CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

TESIS

ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA DE LA MASA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES NO-LINEALES DE REACCIÓN-DIFUSIÓN FRACCIONARIAS

PRESENTA

Eric Ruvalcaba Robles

PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS

TUTOR

Dr. José Villa Morales

COMITÉ TUTORAL

Dr. Jorge Eduardo Macías Díaz
Dr. Manuel Ramírez Aranda

Aguascalientes, Ags., 8 de febrero de 2016

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE AGUASCALIENTES

ERIC RUVALCABA ROBLES
MAESTRIA EN CIENCIAS CON OPCION
A LA COMPUTACION Y MATEMATICAS APLICADAS
P R E S E N T E.

Estimado alumno:

Por medio de este conducto me permito comunicar a Usted que habiendo recibido los votos aprobatorios de los revisores de su trabajo de tesis y/o caso práctico titulado: **"Estudio de la convergencia de la masa de un sistema de ecuaciones no-lineales de reacción-difusión fraccionarias",** hago de su conocimiento que puede imprimir dicho documento y continuar con los trámites para la presentación de su examen de grado.

Sin otro particular me permito saludarle muy afectuosamente.

A T E N T A M E N T E
Aguascalientes, Ags., a 03 de febrero de 2016
"Se lumen proferre"
EL DECANO

M. en C. JOSE DE JESUS RUIZ GALLEGOS

c.c.p.- Archivo.
JJRG,yscd

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES

FORMATO DE CARTA DE VOTO APROBATORIO

M. en C. José de Jesús Ruiz Gallegos
DECANO DEL CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS
PRESENTE

Por medio de la presente, en mi calidad de tutor designado del estudiante **ERIC RUVALCABA ROBLES** con ID 185013 quien realizó la tesis titulada: **ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA DE LA MASA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES NO-LINEALES DE REACCIÓN-DIFUSIÓN FRACCIONARIAS**, y con fundamento en el Artículo 175, Apartado II del Reglamento General de Docencia, me permito emitir el **VOTO APROBATORIO**, para que él pueda proceder a imprimirla, y así continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del grado.

Pongo lo anterior a su digna consideración y, sin otro particular por el momento, me permito enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"Se Lumen Proferre"
Aguascalientes, Ags., a 2 de febrero de 2016

Dr. José Villa Morales

c.c.p.- Interesado
c.c.p.- Secretaría de Investigación y Posgrado
c.c.p.- Jefatura del Depto. de Matemáticas y Física
c.c.p.- Consejero Académico
c.c.p.- Minuta Secretario Técnico

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES

FORMATO DE CARTA DE VOTO APROBATORIO

M. en C. José de Jesús Ruiz Gallegos
DECANO DEL CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS
PRESENTE

Por medio de la presente, en mi calidad de asesor designado del estudiante **ERIC RUVALCABA ROBLES** con ID 185013 quien realizó la tesis titulada: **ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA DE LA MASA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES NO-LINEALES DE REACCIÓN-DIFUSIÓN FRACCIONARIAS**, y con fundamento en el Artículo 175, Apartado II del Reglamento General de Docencia, me permito emitir el **VOTO APROBATORIO**, para que él pueda proceder a imprimirla, y así continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del grado.

Pongo lo anterior a su digna consideración y, sin otro particular por el momento, me permito enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"Se Lumen Proferre"
Aguascalientes, Ags., a 2 de febrero de 2016

Dr. Jorge Eduardo Macías Díaz

c.c.p.- Interesado
c.c.p.- Secretaría de Investigación y Posgrado
c.c.p.- Jefatura del Depto. de Matemáticas y Física
c.c.p.- Consejero Académico
c.c.p.- Minuta Secretario Técnico

UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE AGUASCALIENTES

FORMATO DE CARTA DE VOTO APROBATORIO

M. en C. José de Jesús Ruiz Gallegos
DECANO DEL CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS
PRESENTE

Por medio de la presente, en mi calidad de asesor designado del estudiante **ERIC RUVALCABA ROBLES** con ID 185013 quien realizó la tesis titulada: **ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA DE LA MASA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES NO-LINEALES DE REACCIÓN-DIFUSIÓN FRACCIONARIAS**, y con fundamento en el Artículo 175, Apartado II del Reglamento General de Docencia, me permito emitir el **VOTO APROBATORIO**, para que él pueda proceder a imprimirla, y así continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del grado.

Pongo lo anterior a su digna consideración y, sin otro particular por el momento, me permito enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"Se Lumen Proferre"
Aguascalientes, Ags., a 2 de febrero de 2016

Manuel Ram A

Dr. Manuel Ramírez Aranda

c.c.p.- Interesado
c.c.p.- Secretaría de Investigación y Posgrado
c.c.p.- Jefatura del Depto. de Matemáticas y Física
c.c.p.- Consejero Académico
c.c.p.- Minuta Secretario Técnico

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES

POSGRADOS UAA

DICTAMEN DE REVISIÓN DE LA TESIS / TRABAJO PRÁCTICO

DATOS DEL ESTUDIANTE	
NOMBRE: Eric Ruvalcaba Robles	ID (No. de Registro): 185013
PROGRAMA: Maestría en Ciencias con opción a la Computación, Matemáticas Aplicadas	ÁREA: Matemáticas Aplicadas
TUTOR/TURORES: José Villa Morales	
TESIS (x)	TRABAJO PRÁCTICO ( )
OBJETIVO: Estudiar el decaimiento asintótico de un sistema de ecuaciones fraccionarias.	

DICTAMEN	
CUMPLE CON CRÉDITOS ACADÉMICOS:	(x)
CONGRUENCIAS CON LAS LGAC DEL PROGRAMA:	(x)
CONGRUENCIA CON LOS CUERPOS ACADÉMICOS:	(x)
CUMPLE CON LAS NORMAS OPERATIVAS:	(x)
CONINCIDENCIA DEL OBJETIVO CON EL REGISTRO:	(x)

Aguascalientes, Ags. a 02 de Febrero de 2016

FIRMAS

José Villa Morales
CONSEJERO ACADÉMICO DEL ÁREA

Hermilo Sánchez Cruz
SECRETARIO TÉCNICO DEL POSGRADO

Juan Jáuregui Rincón
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

Código: FO-040200-23
Revisión: 00
Emisión: 21/02/11

Agradecimientos

"No hay deber más necesario que el de dar las gracias."
Cicerón

Gracias

A la Universidad Autónoma de Aguascalientes por las puertas abiertas, sin distinción o restricción alguna, para quienes buscamos ampliar nuestras capacidades.

Al Centro de Ciencias Básicas por permitirme incursionar en la rama de las Matemáticas, para complementar las bases de mi formación académica profesional.

Al Conacyt por darme la oportunidad y el apoyo para realizar esta Maestría dentro del Programa Nacional de Posgrados de Calidad.

Al Doctor José Villa Morales, mi tutor, por su guía y enseñanza; más aún, por su empatía y paciencia.

A los Doctores Jorge Eduardo Macías Díaz y Manuel Ramírez Aranda por su disposición y tiempo para la revisión de este trabajo.

A mis compañeras Ana y Mayté, por su apoyo, orientación y cercanía.

A los compañeros de generación de la opción de Computación, por sus deferencias.

Al personal de esta honorable Universidad Autónoma de Aguascalientes con quien tuve contacto, por su servicio y excelente trato.

A todos, sinceramente, muchas gracias.

Dedicatorias

"Si piensas que puedes, o piensas que no, tienes razón."
"Cualquier persona que deja de aprender es vieja, sea de veinte u ochenta. Cualquier persona que sigue aprendiendo se mantiene joven."
Henry Ford

A mi familia. Mi mayor motivación día a día.

A la memoria de mis padres. Su ejemplo persiste.

A mis hermanos. Unidos en la distancia.

A mis entrañables amigos José Refugio, Roberto (q.e.p.d.), Daniel y Gabriel. Mi gratitud por siempre.

Índice

Resumen

Se estudia un sistema de dos ecuaciones diferenciales con difusión fraccionaria con coeficientes dependientes del tiempo. Usando el teorema de punto fijo se demuestra la existencia local del sistema. Asumiendo la existencia de la solución mild se verifica que esta es una solución clásica del sistema. En general, se asume la positividad de la solución y se discute por qué este supuesto, para un sistema, no es fácil de verificar. Asumiendo la positividad de la solución, se estudia el comportamiento asintótico de la masa del sistema. A saber, primero se dan condiciones sobre los parámetros del sistema que garantizan la positividad de la masa y otras cuando esta se extingue. Más aún, restringiendo la condición temporal sobre la difusión del sistema, en caso de la positividad de la masa, se da una tasa del comportamiento asintótico de ésta. Cabe hacer notar que las condiciones que aquí se discuten generalizan otros trabajos anteriores.

