para el módulo de elasticidad (90 SFR y 43 PFR). En la Tabla 23 se presentan los errores relativos para los diversos modelos lineales a compresión para fibras de acero, mientras que en la Tabla 24 se presentan los errores relativos para las fibras de polipropileno. En la Tabla 25 se presentan los errores relativos al módulo de elasticidad entre el modelo estimado y el modelo Gao, tanto para las fibras de acero como para las fibras de polipropileno.

Tabla 23. Evaluación de modelos a compresión con base de dato para SFR

Modelo	Estimado	Dhakal	Yazici	Xu	Liang
f'_c	31.13 %	19.83 %	51.71 %	26.48 %	32.44 %

Tabla 24. Evaluación de modelos a compresión con base de dato para PFR

Modelo	Estimado	Dhakal	Yazici	Xu	Liang
f'_c	18.88 %	7.40 %	81.22 %	52.86 %	61.88 %

Tabla 25. Evaluación de modelos empleando base de dato para módulo de elasticidad.

Modelo	SFR		PFR	
	Estimado	Gao	Estimado	Gao
ME	38.58 %	13.72 %	25.92 %	10.80 %

5.4.5 Modelo en ABAQUS

Para el modelo en software se emplea como ejemplo un espécimen de concreto reforzado con fibras de acero (SFR04); los grupos restantes se resumen más adelante en este apartado. Los modelos consisten en la simulación de una prueba a compresión de un cilindro y una prueba a flexión de una viga de concreto reforzado con fibras. El modelo del cilindro tiene como dimensiones: 15 cm de diámetro y 30 cm de altura. El modelo de la viga tiene como dimensiones 15 cm de ancho y profundidad, con una longitud de 50 cm. El análisis requiere integrar los valores elásticos y plásticos del concreto, como se describe en la Ecuación 2.34; para el comportamiento elástico se estableció un módulo de Young de 44509 MPa y una relación de Poisson de 0.35, dichos valores son obtenidos previamente del ensaye en laboratorio. Mientras que, para el comportamiento plástico, se opta por la opción del modelo por daño plástico, el cual se debe calcular el comportamiento a compresión y a tensión. Para el caso del comportamiento por daño a compresión, se requiere los valores esfuerzo – deformación en su etapa elástica y plástica, para la proyección de la etapa plástica del concreto se emplea la metodología de E. Hognestad et al. (1955). En la Figura 30 se presenta la curva esfuerzo – deformación completa de la muestra SFR04.

Del comportamiento a compresión, se calculó el parámetro de daño ocasionado en el estado plástico (Ecuación 5.4), así como su deformación inelástica (Ecuación 5.5), deformación elástica (Ecuación 5.6) y plástica (Ecuación 5.7). Se debe asegurar que la deformación plástica siempre sea positiva y siempre incremente junto a la deformación inelástica.

Para el comportamiento a tensión, se emplean las mismas ecuaciones que a compresión solamente cambia el termino deformación inelástica a deformación de agrietamiento (ϵ^{ck}_t). Los parámetros de deformación y de daño a compresión y a tensión, requeridos para ABAQUS, se encuentran en las tablas del anexo F.

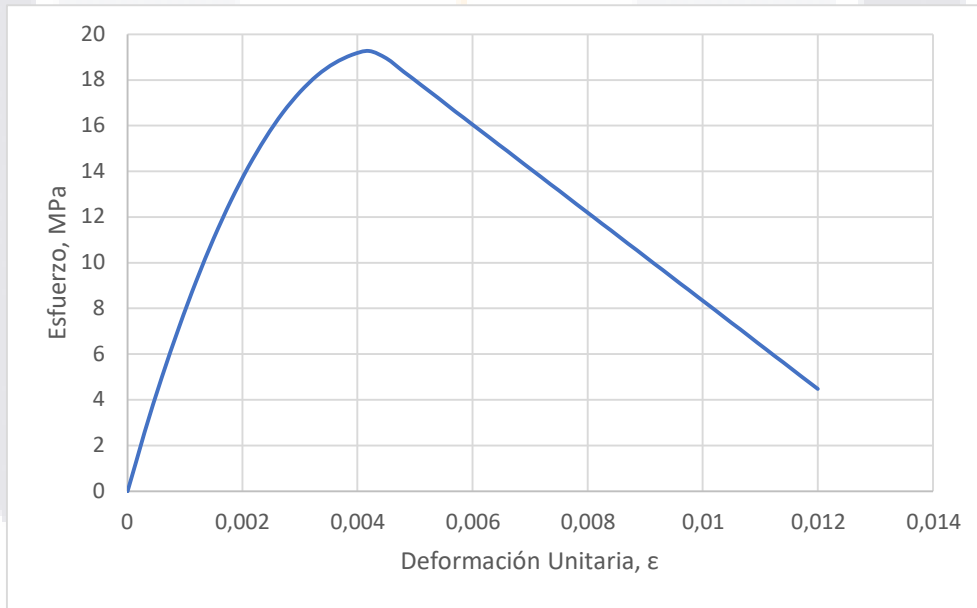


Figura 30. Diagrama esfuerzo – deformación de un espécimen de concreto (SFR04).

$$d_{c,t} = 1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_{cu}}, \tag{Ec. 5.4}$$

$$\epsilon_{c,t}^{in,ck} = \epsilon_{c,t} - \epsilon_{0c,0t}^{el}, \tag{Ec. 5.5}$$

$$\epsilon_{0c,0t}^{el} = \frac{\sigma_{c,t}}{E}, \tag{Ec. 5.6}$$

$$\epsilon_{c,t}^{pl} = \epsilon_{c,t}^{in,ck} - \frac{d_{c,t}}{(1 - d_{c,t})} \frac{\sigma_{c,t}}{E}. \tag{Ec. 5.7}$$

En la Figura 31 se exhibe el modelo del cilindro elaborado en ABAQUS, así como su mallado. En la Figura 32 se presenta un corte del espécimen, en donde se obtiene un esfuerzo a compresión de 35.97 MPa, el cual al compararlo con el valor obtenido experimentalmente de 33.46 MPa, se tiene un error relativo de 7.50 %.

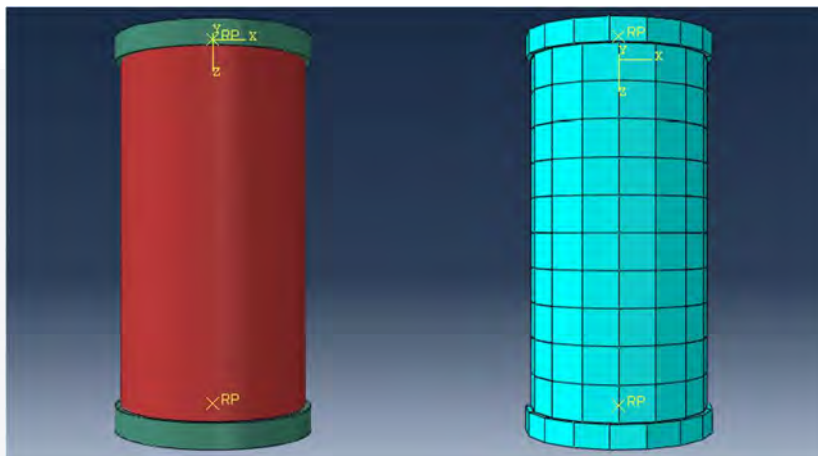


Figura 31. Modelo de cilindro de concreto en ABAQUS.

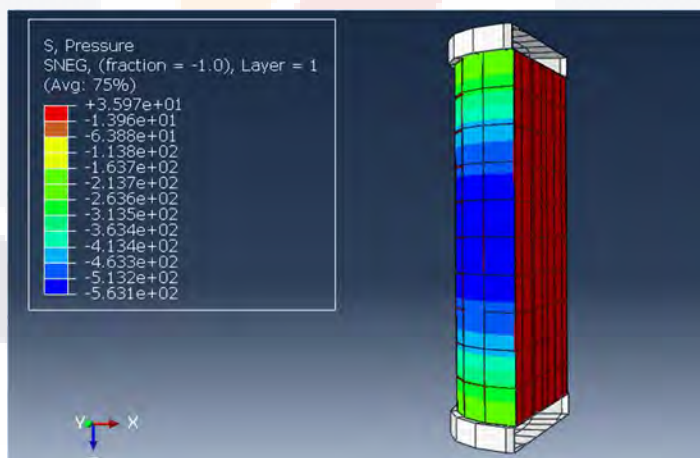


Figura 32. Modelo de presión de ABAQUS.

Además de este parámetro, ABAQUS cuenta con una amplia librería de variables a calcular, como es el desplazamiento de nodos (cambio de volumen, Figura 33A), daño por compresión (Figura 33B), deformación elástica (Figura 33C) y plástica (Figura 33D), entre otros.

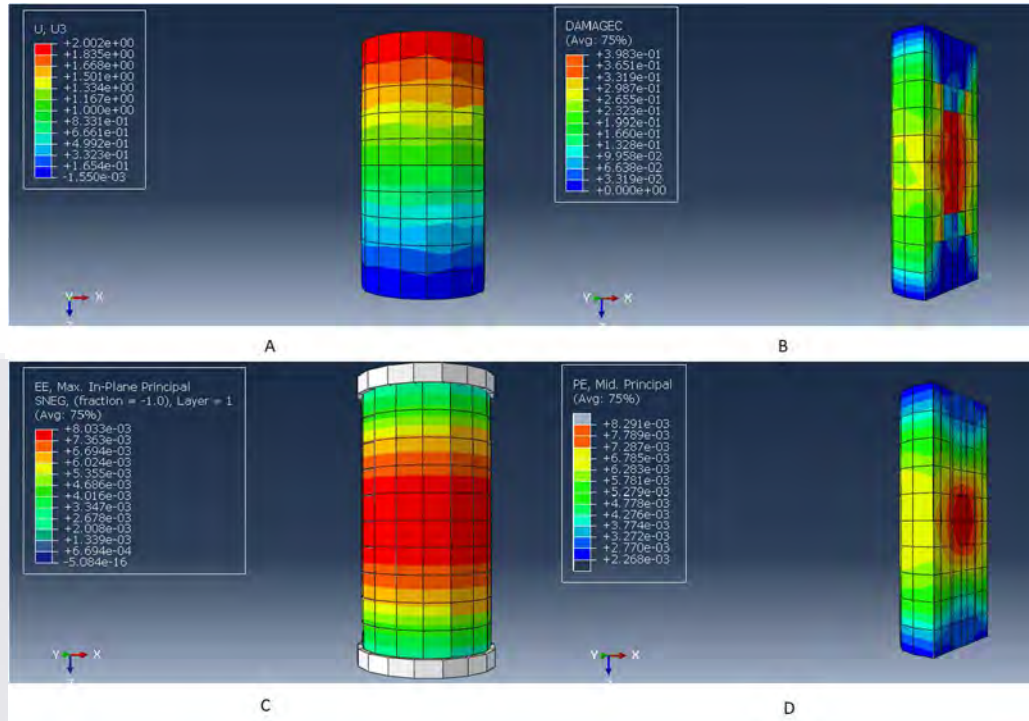


Figura 33. Análisis de resultados en ABAQUS. A) Desplazamiento de nodos. B) Daño por compresión. C) Deformación elástica. D) Deformación plástica.

Para el caso del modelo prismático, se emplean los mismos parámetros que el modelo cilíndrico. Se recrea la muestra prismática, Figura 34, y se realiza la modelación de la prueba a flexión a cuatro puntos de carga.

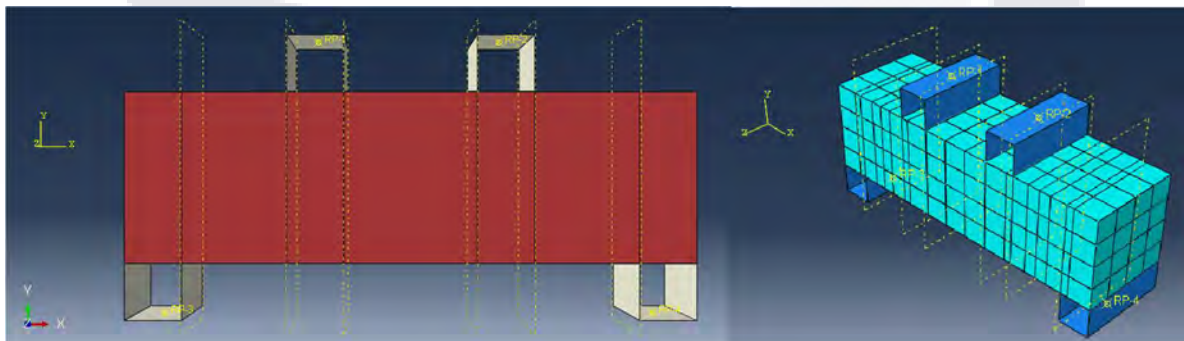


Figura 34. Modelo de viga de concreto reforzado con fibras en ABAQUS.

En este modelo, los dos apoyos superiores aplican un desplazamiento con dirección hacia abajo sobre la viga (Figura 35), provocando que la viga se flexione debido que los apoyos inferiores son fijos. Igual que el modelo cilíndrico, se presentan algunos resultados obtenidos del programa ABAQUS. En la Figura 36 se presentan el modelo esfuerzo a compresión del prisma, en la Figura 37 se observa el modelo a esfuerzo a tensión y en la Figura 38 se presenta el modelo de daño a tensión.

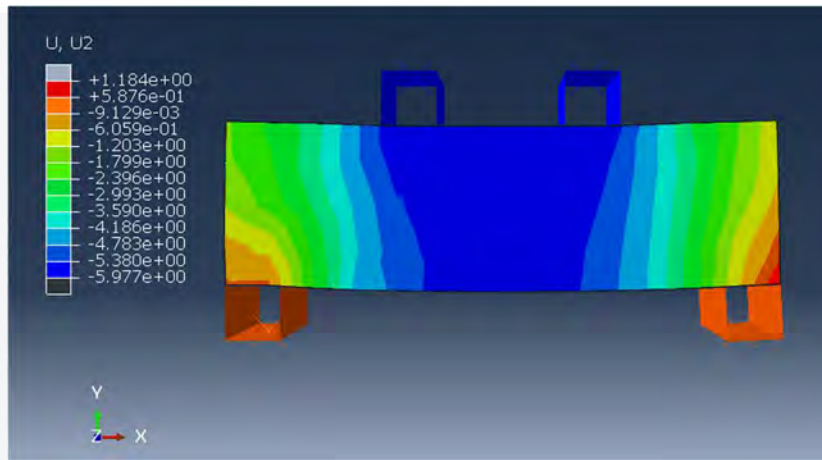


Figura 35. Modelo de desplazamiento de nodos.

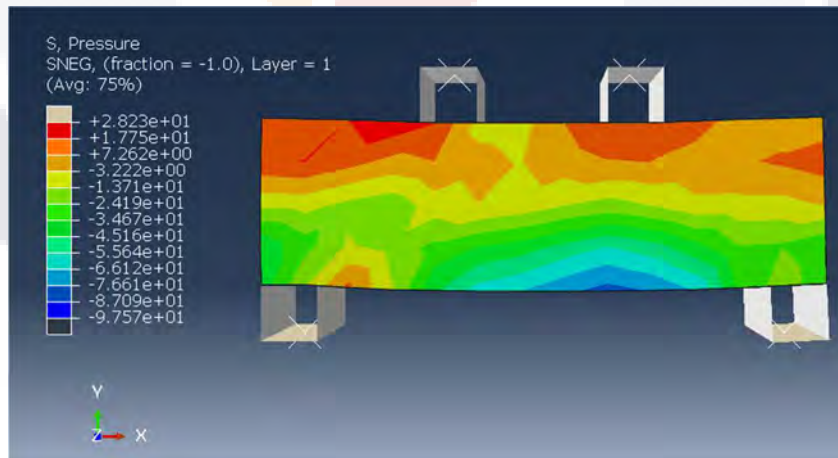


Figura 36. Modelo de esfuerzos a compresión.

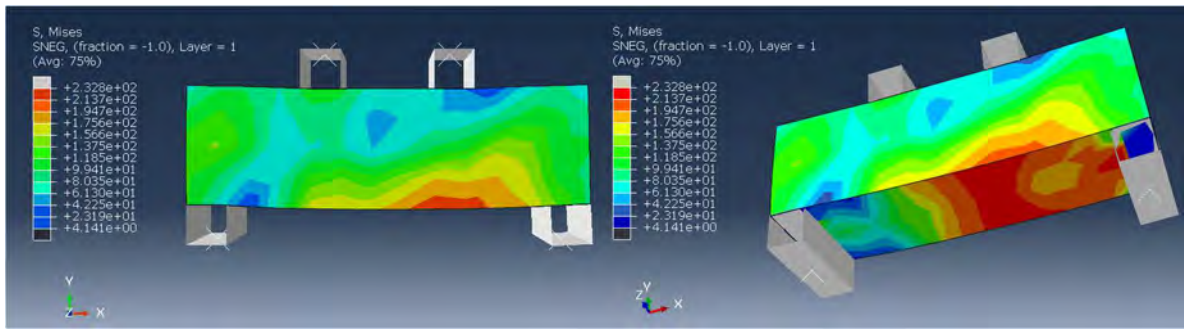


Figura 37. Modelo de esfuerzos a tensión.

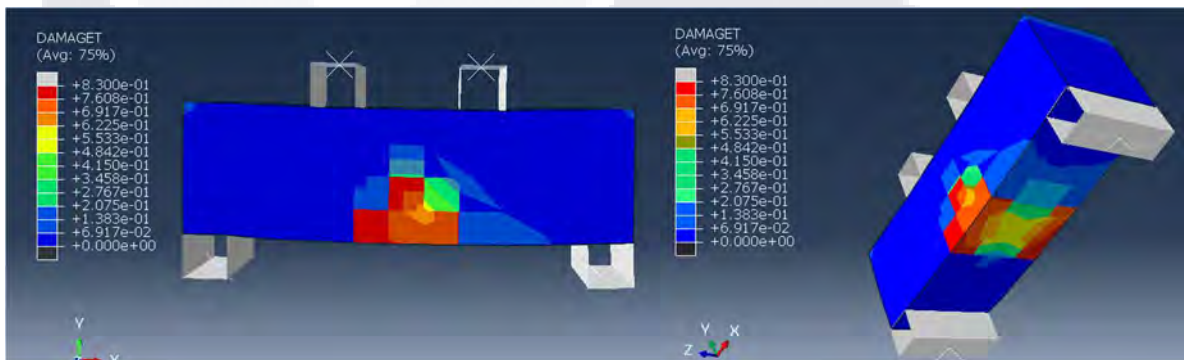


Figura 38. Modelo de daño a tensión.

En la Tabla 26 se presentan los resultados obtenidos para los diferentes grupos de concreto reforzado con fibras, comparando la diferencia existente entre el modelo mecánico (*MM*) desarrollado en ABAQUS, los valores de laboratorio (*Lab*) y los valores obtenidos con el modelo lineal (*ML*) desarrollado.

Tabla 26. Cuadro comparativo entre el modelo mecánico y el modelo lineal.

Grupo	Resistencia a compresión (f'_c , MPa)			Diferencia (%)		
	Laboratorio	Modelo Lineal	Modelo Mecánico	Lab vs ML	Lab vs MM	ML/MM
SFR01	31.44	30.80	34.68	2.03 %	10.29 %	0.89
SFR02	27.77	30.53	37.51	9.94 %	35.09 %	0.81
SFR03	27.34	31.04	34.02	13.53 %	24.42 %	0.91
SFR04	33.46	31.44	35.97	6.04 %	7.50 %	0.87
SFR08	31.85	31.23	34.72	1.63 %	9.00 %	0.90
SFR09	30.74	29.42	34.29	4.29 %	11.53 %	0.86
PFR01	32.63	32.80	34.88	0.52 %	6.91 %	0.94
PFR02	31.31	31.30	35.35	0.03 %	12.90 %	0.94
PFR03	30.98	31.08	32.67	0.32 %	5.45 %	0.95

PFR07	29.35	31.08	33.1	5.89 %	12.77 %	0.94
PFR08	33.41	31.38	38.02	6.08 %	13.80 %	0.83

5.5 Factor de Predicción

Es posible que no se cuente con todas las variables al momento de emplear un modelo constitutivo lineal, por ello, se ha planteado un factor de predicción (F_p) el cual, al ser multiplicado por la propiedad mecánica de diseño deseada, obtendrá un valor de diseño aproximado.

Los modelos lineales propuestos partieron de valores de diseño, 30 MPa para la resistencia a la compresión y 50 GPa para el módulo de elasticidad. Como se vio en el subtema 5.4, los modelos propuestos para el esfuerzo a compresión y para el módulo de elasticidad tuvieron una diferencia menor 5 % con respecto a los valores obtenidos en laboratorio, considerando un acercamiento aceptable. Identificando que, entre más sea la diferencia entre los valores de diseño, mayor es la diferencia con el valor real.

Lo anterior se puede corroborar en las Figuras 39 y 40, donde se presentan los resultados observados y de las medidas desarrolladas para toda la base de datos, tanto para la resistencia a la compresión como al módulo de elasticidad, respectivamente. En estas gráficas, la mayoría de los resultados de los modelos tienden a una línea recta, existiendo gran variabilidad a los valores con diferentes valores de diseño.

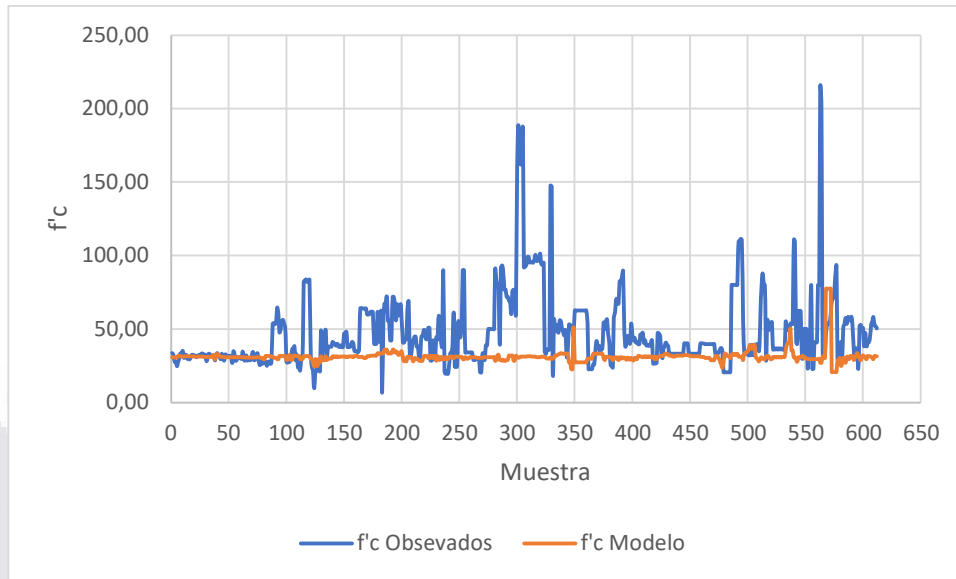


Figura 39. Comparación a la resistencia a compresión entre los valores observados y los valores obtenidos por el modelo desarrollado.

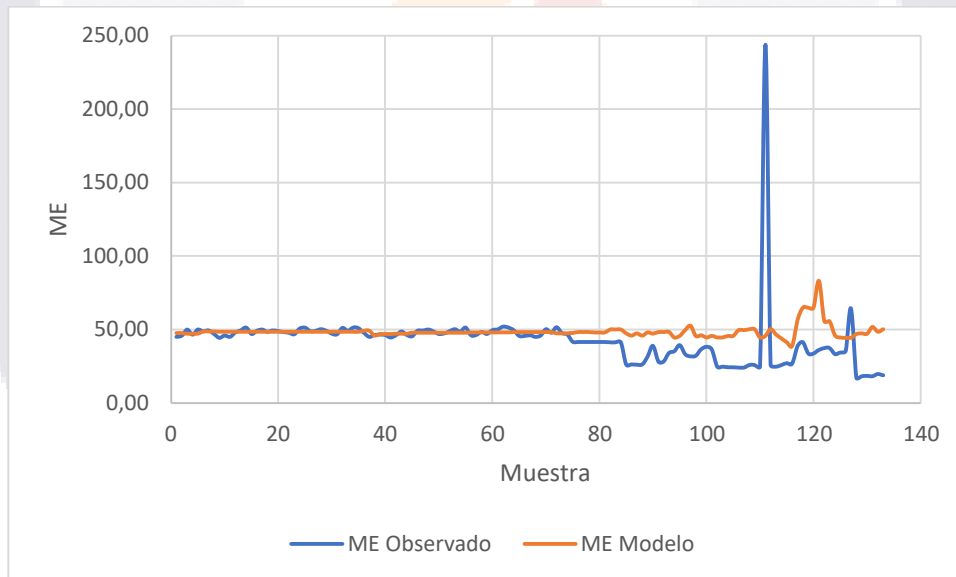


Figura 40. Comparación al módulo de elasticidad entre los valores observados y los valores obtenidos por el modelo desarrollado.