Abstract

A system of two differential equations with fractional diffusion and time-dependent coefficients is studied. Using the fixed point theorem it is proved the local existence of the system. Assuming the existence of a mild solution it is verified that this is a classical solution of the system. In general, the positivity of the solution is assumed, and it is discussed why this postulation, referred to a system, is not easy to verify. Assuming the positivity of the solution, the asymptotic behaviour of system mass is studied. Namely, conditions on system parameters that guarantee the positivity of mass are given first, and then other ones for its extinguishing. Moreover, restricting the temporal condition on the diffusion system, in case of the positivity of mass, an asymptotic behaviour rate of it is given. Note that the conditions discussed here generalize previous works.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes históricos

Después de la invención del cálculo en el último tercio del siglo XVII, rápidamente los matemáticos de ese tiempo desarrollaron nuevos conceptos que aplicaron en la formulación precisa de fenónemos naturales hasta entonces solo estudiados mediante relaciones empíricas. La predicción de resultados a partir de la observación y modelos elaborados con las nuevas herramientas, marcaron un nuevo rumbo en el entendimiento de los fenómenos entonces conocidos.

La modelación de los procesos naturales se dió principalmente en el desarrollo y estudio de las ecuaciones diferenciales. En particular, el proceso de difusión, primeramente planteado por Fourier en 1807 en la ecuación de calor, se expresó como una ecuación diferencial del tipo

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) u(t,x) = 0.$$

Esta fórmula y otras desarrolladas como la ecuación de onda, las ecuaciones del movimiento y las de gravitación se expresaron en términos de primera y segunda derivada. Parecía natural que así fuera pues la derivación es una acción unitaria, entera, desde el punto de vista de quien hace la operación, y así lo confirmaba la naturaleza. Pero no para los matemáticos, que desde un principio se plantearon, al menos teóricamente, si era posible la derivación fraccionaria, hecho que se documenta en una carta de L'Hopital a Leibniz en 1695 donde le comentaba sobre la derivada de orden 1/2. Euler en 1738 elabora la primera generalización de la derivada ordinaria a fraccionaria, la que tenía sentido para funciones de potencias del tipo x^a. Fourier en 1822 definió una derivada de orden p arbitrario en términos de integrales.

Desarrollos posteriores en este campo dieron como resultado varios tipos de operador diferencial fraccionario. Así, por ejemplo tenemos los operadores fraccionarios de Riemann-Liouville, los de Weyl, las derivadas fraccionarias de Caputo, de Grünwald-Letnikov, de Marchaud, así como los operadores de integración y derivación fraccionaria de Riesz (ver el Capítulo 2 de [23]).

Por decirlo así, las matemáticas anticipaban la herramienta a usar en el posterior descubrimiento del comportamiento de los procesos reales.

1.2 Planteamiento del problema

La difusión es un proceso común en la naturaleza [16] en el cual tiene lugar el movimiento de una cantidad física de un lugar a otro en el tiempo, y su proceso es aleatorio. El ejemplo más conocido es el movimiento Browniano, que fue estudiado y descrito formalmente por Einstein en 1905, en el que el cuadrado del promedio del desplazamiento de una partícula suspendida en la superficie de un líquido es lineal en el tiempo de acuerdo a la relación $\langle r^2(t)\rangle \propto t$, donde $r(t)$ es el desplazamiento de la partícula al tiempo t y los corchetes indican la cantidad de desplazamientos considerados en el promedio; esta descripción de Einstein se denominó difusión normal, al pensarse que es el modo en que la difusión opera en la naturaleza. Sin embargo, a partir de la segunda década del siglo XX se han encontrado sistemas donde los desplazamientos crecen en el tiempo en la forma $\langle r^2(t)\rangle \propto t^\gamma$, con $\gamma > 0$. Así, se caracterizaron estos procesos como anómalos y se llamaron de superdifusión si $\gamma > 1$ y de subdifusión si $\gamma < 1$. Actualmente se reconoce que la denominación es contraria a la realidad, ya que la mayoría de los fenómenos observados en la naturaleza son anómalos y se han encontrado en casi todos los campos de la ciencia; por ejemplo: en la difusión de moléculas en la membrana celular [17] o el crecimiento de colonias de bacterias en placas de Petri [20], en el comportamiento de forrajeo[1] de depredadores marinos como el tiburón [19] o el albatros [18], o el de los monos araña en México [21], entre otros (ver el Capítulo 10 de [22] y el Capítulo 1 de [23] para mayores referencias).

[1]del inglés *foraging*, término que se usa para describir la acción de búsqueda de alimento que realizan los animales.

La difusión anómala se caracteriza por un factor de dispersión que no es constante, lo que lleva a la consideración del uso de derivadas fraccionarias en las ecuaciones que la describen.

Es común que un proceso de difusión se acompañe de otro de reacción, en el que la variable que se dispersa interactua con otra en el mismo espacio y tiempo. Esta interacción se expresa como una función en la que se combinan de alguna manera, determinada por la observación, las entidades involucradas. Su ecuación general es del tipo

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) u(t,x) = f(t,x,u)$$

donde f puede ser dependiente también de derivadas de algún orden de u. La combinación de ambos procesos, de difusión y reacción, aunado a la naturaleza fraccionaria del operador diferencial, nos lleva a la definición de procesos de difusión-reacción fraccionaria, uno de cuyos modelos es el centro del presente trabajo.

1.2.1 Sistema de ecuaciones diferenciales

Se analiza el comportamiento asintótico de la solución de un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales de difusión-reacción fraccionarias débilmente acopladas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_i(t,x) &= k_i(t)\Delta_{\alpha_i} u_i(t,x) - h_i(t)\left|u_j(t,x)\right|^{\beta_i}, \\ u_i(0,x) &= \varphi_i(x),\ 0 < \alpha_i \leq 2,\ \beta_i \geq 1, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

donde $i = 1, 2, \quad j = 3 - i$,

$$u_i \in C([0,1] : (L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)) \times (L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d))),$$

$$\varphi_i \in (L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)).$$

En el sistema que se analiza identificamos a Δ_{α_i} como el Laplaciano fraccionario, cuya componente, multiplicada por una función positiva k_i, constituye la difusión del proceso i, mientras que el término a la potencia real β_i, multiplicado por una función positiva h_i, representa el fenómeno de reacción con el proceso j; el signo menos denota la característica de decaimiento en la tasa de crecimiento del sistema en el tiempo.

1.2.2 Ecuación integral

El sistema integral asociado al sistema diferencial (1.2.1) es de la forma

$$u_i(t,x) = U_i(0,t)\varphi_i(x) - \int_0^t h_i(s)U_i(s,t)\left|u_j(s,\cdot)\right|^{\beta_i}(x)\, ds \tag{1.2.2}$$

(ver sección A.4), donde

$$U_i(s,t)\varphi_i(x) \doteq \left(p_i(K_i(s,t),\cdot) * \varphi_i\right)(x), \tag{1.2.3}$$

es decir,

$$U_i(s,t)\varphi_i(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(s,t), y-x)\varphi_i(y)dy,$$

y

$$K_i(s,t) \doteq \int_s^t k_i(r)dr, \quad s < t, \tag{1.2.4}$$
$$K_i(t) \doteq K_i(0,t).$$

La solución de este sistema de ecuaciones integrales, (1.2.2), se denomina solución *mild* de (1.2.1). Por el contrario, una solución de la ecuación diferencial siempre es solución de la ecuación integral, y se denomina solución *clásica*. La masa del sistema u_i al tiempo t es $M_i(t) = \int_{\mathbb{R}^d} u_i(t,x)dx$.

La correspondencia entre los sistemas de ecuaciones (1.2.1) y (1.2.2) se tiene mediante la función $p_i(t,x)$, denominada *solución fundamental* (solución de la ecuación homogenea asociada a (1.2.1)) o *kernel* de (1.2.1). En probabilidad esta se llama *densidad α-estable*.

1.3 Motivación

Conforme avanzaba el primer tercio del siglo XX se hizo evidente la existencia de sistemas de difusión anómala y aunque en un principio no se dedicó mucho esfuerzo para desarrollar nuevo conocimiento al respecto, poco a poco se le dedicó mayor atención; a la par se descubrían nuevos procesos en los que se observaba este comportamiento. En la siguiente tabla, tomada de [23], se muestra cómo aumentó la cantidad de artículos relacionados con el tema hasta 2007, siendo evidente el interés actual sobre el mismo a partir de la década de los 90's:

Frases en título o abstract	45-80	81-90	91-96	97-01	02-07
Fractional Brownian Motion	3	6	158	324	659
Anomalous Diffusion	116	108	520	672	1196
Anomalous Relaxation	10	14	23	35	50
Anomalous Dynamics Anomalous Processes Fractional Models Fractional Relaxations Fractional Kinetics Fractional Dynamics	18	28	79	58	273
Fractional Differential Equation Fractional Foker-Plank Equation Fractional Diffusion Equation	0	2	19	53	304

Los primeros temas desarrollados versaron sobre la explosión de la solución del sistema, el que se describía similarmente a (1.2.1) pero con el término de reacción positivo. El más destacado fue el presentado por Fujita [24] en 1966 para una ecuación del tipo $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. Sin embargo, el tema del decaimiento fue abordado hasta la década de los 80's, por lo que puede decirse que es un tema de investigación reciente.