Por ello, se planteó un factor de linealidad con respecto a los valores de diseño de un concreto simple, el cual consiste en el promedio de la sumatoria de los resultados del modelo lineal propuesto (f'_c^*) sobre el valor de diseño inicial (f'_c), tal como se presenta en la Ecuación 5.8 para el caso del factor de predicción ($F_{pf'c}$) a la resistencia a la compresión. De forma

semejante se presenta en la Ecuación 5.9 para el factor de predicción ($F_{p,ME}$) para el módulo de elasticidad.

$$F_{P,f'c} = \frac{\sum_{i=0}^n \left(\frac{f'_c}{f'_c} \right)}{n} \tag{Ec. 5.8}$$

$$F_{P,ME} = \frac{\sum_{i=0}^n \left(\frac{ME^*}{E} \right)}{n} \tag{Ec. 5.9}$$

El factor obtenido, de alguna de las ecuaciones anteriores, representa el valor promedio de la propiedad mecánica estudiada por unidad de diseño deseada. Es decir, si se desea conocer una respuesta aproximada de un concreto reforzado con fibras, solo se requiere multiplicar el valor de diseño de un concreto simple por el factor de predicción. Para el caso a la resistencia a la compresión su factor de predicción es de 1.09, y 0.99 para el módulo de elasticidad. En la Tabla 27 y 28 se presentan los valores predichos para la resistencia a la compresión aplicado en la base de datos, así como los valores de los modelos bibliográficos para fibras de acero y polipropileno, respectivamente. De manera semejante, en la Tabla 29, se presentan los valores predichos para el módulo de elasticidad de las muestras de la base de datos antes utilizada.

Tabla 27. Evaluación de modelos empleando base de dato para SFR y factor de predicción.

Modelo	Estimado	Dhakai	Yazici	Xu	Liang
f'_c	18.31 %	19.83 %	51.71 %	26.48 %	32.44 %

Tabla 28. Evaluación de modelos empleando base de dato para PFR y factor de predicción.

Modelo	Estimado	Dhakai	Yazici	Xu	Liang
f'_c	9.78 %	7.40 %	81.22 %	52.86 %	61.88 %

Tabla 29. Evaluación de modelos empleando base de datos para módulo de elasticidad y factor de predicción.

Modelo	SFR		PFR	
	Estimado	Gao	Estimado	Gao
<i>ME</i>	7.40 %	13.72 %	4.40 %	10.80 %

5.6 Discusión de Resultados

En la mayoría de los casos estudiados, el uso de fibra de refuerzo en concreto mejora las respuestas mecánicas del concreto. Un caso en específico es la tenacidad, y la presencia del esfuerzo residual, físicamente se traduce que las fibras impiden la generación y propagación de fisuras o agrietamientos, aumentando así su durabilidad. Para este trabajo de investigación, el 5.45 % de los especímenes de concreto reforzado con fibras no presentan un esfuerzo residual después de su ruptura.

En el caso de resistencia a la compresión, el 70.67 % de los especímenes presentan una mejora en esta propiedad con un incremento promedio de 2.21 MPa (7.39 %) con respecto al valor de diseño. Por otro lado, se tiene que el 24 % de las muestras presentan una mejora en el módulo de elasticidad con un incremento promedio de 0.85 GPa (1.70 %) con respecto al valor de diseño. Aunque no sea significativo el mejoramiento de estas propiedades mecánicas, es información de interés que sirve de base para el estudio y diseño estructural de elementos de concreto por ello es que se plantean sus modelos constitutivos.

Los modelos desarrollados y los bibliográficos se clasifican como modelos lineales, debido que depende solamente de una ecuación de primer grado. De la estimación de los modelos de regresión lineal múltiple, se descartan las propiedades que obtienen un p -valor mayor al valor establecido (0.05), indicando que no tiene algún tipo de influencia con respecto a los resultados obtenidos en el laboratorio. La regla anterior tiene una excepción, y es cuando una variable es significativa en el modelo, pero depende de otra variable, que puede no tener un p -valor menor al establecido, pero, debe permanecer en el sistema debido a su interacción con otras variables, permitiendo que la variable dependiente influya en el modelo.

En el caso del modelo a la resistencia a la compresión, se tiene que las propiedades que influyen en el mismo modelo son: el tipo de material, la relación l_f/d_f , el módulo de Young, la dosificación, la densidad, el contenido de fibra y el índice de refuerzo. Para los grupos con fibras de acero, el modelo lineal desarrollado obtuvo mejor ajuste al tener un error relativo porcentual promedio de 4.85 %, siguiéndole el modelo propuesto por Dhakal con un valor de 5.46 %. Para el caso del concreto reforzado con fibras de polipropileno, el modelo lineal estimado obtiene también el mejor ajuste con un error relativo porcentual promedio de 4.63 %, siendo Dhakal el siguiente modelo con menor error con un valor de 6.01 %.

De los diagramas de caja y brazo para el modelo a compresión, indican que los resultados obtenidos en el modelo propuesto, Dhakal y Xu tienen poca dispersión ya que mantienen la mayoría de sus valores cercanos al 100 %, es decir, donde el valor obtenido del modelo es igual al valor obtenido en laboratorio. También se observa que el modelo propuesto es el que tiene menor cantidad de valores atípicos.

En el caso de módulo de elasticidad, las propiedades con mayor atribución al modelo son: el tipo de material, la relación l_f/d_f , la dosificación, la densidad, el contenido de fibra y el índice de refuerzo. El mejor modelo que se ajusta es el modelo lineal desarrollado con un error de 3.13 % para fibras de acero y un 3.70 % para fibras de polipropileno, mientras que el modelo lineal de Gao presenta un error de 5.36 % para el uso de fibras de acero y 9.64 % en fibras de polipropileno. En el caso de los diagramas de caja y brazo para el módulo de elasticidad, el modelo propuesto tiene mejor dispersión que el modelo de Gao, además de no contar con algún valor atípico.

Para el caso del modelo al esfuerzo residual a flexión, las propiedades con mayor atribución al modelo son: el tipo de material, la relación l_f/d_f , la dosificación, la densidad, el contenido de fibra y el índice de refuerzo. El modelo cuenta con un error de 9.54 % para fibras de acero y 12.53 % para fibras de polipropileno. No se consideran otro modelo debido que no cumplen con las variables y el planteamiento establecido.

También se obtuvo el coeficiente de determinación de cada modelo desarrollado, el cual representa la variabilidad existente entre las variables aplicadas con respecto a los valores observados. Para los modelos de resistencia a compresión y al módulo de elasticidad, se cuenta con un coeficiente de determinación mayor al 0.99, mientras que, para el modelo al esfuerzo residual, se cuenta con un coeficiente de determinación mayor al 0.98. En los tres casos el coeficiente indica un buen ajuste entre los valores predichos por los modelos y los obtenidos en el laboratorio.

Por otro lado, el modelo de la relación de Poisson no se considera adecuado para emplear, aunque cuenta con solo una variable con un coeficiente de determinación menor a 0.5, la predicción de los resultados cuenta con un índice de error muy alto. Lo anterior se debe a la amplia variabilidad de los valores obtenidos de los especímenes, volviendo complejo el planteamiento que justifique dichos resultados con la interacción de las propiedades de las fibras.

En la segunda evaluación de los modelos lineales, al emplearlos en la base de datos recopilada por Lantsoght (2019) se obtuvieron los siguientes resultados:

1. Para resistencia a la compresión usando fibras de acero, el modelo estimado obtuvo un error promedio de 31.13 %, mientras que Dhakal fue quien tuvo el mejor ajuste con un error de 19.83 %.
2. Para resistencia a la compresión usando fibras de polipropileno, el modelo estimado obtuvo un error promedio de 18.88 %, mientras que Dhakal fue quien tuvo el mejor ajuste con un error de 7.40 %.
3. Para el módulo de elasticidad usando fibras de acero, el modelo estimado obtuvo un error promedio de 38.58 %, mientras que Gao tuvo el mejor ajuste con un error de 13.72 %.
4. Para el módulo de elasticidad usando fibras de polipropileno, el modelo estimado obtuvo un error promedio de 25.92 %, mientras que Gao tuvo el mejor ajuste con un error de 10.80 %.

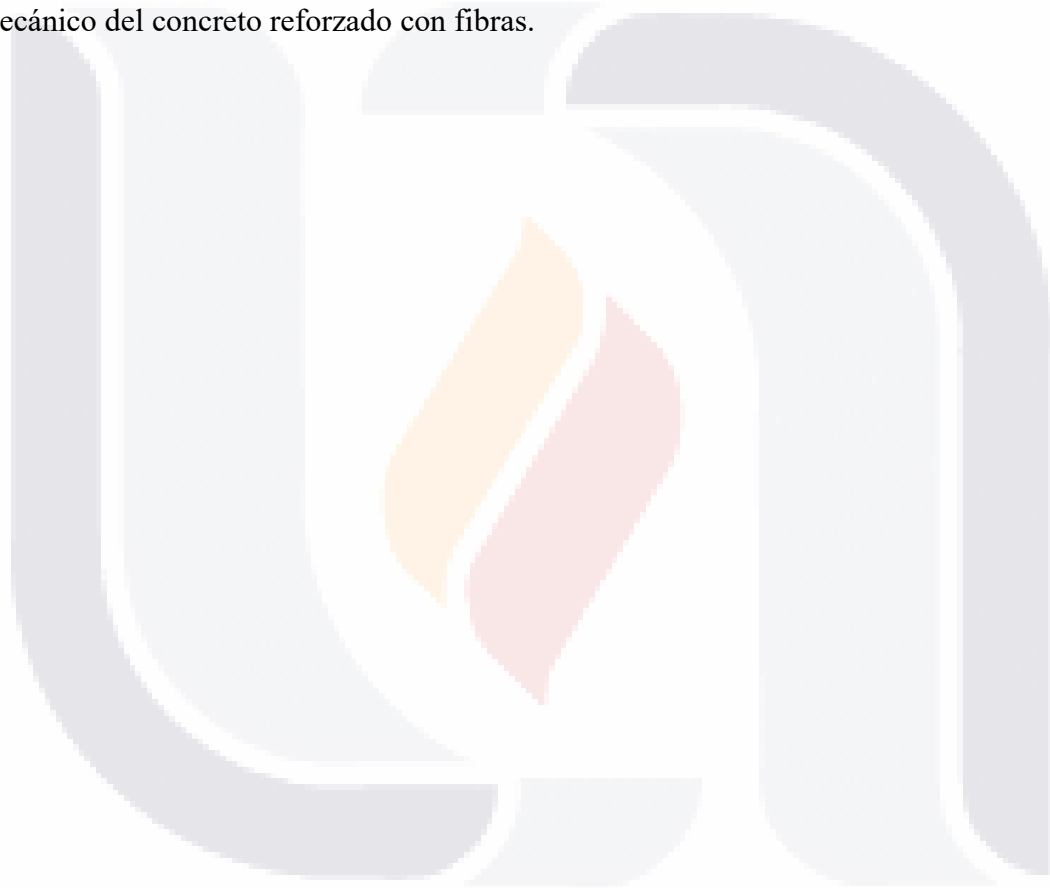
De los resultados anteriores, se aprecia que existe una mayor diferencia entre los resultados esperados por los modelos desarrollados y los resultados obtenidos de la base de dato. Se analizaron las posibles causas y se concluyó que los modelos lineales desarrollados estaban basados a solo un tipo de diseño específico, es decir, estaban elaborados para un concreto con resistencia a la compresión de 30 MPa y 50 GPa para el módulo de elasticidad. Para hacer un ajuste para diversos diseños de concreto, se obtuvo el valor medio por unidad de diseño. Se tiene que, para cada unidad de diseño para la resistencia a la compresión, se debe multiplicar por un factor de predicción 1.09, y de 0.99 por cada unidad de diseño para el módulo de elasticidad. Ajustando los valores, al multiplicar cada valor de diseño por su factor de predicción, se obtuvieron los siguientes resultados:

1. Para resistencia a la compresión usando fibras de acero, el modelo ajustado obtuvo un error promedio de 18.31 %, teniendo mejor ajuste que Dhakal (19.83 %).
2. Para resistencia a la compresión usando fibras de polipropileno, el modelo ajustado obtuvo un error promedio de 9.78 %, siendo aún Dhakal el modelo con mejor ajuste (7.40 %).
3. Para el módulo de elasticidad usando fibras de acero, el modelo ajustado obtuvo un error promedio de 7.40 %, teniendo mejor ajuste que Gao (13.72 %).
4. Para el módulo de elasticidad usando fibras de polipropileno, el modelo ajustado obtuvo un error promedio de 4.40 %, teniendo mejor ajuste que Gao (10.80 %).

Así que, si no se cuentan con los parámetros requeridos para el uso de algún modelo constitutivo, se recomienda el uso de estos dos factores de predicción para obtener el valor máximo para la resistencia a la compresión y al módulo de elasticidad.

Si se desea analizar un elemento con respecto al tiempo, o los efectos de temperatura o la interacción con otro tipo de elementos o materiales, estos métodos ya no son válidos. Es muy complicado analizar las variables anteriores debido a su medición o que no permanecen constantes. Para ello se emplean los modelos constitutivos mecánicos empleados en software.

En esta investigación, se empleó el modelo de daño plástico dentro de la librería de *ABAQUS CAE*. En la Tabla 26 se presentaron los diversos resultados obtenidos entre el modelo mecánico empleado y el modelo lineal desarrollado para los diversos grupos de concreto reforzados utilizados. Se tiene que existe un mayor error del modelo mecánico con respecto al lineal, y esto se debe que el modelo computacional considera condiciones perfectas del comportamiento mecánico de los materiales, mientras que el modelo lineal nace de la previa experimentación, considerando la poca uniformidad del comportamiento mecánico del concreto reforzado con fibras.





Los materiales en la construcción son vulnerables a la deformación, debido a esfuerzos o condiciones externas como internas. Todos estos efectos hacen que las partículas internas del material tengan un ajuste, el cual puede regresar a su forma original, permanecer con la deformación o llegar a su ruptura.

Mientras que los modelos constitutivos son ecuaciones que predicen el comportamiento de un volumen de acuerdo a la acción aplicada a este mismo. Estos modelos requieren de propiedades o características que representen al material a estudiar, y su complejidad depende de su acuerdo a los fundamentos con los que se desarrollan dichas ecuaciones. Por ejemplo, si están fundamentados por la experiencia obtenida en pruebas, los modelos generalmente buscan una correlación lineal entre las propiedades y el resultado, mientras sí se fundamenta con bases teóricas, se busca una correlación (no necesariamente lineal) entre la acción aplicada, las propiedades físicas del material y la respuesta mecánica.

La hipótesis planteada indica que se debe encontrar una correlación entre la cantidad de variables y los resultados obtenidos de los modelos. Para ello, se estudiaron diversos modelos bibliográficos, se analizaron las propiedades empleadas para su análisis, así como el tipo de respuestas mecánica obtenida. Estos primeros modelos se clasifican, para este estudio, como modelos lineales, debido que son ecuaciones de primer grado. Algunos modelos bibliográficos analizados emplean coeficientes determinados por los mismos autores y propiedades de la fibra, principalmente su geometría y volumen agregado, compartiendo entre alguno de ellos las mismas propiedades. Los modelos obtenidos de la bibliografía emplean como máximo tres variables. En consecuencia, se obtiene una gran variedad entre los resultados de los modelos con respecto a los resultados obtenidos en laboratorio.

La siguiente etapa fue estimar modelos empleando análisis estadístico (modelo de regresión lineal múltiple), obteniendo ecuaciones que emplean seis o siete variables. Como resultado se obtiene que tienen mejor ajuste con respecto a los modelos bibliográficos. En este punto, la hipótesis de la investigación es aceptada.

Se prosiguió con el análisis de un modelo mecánico, para la investigación se empleó el programa ABAQUS. Se requirió de un amplio conocimiento y cantidad de variables para ejecutar los modelos mecánicos. El análisis de las variables es muy compleja, debido que las condiciones de laboratorio y las del área a ejecutar son difíciles de asemejar. Como resultado, se obtiene una mayor discrepancia entre los resultados obtenidos con el software y los valores obtenidos en laboratorio con respecto a los modelos lineales. En este punto, la hipótesis de la investigación es rechazada.

Planteando como conclusión que los modelos si son afectados por la cantidad de variables empleadas, las cuales pueden variar desde propiedades independientes del concreto, como son las características físicas de las fibras, hasta propiedades de diseño del mismo concreto. Así como considerar los fundamentos con los que se plantean cada uno de los modelos, y la variabilidad que existe del mismo concreto. Esto último porque, aunque se empleen las mismas cantidades de materiales, y se establezcan condiciones regularizadas de ejecución y ambiente, los resultados entre los mismos especímenes varían.

Aun así, por las pequeñas diferencias obtenidas entre modelos, el modelo mecánico ofrece mayor información estructural y mayor experiencia que el modelo lineal, por ejemplo, la cantidad de propiedades mecánicas obtenidos, así como resultados numéricos, gráficos y animaciones. En la Tabla 30 se presentan las principales ventajas y desventajas, experimentadas al momento de realizar la investigación, de emplear un modelo mecánico sobre un modelo lineal.

Tabla 30. Características de un modelo constitutivo mecánico con respecto a un modelo constitutivo lineal.

Ventajas	Desventajas
Amplia variedad de resultados mecánicos	Altos tiempos de análisis y ejecución
Representación numérica, gráfica y de animación para los resultados	Requiere un manejo especializado del programa
Modelación de cualquier forma de volumen	Costos de licencia

Existe un amplio catálogo de modelos a ejecutar	Se requiere una amplia cantidad de parámetros para su análisis
Se pueden aplicar diferentes condiciones de frontera	Se requiere análisis extraordinarios para alimentar el programa
Se puede aplicar para diversos tipos de materiales	

La presente investigación no está desligada de los ámbitos antrópicos debido que el planteamiento de estos modelos permite hacer la estimación del comportamiento de elementos estructurales, los cuales pueden retroalimentar la normatividad existente.

Nichos de Investigación

Para el fortalecimiento de esta investigación se requiere realizar modelos más precisos, así como el uso de diversos modelos avanzados (mecánicos) que permita conocer si existe una incertidumbre entre sus resultados. Además, es necesario analizar la diferencia de aplicación de modelos a diferentes materiales como el acero o la madera, y el empleo de variables más complejas, como es la temperatura y el tiempo. También se requiere el análisis en elementos estructurales más complejos, debido que esta investigación se enfocó solamente en los elementos cilíndricos y prismáticos de concreto.

Finalmente se sugiere el análisis de una base de datos mucho más amplia, debido a la variabilidad de sus resultados y el empleo de diversas propiedades tanto del concreto como de los elementos refuerzo. Así que se les ofrece la invitación a los investigadores a desarrollar nuevos estudios de este tema.

REFERENCIAS

- 3D Design & Engineering Software—Dassault Systèmes®*. (2021). <https://www.3ds.com/>
- Ajmal, M., Rahman, M., Baluh, M., & Celep, Z. (2013). *Nonlinear Static Pushover Analysis of Existing and CFRP Retrofitted Shear Wall Building Frame*.
- Akar, Ö., & Willner, K. (2019). Application of the fast nonlinear analysis method on a clamped beam with a cubic spring. *PAMM*, 19. <https://doi.org/10.1002/pamm.201900022>
- Arnold, S., Tan, H., & Dong, X. (1990). *Application of symbolic computations to the constitutive modeling of structural materials*. 1990 Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, United States of America.
- ASTM C39. (2018). *Standard Test Method for Compressive Strength of Cylindrical Concrete Specimens*. astm.org.
- ASTM C78. (2018). *Standard Test Method for Flexural Strength of Concrete (Using Simple Beam with Third-Point Loading)*. astm.org.
- ASTM C192. (2019). *Standard Practice for Making and Curing Concrete Test Specimens in the Laboratory*. astm.org.
- ASTM C469. (2014). *Standard Test Method for Static Modulus of Elasticity and Poisson's Ratio of Concrete in Compression*. <https://www.astm.org/>
- ASTM C1018. (1997). *Standard Test Method for Flexural Toughness and First-Crack Strength of Fiber-Reinforced Concrete (Using Beam With Third-Point Loading)*. astm.org.
- ASTM C1609. (2019). *Standard Test Method for Flexural Performance of Fiber-Reinforced Concrete (Using Beam With Third-Point Loading)*. astm.org.
- Bauchau, O. A., & Craig, J. I. (Eds.). (2009). *Structural Analysis* (Vol. 163). Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-2516-6>
- Blazy, J., Drobiec, Ł., & Wolka, P. (2021). Flexural Tensile Strength of Concrete with Synthetic Fibers. *Materials*, 14(16), Article 16. <https://doi.org/10.3390/ma14164428>
- Brake, M. R. W. (Ed.). (2018). *The Mechanics of Jointed Structures*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-56818-8>
- Cervera Ruiz, M., & Blanco Díaz, E. (2002). *Mecánica de Estructuras Libro 1: Resistencia de Materiales* (2da ed., Vol. 1). UPC.
- Cervera Ruiz, M., & Blanco Díaz, Elena, E. (2014). *Mecánica de Estructuras*. CIMNE.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos Numéricos para Ingenieros* (5ta ed.). Mc Graw Hill.

- Cheng, W., & Finnie, I. (Eds.). (2007). Introduction to Residual Stresses. En *Residual Stress Measurement and the Slitting Method* (pp. 1-8). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-39030-7_1
- Crespi, P., Franchi, A., Ronca, P., Giordano, N., Scamardo, M. A., Gusmeroli, G., & Schiantarelli, G. (2015). *From BIM to FEM: The analysis of an historical masonry building*. 149, 581-592. <https://doi.org/10.2495/BIM150471>
- Cuevas-Arteaga, C., Porcayo-Calderon, J., Sedano, C., & Rodriguez, A. (2012). Comparison of Corrosion Resistance of Carbon Steel and Some Stainless Steels Exposed to LiBr-H₂O Solution at low Temperatures. *International journal of electrochemical science*, 7, 445-470.
- Dhakal, R., Wang, C., & Mander, J. B. (2005). *Behavior of steel fibre reinforced concrete in compression*.
- E. Hognestad, N. W. Hanson, & D. McHenry. (1955). Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design. *ACI Journal Proceedings*, 52(4), 455-479.
- EN 14651. (2005). *Test method for metallic fibered concrete—Measuring the flexural tensile strength (limit of proportionality (LOP), residual)*. en.une.org.
- Enzo, L. (1971). *Mecanica del Medio Continuo* (1ra ed.). LIMUSA-WILEY, S.A.
- Eraky, A., Mustafa, S., & Badawy, M. (2021). Structural Analysis Using Applied Element Method: A Review. *Egyptian Journal for Engineering Sciences and Technology*. <https://doi.org/10.21608/eijest.2021.56786.1043>
- Ferrara, L., & Meda, A. (2006). Relationships between fibre distribution, workability and the mechanical properties of SFRC applied to precast roof elements. *Materials and Structures*, 39, 411-420. <https://doi.org/10.1617/s11527-005-9017-4>
- Gao, J., Sun, W., & Morino, K. (1997). Mechanical properties of steel fiber-reinforced, high-strength, lightweight concrete. *Cement and Concrete Composites*, 19, 307-313. [https://doi.org/10.1016/S0958-9465\(97\)00023-1](https://doi.org/10.1016/S0958-9465(97)00023-1)
- González-Cueto, O., Herrera Suárez, M., Iglesias Coronel, C. E., & López Bravo, E. (2013). Análisis de los modelos constitutivos empleados para simular la compactación del suelo mediante el método de elementos finitos. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*, 22(3), 75-80.
- Grupo Constructor Peasa S.A de C.V. (2012). *Desarrollo de concreto de alto desempeño y su proceso constructivo, adaptable a las materias primas de la región centro del país, para su*

aplicación en pisos de naves industriales de la industria automotriz y aeroespacial (Técnico 1; p. 214).