En los sistemas de decaimiento de masa el objetivo es determinar las condiciones en que las variables y parámetros han de relacionarse para asegurar, además de la existencia, unicidad y positividad de la solución, que el comportamiento global en el tiempo converge a un estado finito (menor que el inicial) o cero.

Una línea de investigación en este campo la podemos establecer con las publicaciones siguientes, en las que se observa cómo el nivel de análisis se eleva al incrementar la complejidad de las ecuaciones; todas ellas describen un mismo proceso, el de difusión-reacción, pero con diferentes alcances.

Por ejemplo, Fino y Karch [13] estudian una ecuación del tipo

$$\partial_t u = \Delta_\alpha u + \lambda u^p, \;\; x \in \mathbb{R}^N, \; t > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x),$$

donde la difusión es fraccionaria, Δ_α, con $0 < \alpha < 2$. El coeficiente del operador es la unidad y el del término de reacción es constante.

Un trabajo con una ecuación un poco más compleja la analizan Droniou e Imbert en [14]. En efecto, estudian la ecuación

$$\partial_t u(t,x) - \Delta_\alpha[u(t,\cdot)](x) = F(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x)), \;\; t > 0, \; x \in \mathbb{R}^N$$
$$u(0,x) = u_0(x), \;\; x \in \mathbb{R}^N.$$

El coeficiente del operador Δ_α es unitario y el término de reacción es general e involucra al gradiente de la solución.

En una publicación posterior, Jleli y Samet [12], estudian la ecuación

$$\partial_t u = t^\sigma \Delta_\alpha u - h(t)u^p, \; x \in \mathbb{R}^N, \; t > 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x).$$

donde $\sigma \geq 0, p > 1, h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ y $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ es un dato inicial no negativo. El coeficiente del operador es una función de potencia de t y el del término de reacción es la función continua y no negativa h.

En el presente trabajo tratamos no con una ecuación diferencial sino con un sistema de dos ecuaciones diferenciales, con coeficientes variables en t para ambos términos, el de difusión y el de reacción, para lo que utilizamos la representación integral del operador fraccionario definido en [14], que se describe posteriormente en la Sección 2.3.

El propósito de este trabajo es presentar una generalización a lo actualmente publicado en lo que al sistema de ecuaciones (1.2.1) se refiere y resaltar que el método de análisis es consistente con los utilizados en las publicaciones comentadas previamente.

1.4 Existencia de la solución

Para validar que el sistema de ecuaciones (1.2.1) tiene solución deberemos de verificar varios requerimientos formales; a saber:

- La existencia y unicidad de la solución mild local dentro del espacio definido y las restricciones impuestas. Esto lo veremos mediante el teorema del punto fijo de Banach.

- La positividad de la solución. Tratándose de sistemas que modelan procesos físicos, es importante verificar que la solución en todo momento sea positiva; aún en el caso de entidades a las que se les asignan propiedades negativas (como la carga eléctrica) su cantidad física (número, volumen, densidad, etc.) debe ser positiva.

- La verificación de que la solución mild es en efecto una solución clásica del sistema (1.2.1).

- El comportamiento asintótico de la solución del sistema en el tiempo.

De estas propiedades de la solución la que es difícil de mostrar es la positividad, contra lo que se puede suponer tratándose de su cualidad de existencia; si existe, es positivo, pues en la naturaleza no hay cantidades negativas. Sin embargo, este hecho no consta en el sistema de ecuaciones diferenciales *per se*; por tanto, debe mostrarse que está bien definido, esto es, que efectivamente las relaciones entre las variables y parámetros aseguran la positividad (o no negatividad) en todo tiempo.

Lo que se ha observado es que la propiedad de positividad se basa fuertemente en la propiedad del principio del máximo. Esta propiedad, la del principio del máximo, sólo se aplica a una ecuación en su forma diferencial (no integral). En seguida abundamos un poco más sobre este punto.

En [6] se menciona que la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_\alpha u - u|u|^\beta, \ \ 0 < \alpha \leq 2, \ \ 0 < \beta \leq 1,$$

con condición inicial

$$u(0) = \varphi \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^{2p}(\mathbb{R}^d), \ \ p \geq 1,$$

tiene una única solución en $L^p(\mathbb{R}^d)$ de la forma

$$u_t = U^\alpha \varphi,$$

donde U^α es un semigrupo de contracción en $L^p(\mathbb{R}^d)$ con generador infinitesimal $\Delta_\alpha - \varphi|\varphi|^\beta$. La solución satisface la ecuación integral

$$u(t) = S_t^\alpha \varphi - \int_0^t S_{t-s}^\alpha (u(s)|u(s)|^\beta) ds,$$

donde S^α es un semigrupo de contracción con generador infinitesimal Δ_α. Además, si $\varphi \geq 0$, entonces $u(t) \geq 0$, para cada $t \geq 0$.

El problema para generalizar este método es que es muy poco preciso y sólo se indican hechos generales. Por ejemplo, sólo se menciona que se requiere probar que el operador Δ_α necesita ser m-accretive en $L^p(\mathbb{R}^d)$. Sin embargo, al checar [7], que es la referencia que usa [6], se tiene que la demostración que ellos proporcionan es para el caso en que $\beta > 1$ (al contrario de [6]).

Por otra parte, la propiedad a verificar es que

$$A_q f \doteq -\Delta_\alpha f + f|f|^\beta, \quad (\beta > 1)$$

es un operador m-accretive en $L^q(\mathbb{R}^d)$, para algún $1 \leq q \leq \infty$. Es decir, $\forall \lambda > 0, I + \lambda A_q$ es sobre q

$$\forall u, v \in D(A_q), \quad \left\| (u-v)^+ \right\|_q \leq \left\| (u + v + \lambda A_q u - \lambda A_q v)^+ \right\|_q .$$

Luego, usando la propiedad de m-accretividad, definen una aproximación y mencionan que es convergente, usando el Teorema de Crandall-Liggett. Además, en el Remark 1.2 de [7] se menciona que usando el principio del máximo de Friedman se obtiene la positividad de la solución, pero en este caso no se puede usar una versión local del principio del máximo como en Friedman. En efecto, Δ_α no tiene esta propiedad local, mas bien tiene una propiedad global, ver la Sección 2.4.

Otro inconveniente de este método es que al incorporarle los términos

$$t^{p_i} \Delta_{\alpha_i} u_i - h_i(t) u_j$$

(i.e. considerar un sistema autónomo) el semigrupo ya no lo es, sino más bien es una familia de evolución y se tendría que demostrar, entre otros, el Teorema de Crandall-Liggett para este tipo de familias de evolución, lo cual es muy poco viable.

En [8] se demuestra la existencia global de la solución de la ecuación

$$
\begin{aligned}
u_t &= \Delta u + \mu|\nabla u|^p, \quad \mu \neq 0, \quad p > 1, \\
u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}
$$

La existencia de la solución es en el sentido clásico, es decir, $u(\cdot, t) \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$; además se demuestra un principio del máximo. Si $\mu < 0$ entonces se prueba, en el Teorema B de [8], que

$$
\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)dx = 0.
$$

Aquí se asume que $0 \leq u_0 \in C_b^2(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$. El método para demostrar la existencia de la solución global, que se usa en dicho trabajo, es por aproximaciones. Como hemos mencionado, la demostración del principio del máximo usa la forma diferencial de la ecuación. En particular, propiedades clásicas de la derivada, como cero en un punto máximo, ya no se cumplen para el operador Δ_α, lo cual hace difícil seguir [8].

Usando el método de [8], Pinsky en [9] estudia la ecuación

$$
\begin{aligned}
u_t &= \Delta u - a(x)u^p|\nabla u|^q, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d, \\
u(x,0) &= \varphi(x) > 0,
\end{aligned}
$$

cuando $a > 0$. Además $\varphi \in C_b^{3,\alpha}(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$. Para la existencia de la solución Pinsky utiliza una ecuación auxiliar de tipo mild y usa algunos resultados del Friedman [1] para verificar que las soluciones que se obtienen son clásicas.

Cabe mencionar que todo parece indicar que es factible aplicar el método introducido en [9] para estudiar la existencia, en sentido clásico, de un sistema de la forma

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}u_1 &= \Delta u_1 - h_1(t)u_2^{p_1}, \\
\frac{\partial}{\partial t}u_2 &= \Delta u_2 - h_2(t)u_1^{p_2},
\end{aligned}
$$

con condición inicial $u_1(0,x) = \varphi_1(x) \geq 0, \ u_2(0,x) = \varphi_2(x) \geq 0$.

También es factible que se pueda aplicar el Teorema 2 de [9] para estudiar el decaimiento de la solución. El método de demostración parece ser largo, pero no usa herramientas sofisticadas y poco halagüeñas como las mencionadas en [7].