- Han, D. J., & Chen, W. F. (1987). Constitutive Modeling in Analysis of Concrete Structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(4), 577-593. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1987\)113:4\(577\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:4(577))
- Hassoun, M. N., & Al-Manaseer, A. (2008). *Structural Concrete: Theory and Design* (4th ed.). John Wiley & Sons Inc.
- Hild, F., Forquin, P., & Silva, A. (2003). Single and multiple fragmentation of brittle geomaterials. *Revue Française de Génie Civil*, 7. <https://doi.org/10.3166/rfgc.7.973-1002>
- Hillerborg, A., Modeer, M., & Petersson, P. E. (1976). Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements. *Cement and Concrete Research*, 6, 773-782.
<https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEGSARefMap/simagsa-c-nlnlnvsnonlin.htm>. (2017). ABAQUS.
- Huang, J., Zhang, Y., Tian, Y., Xiao, H., Shi, J., Shen, J., & Zhang, N. (2020). Research on the Dynamic Mechanical Properties and Constitutive Models of Steel Fiber Reinforced Concrete and Polypropylene Fiber Reinforced Concrete. *Advances in Civil Engineering*, 2020, 9174692. <https://doi.org/10.1155/2020/9174692>
- Hughes, T. J. R., & Winget, J. (1980). Finite Rotation Effects in Numerical Integration of Rate Constitutive Equations Arising in Large Deformation Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15, 1862-1867.
- Hutton, D. V. (2004). *Fundamentals of Finite Element Analysis* (1st ed.). McGraw-Hill.
- Japan Concrete Institute. (1983). *JCI Standards for Test Methods of Fiber Reinforced Concrete. Method of Test for Flexural Strength and Flexural Toughness of Fiber Reinforced Concrete (Standard SF4)*.
- Jara, J., Hernández, H., & Jara, M. (2015). Revision of Constitutive Models. *International Journal of Engineering, Science and Technology*, 3(4), 48-64. <https://doi.org/10.13140>
- Kujawa, M., Lubowiecka, I., & Szymczak, C. (2020). Finite element modelling of a historic church structure in the context of a masonry damage analysis. *Engineering Failure Analysis*, 107, 104233. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2019.104233>

- Lantsoght, E. (2019). *Database of Shear Experiments on Steel Fiber Reinforced Concrete Beams without Stirrups*. <https://doi.org/10.20944/preprints201902.0264.v1>
- Lee, J., & Fenves, G. L. (1998). Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(8), 892-900.
- Liang, N., Dai, J., & Liu, X. (2016). Study on Tensile Damage Constitutive Model for Multiscale Polypropylene Fiber Concrete. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2016, 1-6. <https://doi.org/10.1155/2016/9168984>
- Liang, N., Yan, R., Liu, X., Yang, P., & Zhong, Z. (2020). A Study of Impact Response and Its Numerical Study of Hybrid Polypropylene Fiber-Reinforced Concrete with Different Sizes. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2020. <https://doi.org/10.1155/2020/6534080>
- López Carreño, R., Cavalaro, S., Pujadas, P., Galobardes, I., Torrents, J., Aguado, A., & Figueiredo, A. (2015, septiembre 1). *Assessment of Fibre Content and Orientation in SFRC with the Inductive Method. Part 1: Theoretical Basis of the Method and Study of the Influence of the Type of Coil and Temperature on its Accuracy*.
- Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S., & Oñate, E. (1989). A Plastic-Damage Model for Concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 25(3), 229-326.
- Mageirou, G., M., V.-B., M., M., & Gantes, C. (2002). *Comparison of linear and nonlinear analysis methods for steel columns. I*.
- Marar, K., Eren, Ö., & Çelik, T. (2001). Relación entre la tenacidad a flexión y la energía de impacto en hormigones de alta resistencia reforzados con fibras (HSFRC). *Materiales De Construccion - MATER CONSTR*, 51, 5-13. <https://doi.org/10.3989/mc.2001.v51.i262.367>
- Marar, K., Eren, Ö., & Roughani, H. (2017). The influence of amount and aspect ratio of fibers on shear behaviour of steel fiber reinforced concrete. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 21(4), 1393-1399. <https://doi.org/10.1007/s12205-016-0787-2>
- Martinelli, P., Colombo, M., Tratta, M., Cavalaro, S., De la Fuente, A., Aguado, A., & Prisco, M. (2016, septiembre 20). *Design of a SFRC slab: New procedures to evaluate the σ - ε relationship*.
- Montesdeoca, J. V. (2007). *PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA BÁSICA PARA INGENIEROS*. Escuela Superior Politécnica del Litoral.

- Montgomaery, D. C., & Runger, G. C. (2003). *Applied Statistics and Probability for Engineers* (3.^a ed.). John Wiley & Sons Inc.
- Nguyen, N.-T., Bui, T., & Bui, Q. B. (2022). Fiber reinforced concrete for slabs without steel rebar reinforcement: Assessing the feasibility for 3D-printed individual houses. *Case Studies in Construction Materials*, 16, e00950. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2022.e00950>
- Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto*. (2017). Reglamento de Construcción de la Ciudad de México.
- Paul, S. C., van Zijl, G. P. A. G., & Šavija, B. (2020). Effect of Fibers on Durability of Concrete: A Practical Review. *Materials*, 13(20), Article 20. <https://doi.org/10.3390/ma13204562>
- Pujadas, P., Pujadas, P., Blanco, A., Cavalaro, S., De la Fuente, A., & Aguado, A. (2016, septiembre 21). *Flat suspended slabs reinforced only with macro-synthetic fibres*.
- R: The R Project for Statistical Computing*. (s. f.). Recuperado de <https://www.r-project.org/>
- Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-05)*. (2005). American Concrete Institute.
- Rots, J. G., & Blaauwendraad, J. (1989). Crack Models for Concrete: Discrete or Smeared? Fixed, Multi-directional or Rotating? *HERON*, 34(1), 1-59.
- Runesson, K. (2006). *Constitutive Modeling of Engineering Materials—Theory and Computation*.
- Rusiński, E., Kopczyński, A., & Czmochoowski, J. (2004). Tests of thin-walled beams joined by spot welding. *Journal of Materials Processing Technology*, 157-158, 405-409. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2004.09.063>
- Shankar, B. & R.M.Karthikeyan. (2021). Experimental Investigation on Confined Concrete With Steel Fibre. *International Journal of Engineering Research and Applications*, 6, 23-30.
- Soetens, T., & Matthys, S. (2014). Different methods to model the post-cracking behaviour of hooked-end steel fibre reinforced concrete. *Construction and Building Materials*, 73, 458-471. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2014.09.093>
- Tan, K. H., Walraven, J., Grünewald, S., Rovers, J., & Cotovanu, B. (2021). Correlations among notched beam tests, double punch tests and round panel tests for a high performance fibre concrete cast at site. *Cement and Concrete Composites*, 122, 104138. <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2021.104138>
- Timothy, J., Zhan, Y., & Meschke, G. (2016). *Multiscale modeling FRC Composites*. <https://doi.org/10.21012/FC9.151>

- Venkateshwaran, A., Tan, K. H., & Li, Y. (2018). Residual flexural strengths of steel fiber reinforced concrete with multiple hooked-end fibers. *Structural Concrete*, 19(2), 352-365.
<https://doi.org/10.1002/suco.201700030>
- Wei, Y., Qin, Y., Chai, J., Xu, C., Zhang, Y., & Zhang, X. (2022). Experimental Study on Compressive and Flexural Performances of Polypropylene Fiber-Reinforced Concrete. *Geofluids*, 2022, 4168918. <https://doi.org/10.1155/2022/4168918>
- Xu, L., Li, B., Chi, Y., Li, C., Huang, B., & Shi, Y. (2018). Stress-Strain Relation of Steel-Polypropylene-Blended Fiber-Reinforced Concrete under Uniaxial Cyclic Compression. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2018, 9174943.
<https://doi.org/10.1155/2018/9174943>
- Yapıcı, O., Şahin, H., & Celep, Z. (2016). *On modelling of shear walls in linear and nonlinear analysis of structural systems.*
- Yazıcı, Ş., İnan, G., & Tabak, V. (2007). Effect of aspect ratio and volume fraction of steel fiber on the mechanical properties of SFRC. *Construction and Building Materials - CONSTR BUILD MATER*, 21, 1250-1253. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2006.05.025>



Anexo A. Resultados de laboratorio en ensayos cilíndricos.

Para la obtención de la resistencia a compresión se emplea el proceso indicado por ASTM C39 (2018), el cual consiste en aplicar carga a compresión axial al espécimen a una velocidad de carga de 1.5 a 4.5 kg/cm² por segundo (Figura 18A). El esfuerzo a compresión se obtiene dividiendo la carga máxima aplicada entre el área de la sección del espécimen.

Para el módulo de elasticidad y la relación de Poisson, se emplea lo descrito en ASTM C469 (2014), donde se colocan un sistema de deformímetro y extensómetro, compuesta por tres anillos, los cuales centran y sujetan al espécimen (Figura 18B). Se emplean dos micrómetros para medir la deformación trasversal y longitudinal. Antes de aplicar la carga, se revisa que los micrómetros estén en cero, a continuación, se aplican cargas uniformes al 10 % de la carga obtenida a compresión para que se ajuste el sistema. Se prosigue a aplicar carga uniforme al 60 %, obteniendo la deformación longitudinal y transversal de la muestra. Durante en ensaye, se graba video para obtener las lecturas de carga y deformación.

Después de realizar la aplicación de carga al 60 % y obtener los valores de carga - deformación, se gráfica y se identifica la tensión correspondiente al 40 % de la carga última S_2 y la tensión longitudinal a $0.0005 S_1$, la deformación longitudinal producto de la tensión ε_2 . Para el cálculo del módulo de elasticidad se emplea la ecuación A1.

$$ME = \frac{S_2 - S_1}{\varepsilon_2 - 0.000050} \tag{Ec. A1}$$

Para el cálculo de la relación de Poisson se emplea la ecuación A2, donde se obtiene a partir de la deformación en el sentido horizontal (ε_{t2}) y vertical (ε_{t1}).

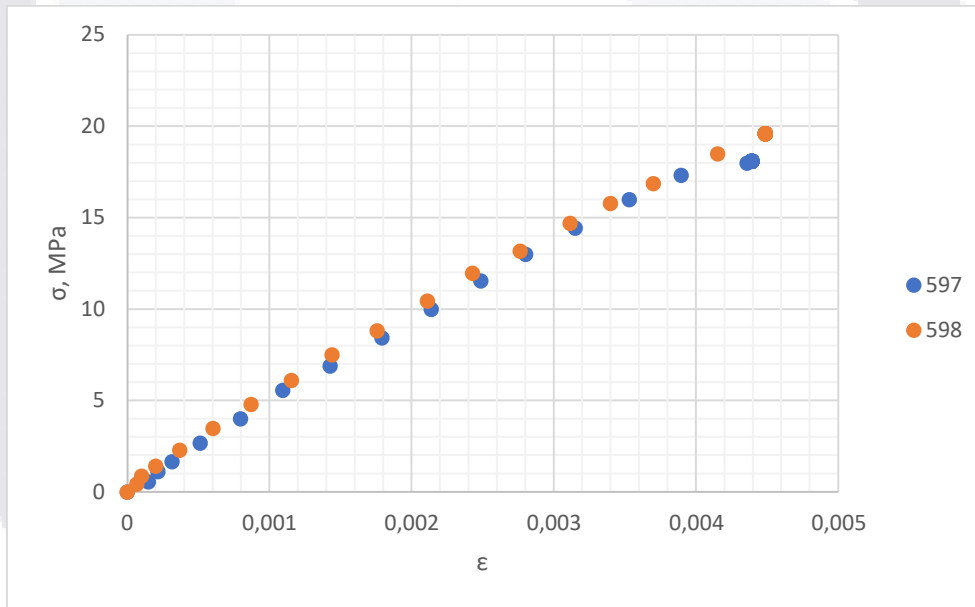
$$\nu = \frac{\varepsilon_{t2} - \varepsilon_{t1}}{\varepsilon_2 - 0.000050} \tag{Ec. A2}$$

Tabla A. Resultados mecánicos obtenidos en laboratorio en especímenes cilíndricos.

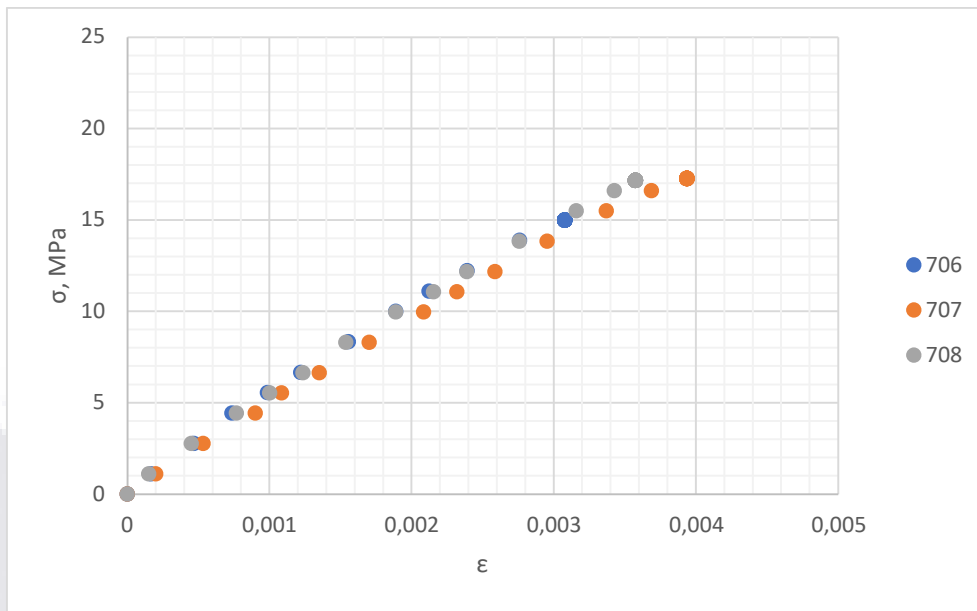
No. Espécimen	Grupo	f _c (MPa)	ME (GPa)	N
1	WF	28.36	50.77	0.24
2	WF	28.81	45.55	0.2
3	WF	32.54	51.92	0.19
4	WF	30.09	51.49	0.25
5	WF	32.29	47.19	0.29
6	WF	31.30	47.00	0.26
7	WF	25.59	44.21	0.2
8	WF	25.01	46.55	0.21
9	WF	29.61	50.67	0.28
10	WF	32.06	48.83	0.27
11	WF	32.40	47.34	0.21
12	WF	28.49	50.71	0.41
13	WF	27.74	48.96	0.28
14	WF	29.05	47.19	0.15
15	WF	33.74	60.85	0.30
16	WF	32.85	50.28	0.15
17	SFR01	33.64	45.14	0.22
18	SFR01	32.30	45.88	0.23
19	SFR02	27.64	50.08	0.18
20	SFR02	27.77	46.56	0.19
21	SFR02	24.79	50.02	0.18
22	SFR03	27.35	48.90	0.2
23	SFR03	30.51	49.49	0.19
24	SFR03	33.53	47.12	0.14
25	SFR04	32.53	44.52	0.35
26	SFR04	35.18	45.97	0.5
27	SFR04	30.43	45.12	0.32
28	SFR05	32.40	48.06	0.24
29	SFR05	32.39	49.56	0.18
30	SFR05	29.83	51.50	0.31
31	SFR05	30.32	47.08	0.13
32	SFR05	29.36	49.16	0.27
33	SFR05	30.87	50.01	0.27
34	SFR05	32.52	48.59	0.33
35	SFR05	31.96	49.47	0.29
36	SFR06	32.05	49.07	0.33
37	SFR06	31.98	48.43	0.23

38	SFR06	30.94	47.88	0.20
39	SFR06	31.84	46.80	0.20
40	SFR06	32.20	50.66	0.21
41	SFR06	32.64	51.38	0.21
42	SFR06	32.51	48.91	0.20
43	SFR06	33.52	49.13	0.20
44	SFR07	31.58	50.37	0.24
45	SFR07	32.69	49.22	0.20
46	SFR07	29.97	47.23	0.26
47	SFR07	28.25	46.86	0.21
48	SFR07	32.74	51.22	0.31
49	SFR07	33.19	49.16	0.22
50	SFR07	31.64	51.49	0.24
51	SFR07	32.02	50.94	0.19
52	SFR08	32.21	47.84	0.19
53	SFR08	31.86	45.13	0.23
54	SFR09	28.72	46.41	0.28
55	PFR01	32.64	46.66	0.23
56	PFR01	33.64	46.35	0.24
57	PFR01	32.10	44.65	0.2
58	PFR02	31.32	46.25	0.33
59	PFR02	29.56	48.72	0.31
60	PFR02	33.20	46.45	0.29
61	PFR03	30.99	45.44	0.18
62	PFR03	28.46	49.33	0.24
63	PFR03	32.75	49.39	0.15
64	PFR04	31.18	50.11	0.51
65	PFR04	31.96	48.87	0.54
66	PFR04	31.15	47.03	0.06
67	PFR04	31.91	47.42	0.17
68	PFR04	31.35	48.92	0.16
69	PFR04	27.01	50.29	0.31
70	PFR04	34.73	48.62	0.34
71	PFR04	32.69	51.52	0.27
72	PFR05	28.41	46.08	0.24
73	PFR05	29.19	46.46	0.27
74	PFR05	31.15	48.43	0.20
75	PFR05	30.45	47.04	0.22
76	PFR05	30.31	49.72	0.24
77	PFR05	29.77	50.18	0.25
78	PFR05	34.74	52.10	0.15

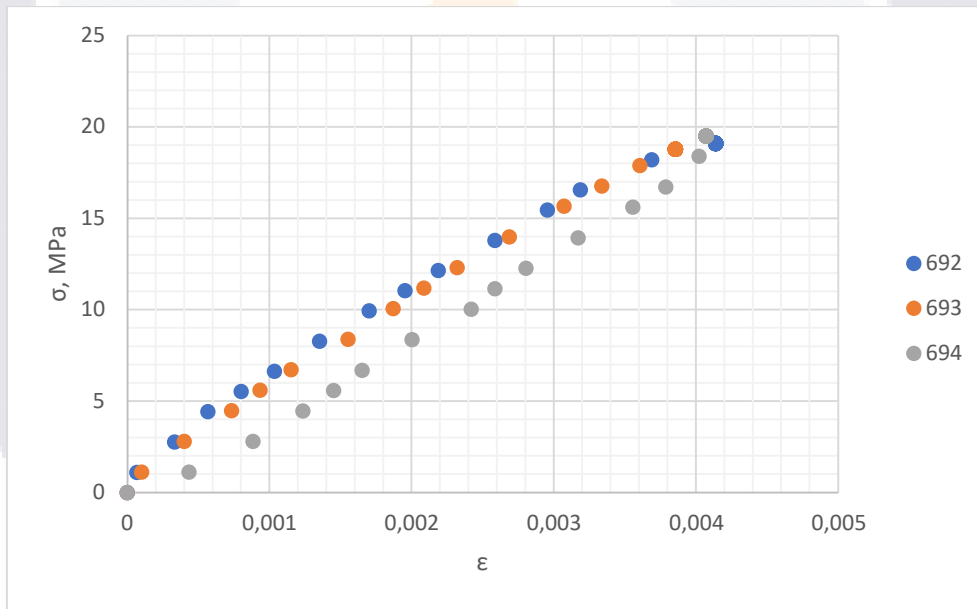
79	PFR05	30.32	51.40	0.36
80	PFR06	28.53	49.66	0.17
81	PFR06	32.09	45.72	0.25
82	PFR06	28.66	45.69	0.20
83	PFR06	28.86	46.17	0.21
84	PFR06	29.30	45.19	0.20
85	PFR06	28.86	46.01	0.32
86	PFR06	32.19	50.32	0.22
87	PFR06	34.40	48.01	0.28
88	PFR07	28.90	51.68	0.29
89	PFR07	29.36	47.65	0.25
90	PFR07	32.42	46.70	0.25
91	PFR08	33.42	41.86	0.39



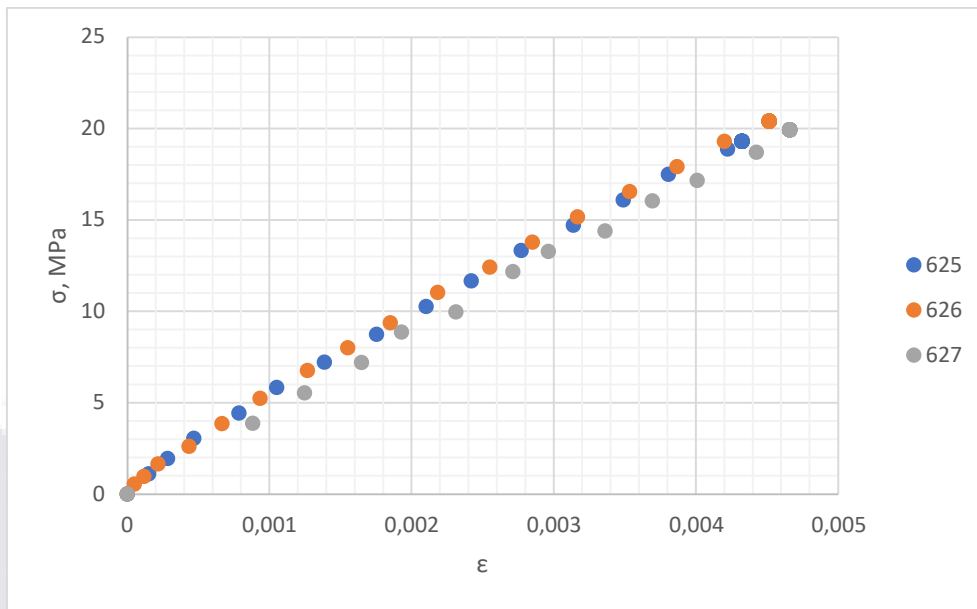
Curva esfuerzo – deformación a compresión de SFR01.



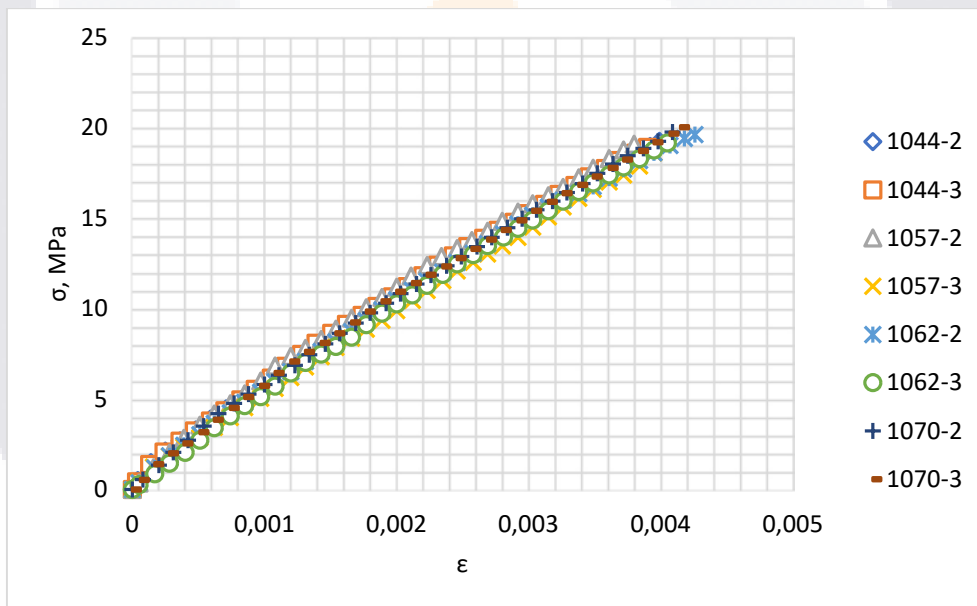
Curva esfuerzo – deformación a compresión de SFR02.



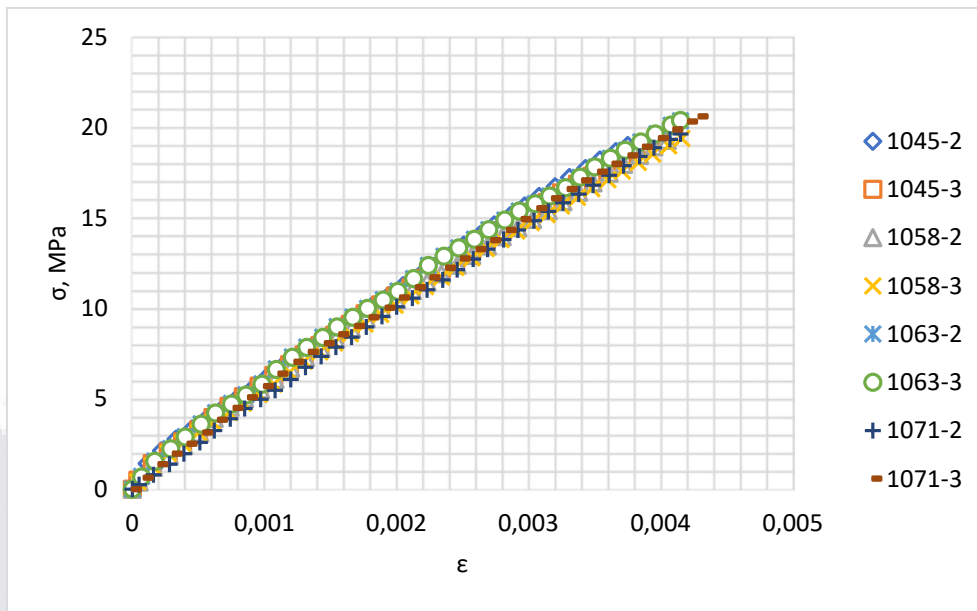
Curva esfuerzo – deformación a compresión de SFR03.



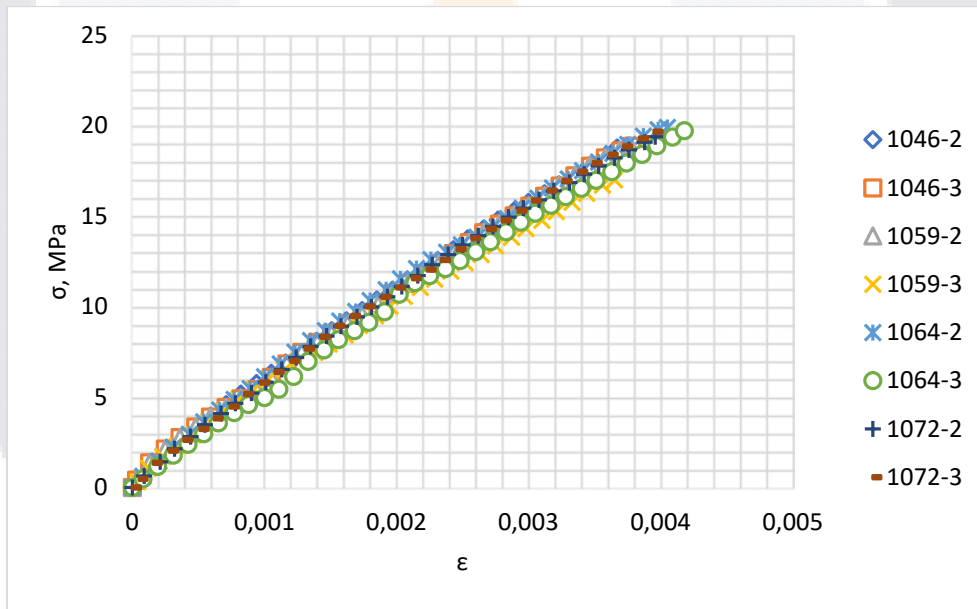
Curva esfuerzo – deformación a compresión de SFR04.



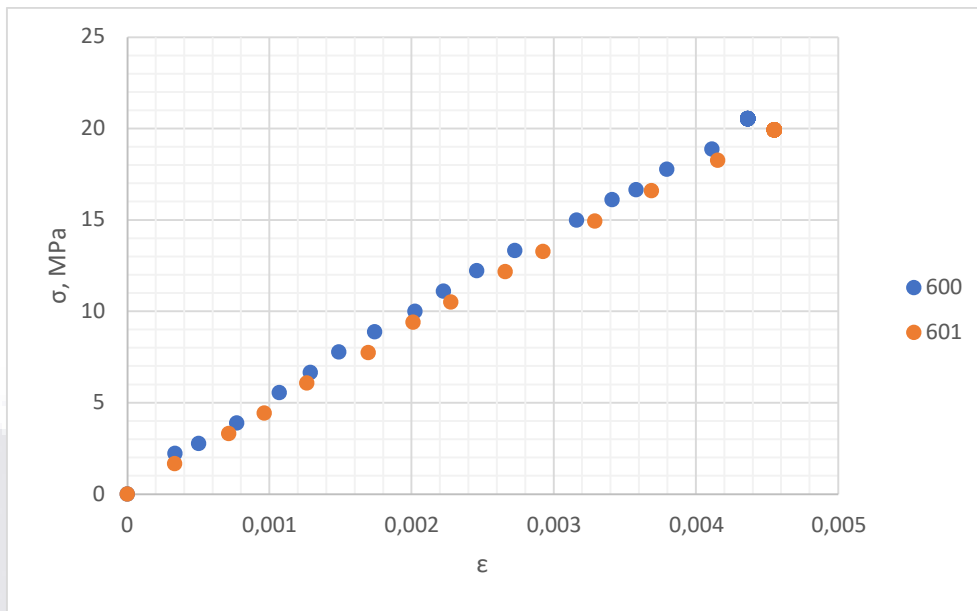
Curva esfuerzo – deformación a compresión de SFR05.



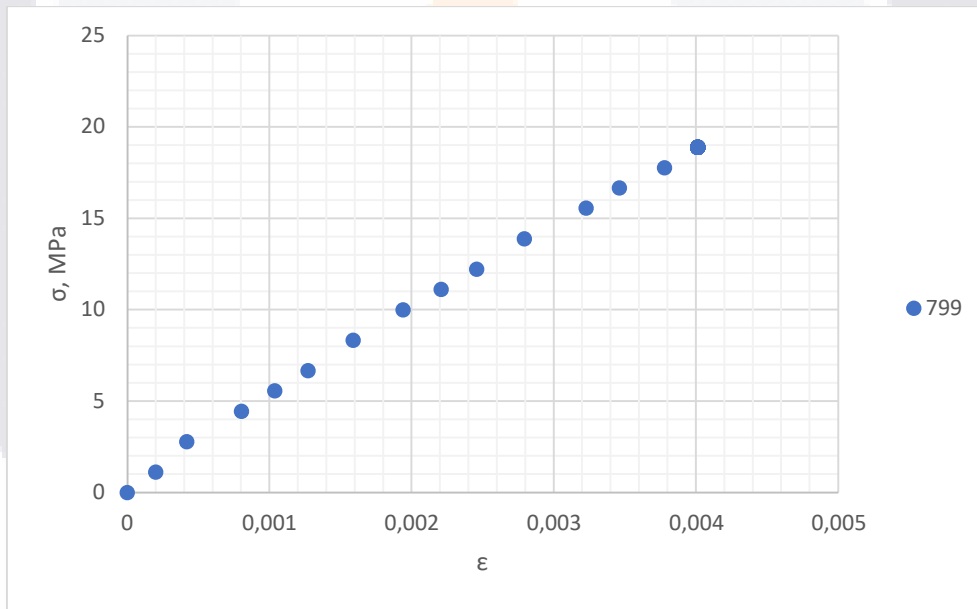
Curva esfuerzo – deformación a compresión de SFR06.



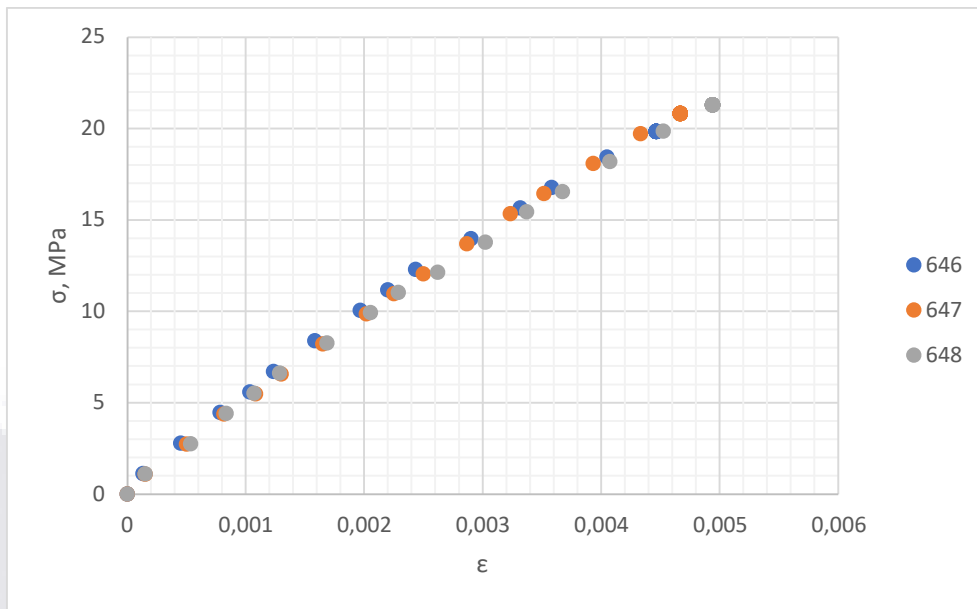
Curva esfuerzo – deformación a compresión de SFR07.



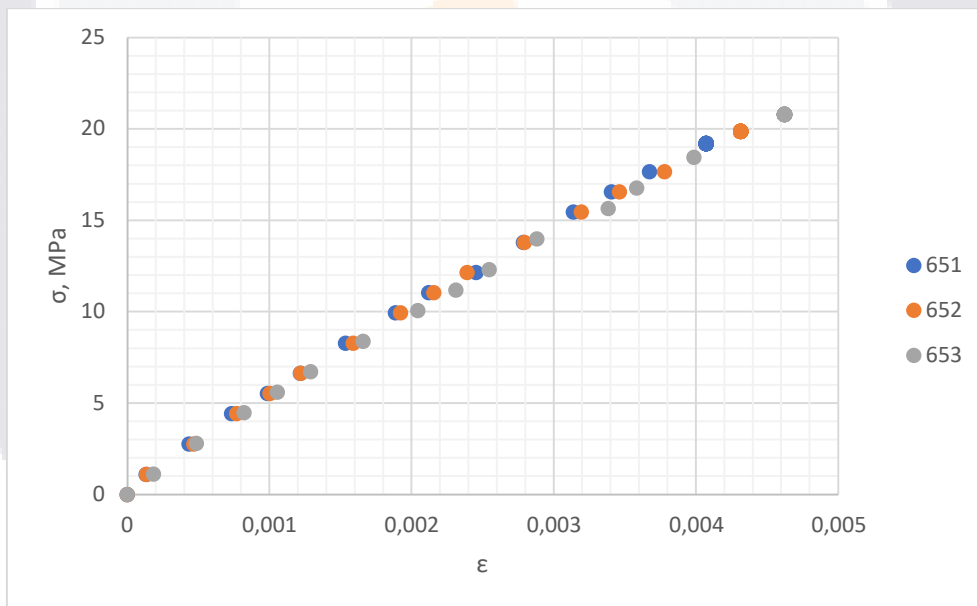
Curva esfuerzo – deformación a compresión de SFR08.



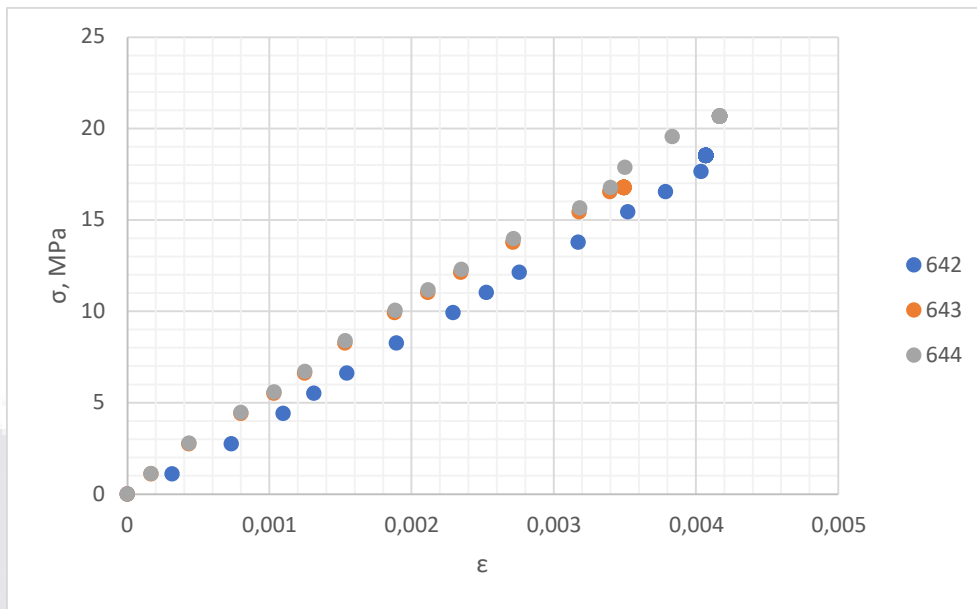
Curva esfuerzo – deformación a compresión de SFR09.



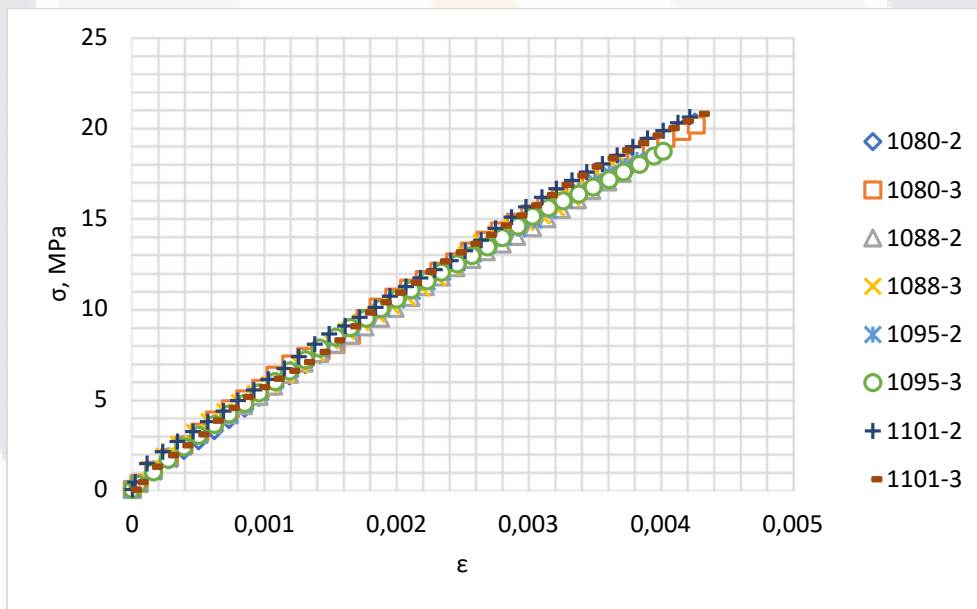
Curva esfuerzo – deformación a compresión de PFR01.



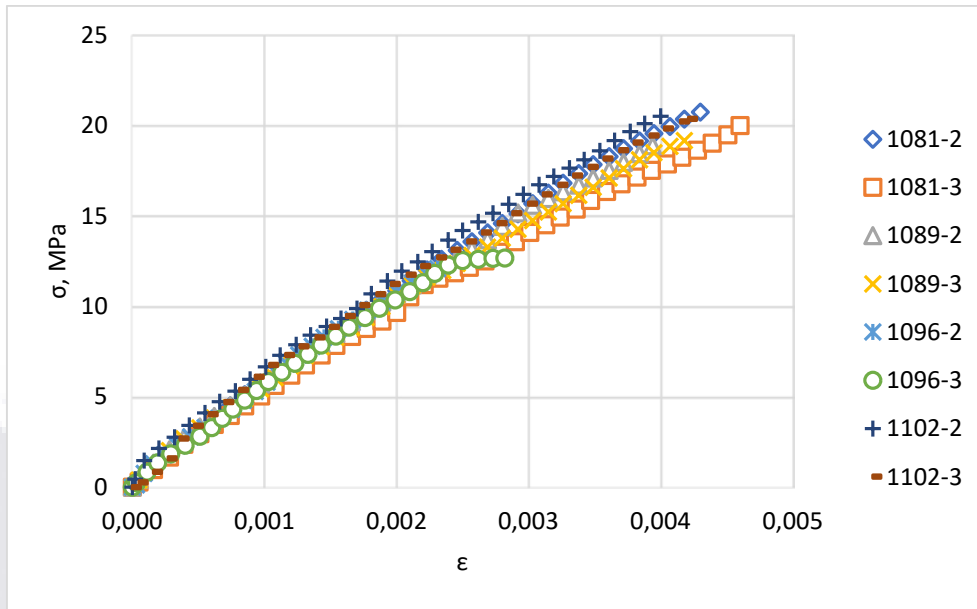
Curva esfuerzo – deformación a compresión de PFR02.



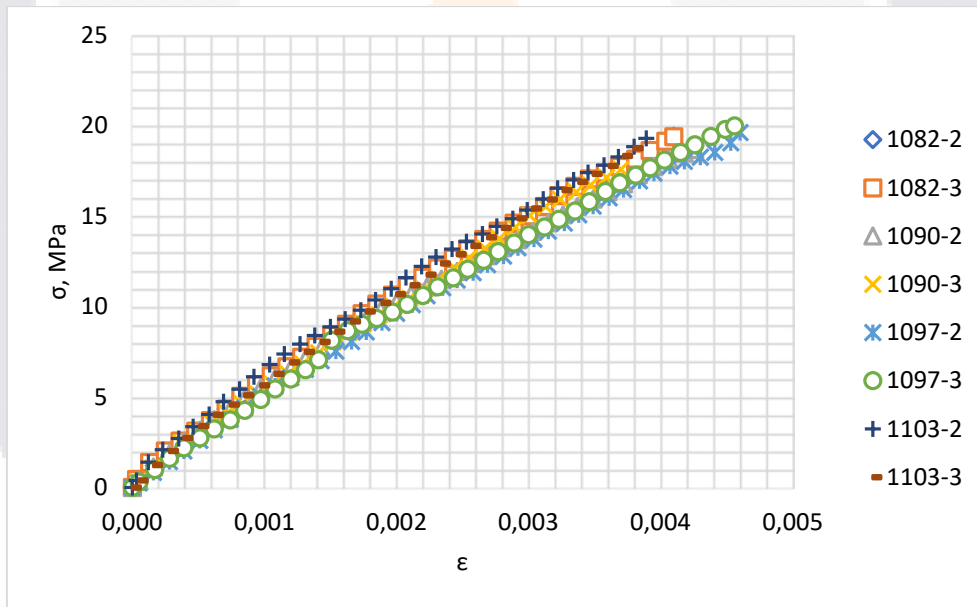
Curva esfuerzo – deformación a compresión de PFR03.



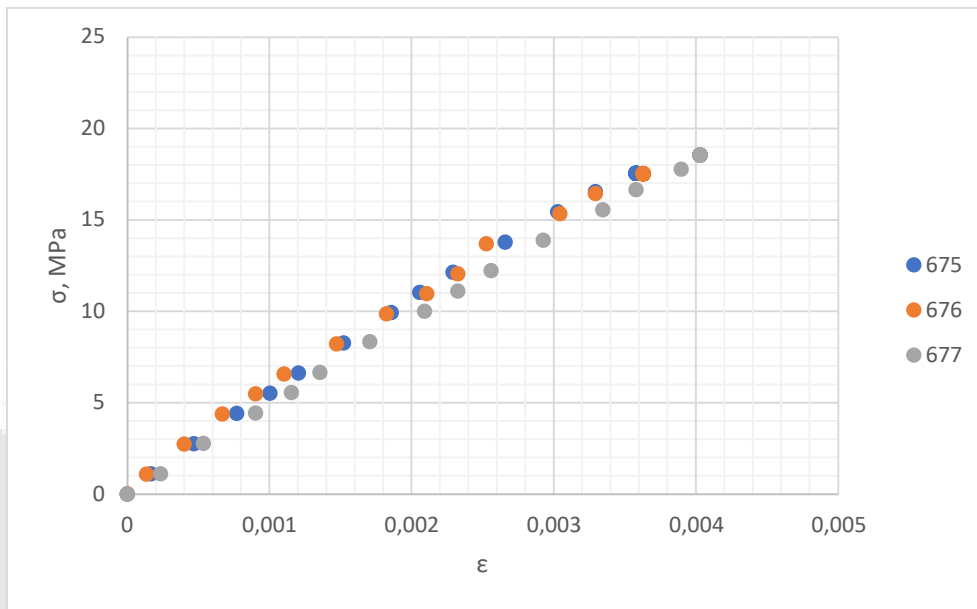
Curva esfuerzo – deformación a compresión de PFR04.



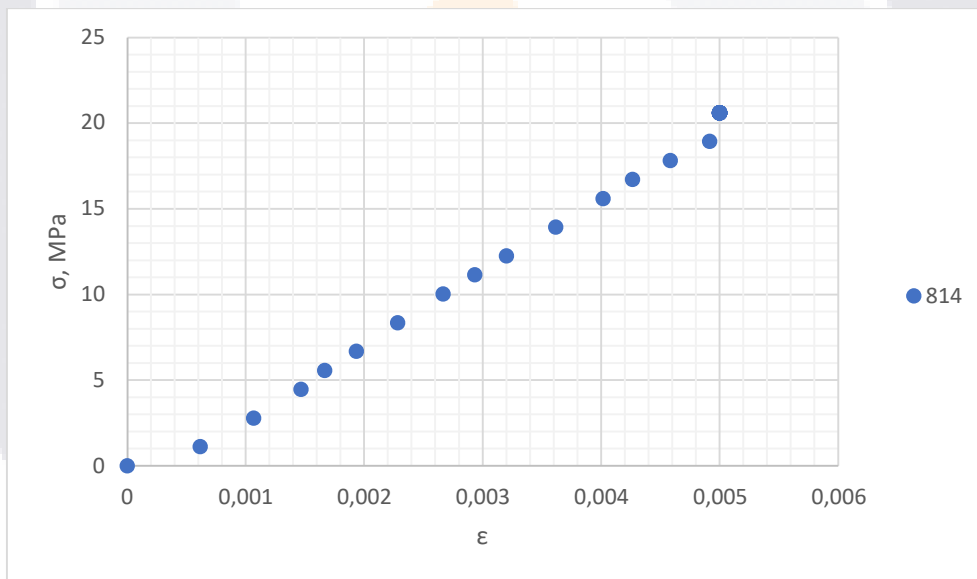
Curva esfuerzo – deformación a compresión de PFR05.



Curva esfuerzo – deformación a compresión de PFR06.



Curva esfuerzo – deformación a compresión de PFR07.



Curva esfuerzo – deformación a compresión de PFR08.

Anexo B. Resultados de laboratorio en vigas.

Para el ensaye en las probetas prismáticas (a flexión) se realizó de acuerdo a la norma ASTM C78 (2018). Los ensayes están colocados en un riel con dos puntos de apoyo curvilíneos los cuales están ubicados al primer y último tercio (a 45 cm de los bordes) y dos puntos de cargas que se aplican en los límites del tercio medio. Se coloca un micrómetro en la parte interna de las barras laterales de soporte quedando perpendicular al eje longitudinal de la muestra, el cual mide la deformación resultante de la aplicación de la carga (Figura 18C).

Se inició la aplicación de la carga a una velocidad uniforme de 8.8 a 12.3 kg/cm² por minuto, grabando la lectura de la carga y el micrómetro. Para el cálculo del esfuerzo residual se aplican las ecuaciones 4.3 y 4.4 mencionadas en el Capítulo 4.

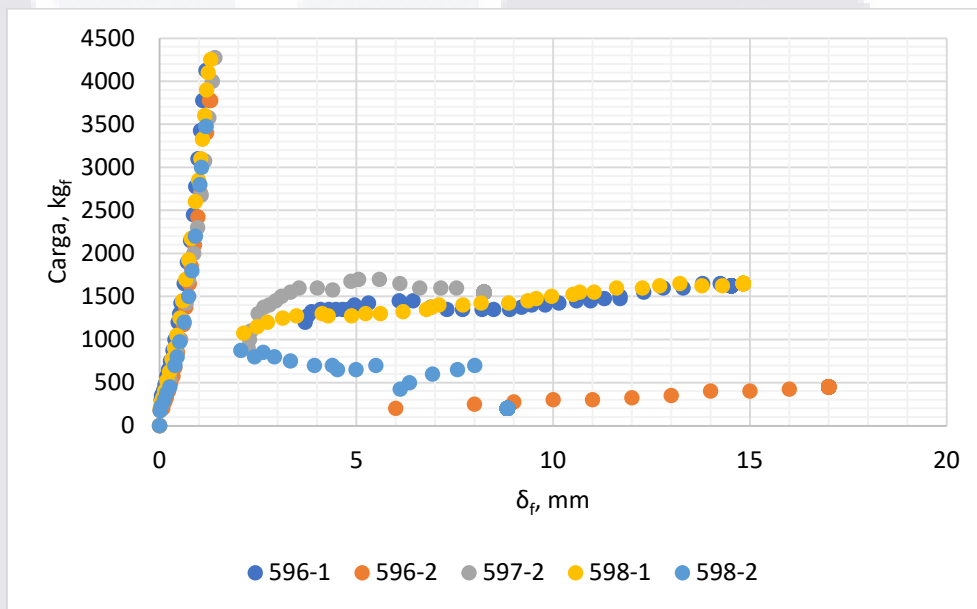
Tabla B. Esfuerzo residual a flexión obtenidos en laboratorio en especímenes prismáticos.