Es importante señalar que en [10] se estudia un sistema de la forma

$$u_t = \Delta u - |\nabla u|^q,$$
$$v_t = \Delta v - |\nabla v|^p,$$

donde se asume que las condiciones iniciales u_0, v_0 cumplen

$$\int |x| u_0(x) dx < \infty,$$

aquí se asume además que la solución existe y es positiva. También se da una referencia para la existencia "débil" de la solución del sistema.

En [11] se estudia la existencia de soluciones positivas de sistemas de la forma

$$u_t = \Delta u + f(\nabla u, \nabla v),$$
$$v_t = \Delta v + f(\nabla u, \nabla v).$$

En este caso no es posible usar el principio del máximo (ver la página 894) porque no siempre se cumple. En efecto, se presenta el siguiente ejemplo:

$$u_0 \equiv 0, \ \ v_0 \not\equiv 0, \ \ v_0 \geq 0.$$

Se considera una función f que cumpla

$$f(\xi, \eta) < 0, \ \ (\xi, \eta) \neq 0,$$

y $g \geq 0$. Entonces de la fórmula de Duhamel (la fórmula integral de la ecuación diferencial) resulta que

$$u(t) < 0, \ \ \forall t > 0.$$

Esto nos indica que una situación similar podría ocurrir en el sistema (1.2.1) que estamos estudiando. Aunque hay que tener en cuenta cómo aplica Pinsky el principio del máximo a una aproximación, en el caso del Laplaciano.

Por otra parte, está el trabajo de [14] en el cual se estudia la ecuación

$$\partial_t u(t,x) - \Delta_\alpha[u(t,\cdot)](x) = F(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x)), \;\; x \in \mathbb{R}^d, \;\; t > 0,$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \;\; x \in \mathbb{R}^d.$$

En este trabajo se distinguen dos casos:

- $\alpha \in (0,2)$, sólo se demuestra la existencia y unicidad de la solución (Teorema 5, página 316) en el caso de soluciones de viscosidad.
- $\alpha \in (1,2)$, en este caso se demuestra la existencia y unicidad de la solución de la ecuación en el sentido clásico (Teorema 3, página 308).

Además en [14] indican, página 303, que si x es un máximo global de φ, entonces $\Delta_\alpha[\varphi](x) \leq 0$, la cual no es una propiedad local, sino global. Esta, como hemos menciondo, es una de las razones que dificultan verificar la positividad del sistema (1.2.2).

En la Sección 8.2 de [2] se estudia la existencia de una solución positiva de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \;\; 0 < x < 1, \;\; t > 0.$$

Además, en el Teorema 2.7 de [2] se demuestra un primer resultado de decaimiento.

En conclusión, la positividad del sistema (1.2.1) es un hecho bastante complicado y en este trabajo asumiremos que la solución es positiva.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Postulados útiles

2.1.1 Desigualdades

Desigualdad de Hölder

Teorema 2.1.1. *Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, donde $1 \leq p, q \leq \infty$. Entonces*

$$\|f\, g\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

En forma integral,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| \, |g| \, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Desigualdad de Young para la convolución

Teorema 2.1.2. *Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ y supongamos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, donde $1 \leq p, q, r \leq \infty$. Entonces*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

Desigualdad de Young numérica

Proposición 2.1.3. *Sean a y b números reales no negativos y p y q números mayores a uno tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

La igualdad se obtiene si y sólo si $a^p = b^q$.

Si hacemos $ab = \left((\varepsilon p)^{1/p} a\right)\left(\frac{b}{(\varepsilon p)^{1/p}}\right)$ y aplicamos la desigualdad al lado derecho, obtenemos

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q.$$

donde $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} \frac{1}{q}$. Esta expresión se conoce como *Desigualdad de Young con Épsilon*.

Desigualdad de Minkowski

Teorema 2.1.4. *Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Desigualdades elementales

Sean $a, b \geq 0$ tales que $a \leq b$. Entonces

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$$

Si $\delta \geq 0$,

$$a^\delta \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^\delta \leq b^\delta.$$

Así,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^\delta \leq b^\delta \leq b^\delta + a^\delta.$$

Por lo tanto

$$(a+b)^\delta \leq 2^\delta (a^\delta + b^\delta). \tag{2.1.1}$$

La igualdad se obtiene si y sólo si $a = b = 0$.

Sean $a, b > 0$ y $q > 1$. Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada por

$$f(x) = x^q.$$

Su derivada es

$$f'(x) = q\, x^{q-1} > 0.$$

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

También tenemos que
$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| = \left|f'(\xi)\right|,$$
donde ξ está entre a y b. Entonces, por el Teorema del Valor Medio,

$$\begin{aligned} |b^q - a^q| &= q\,\xi^{q-1}\,|b-a| \\ &\leq q\,(a \vee b)^{q-1}\,|b-a|\,. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

La igualdad se obtiene si y sólo si $a = b$.

Sea $\beta \geq 1$ y sea $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(a) = a^\beta - 1 - (a-1)^\beta.$$

Derivando, obtenemos
$$f'(a) = \beta a^{\beta-1} - \beta(a-1)^{\beta-1}.$$
Entonces
$$f'(a) > 0, \quad a \geq 1,\ \beta \geq 1.$$
Esto significa que $f(a)$ es monótonamente creciente. Como $f(1) = 0$, tenemos

$$f(a) \geq 0, \quad a \geq 1,\ \beta \geq 1.$$

Entonces
$$a^\beta - 1 - (a-1)^\beta \geq 0,$$
$$a^\beta - 1 \geq (a-1)^\beta.$$
Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$, con $\parallel x \parallel \geq \parallel y \parallel$. Tomemos $a = \parallel x \parallel / \parallel y \parallel$, entonces

$$\left(\frac{\parallel x \parallel}{\parallel y \parallel}\right)^\beta - 1 \geq \left(\frac{\parallel x \parallel}{\parallel y \parallel} - 1\right)^\beta \ \Rightarrow\ \parallel x \parallel^\beta - \parallel y \parallel^\beta \geq (\parallel x \parallel - \parallel y \parallel)^\beta\,. \tag{2.1.3}$$

La igualdad se tiene si $x = y$.

2.1.2 Regla de Leibnitz

De [4, Sección A.1.1] tomamos la Regla de Leibnitz de diferenciación bajo el signo integral.

Teorema 2.1.5. *Sean $f(t,x), a(t), b(t)$ funciones derivables en $t_0 \leq t \leq t_1$ con $a, b \in \{x_0 \leq x \leq x_1\}$. Entonces*

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,x)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}dx + f(t,b)\frac{db}{dt} - f(t,a)\frac{da}{dt}.$$

Cabe mencionar que esta fórmula tiene la siguiente interpretación: El primer término del lado derecho da el cambio en la integral ya que la función está cambiando con el tiempo, el segundo término contabiliza el área ganada conforme el límite superior se mueve en la dirección positiva del eje, y el tercer término contabiliza la pérdida de área conforme se mueve el límite inferior.

2.1.3 Propiedades de la solución fundamental

Para $\alpha \in (0,2)$, tenemos las siguientes propiedades de p:

(i) $p \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$,

(ii) p es una unidad aproximada, es decir, $\lim_{t \to 0} p(t,x) = \delta_x, \|p(t)\|_1 = 1, \forall t > 0$,

(iii) $p(t+t', \cdot) = p(t, \cdot) * p(t', \cdot), \forall t > 0, \forall t' > 0$,

(iv) $\exists \mathcal{K} > 0,\ \forall t > 0, \quad \|\partial_x p(t,\cdot)\|_1 \leq \mathcal{K} t^{-1/\alpha}$,

(v) $t \in (0,\infty) \mapsto p(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ es continua.

La continuidad de (v) es consecuencia de la regularidad de p y de la propiedad de homogeneidad (o de escala):

$$p(t,x) = t^{-\frac{d}{\alpha}}\, p(1, t^{-\frac{1}{\alpha}}\, x).$$

En efecto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que para todo compacto $A \subset (0,\infty)$, $t \in A$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R} |p_i(t,x)|\, dx \leq \varepsilon \qquad \text{(equi-integrable en el infinito)},$$

donde B_R es la bola centrada en x de radio R.

Además, de [12, Lema 2.3] tenemos la siguiente propiedad de la solución fundamental (o densidad) p.

Lema 2.1.6. *Para cada $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, tenemos*

$$\lim_{t\to\infty} \|p(t) * u_0 - Mp(t)\|_1 = 0, \tag{2.1.4}$$

donde

$$M = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)dx.$$

2.1.4 Otros resultados útiles

De [3, Teorema 8.15] tenemos la siguiente convergencia.