No. Espécimen	Grupo	f _{e,3} (%)
1	WF	0
2	SFR01	59
3	SFR01	50
4	SFR01	53
5	SFR01	47
6	SFR01	44
7	SFR02	0
8	SFR03	51
9	SFR03	50
10	SFR03	52
11	SFR03	52
12	SFR04	55
13	SFR04	59
14	SFR04	67
15	SFR04	55
16	SFR04	49
17	SFR04	59
18	SFR05	46
19	SFR05	43

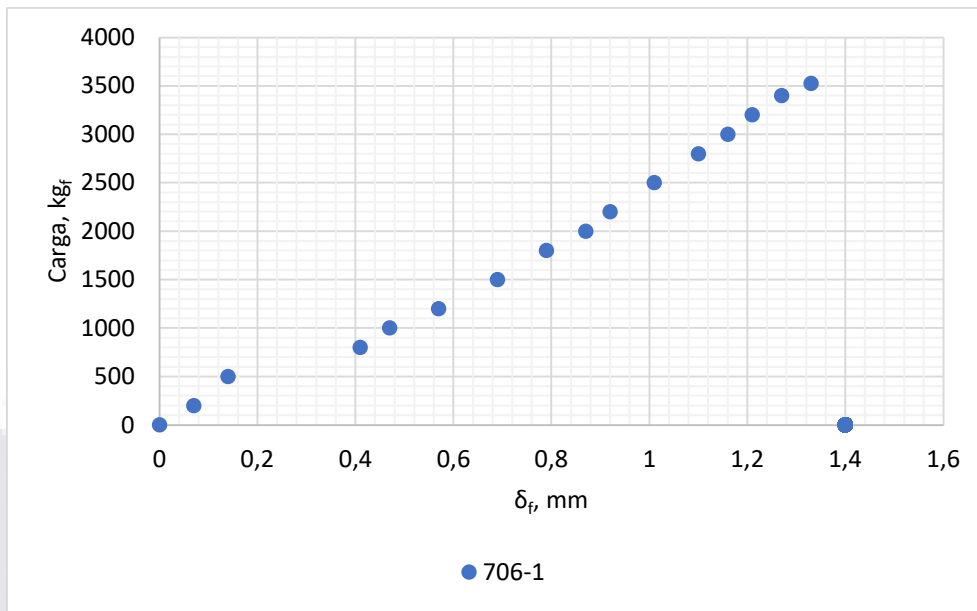
20	SFR05	44
21	SFR05	43
22	SFR05	46
23	SFR05	48
24	SFR05	45
25	SFR05	45
26	SFR05	56
27	SFR05	35
28	SFR05	49
29	SFR05	47
30	SFR06	56
31	SFR06	56
32	SFR06	44
33	SFR06	47
34	SFR06	47
35	SFR06	47
36	SFR06	58
37	SFR06	64
38	SFR06	57
39	SFR06	41
40	SFR06	51
41	SFR06	49
42	SFR07	54
43	SFR07	51
44	SFR07	57
45	SFR07	53
46	SFR07	45
47	SFR07	56
48	SFR07	65
49	SFR07	53
50	SFR07	56
51	SFR07	54
52	SFR07	48
53	SFR07	49
54	SFR08	57
55	SFR08	43
56	SFR08	49
57	SFR08	52
58	SFR08	0
59	SFR08	51
60	SFR09	0

61	PFR01	36
62	PFR01	28
63	PFR01	52
64	PFR01	42
65	PFR01	47
66	PFR01	42
67	PFR02	0
68	PFR03	0
69	PFR03	48
70	PFR03	48
71	PFR03	52
72	PFR03	50
73	PFR03	47
74	PFR04	35
75	PFR04	34
76	PFR04	46
77	PFR04	44
78	PFR04	53
79	PFR04	52
80	PFR04	64
81	PFR04	45
82	PFR04	48
83	PFR04	49
84	PFR05	45
85	PFR05	46
86	PFR05	57
87	PFR05	58
88	PFR05	54
89	PFR05	56
90	PFR05	51
91	PFR05	58
92	PFR05	53
93	PFR05	42
94	PFR05	59
95	PFR05	42
96	PFR06	54
97	PFR06	62
98	PFR06	46
99	PFR06	41
100	PFR06	47
101	PFR06	57

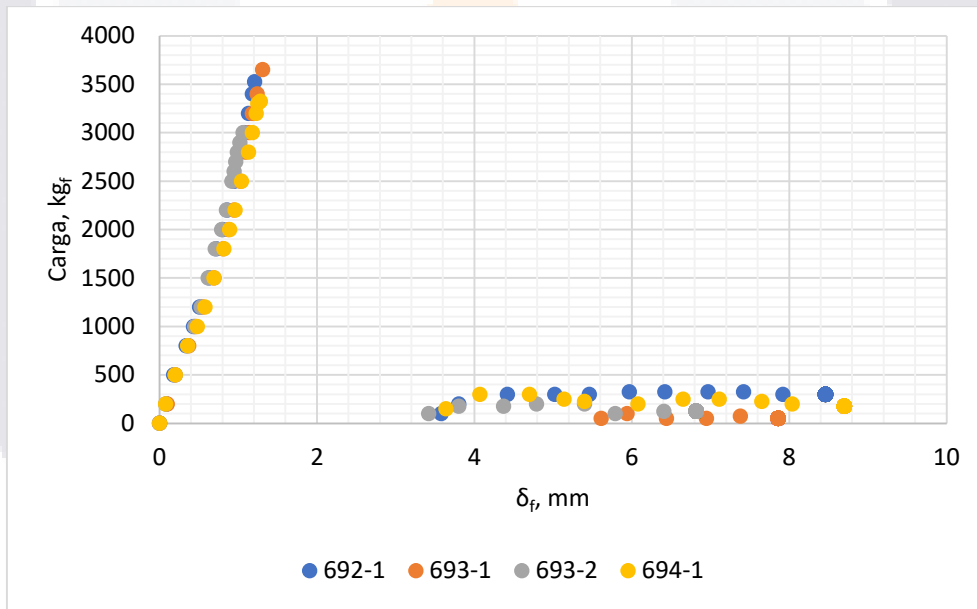
102	PFR06	61
103	PFR06	46
104	PFR06	63
105	PFR06	50
106	PFR06	62
107	PFR07	48
108	PFR07	47
109	PFR07	65
110	PFR07	55
111	PFR08	0



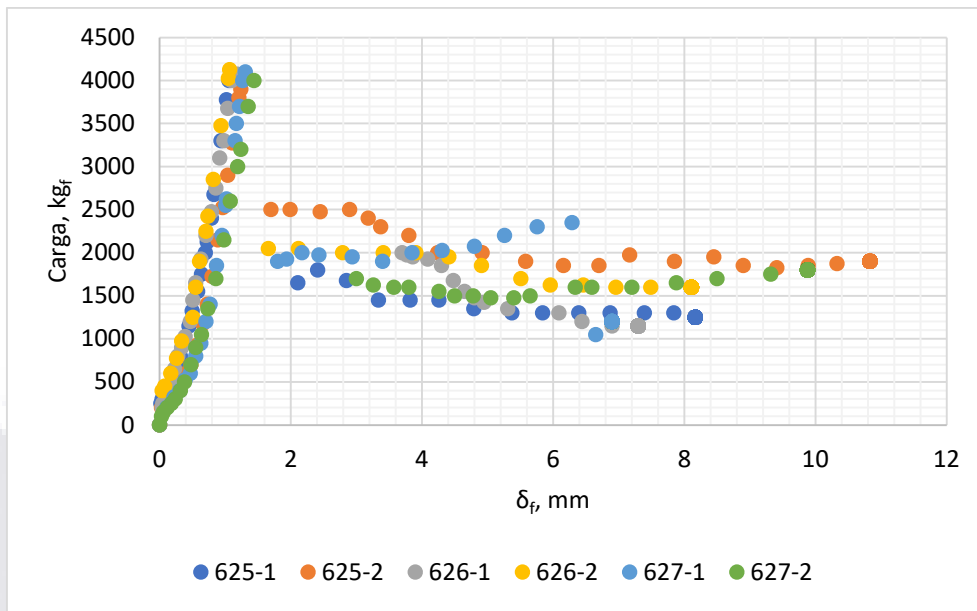
Curva carga – deflexión SFR01.



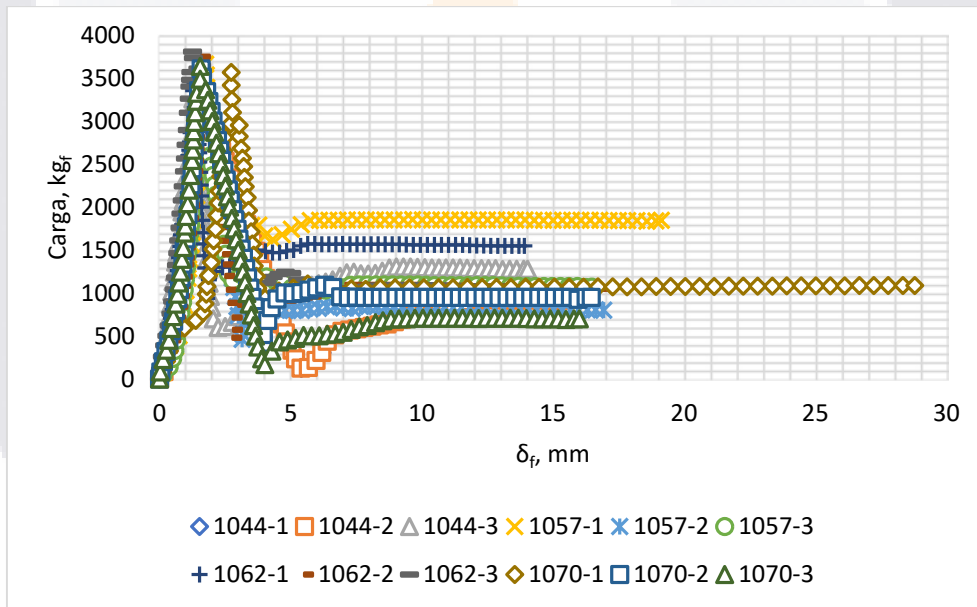
Curva carga – deflexión SFR02.



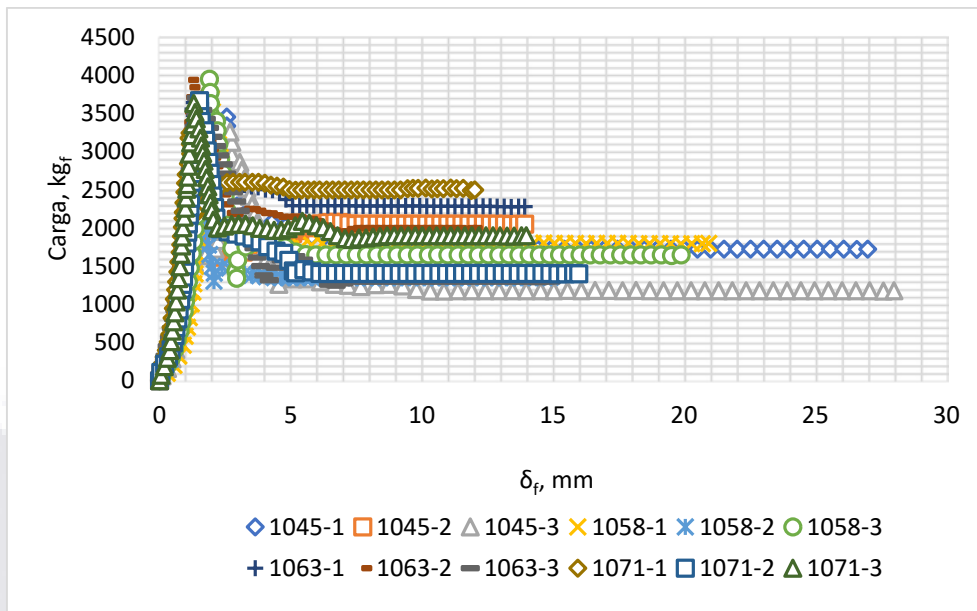
Curva carga – deflexión SFR03.



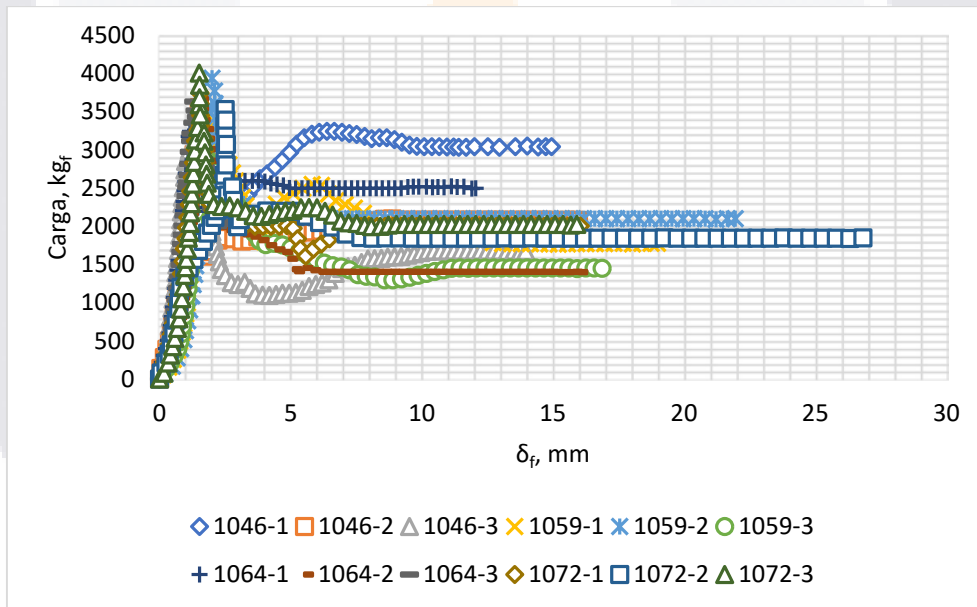
Curva carga – deflexión SFR04.



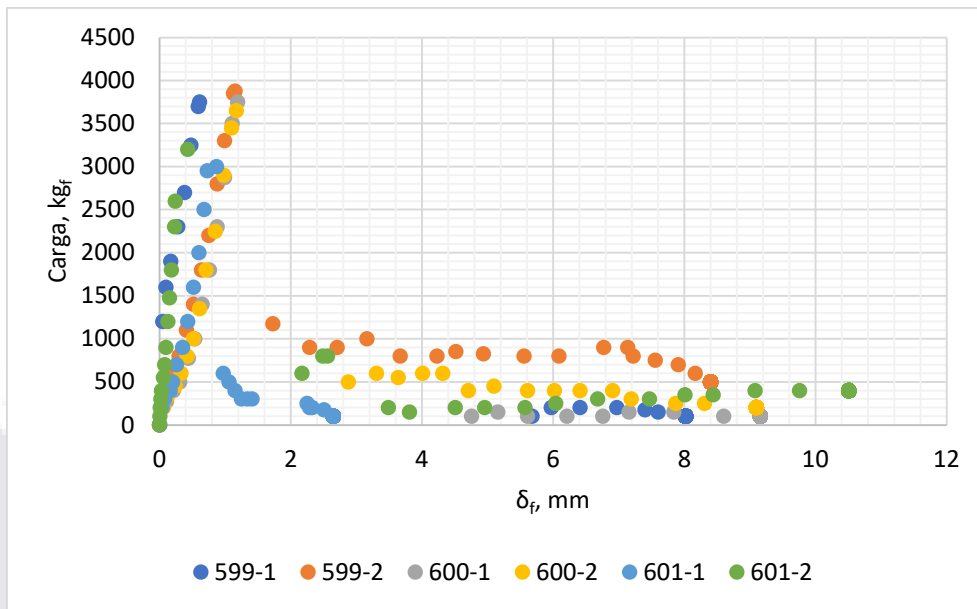
Curva carga – deflexión SFR05.



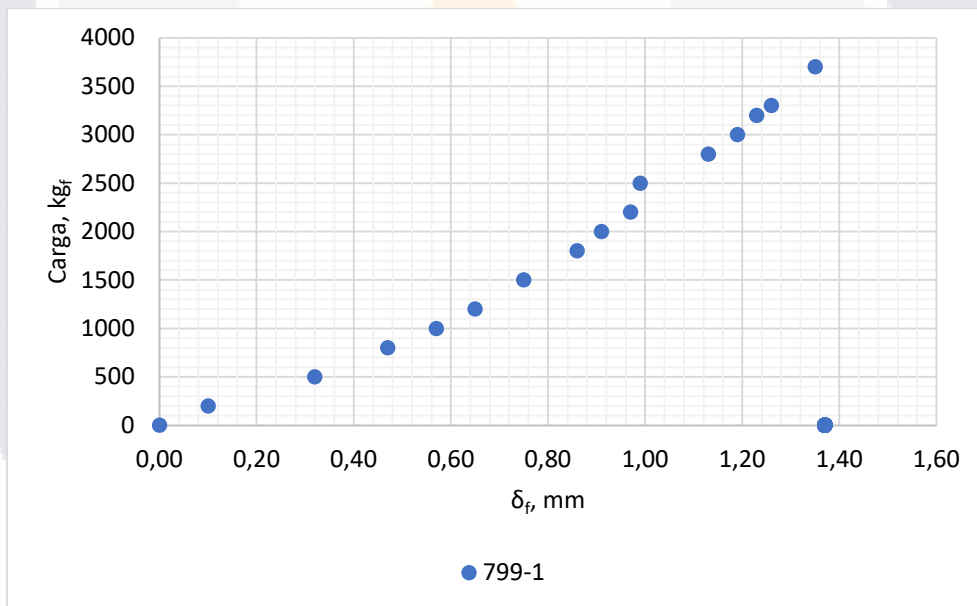
Curva carga – deflexión SFR06.



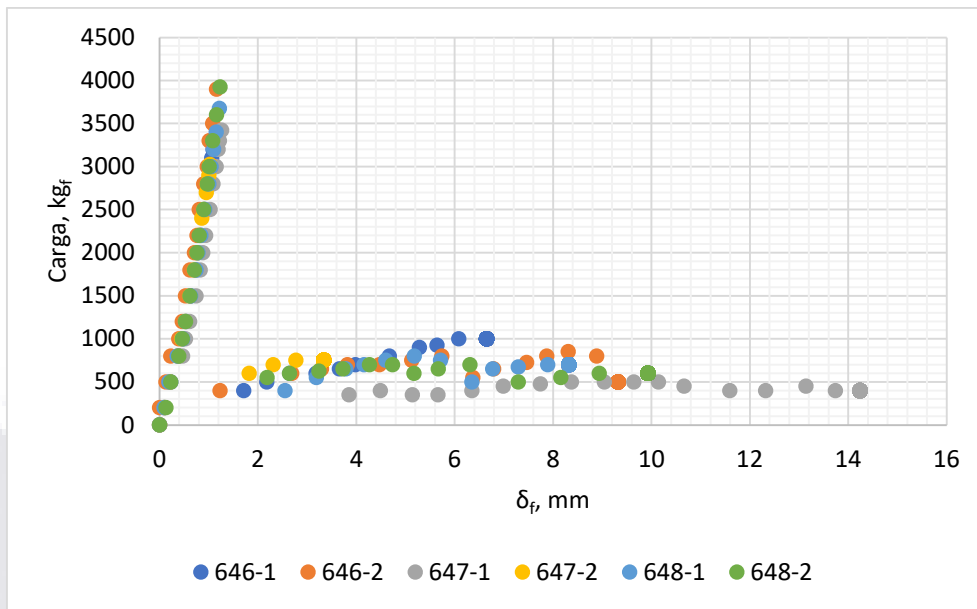
Curva carga – deflexión SFR07.



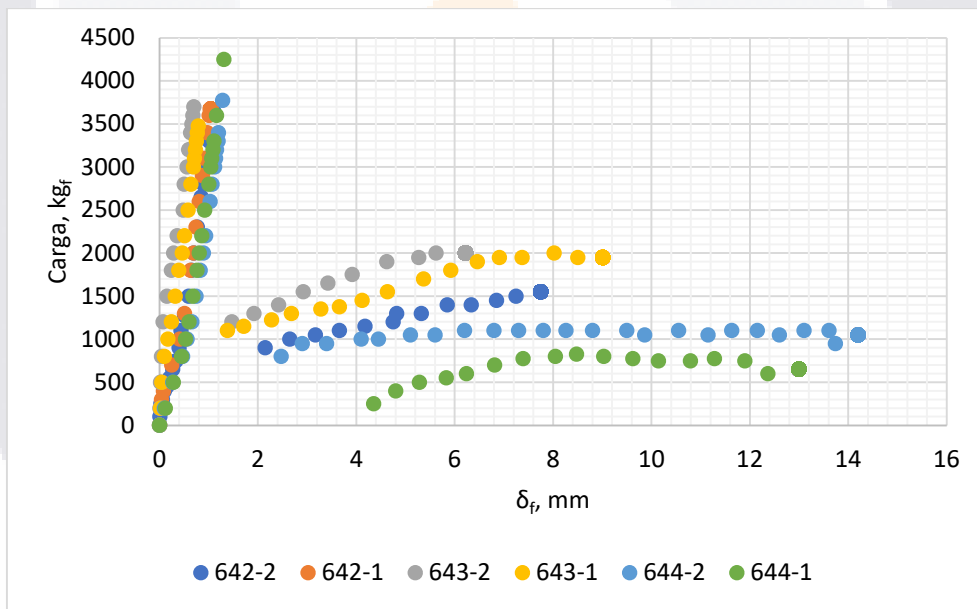
Curva carga – deflexión SFR08.



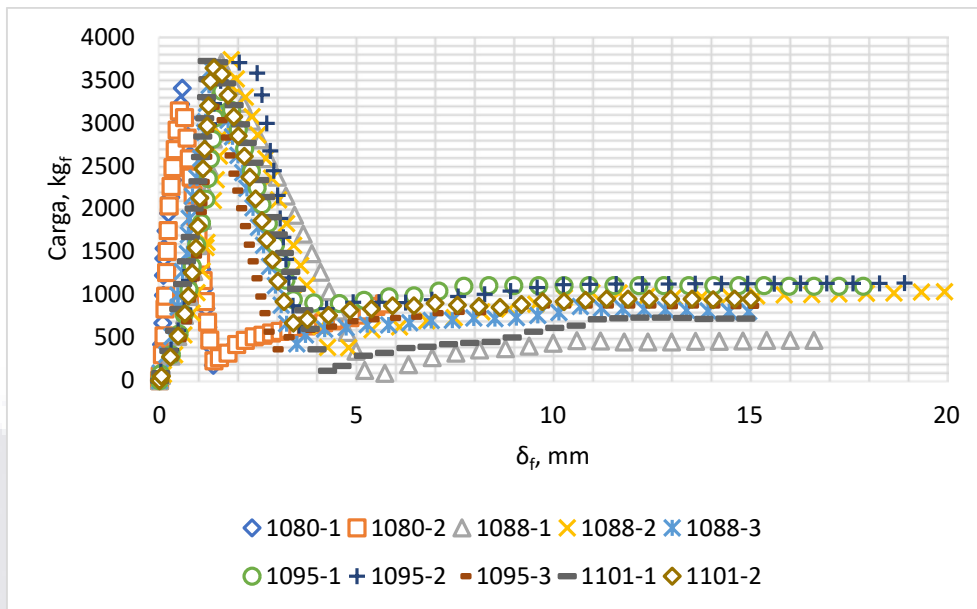
Curva carga – deflexión SFR09.



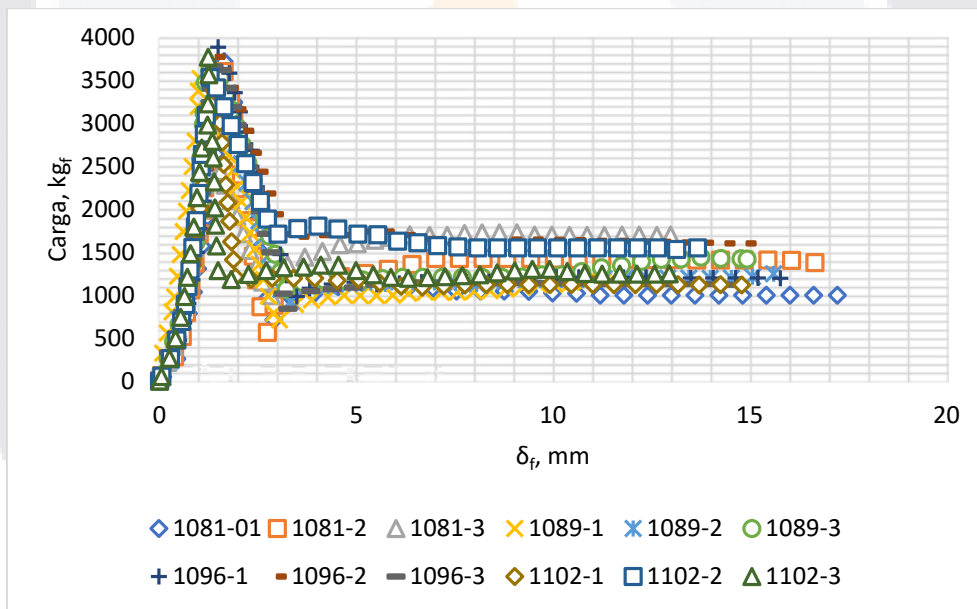
Curva carga – deflexión PFR01.



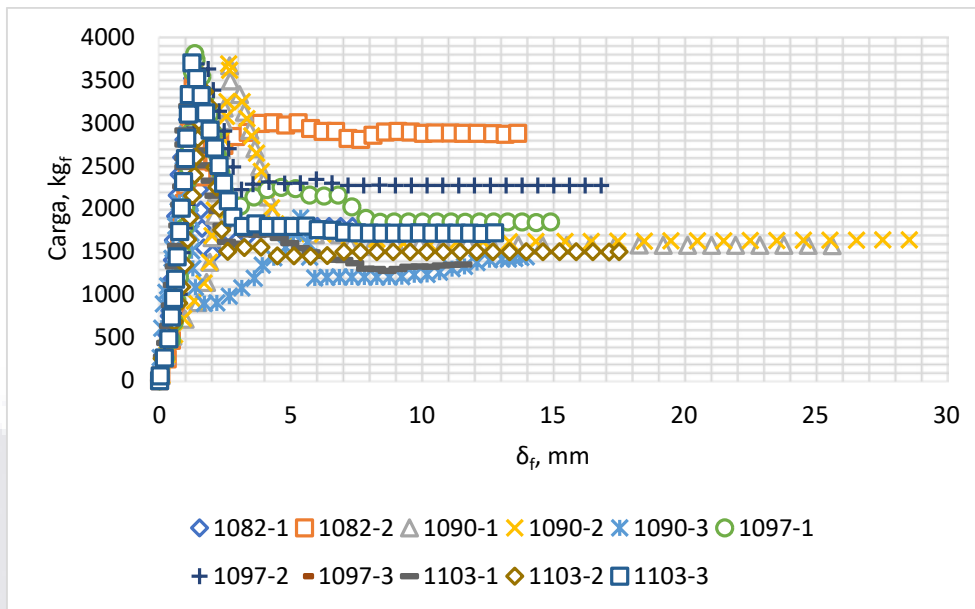
Curva carga – deflexión PFR03.