Proposición 2.1.7. *Sea $\phi : (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y definamos $\phi_t(x) = t^{-d}\phi(t^{-1}x)$, $t > 0$. Supongamos que $|\phi(x)| \leq C(1 + ||x||)^{-d-\varepsilon}$ para algunos $C, \varepsilon > 0$ (lo que implica que $\phi \in L^1$), y que $\int \phi(x)dx = a$. Si $f \in L^p(1 \leq p \leq \infty)$, entonces $f * \phi_t(x) \to a\ f(x)$ cuando $t \to 0$ para toda x en el conjunto de Lebesgue de f - en particular para casi toda x, y para toda x en donde f es continua.*

De [15, Lema 10] tenemos la siguiente estimación de p.

Proposición 2.1.8. *Existe $c = (d, \alpha)$ tal que, para cada $z \in \mathbb{R}^d, t > 0$,*

$$c^{-1}\left(\frac{t}{||z||^{d+\alpha}} \wedge t^{-d/\alpha}\right) \leq p(t,z) \leq c\left(\frac{t}{||z||^{d+\alpha}} \wedge t^{-d/\alpha}\right).$$

De esta Proposición obtenemos, si $t = 1$ y $||z|| > 1$,

$$p(1,z) \leq c\left(\frac{1}{||z||^{d+\alpha}} \wedge 1\right) = c||z||^{-d-\alpha}.$$

De [3, Teorema 2.27] tenemos la continuidad y derivabilidad de la integral de una función escalar integrable, que enunciamos enseguida.

Teorema 2.1.9. *Supongamos que $f : X \times [a,b] \to C(-\infty < a < b < \infty)$ y que $f(\cdot,t) : X \to C$ es integrable para toda $t \in [a,b]$. Sea $F(t) = \int_X f(x,t)d\mu(x)$.*

a. Supongamos que existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $|f(x,t)| \leq g(x)$ para toda x, t. Si $\lim_{t\to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$ para toda x, entonces $\lim_{t\to t_0} F(x,t) = F(x,t_0)$; en particular, si $f(x,\cdot)$ es continua para toda x, entonces F es continua.

b. *Supongamos que* $\partial f/\partial t$ *existe y hay una* $g \in L^1(\mu)$ *tal que* $|(\partial f/\partial t)(x,t)| \leq g(x)$ *para casi toda* x, t. *Entonces* F *es diferenciable y* $F'(x) = \int (\partial f/\partial t)(x,t) d\mu(x)$.

Proposición 2.1.10. *Si* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, *entonces* $\partial_x(p(t,\cdot) * f) = \partial_x p(t,\cdot) * f$.

Demostración. Se sigue inmediatamente de que $p \in C^\infty\Big((0,\infty) \times \mathbb{R}^d\Big)$ y del Lema 2 de [14]. $\square$

Proposición 2.1.11. *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *entonces* $(p(t,\cdot) * f)(x) \to f(x)$, *cuando* $t \to 0$, *para casi toda* $x \in \mathbb{R}^d$.

Demostración. De la propiedad de escala se sigue que

$$\begin{aligned} p(t,x) &= t^{-d/\alpha} p(1, t^{-1/\alpha} x) \\ &= \frac{1}{(t^{1/\alpha})^d} p(1, \frac{x}{t^{1/\alpha}}). \end{aligned}$$

Si hacemos $\varphi(x) = p(1,x)$, entonces $\varphi_{t^{1/\alpha}}(x) = p(t,x)$. Por lo tanto, basta con mostrar que

$$|p(1,x)| \leq c(1+|x|)^{-d-\alpha}, \;\; \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

para alguna constante $c > 0$.
Por ser $\varphi(1,\cdot)$ continua en el compacto $\{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| \leq 1\}$, existe $c_1 > 0$ tal que

$$p(1,x) \leq c_1, \quad \forall ||x|| \leq 1.$$

Además,

$$\begin{aligned} 0 \leq ||x|| < 1 \quad &\Rightarrow \quad 1 \leq 1 + ||x|| \leq 2 \\ &\Rightarrow \quad 2^{-d-\alpha} \leq (1+||x||)^{-d-\alpha}, \;\; \forall ||x|| \leq 1. \end{aligned}$$

De este modo

$$c_1 \leq \frac{c_1}{2^{-d-\alpha}}(1+||x||)^{-d-\alpha}, \quad \forall ||x|| \leq 1.$$

Es decir,

$$p(1,x) \leq c_1 2^{d+\alpha}(1+||x||)^{-d-\alpha}, \quad \forall ||x|| \leq 1.$$

Ahora consideremos el caso $||x|| > 1$. Puesto que

$$\lim_{||x|| \to \infty} \frac{||x||}{1+||x||} = \lim_{||x|| \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{||x||} + 1} = 1,$$

entonces existe $K > 1$ tal que

$$||x|| > K \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{||x||}{1+||x||} - 1 \right| < \frac{1}{2}.$$

De esto obtenemos

$$\frac{1}{2} < \frac{||x||}{1+||x||} < \frac{3}{2}, \quad \forall ||x|| > 1.$$

Lo que implica

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-d-\alpha} (1+||x||)^{-d-\alpha} < ||x||^{-d-\alpha} < \frac{1}{2^{-d-\alpha}} (1+||x||)^{-d-\alpha},$$

así

$$||x||^{-d-\alpha} < 2^{d+\alpha}(1+||x||)^{-d-\alpha}, \quad \forall ||x|| \geq K. \tag{2.1.5}$$

Ahora consideremos la función continua $x \mapsto (||x||/(1+||x||))^{-d-\alpha}$, en el compacto $1 \leq ||x|| \leq K$. Entonces

$$\frac{||x||^{-d-\alpha}}{(1+||x||)^{-d-\alpha}} \leq c_2, \quad \forall\, 1 \leq ||x|| \leq K.$$

Esto implica que

$$||x||^{-d-\alpha} \leq c_2(1+||x||)^{-d-\alpha}, \quad \forall\, 1 \leq ||x|| \leq K.$$

De esta desigualdad y (2.1.5) obtenemos

$$||x||^{-d-\alpha} \leq (c_2 + 2^{d+\alpha})(1+||x||)^{-d-\alpha}, \quad \forall\, ||x|| \geq 1.$$

Usando la Proposición 2.1.8 obtenemos el resultado deseado. □

2.2 Masa

Definición 2.2.1. El número

$$M_i(t) \doteq M(\varphi_i, t) = \int_{\mathbb{R}^d} u_i(t,x)dx, \; t \geq 0. \tag{2.2.1}$$

lo interpretaremos como masa del sistema u_i al tiempo t.

De (1.2.2) y (1.2.3) se sigue que

$$\begin{aligned} M_i(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} U_i(0,t)\varphi_i(x)dx - \int_0^t h_i(s)\int_{\mathbb{R}^d} U_i(s,t)|u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)dxds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(0,t),y-x)\varphi_i(y)dydx \\ &\quad - \int_0^t h_i(s)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(s,t),x-y)|u_j(s,y)|^{\beta_i}dydxds. \end{aligned}$$

La integral de p_i sobre $\mathbb{R}^d$ es 1, por lo tanto

$$\begin{aligned} M_i(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(y)dy - \int_0^t h_i(s)\int_{\mathbb{R}^d} |u_j(s,y)|^{\beta_i}\, dyds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(y)dy - \int_0^t h_i(s)\,\|u_j(s)\|_{\beta_i}^{\beta_i}\, ds. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Conforme $t \to \infty$, el valor de la segunda integral aumenta y, en consecuencia,

$$0 \leq M_i(\infty) \leq M_i(t) \leq M_i(0) < \infty,\ \forall t \in (0,\infty). \tag{2.2.3}$$

2.3 Operador fraccionario

Utilizaremos el Teorema 1 y la Proposición 1 de [14] como definición del operador fraccionario, con la consideración de que la ecuación ahí analizada es de la forma

$$\partial_t u(t,x) = -g_\alpha[u(t,\cdot)](x) + F(t,x,u)$$

donde g_α es el operador estudiado. En nuestro caso,

$$\Delta_\alpha = -g_\alpha.$$

Definición 2.3.1. Representación integral de Δ_α.

Si $\alpha \in (0,2)$, entonces para toda $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$, toda $x \in \mathbb{R}^d$ y toda $r > 0$,

$$\Delta_\alpha[\varphi](x) = c_d(\alpha)\left(\int_{B_r} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)-\partial_x\varphi(x)\cdot z}{|z|^{d+\alpha}}dz + \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_r} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)}{|z|^{d+\alpha}}dz\right) \tag{2.3.1}$$

donde

$$c_d(\alpha) = \frac{\alpha\Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}+\alpha}\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)},$$

B_r es una bola centrada en x de radio r y Γ es la función gamma.