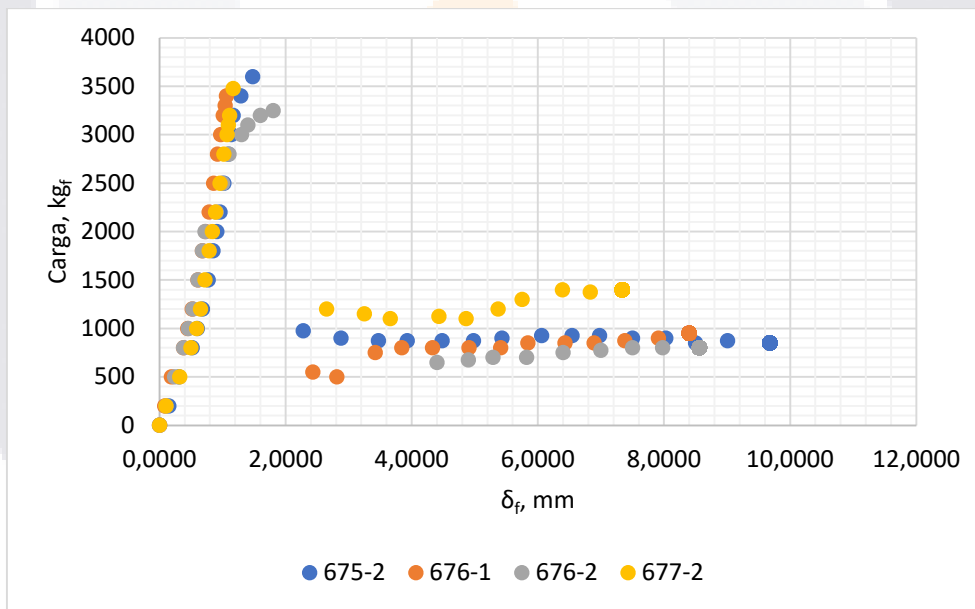
Curva carga – deflexión PFR04.



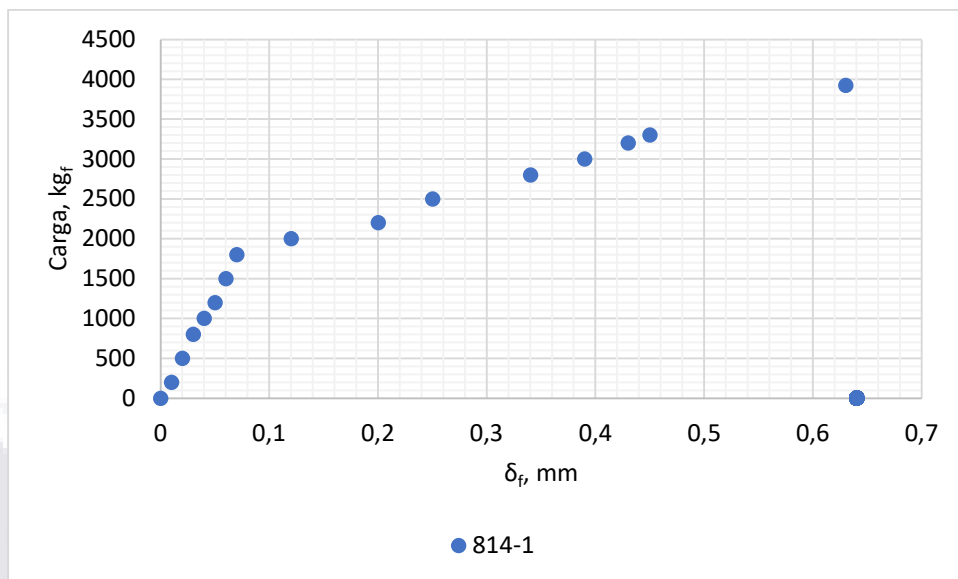
Curva carga – deflexión PFR05.



Curva carga – deflexión PFR06.

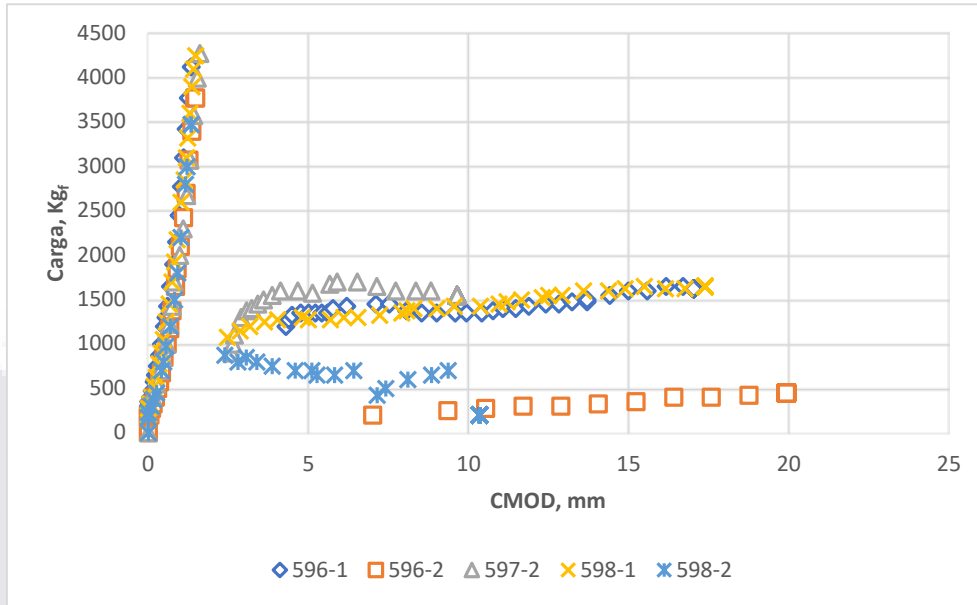


Curva carga – deflexión PFR07.

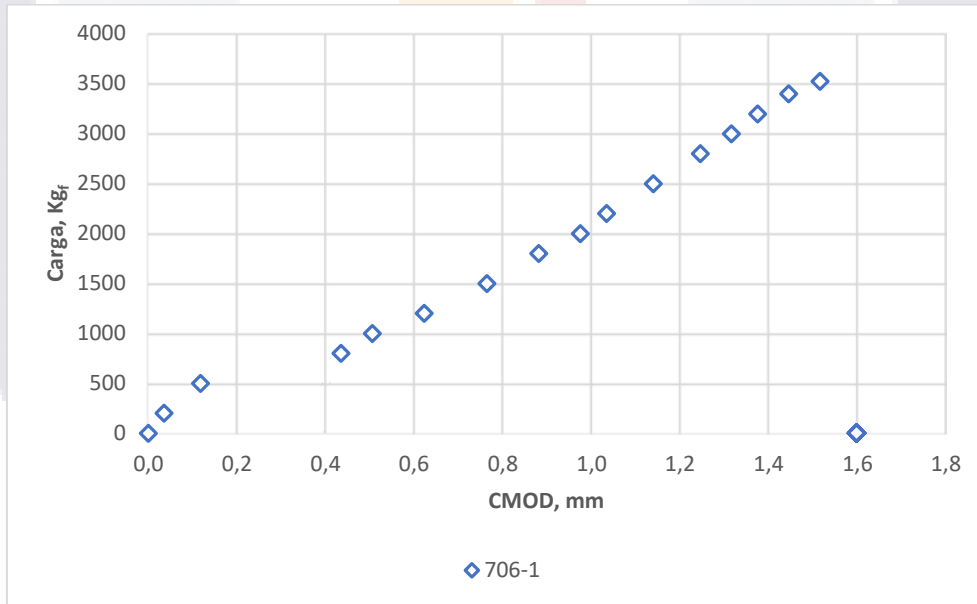


Curva carga – deflexión PFR08.

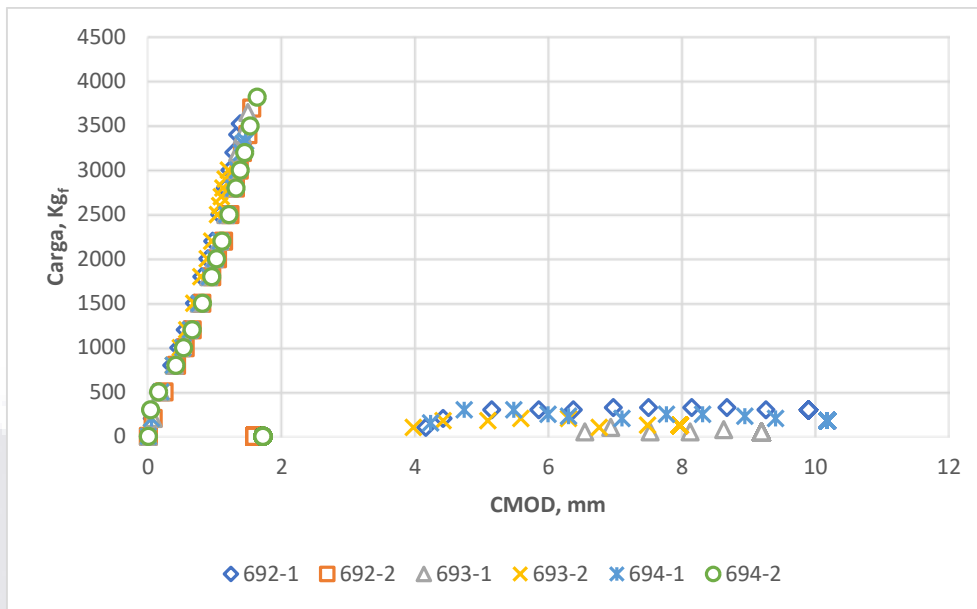
Anexo C. Curvas cargas – CMOD a flexión.



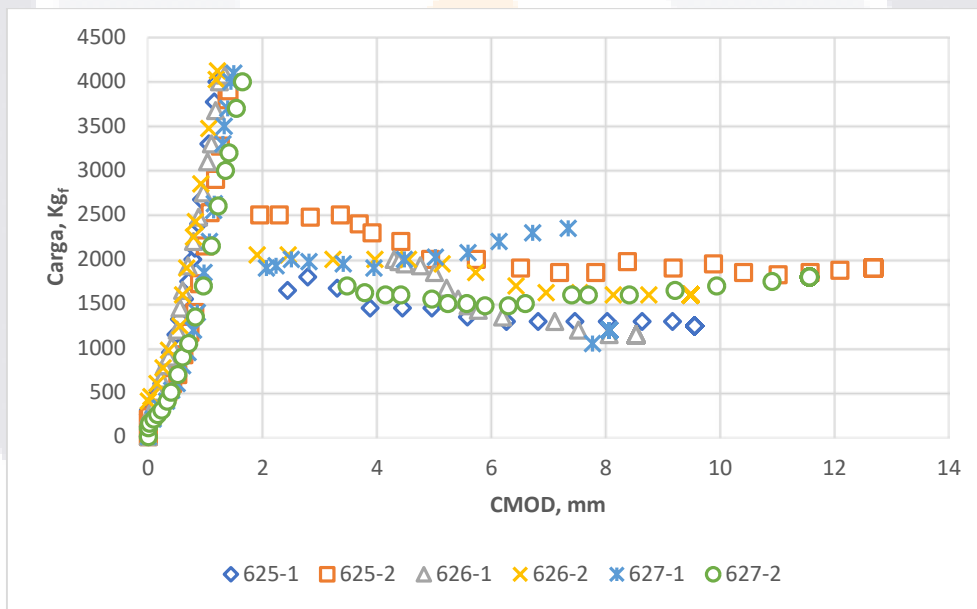
Curva carga – CMOD SFR01.



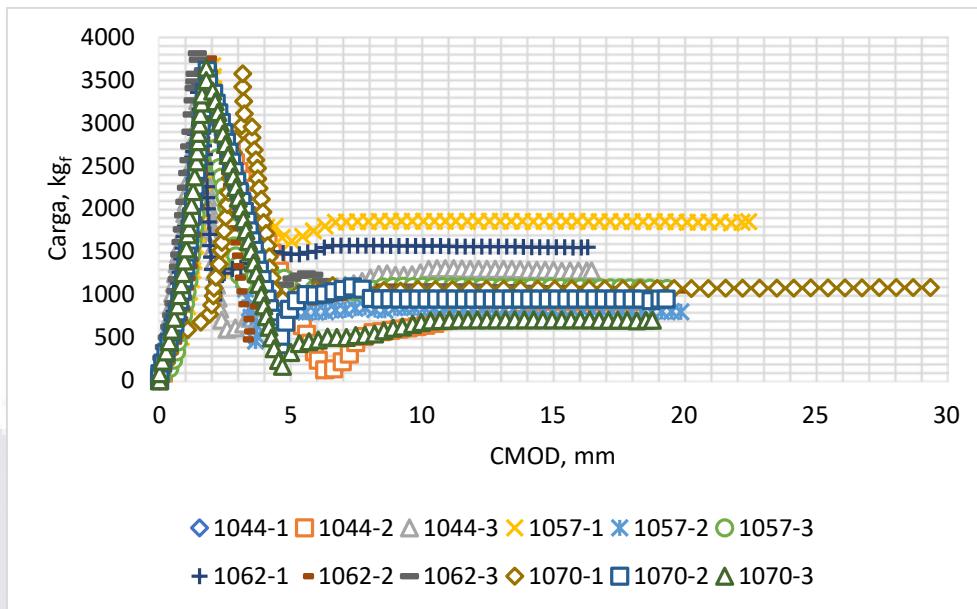
Curva carga – CMOD SFR02.



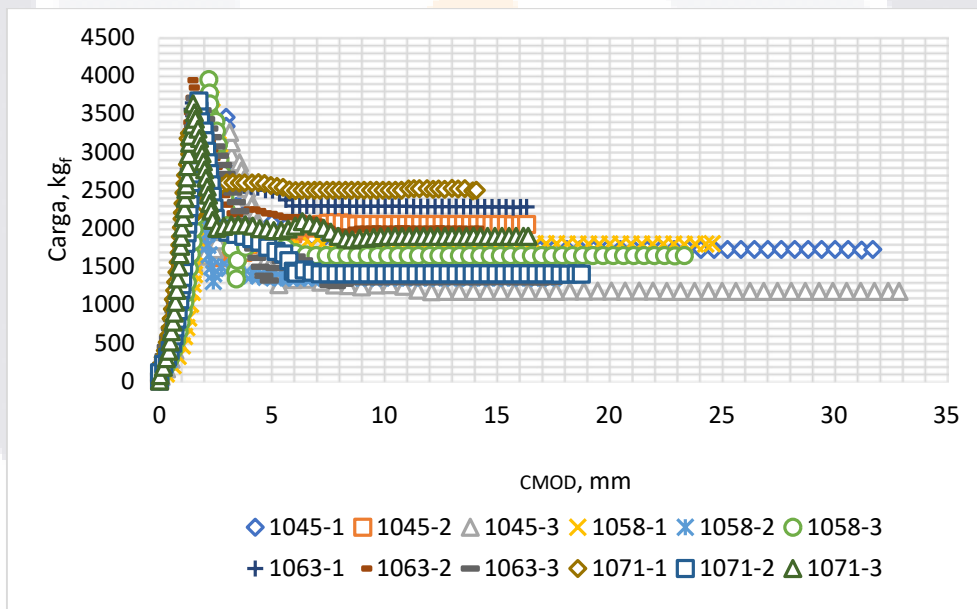
Curva carga – CMOD SFR03.



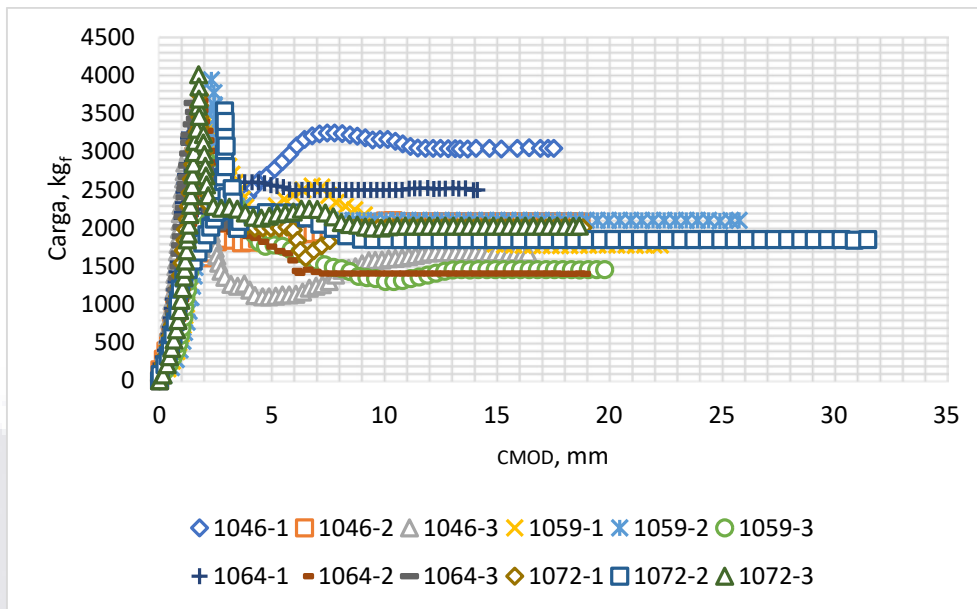
Curva carga – CMOD SFR04.



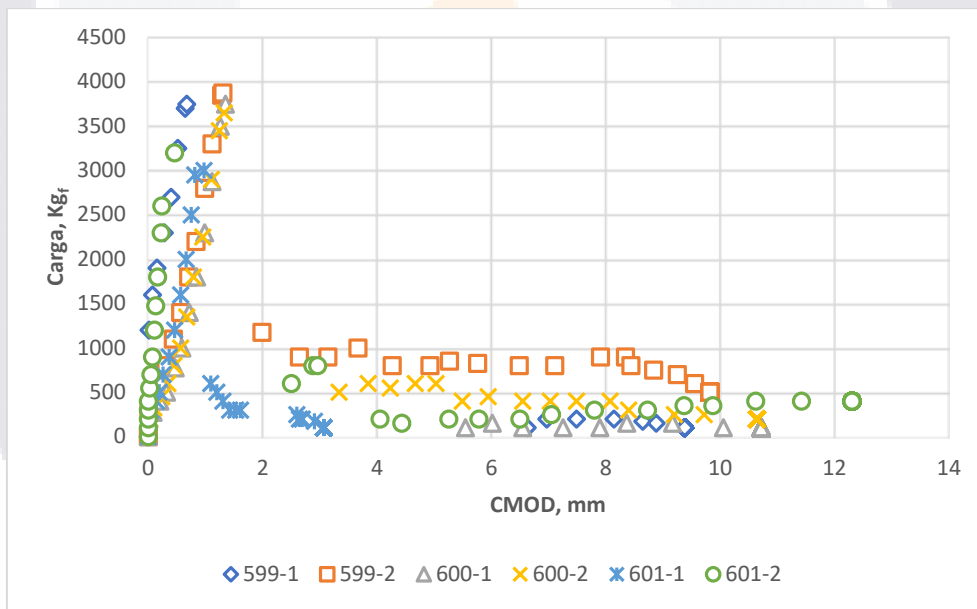
Curva carga – CMOD SFR05.



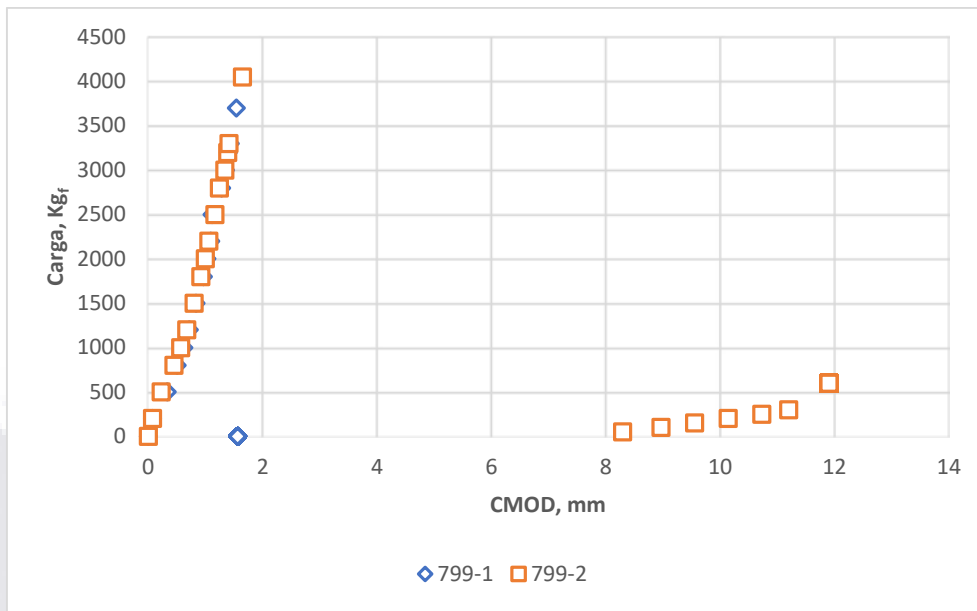
Curva carga – CMOD SFR06.



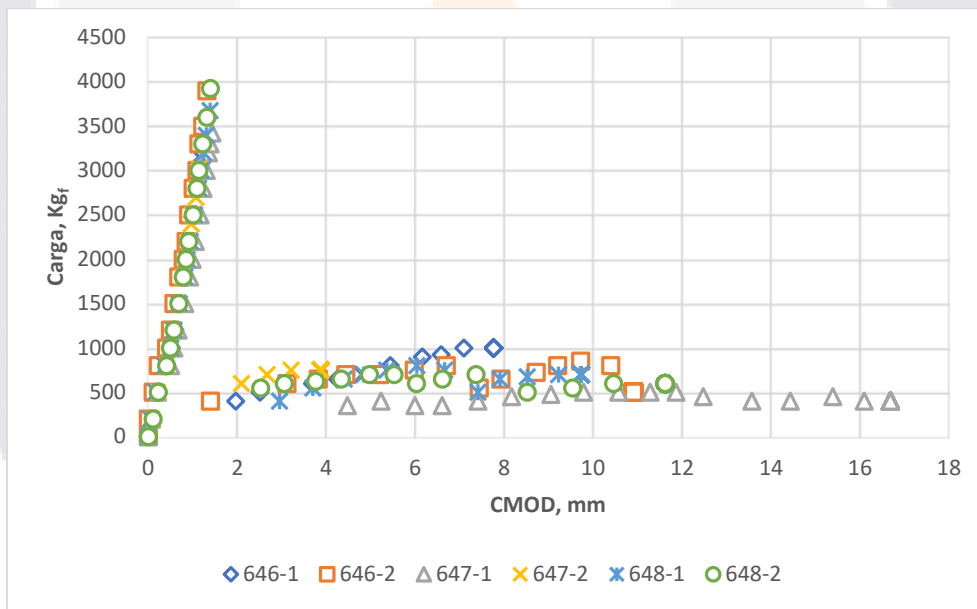
Curva carga – CMOD SFR07.



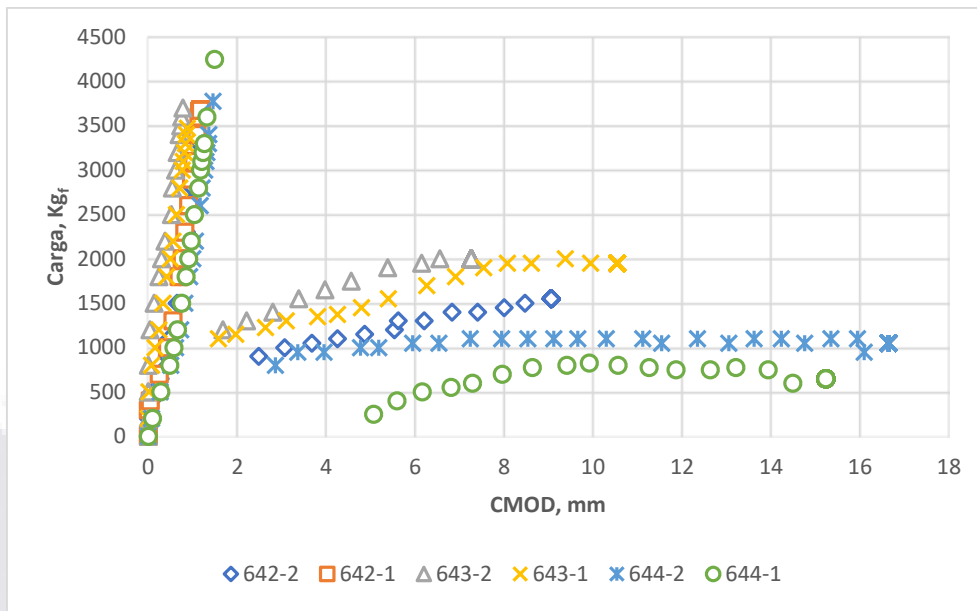
Curva carga – CMOD SFR08.



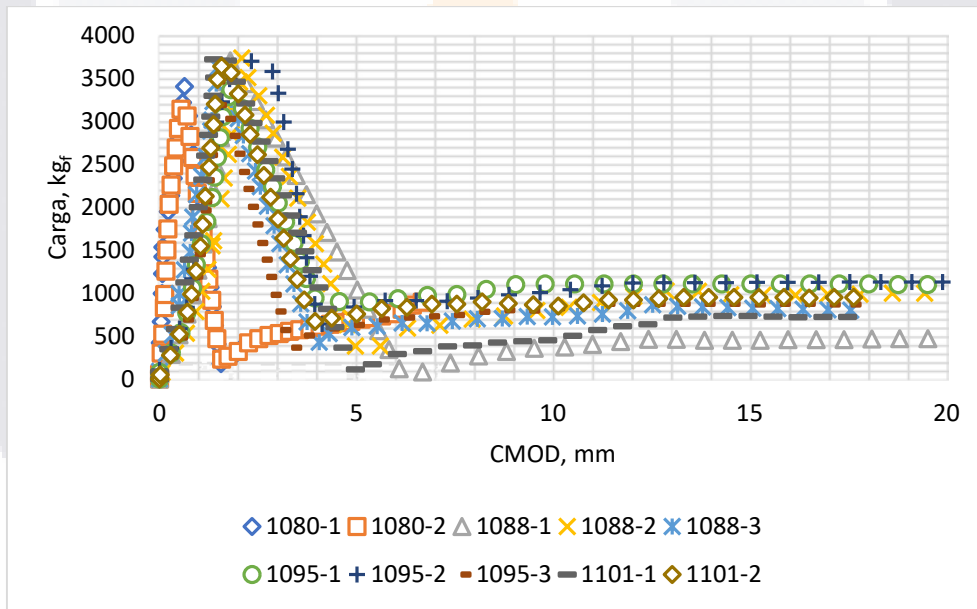
Curva carga – CMOD SFR09.



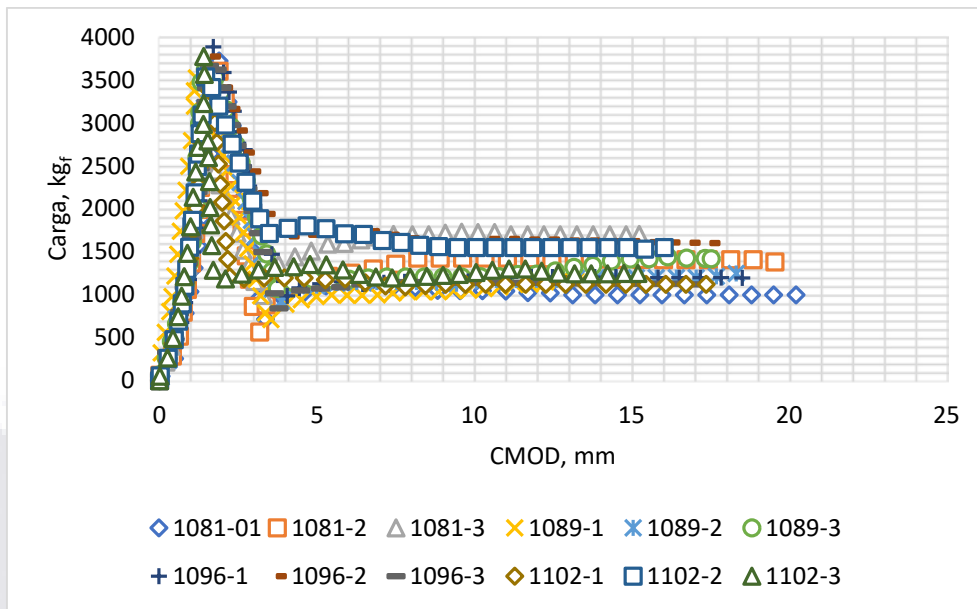
Curva carga – CMOD PFR01.



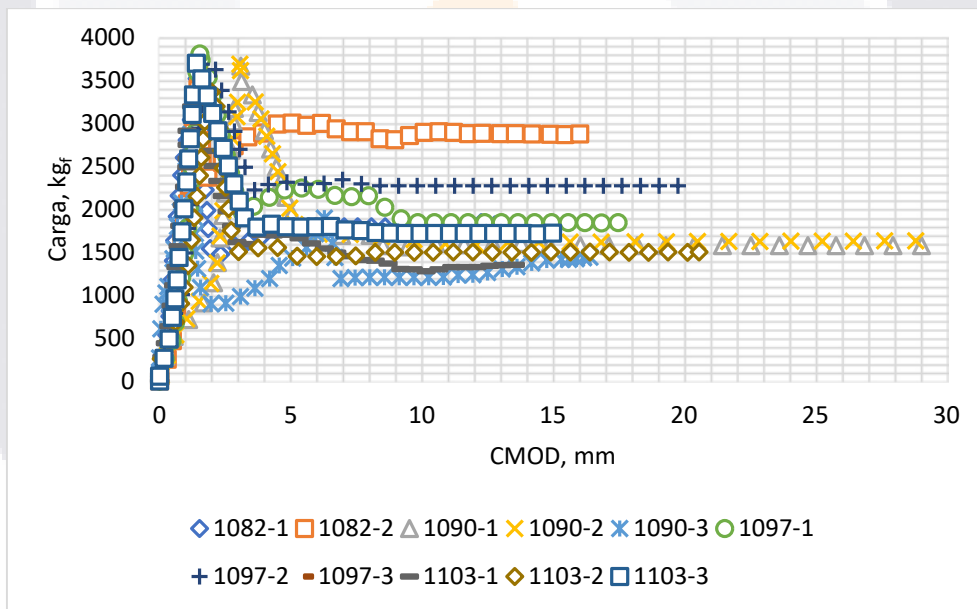
Curva carga – CMOD PFR03.



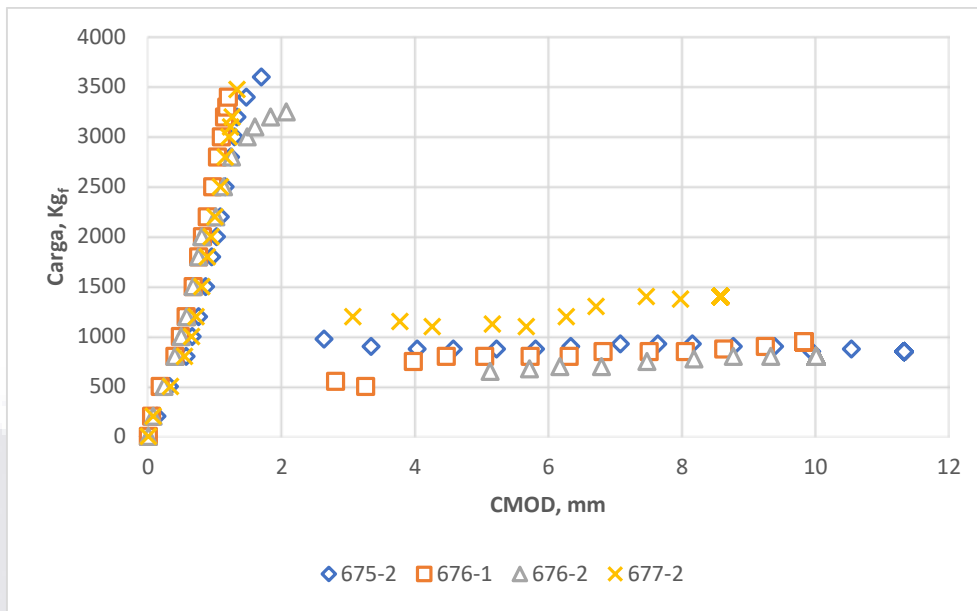
Curva carga – CMOD PFR04.



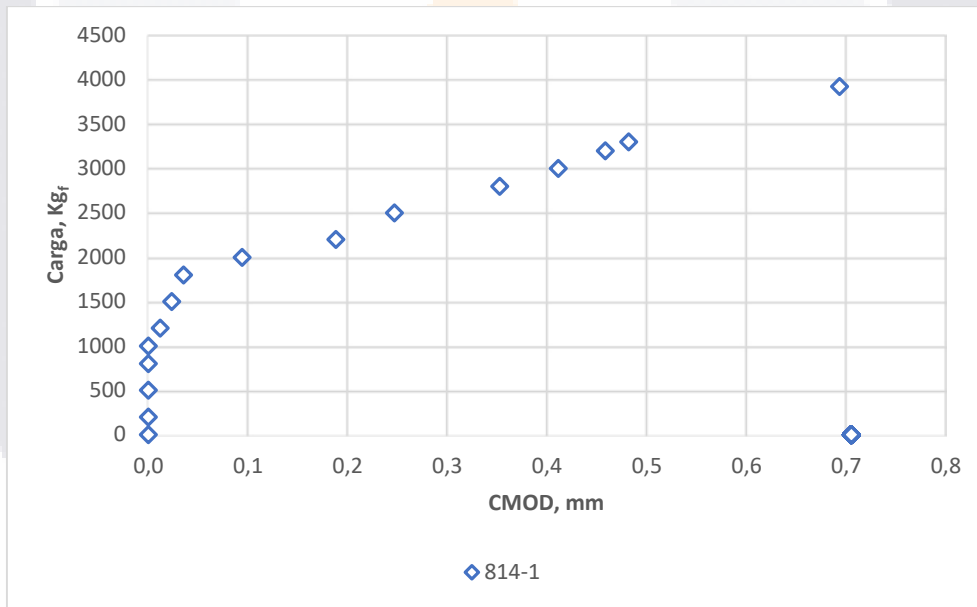
Curva carga – CMOD PFR05.



Curva carga – CMOD PFR06.

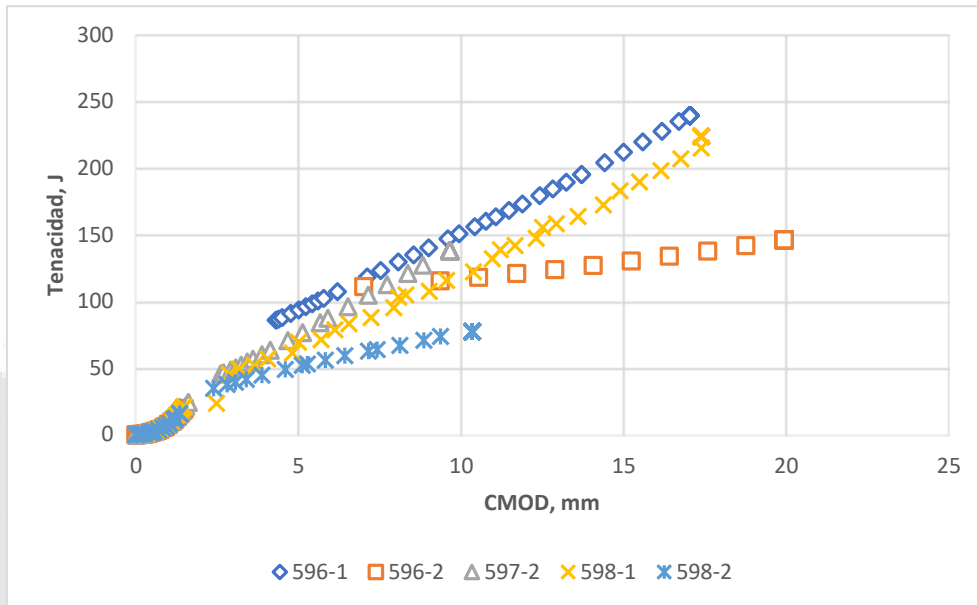


Curva carga – CMOD PFR07.

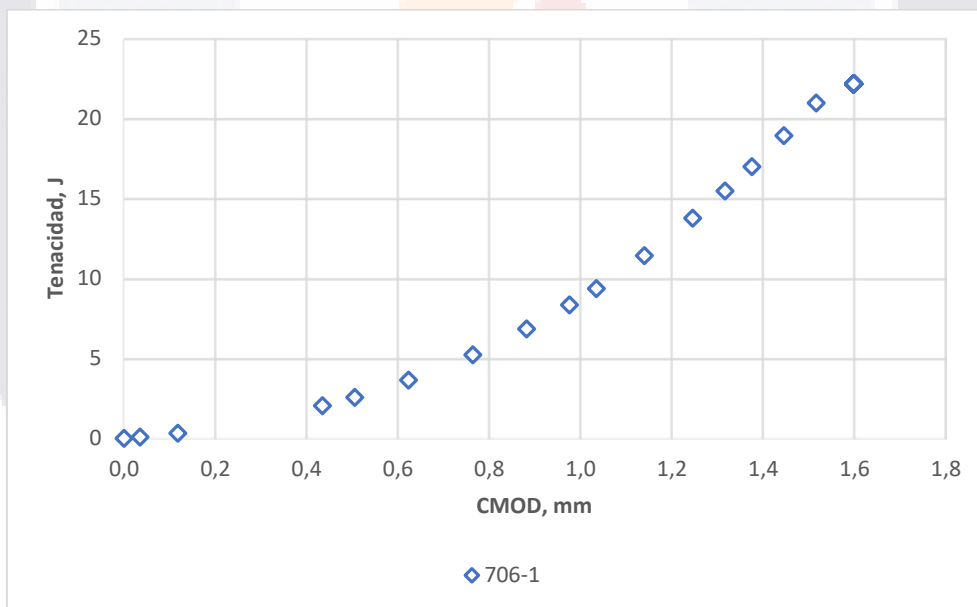


Curva carga – CMOD PFR08.

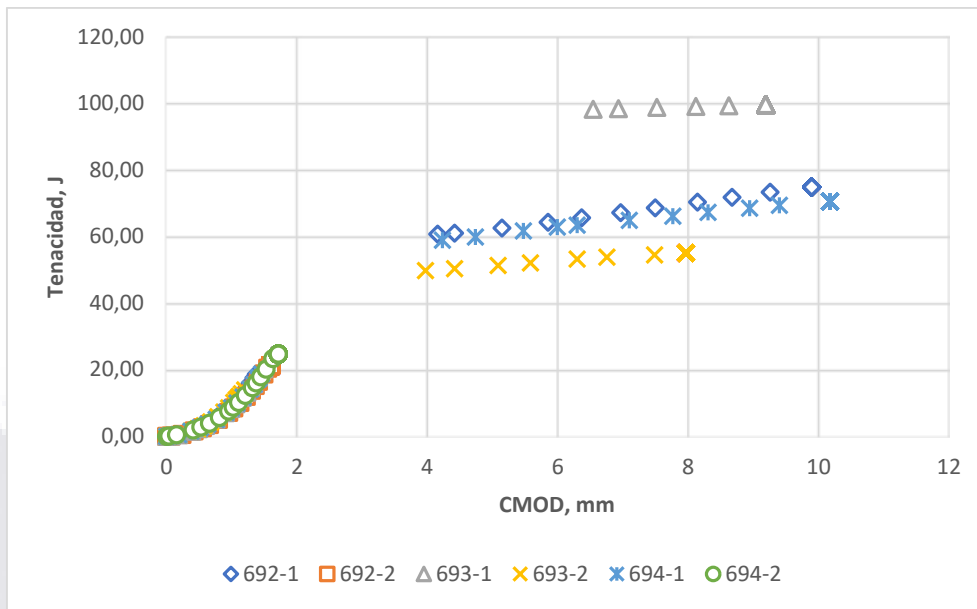
Anexo D. Curvas tenacidad – CMOD a flexión.



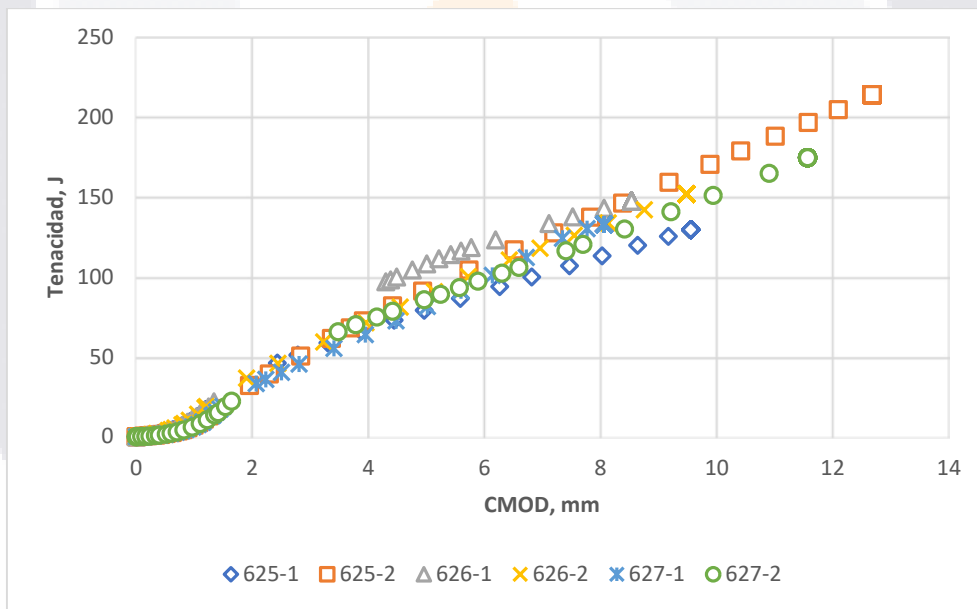
Curva tenacidad – CMOD SFR01.



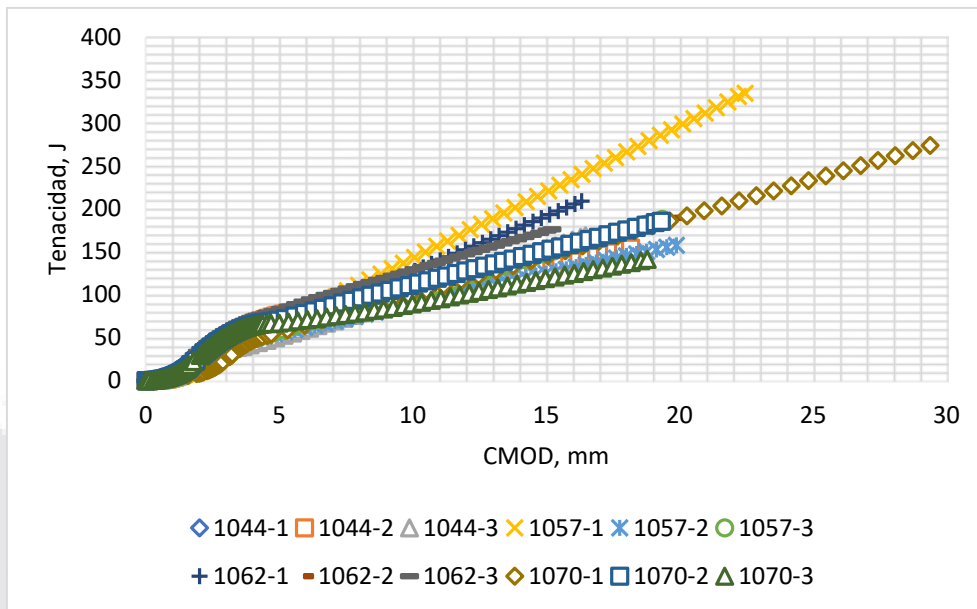
Curva tenacidad – CMOD SFR02.



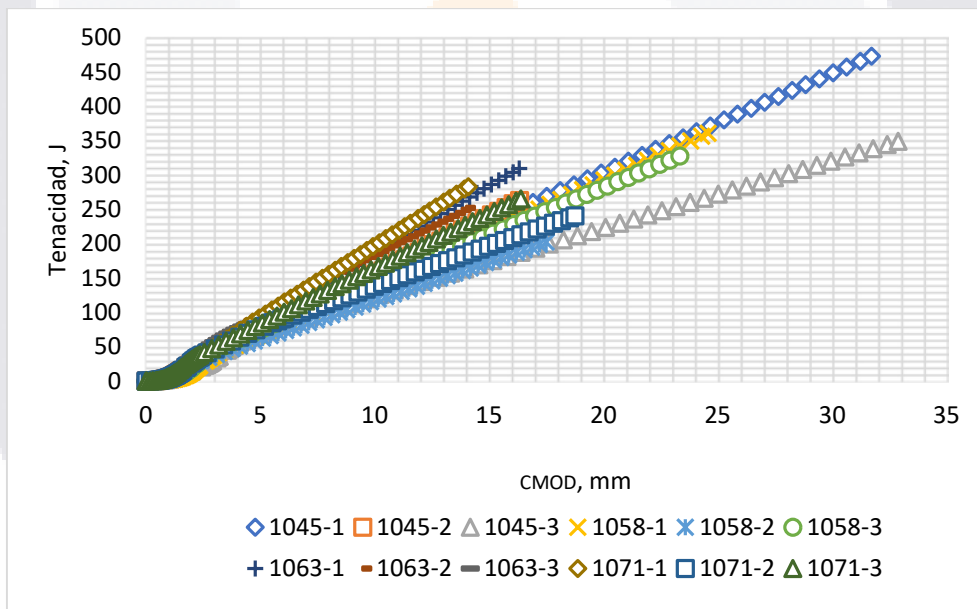
Curva tenacidad – CMOD SFR03.



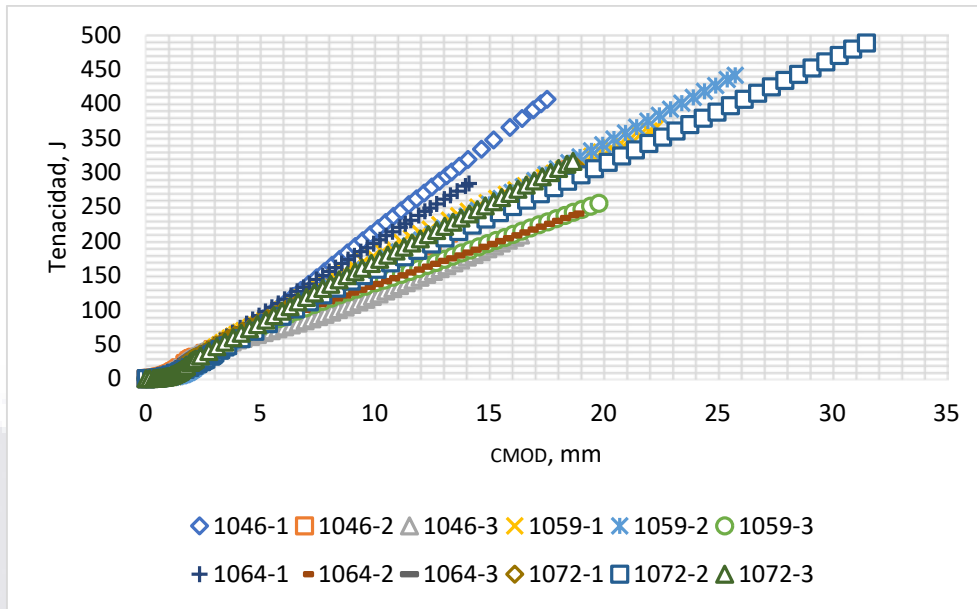
Curva tenacidad – CMOD SFR04.



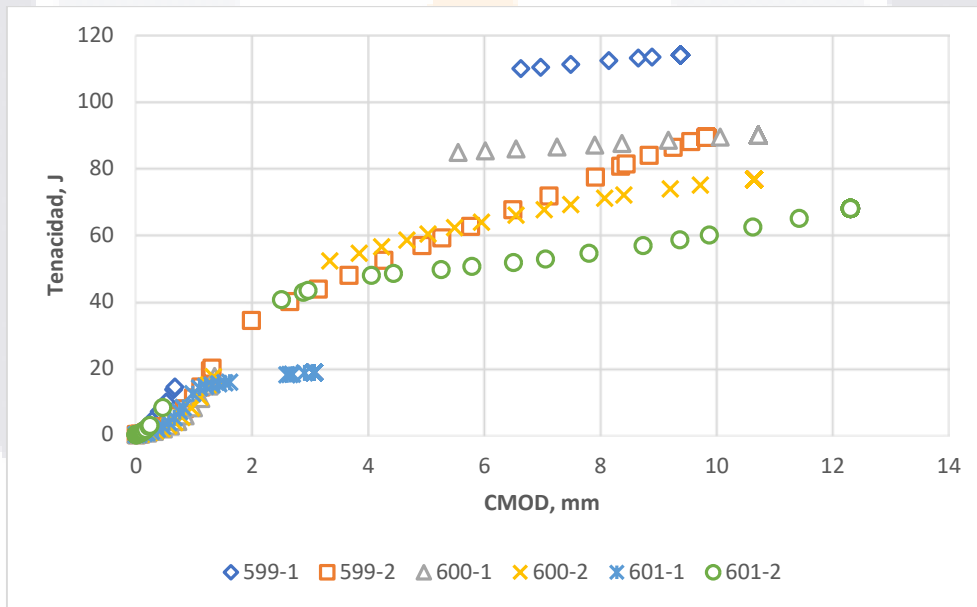
Curva tenacidad – CMOD SFR05.