Esta fórmula puede simplificarse en dos casos:

(i) Si $\alpha \in (0,1), r = 0$, puede tomarse

$$\Delta_\alpha[\varphi](x) = c_d(\alpha) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi(x+z) - \varphi(x)}{|z|^{d+\alpha}} dz.$$

(ii) Si $\alpha \in (1,2), r = +\infty$, puede tomarse

$$\Delta_\alpha[\varphi](x) = c_d(\alpha) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi(x+z) - \varphi(x) - \partial_x \varphi(x) \cdot z}{|z|^{d+\alpha}} dz.$$

Además, existe una extensión continua de Δ_α en $C_b(\mathbb{R}^d)$. Es decir, si $(\varphi_n)_{n\geq 1} \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ acotada en $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y es tal que $D^2\varphi_n \to D^2\varphi$ localmente y uniformemente en $\mathbb{R}^d$, entonces $\Delta_\alpha[\varphi_n] \to \Delta_\alpha[\varphi]$ localmente y uniformemente en $\mathbb{R}^d$.

De la página 329 de [14] se sigue que

Proposición 2.3.2. *Si $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, entonces*

$$\frac{d}{dt}(p_i(t,\cdot) * \varphi)(x) = \Delta_{\alpha_i}(p_i(t,\cdot) * \varphi)(x).$$

2.4 Mínimo global del Laplaciano fraccionario

Basándonos en el Teorema 2 de [14] tenemos:

Proposición 2.4.1. *Sea $\alpha \in (0,2)$ y $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de $\mathbb{R}^d$ tal que $\varphi(x_n) \to \inf_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)$, cuando $n \to \infty$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \partial_x \varphi(x_n) = 0 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \inf \Delta_\alpha[\varphi](x_n) \geq 0.$$

Demostración. Como φ es acotada la podemos aproximar por la fórmula de Taylor como

$$\varphi(x+z) = \varphi(x) + z\partial_x\varphi(x) + \frac{z^2}{2}\partial_x^2\varphi(x), \tag{2.4.1}$$

donde x es el punto de evaluación y z es un punto en una bola $B_r(x)$ ($|z| < r$); conforme $z \to 0, \varphi(x+z) \to \varphi(x)$.

De (2.4.1) tenemos para φ evaluada en $(x_n)_{n\geq 1}$ que

$$\varphi(x_n+z)=\varphi(x_n)+z\partial_x\varphi(x_n)+\frac{z^2}{2}\partial_x^2\varphi(x_n).$$

Como ∂_x^2 es acotada, existe $C>0$ tal que, para toda $n\geq 1$ y toda $z\in\mathbb{R}^d$,

$$-C|z|^2\geq\frac{z^2}{2}\partial_x^2\varphi(x_n)$$

y

$$\varphi(x_n+z)\geq\varphi(x_n)+z\partial_x\varphi(x_n)-C|z|^2.$$

Como $\partial_x\varphi$ es acotada, existe una subsucesión de $\partial_x\varphi(x_n)$ convergente para la que podemos suponer que $\partial_x\varphi(x_n)\to p$. Entonces, haciendo $n\to\infty$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n+z)&\geq\lim_{n\to\infty}\left(\varphi(x_n)+z\partial_x\varphi(x_n)-C|z|^2\right),\\ 0&\geq zp-C|z|^2.\end{aligned}$$

Eligiendo $z=tp$

$$0\geq tp^2-Ct^2p^2,$$

así

$$t\geq 1/C,\quad p\neq 0.$$

Para C fija y $p\neq 0$ esta relación es válida si $t\geq 1/C$; entonces, si hacemos $t\to 0^+$ obtenemos necesariamente que $p=0$, y encontramos que $\lim_{n\to\infty}\partial_x\varphi(x_n)=0$, puesto que el único valor adherente de la sucesión acotada $(\partial_x\varphi(x_n))_{n\geq 1}$ es 0.

Ahora, ya que

$$\varphi(x_n+z)\geq\inf_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)$$

tenemos

$$\varphi(x_n+z)-\varphi(x_n)\geq\inf_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)-\varphi(x_n)\to 0,\ \text{cuando } n\to\infty$$

y podemos deducir que para toda $z\in\mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\inf_{\mathbb{R}^d}\left(\varphi(x_n+z)-\varphi(x_n)\right)&\geq 0,\\ \lim_{n\to\infty}\inf_{\mathbb{R}^d}\left(\varphi(x_n+z)-\varphi(x_n)-\partial_x\varphi(x_n)\right)&\geq 0.\end{aligned}\tag{2.4.2}$$

Además

$$|\varphi(x_n+z)-\varphi(x_n)| \leq |\varphi(x_n+z)| + |\varphi(x_n)| \leq \|\varphi\|_\infty + \|\varphi\|_\infty = 2\,\|\varphi\|_\infty\,,$$

de este modo
$$\frac{|\varphi(x_n+z)-\varphi(x_n)|}{|z|^{d+\alpha}} \leq \frac{2\,\|\varphi\|_\infty}{|z|^{d+\alpha}} \in L^1(\mathbb{R}^d \setminus B_r).$$

También tenemos de (2.4.1)

$$\varphi(x_n+z)-\varphi(x_n)-z\partial_x\varphi(x_n) = \frac{z^2}{2}\partial_x^2\varphi(x_n),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{|\varphi(x_n+z)-\varphi(x_n)-z\partial_x\varphi(x_n)|}{|z|^{d+\alpha}} &= \frac{|\frac{z^2}{2}\partial_x^2\varphi(x_n)|}{|z|^{d+\alpha}} \\ &\leq \frac{|z^2\partial_x^2\varphi(x_n)|}{|z|^{d+\alpha}} \leq \frac{\|\partial_x^2\varphi\|_\infty\,|z|^2}{|z|^{d+\alpha}} \in L^1(B_r).\end{aligned}$$

Entonces, de (2.4.2) y del Lema de Fatou

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty}\inf_{\mathbb{R}^d} \left(\varphi(x_n+z)-\varphi(x_n)-\partial_x\varphi(x_n)\right) dz \geq 0,$$

lo que implica

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_r} \liminf_{n\to\infty}\inf_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi(x_n+z)-\varphi(x_n)}{|z|^{d+\alpha}}dz + \int_{B_r} \liminf_{n\to\infty}\inf_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi(x_n+z)-\varphi(x_n)-\partial_x\varphi(x_n)}{|z|^{d+\alpha}}dz \geq 0,$$

por lo tanto

$$\liminf_{n\to\infty}\inf_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_r} \frac{\varphi(x_n+z)-\varphi(x_n)}{|z|^{d+\alpha}}dz + \int_{B_r} \frac{\varphi(x_n+z)-\varphi(x_n)-\partial_x\varphi(x_n)}{|z|^{d+\alpha}}dz\right) \geq 0.$$

De (2.4.1) concluimos
$$\liminf_{n\to\infty} \left(\Delta_\alpha[\varphi](x_n)\right) \geq 0.$$

Lo cual es el resultado esperado. □

Capítulo 3

Existencia local y regularidad de la solución

3.1 Existencia y unicidad local de la solución

Consideremos el espacio

$$X = C_b([0,\tau] \times \mathbb{R}^d) \times C_b([0,\tau] \times \mathbb{R}^d)$$

donde $\tau > 0$ y fijaremos más adelante su valor. En X definimos la norma

$$|||(u_1, u_2)||| = \sup_{t \in [0,\tau]} \left\{ \|u_1(t)\|_\infty + \|u_1(t)\|_1 + \|u_2(t)\|_\infty + \|u_2(t)\|_1 \right\}.$$

Sean $(u_1, u_2) \in X$ y $F : X \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} F(u_1, u_2)(t)(x) = \Big(& U_1(0,t)\varphi_1(x) - \int_0^t h_1(s) U_1(s,t) \left|u_2(s)\right|^{\beta_1}(x) ds, \\ & U_2(0,t)\varphi_2(x) - \int_0^t h_2(s) U_2(s,t) \left|u_1(s)\right|^{\beta_2}(x) ds \Big). \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Tenemos el siguiente resultado elemental.

Proposición 3.1.1. *La ecuación* (1.2.2) *tiene una única solución local débil.*

Demostración. Sea $B(0,R) = \{(u_1,u_2) \in X : |||(u_1,u_2)||| \leq R\}$. Definamos $F : B(0,R) \to X$ como en (3.1.1). Tomando R suficientemente grande resulta que $F : B(0,R) \to B(0,R)$. En efecto,

$$\begin{aligned} &\left| U_i(0,t)\varphi_i(x) - \int_0^t h_i(s) U_i(s,t) \left|u_j(s)\right|^{\beta_i}(x) ds \right| \\ &\qquad \leq U_i(0,t) \left|\varphi_i(x)\right| + \int_0^t h_i(s) U_i(s,t) \left|u_j(s)\right|^{\beta_i}(x) ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(0,t), y-x) \left|\varphi_i(y)\right| dy \\
&\quad + \int_0^t h_i(s) \int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(s,t), y-x) \left|u_j(s)(y)\right|^{\beta_i} dyds \\
&\leq \|\varphi_i\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(0,t), y-x) dy \\
&\quad + \int_0^t h_i(s) \int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(s,t), y-x) \left\|u_j(s)\right\|_\infty^{\beta_i} dyds \\
&\leq \|\varphi_i\|_\infty + \int_0^t h_i(s) R^{\beta_i} ds = \|\varphi_i\|_\infty + R^{\beta_i} \int_0^t h_i(s) ds.
\end{aligned}
$$

Además

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} &\left| U_i(0,t)\varphi_i(x) - \int_0^t h_i(s) U_i(s,t) \left|u_j(s)\right|^{\beta_i}(x) ds \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} U_i(0,t) \left|\varphi_i(x)\right| dx + \int_0^t h_i(s) \int_{\mathbb{R}^d} U_i(s,t) \left|u_j(s)\right|^{\beta_i}(x) dxds \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(0,t), y-x) \left|\varphi_i(y)\right| dydx \\
&\quad + \int_0^t h_i(s) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(s,t), y-x) \left|u_j(s)(y)\right|^{\beta_i} dydxds \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left|\varphi_i(y)\right| \int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(0,t), y-x) dxdy \\
&\quad + \int_0^t h_i(s) \int_{\mathbb{R}^d} \left|u_j(s)(y)\right|^{\beta_i} \int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(s,t), y-x) dxdyds \\
&= \|\varphi_i\|_1 + \int_0^t h_i(s) \int_{\mathbb{R}^d} \left|u_j(s)(y)\right|^{\beta_i - 1} \left|u_j(s)(y)\right| dyds \\
&\leq \|\varphi_i\|_1 + \int_0^t h_i(s) \int_{\mathbb{R}^d} \left\|u_j(s)\right\|_\infty^{\beta_i - 1} \left|u_j(s)(y)\right| dyds \\
&\leq \|\varphi_i\|_1 + \int_0^t h_i(s) R^{\beta_i - 1} \left\|u_j(s)\right\|_1 ds \\
&\leq \|\varphi_i\|_1 + R^{\beta_i} \int_0^t h_i(s) ds.
\end{aligned}
$$

Esto implica que

$$
|||F(u_1,u_2)||| \leq \sum_{i=1}^{2} \left(\|\varphi_i\|_\infty + \|\varphi_i\|_1 + 2R^{\beta_i} \int_0^\tau h_i(s) ds \right).
$$

Vamos a tomar el siguiente valor para R,

$$
R = \sum_{i=1}^{2} \left(\|\varphi_i\|_\infty + \|\varphi_i\|_1 \right) + 1.
$$

Puesto que

$$\lim_{\tau\to 0} 2\sum_{i=1}^{2} R^{\beta_i}\int_0^{\tau} h_i(s)ds = 0,$$

entonces existe un $\tau_1 > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$2\sum_{i=1}^{2} R^{\beta_i}\int_0^{\tau_1} h_i(s)ds < 1.$$

Esto implica que $F(u_1,u_2) \in B(0,R)$ si $(u_1,u_2) \in B(0,R)$.

Ahora veamos que F es una contracción: Sean $(u_1,u_2),(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) \in B(0,R)$,

$$\begin{aligned} &F(u_1,u_2)(t)(x) - F(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)(t)(x) \\ &\qquad = \Big(\int_0^t h_1(s)U_1(s,t)\left|\tilde{u}_2(s)\right|^{\beta_1}(x)ds - \int_0^t h_1(s)U_1(s,t)\left|u_2(s)\right|^{\beta_1}(x)ds\ , \\ &\qquad\quad \int_0^t h_2(s)U_2(s,t)\left|\tilde{u}_1(s)\right|^{\beta_2}(x)ds - \int_0^t h_2(s)U_2(s,t)\left|u_1(s)\right|^{\beta_2}(x)ds\Big), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^t h_i(s)U_i(s,t)\left|\tilde{u}_j(s)\right|^{\beta_i}(x)ds - \int_0^t h_i(s)U_i(s,t)\left|u_j(s)\right|^{\beta_i}(x)ds\right| \\ &\qquad \le \int_0^t h_i(s)U_i(s,t)\left|\left|\tilde{u}_j(s)\right|^{\beta_i} - \left|u_j(s)\right|^{\beta_i}\right|(x)ds \\ &\qquad \le \int_0^t h_i(s)U_i(s,t)\beta_i\left|\tilde{u}_j(s)-u_j(s)\right| \times (\left|\tilde{u}_j(s)\right| \vee \left|u_j(s)\right|)^{\beta_i-1}(x)ds. \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad elemental (2.1.2),

$$\left|a^q - b^q\right| = q\left|a-b\right|(a\vee b)^{q-1}\ ,\ \ a,b>0,\ q>1.$$

Obteniendo de esta manera que

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^t h_i(s)U_i(s,t)\left|\tilde{u}_j(s)\right|^{\beta_i}(x)ds - \int_0^t h_i(s)U_i(s,t)\left|u_j(s)\right|^{\beta_i}(x)ds\right| \\ &\qquad \le \int_0^t h_i(s)\beta_i\left\|\tilde{u}_j(s)-u_j(s)\right\|_\infty R^{\beta_i-1}ds \\ &\qquad \le \beta_i R^{\beta_i-1}\left(\int_0^t h_i(s)ds\right)\sup_{t\in[0,\tau]}\left\|\tilde{u}_j(t)-u_j(t)\right\|_\infty . \end{aligned}$$

Además

$$\int_{R^d}\left|\int_0^t h_i(s)U_i(s,t)\left|\tilde{u}_j(s)\right|^{\beta_i}(x)ds - \int_0^t h_i(s)U_i(s,t)\left|u_j(s)\right|^{\beta_i}(x)ds\right|dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t h_i(s) \int_{R^d} U_i(s,t) \left| |\tilde{u}_j(s)|^{\beta_i} - |u_j(s)|^{\beta_i} \right| (x) dx ds \\
&\leq \int_0^t h_i(s) \int_{R^d} U_i(s,t) \beta_i R^{\beta_i - 1} \left| \tilde{u}_j(s) - u_j(s) \right| (x) dx ds \\
&= \beta_i R^{\beta_i - 1} \int_0^t h_i(s) \int_{R^d} \left| \tilde{u}_j(s) - u_j(s) \right| (y) dy ds \\
&\leq \beta_i R^{\beta_i - 1} \left(\int_0^t h_i(s) ds \right) \sup_{t \in [0,\tau]} \left\| \tilde{u}_j(t) - u_j(t) \right\|_1 .
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$|||F(u_1, u_2) - F(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)||| \leq 2 \sum_{i=1}^{2} \beta_i R^{\beta_i - 1} \left(\int_0^\tau h_i(s) ds \right) |||(u_1, u_2) - (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)|||.$$

Como antes, tomamos un $\tau_2 > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$2 \sum_{i=1}^{2} \beta_i R^{\beta_i - 1} \left(\int_0^{\tau_2} h_i(s) ds \right) < 1.$$

Por ende, podemos aplicar el teorema de punto fijo de Banach para garantizar la existencia de una única solución local, si tomamos a $\tau = \tau_1 \wedge \tau_2$. □

Observación 3.1.2. Nótese que τ sólo depende de $\|\varphi_i\|_\infty, \|\varphi_i\|_1$, las constantes β_i y las funciones h_i, que son datos.

Como hemos mencionado en la introducción, asumiremos que hay una solución global positiva. Esto es cierto para algunos parámetros de las ecuaciones, (1.2.1).

3.2 Regularidad de la solución débil local

Proposición 3.2.1. *La solución débil de* (1.2.2)*, en el intervalo de existencia, es una solución clásica.*

Demostración. La ecuación integral (1.2.2) la podemos escribir como

$$u_i(t,x) = p_i(K_i(0,t), \cdot) * \varphi_i(x) - \int_0^t h_i(s) p_i(K_i(s,t), \cdot) * |u_j(s, \cdot)|^{\beta_i} (x) ds,$$

para casi todos los $x \in \mathbb{R}^d$ y $t < \tau$, (τ dado en el resultado previo).

Trabajaremos primero con la continuidad de $(p_i(K_i(0,t), \cdot) * \varphi_i)(x)$. Sea $t_0 > 0$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|t - t_0| < \delta$, implica

$$\|p_i(t,\cdot) - p_i(t_0,\cdot)\|_1 < \frac{\varepsilon}{\|\varphi_i\|_\infty + 1}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&|(p_i(K_i(0,t_0),\cdot) * \varphi_i)(x) - (p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i)(x)| \\
&\qquad = (|p_i(K_i(0,t_0),\cdot) - p_i(K_i(0,t),\cdot)| * |\varphi_i|)(x) \\
&\qquad \leq \|\varphi_i\|_\infty \|p_i(K_i(0,t_0),\cdot) - p_i(K_i(0,t),\cdot)\|_1 .
\end{aligned}$$

Además, $K_i(0,\cdot)$ continua en t_0, implica que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|t - t_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |K_i(0,t_0) - K_i(0,t)| < \delta.$$

Por ende,

$$|t - t_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |p_i(K_i(0,t_0),\cdot) - p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i(x)| < \varepsilon.$$

Esto significa que $(p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i)(x)$ es continua en t uniformemente en x.