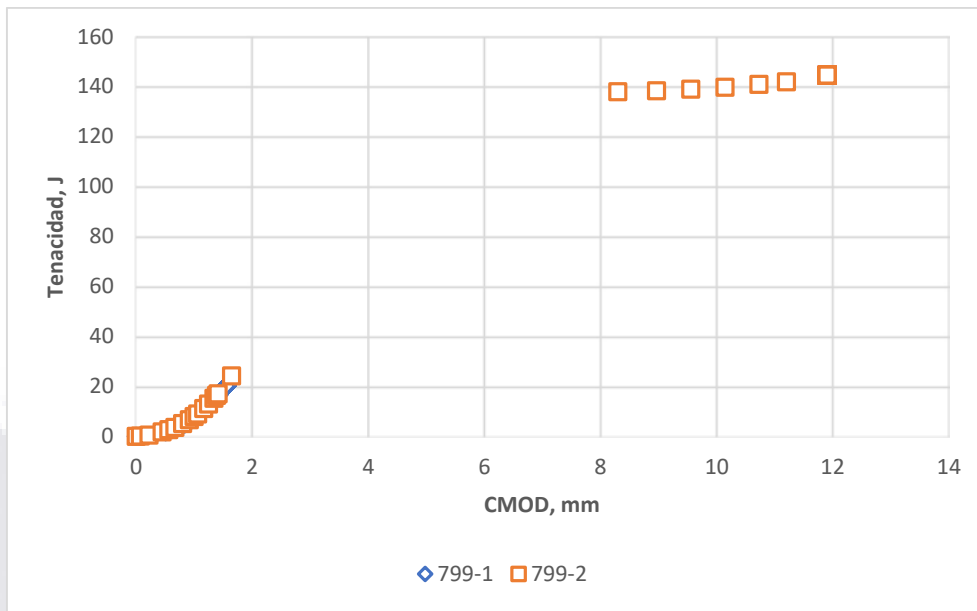
Curva tenacidad – CMOD SFR06.



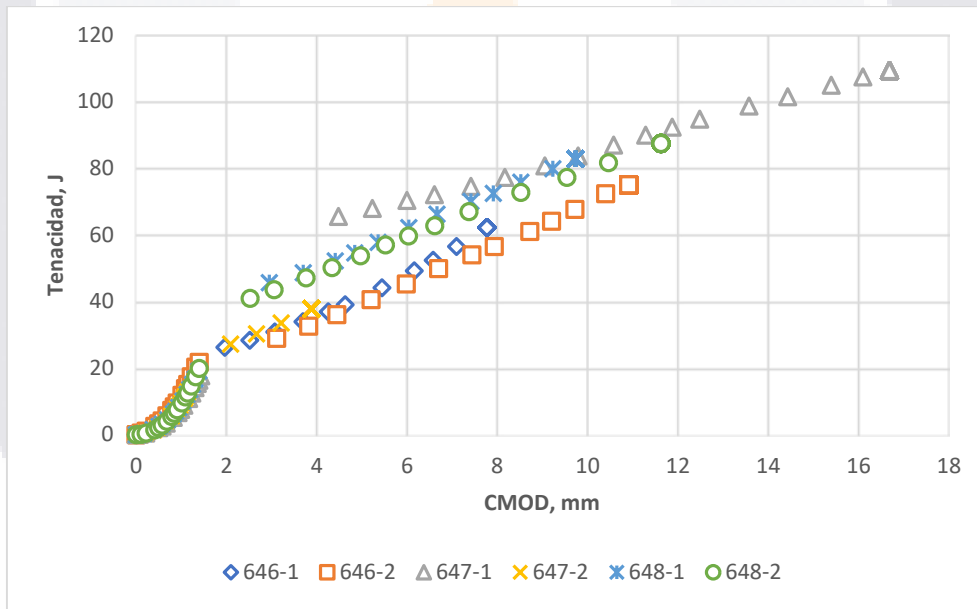
Curva tenacidad – CMOD SFR07.



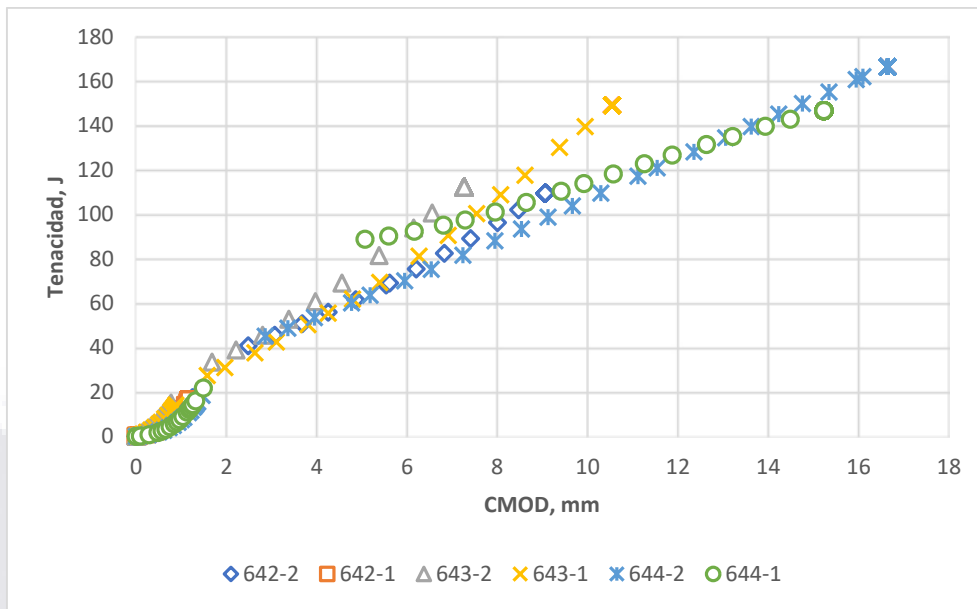
Curva tenacidad – CMOD SFR08.



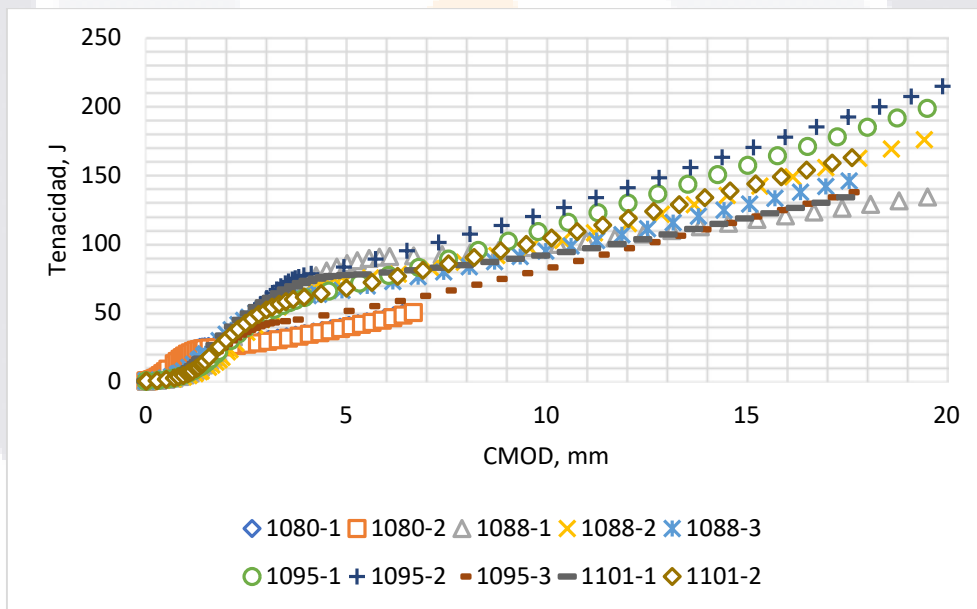
Curva tenacidad – CMOD SFR09.



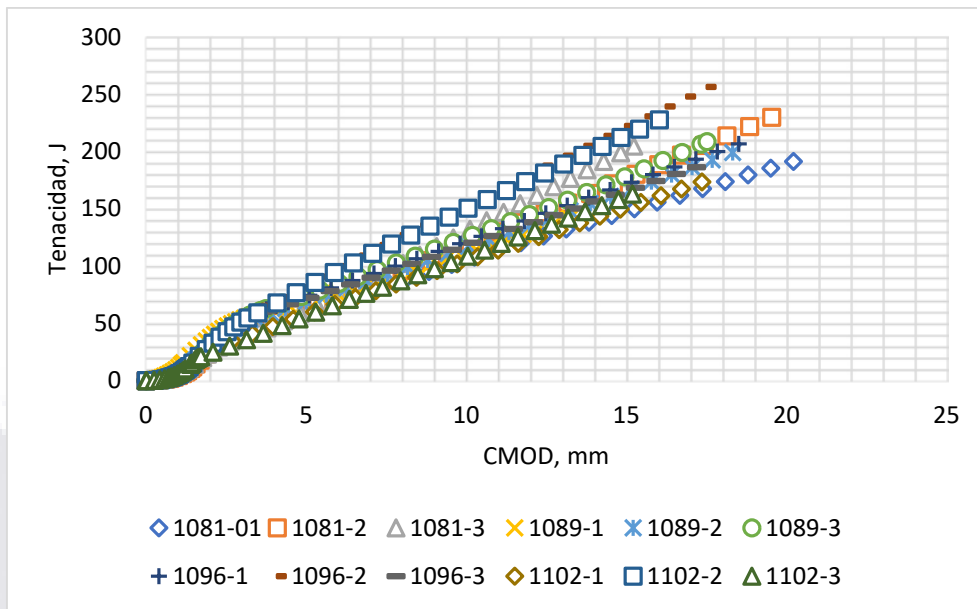
Curva tenacidad – CMOD PFR01.



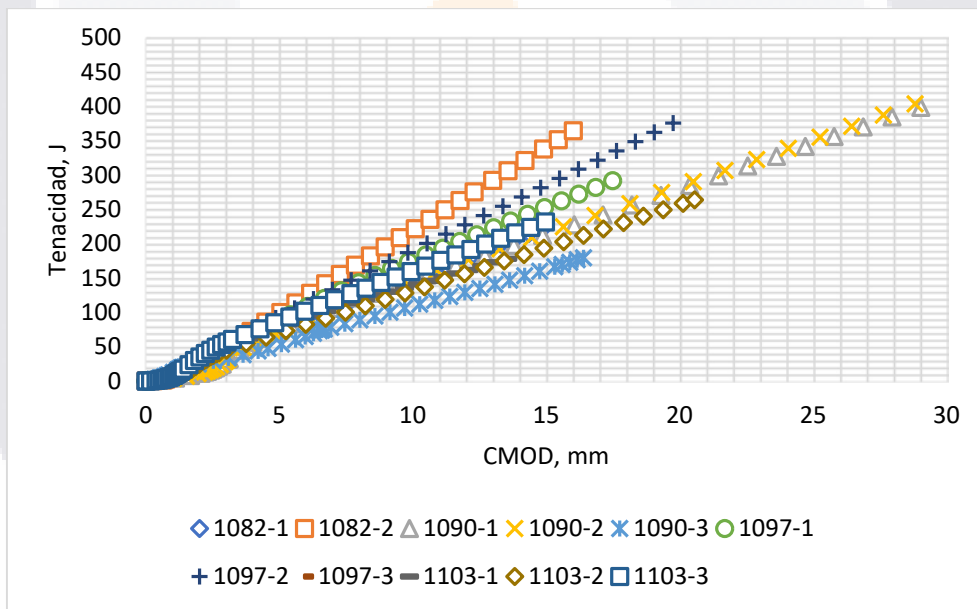
Curva tenacidad – CMOD PFR03.



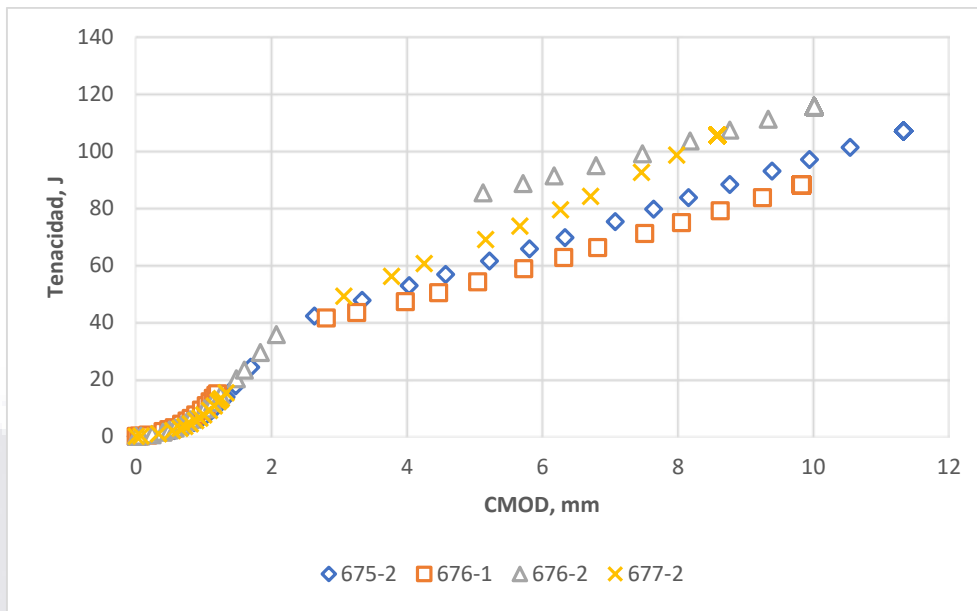
Curva tenacidad – CMOD PFR04.



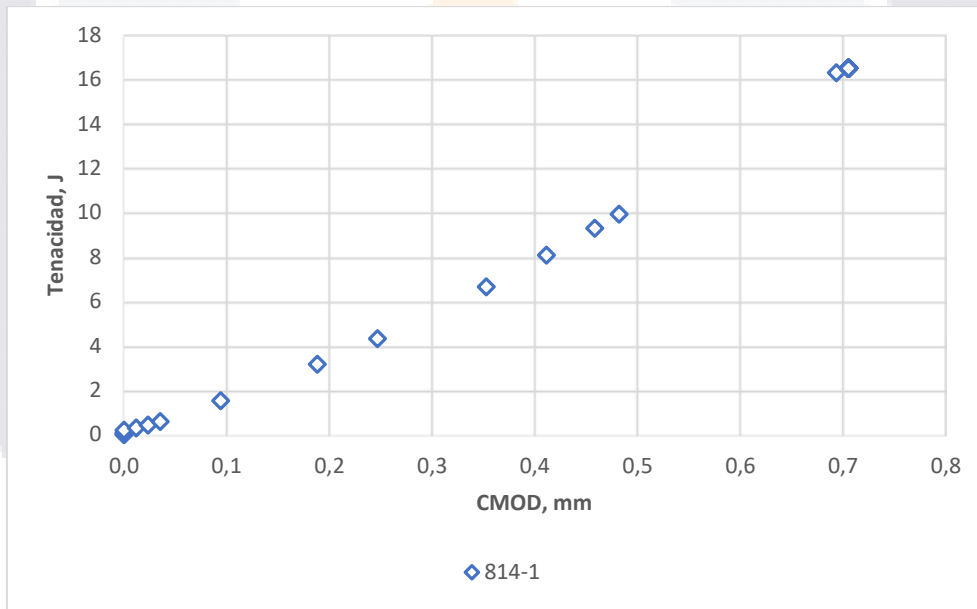
Curva tenacidad – CMOD PFR05.



Curva tenacidad – CMOD PFR06.



Curva tenacidad – CMOD PFR07.



Curva tenacidad – CMOD PFR08.

Anexo E. Resultados de modelos.

Tabla E.1 Resultados del modelo a compresión y módulo de elasticidad, con su respectivo error relativo porcentual (ϵ_r).

Grupo	f'_c *	ϵ_r	ME*	ϵ_r
SFR01	30.80	8.44%	47.67	5.61%
SFR01	30.80	4.65%	47.67	3.91%
SFR02	30.53	10.47%	47.24	5.67%
SFR02	30.53	9.96%	47.24	1.46%
SFR02	30.53	23.17%	47.24	5.56%
SFR03	31.04	13.49%	47.74	2.38%
SFR03	31.04	1.74%	47.74	3.55%
SFR03	31.04	7.43%	47.74	1.31%
SFR04	31.44	3.35%	48.72	9.42%
SFR04	31.44	10.63%	48.72	5.97%
SFR04	31.44	3.32%	48.72	7.97%
SFR05	31.27	3.47%	48.32	0.54%
SFR05	31.27	3.44%	48.32	2.50%
SFR05	31.27	4.84%	48.32	6.17%
SFR05	31.27	3.15%	48.32	2.64%
SFR05	31.27	6.52%	48.32	1.71%
SFR05	31.27	1.31%	48.32	3.38%
SFR05	31.27	3.83%	48.32	0.55%
SFR05	31.27	2.14%	48.32	2.32%
SFR06	31.48	1.77%	48.81	0.52%
SFR06	31.48	1.55%	48.81	0.79%
SFR06	31.48	1.76%	48.81	1.95%
SFR06	31.48	1.12%	48.81	4.30%
SFR06	31.48	2.23%	48.81	3.64%
SFR06	31.48	3.54%	48.81	4.99%
SFR06	31.48	3.16%	48.81	0.20%
SFR06	31.48	6.08%	48.81	0.64%
SFR07	31.69	0.36%	49.31	2.11%
SFR07	31.69	3.05%	49.31	0.17%
SFR07	31.69	5.75%	49.31	4.40%
SFR07	31.69	12.19%	49.31	5.22%
SFR07	31.69	3.20%	49.31	3.74%
SFR07	31.69	4.51%	49.31	0.30%
SFR07	31.69	0.17%	49.31	4.24%

SFR07	31.69	1.02%	49.31	3.21%
SFR08	31.23	3.03%	48.02	0.37%
SFR08	31.23	1.96%	48.02	6.40%
SFR09	29.42	2.44%	46.40	0.02%
PFR01	32.80	0.48%	47.27	1.30%
PFR01	32.80	2.51%	47.27	1.98%
PFR01	32.80	2.17%	47.27	5.86%
PFR02	31.30	0.06%	47.17	1.98%
PFR02	31.30	5.89%	47.17	3.19%
PFR02	31.30	5.72%	47.17	1.54%
PFR03	31.08	0.29%	48.22	6.12%
PFR03	31.08	9.21%	48.22	2.24%
PFR03	31.08	5.10%	48.22	2.36%
PFR04	31.32	0.43%	48.39	3.43%
PFR04	31.32	2.02%	48.39	0.98%
PFR04	31.32	0.53%	48.39	2.90%
PFR04	31.32	1.86%	48.39	2.05%
PFR04	31.32	0.11%	48.39	1.08%
PFR04	31.32	15.94%	48.39	3.77%
PFR04	31.32	9.83%	48.39	0.47%
PFR04	31.32	4.21%	48.39	6.07%
PFR05	30.75	8.23%	47.98	4.12%
PFR05	30.75	5.34%	47.98	3.27%
PFR05	30.75	1.29%	47.98	0.93%
PFR05	30.75	0.98%	47.98	2.00%
PFR05	30.75	1.44%	47.98	3.50%
PFR05	30.75	3.28%	47.98	4.38%
PFR05	30.75	11.49%	47.98	7.91%
PFR05	30.75	1.41%	47.98	6.65%
PFR06	30.18	5.78%	47.57	4.21%
PFR06	30.18	5.95%	47.57	4.04%
PFR06	30.18	5.30%	47.57	4.11%
PFR06	30.18	4.57%	47.57	3.03%
PFR06	30.18	3.00%	47.57	5.26%
PFR06	30.18	4.57%	47.57	3.39%
PFR06	30.18	6.25%	47.57	5.47%
PFR06	30.18	12.27%	47.57	0.92%
PFR07	31.08	7.55%	48.03	7.06%
PFR07	31.08	5.86%	48.03	0.80%
PFR07	31.08	4.13%	48.03	2.85%
PFR08	31.38	6.09%	48.41	15.65%

Tabla E.2 Resultados del modelo de esfuerzo residual a tensión y su error relativo porcentual (ϵ_r).

Grupo	$f_{e,3}$	ϵ_r
SFR01	47.21	19.99%
SFR01	47.21	5.59%
SFR01	47.21	10.93%
SFR01	47.21	0.44%
SFR01	47.21	7.29%
SFR03	47.67	6.53%
SFR03	47.67	4.67%
SFR03	47.67	8.33%
SFR03	47.67	8.33%
SFR04	51.39	6.57%
SFR04	51.39	12.90%
SFR04	51.39	23.30%
SFR04	51.39	6.57%
SFR04	51.39	4.88%
SFR04	51.39	12.90%
SFR04	49.41	7.41%
SFR04	49.41	14.90%
SFR04	49.41	12.29%
SFR04	49.41	14.90%
SFR04	49.41	7.41%
SFR04	49.41	2.94%
SFR04	49.41	9.80%
SFR04	49.41	9.80%
SFR04	49.41	11.77%
SFR04	49.41	41.17%
SFR04	49.41	0.83%
SFR04	49.41	5.13%
SFR04	51.88	7.35%
SFR04	51.88	7.35%
SFR04	51.88	17.92%
SFR04	51.88	10.39%
SFR04	51.88	10.39%
SFR04	51.88	10.39%
SFR04	51.88	10.55%
SFR04	51.88	18.93%
SFR04	51.88	8.98%
SFR04	51.88	26.55%

SFR04	51.88	1.73%
SFR04	51.88	5.89%
SFR04	54.36	0.66%
SFR04	54.36	6.59%
SFR04	54.36	4.63%
SFR04	54.36	2.56%
SFR04	54.36	20.80%
SFR04	54.36	2.93%
SFR04	54.36	16.37%
SFR04	54.36	2.56%
SFR04	54.36	2.93%
SFR04	54.36	0.66%
SFR04	54.36	13.25%
SFR04	54.36	10.94%
SFR08	51.14	10.28%
SFR08	51.14	18.94%
SFR08	51.14	4.37%
SFR08	51.14	1.65%
SFR08	51.14	0.28%
PFR01	45.13	25.35%
PFR01	45.13	61.16%
PFR01	45.13	13.22%
PFR01	45.13	7.44%
PFR01	45.13	3.99%
PFR01	45.13	7.44%
PFR03	49.14	2.38%
PFR03	49.14	2.38%
PFR03	49.14	5.49%
PFR03	49.14	1.71%
PFR03	49.14	4.56%
PFR03	47.95	36.99%
PFR03	47.95	41.02%
PFR03	47.95	4.23%
PFR03	47.95	8.97%
PFR03	47.95	9.53%
PFR03	47.95	7.79%
PFR03	47.95	25.08%
PFR03	47.95	6.55%
PFR03	47.95	0.11%
PFR03	47.95	2.15%
PFR03	50.85	13.01%

PFR03	50.85	10.55%
PFR03	50.85	10.78%
PFR03	50.85	12.32%
PFR03	50.85	5.83%
PFR03	50.85	9.19%
PFR03	50.85	0.29%
PFR03	50.85	12.32%
PFR03	50.85	4.05%
PFR03	50.85	21.08%
PFR03	50.85	13.81%
PFR03	50.85	21.08%
PFR03	53.76	0.44%
PFR03	53.76	13.29%
PFR03	53.76	16.87%
PFR03	53.76	31.13%
PFR03	53.76	14.39%
PFR03	53.76	5.68%
PFR03	53.76	11.87%
PFR03	53.76	16.87%
PFR03	53.76	14.66%
PFR03	53.76	7.52%
PFR03	53.76	13.29%
PFR07	47.27	1.51%
PFR07	47.27	0.58%
PFR07	47.27	27.27%
PFR07	47.27	14.05%

Anexo F. Parámetros de daño y deformación para uso del modelo de daño plástico en ABAQUS.

Tabla F1. Parámetros de deformación y daño ABAQUS a compresión.

ϵ_c	σ_c (MPa)	d_c	ϵ^{el}_c	ϵ^{in}_c	ϵ^{pl}_c
0	0.00	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
0.0006	4.98	0.00	0.00011	0.00049	0.00049
0.0012	9.22	0.00	0.00021	0.00099	0.00099
0.0018	12.72	0.00	0.00029	0.00151	0.00151
0.0024	15.47	0.00	0.00035	0.00205	0.00205
0.003	17.48	0.00	0.00039	0.00261	0.00261
0.0036	18.75	0.00	0.00042	0.00318	0.00318
0.0042	19.27	0.00	0.00043	0.00377	0.00377
0.0048	18.37	0.00	0.00041	0.00439	0.00439
0.0054	17.21	0.00	0.00039	0.00501	0.00501
0.006	16.06	0.00	0.00036	0.00564	0.00564
0.0066	14.90	0.00	0.00033	0.00627	0.00627
0.0072	13.74	0.00	0.00031	0.00689	0.00689
0.0078	12.58	0.00	0.00028	0.00752	0.00752
0.0084	11.43	0.00	0.00026	0.00814	0.00814
0.009	10.27	0.47	0.00023	0.00877	0.00857
0.0096	9.11	0.53	0.00020	0.00940	0.00917
0.0102	7.95	0.59	0.00018	0.01002	0.00977
0.0108	6.80	0.65	0.00015	0.01065	0.01037
0.0114	5.64	0.71	0.00013	0.01127	0.01097
0.012	4.48	0.77	0.00010	0.01190	0.01157

Tabla F2. Parámetros de deformación y daño ABAQUS a tensión.

E	σ_t (MPa)	d_t	ϵ^{el}_t	ϵ^{ck}_t	ϵ^{pl}_t
0	0	0	0	0	0
0.000175	1.65	0	0.000037	0.00013792	0.00013792
0.000525	1.10	0.33	0.000025	0.00050028	0.00048792
0.001028125	0.62	0.63	0.000014	0.00101422	0.00099104
0.0018375	0.28	0.83	0.000006	0.00183132	0.00180042
0.0028	0.00	0.99	0.000000	0.0028	0.0028