De la Proposición 2.1.7 tenemos que para t fijo la función $(p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i)(x)$ es continua en x. Veamos que esto implica la continuidad en (t,x). Sea $(t_0,x_0) \in (0,\tau) \times \mathbb{R}^d$, entonces

$$\begin{aligned}
&|(p_i(K_i(0,t_0),\cdot) * \varphi_i)(x_0) - (p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i)(x)| \\
&\qquad \leq |(p_i(K_i(0,t_0),\cdot) * \varphi_i)(x_0) - (p_i(K_i(0,t_0),\cdot) * \varphi_i)(x)| \\
&\qquad\quad + |(p_i(K_i(0,t_0),\cdot) * \varphi_i)(x) - (p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i)(x)| \\
&\qquad = \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

siempre que (t,x) esté suficientemente cerca a (t_0,x_0).

Ahora veamos que el segundo término es continuo en t uniformemente en x:

$$\int_0^t h_i(s) p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x) ds = \int_0^\tau h_i(s) \mathbf{1}_{(0,t)}(s) p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x) ds.$$

Por el inciso (a) del Teorema 2.1.9 basta notar que

$$\left| h_i(s) \mathbf{1}_{(0,t)}(s) p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x) \right| \leq h_i(s) \|p_i(K_i(s,t),\cdot)\|_1 \|u_j(s)\|_\infty^{\beta_i} \mathbf{1}_{(0,\tau)}(s)$$

$$\leq h_i(s)R^{\beta_i}\mathbf{1}_{(0,\tau)}(s),$$

para cada $s \in (0,\tau)$ y $x \in \mathbb{R}^d$. Además, nótese que si $t_0 > 0$,

$$\lim_{t\to t_0} h_i(s)\mathbf{1}_{(s,\tau)}(t)p_i(K_i(s,t),\cdot)*|u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x) = h_i(s)\mathbf{1}_{(s,\tau)}(t_0)p_i(K_i(s,t_0),\cdot)*|u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x),$$

donde hemos usado el inciso (v) de la Sección 2.1.3 y que $\|u_j(s)\|_\infty < \infty$.

Ahora estudiemos la regularidad en x. Diferenciando (1.2.2) respecto a x,

$$\partial_x u_i(t,x) = \partial_x p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i(x) - \partial_x \int_0^t h_i(s)p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds.$$

Verifiquemos la diferenciabilidad del segundo término; la del primero es obvia. Sea $\delta > 0$, entonces

$$\partial_x \int_0^{t-\delta} h_i(s)p_i(K_i(s,t),\cdot)*|u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds = \int_0^{t-\delta} h_i(s)\partial_x p_i(K_i(s,t),\cdot)*|u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds,$$

esto es posible debido a que

$$\begin{aligned}\left|h_i(s)\partial_x p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)\right| &\leq h_i(s)\|u_j(s)\|_\infty^{\beta_i}\|\partial_x p_i(K_i(s,t),\cdot)\|_1 \\ &\leq h_i(s)R^{\beta_i}K_i(s,t)^{-1/\alpha_i} \\ &\leq h_i(s)R^{\beta_i}K_i(t-\delta,t)^{-1/\alpha_i},\end{aligned}$$

donde hemos usado el inciso (iv) de la Sección 2.1.3.

Por otra parte, sea (δ_n) una sucesión positiva tal que $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$, entonces

$$\partial_x \int_0^{t-\delta_n} h_i(s)p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds$$

existe y

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{t-\delta_n} h_i(s)p_i(K_i(s,t),\cdot)*|u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds = \int_0^t h_i(s)p_i(K_i(s,t),\cdot)*|u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^d$. Veamos que

$$\int_0^{t-\delta_n} h_i(s)\partial_x p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds$$

converge uniformemente en $\mathbb{R}^d$ hacia la función continua

$$\int_0^t h_i(s)\partial_x p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds,$$

la cual está bien definida pues $1 < \alpha_i < 2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\partial_x \int_0^t h_i(s)p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds \\
&\qquad = \partial_x \lim_{\delta\downarrow 0}\int_0^{t-\delta} h_i(s)p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds \\
&\qquad = \lim_{\delta\downarrow 0}\partial_x \int_0^{t-\delta} h_i(s)p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds \\
&\qquad = \lim_{\delta\downarrow 0}\int_0^{t-\delta} h_i(s)\partial_x p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds \\
&\qquad = \int_0^{t} h_i(s)\partial_x p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds.
\end{aligned}$$

De la Proposición 2.1.7 se sigue que $\partial_x u_i(t,x)$ es continua. Más aún, por la primera parte,

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 u_i(t,x) &= \partial_x^2 p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i(x) - \partial_x \int_0^t h_i(s)p_i(K_i(s,t),\cdot) * \frac{\partial}{\partial x}|u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds \\
&= \partial_x^2 p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i(x) \\
&\quad - \int_0^t h_i(s)\partial_x p_i(K_i(s,t),\cdot) * \beta_i |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i - 1}\frac{\partial}{\partial x}u_j(s,\cdot)(x)ds.
\end{aligned}$$

Aquí hemos usado que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial x}u_j(t,x)\right| &\leq |\partial_x p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i(x)| + \int_0^t \left|h_i(s)\frac{\partial}{\partial x}p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}\right|(x)ds \\
&\leq \|\varphi_i\|_\infty \|\partial_x p_i(K_i(0,t),\cdot)\|_1 + \int_0^t h_i(s)\|u_j(s)\|_\infty^{\beta_i}\|p_i(K_i(s,t),\cdot)\|_1 ds \\
&\leq \|\varphi_i\|_\infty K_i(0,t)^{-1/\alpha_i} + R^{\beta_i}\int_0^t h_i(s)K_i(s,t)^{-1/\alpha_i}ds.
\end{aligned}$$

Ahora veamos la regularidad en el tiempo:

$$\partial_t u_i(t,x) = \partial_t p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i(x) - \partial_t \int_0^t h_i(s)p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds.$$

De la Proposición 2.3.2 se tiene que

$$\begin{aligned}\partial_t p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i(x) &= \Delta_{\alpha_i}(p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i)(x)\partial_t K_i(0,t)\\ &= k_i(t)\Delta_{\alpha_i}(p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i)(x).\end{aligned}$$

Para ver la diferenciabilidad del segundo término procedemos como en el caso de la regularidad en x. Sea $\delta > 0$, entonces de la fórmula de diferenciación de Leibnitz (ver Teorema 2.1.5) se sigue que

$$\begin{aligned}&\partial_t \int_0^{t-\delta} h_i(s) p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds\\ &\qquad = \int_0^{t-\delta} h_i(s)\partial_t p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds\\ &\qquad\quad + h_i(t-\delta)p_i(K_i(t-\delta,t),\cdot) * |u_j(t-\delta,\cdot)|^{\beta_i}(x).\end{aligned}$$

Si hacemos $\delta \to 0$, en el primer término de la derecha, en la igualdad anterior, queda

$$\begin{aligned}&\int_0^{t-\delta} h_i(s)\partial_t p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds\\ &\qquad = \int_0^{t} h_i(s)\Delta_{\alpha_i}(p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i})(x)k_i(t)ds,\end{aligned}$$

donde hemos usado la Proposición 2.3.2. Por ser Δ_{α_i} un operador cerrable nos queda

$$\begin{aligned}&\int_0^{t-\delta} h_i(s)\partial_t p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}(x)ds\\ &\qquad = k_i(t)\Delta_{\alpha_i}\left(\int_0^{t} h_i(s)p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}ds\right)(x).\end{aligned}$$

Si demostramos que

$$\lim_{\delta\to 0} h_i(t-\delta)p_i(K_i(t-\delta,t),\cdot) * |u_j(t-\delta,\cdot)|^{\beta_i}(x) = h_i(t)|u_j(t,\cdot)|^{\beta_i}(x), \tag{3.2.1}$$

casi donde quiera, habremos terminado. En efecto, sumando todos los términos resulta que

$$\begin{aligned}\partial_t u_i(t,x) &= k_i(t)\Delta_{\alpha_i}(p_i(K_i(0,t),\cdot) * \varphi_i)(x)\\ &\quad -k_i(t)\Delta_{\alpha_i}\left(\int_0^{t} h_i(s)p_i(K_i(s,t),\cdot) * |u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}ds\right)(x) - h_i(t)|u_j(t,\cdot)|^{\beta_i}(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= k_i\Delta_{\alpha_i}\left(p_i(K_i(0,t),\cdot)*\varphi_i - \int_0^t h_i(s)p_i(K_i(s,t),\cdot)*|u_j(s,\cdot)|^{\beta_i}ds\right)(x)\\
&\quad -h_i(t)|u_j(t,\cdot)|^{\beta_i}(x)\\
&= k_i\Delta_{\alpha_i}(u_i(t,\cdot)(x) - h_i(t)|u_j(t,\cdot)|^{\beta_i}(x).
\end{aligned}
$$

Veamos pues que (3.2.1) es cierta. Para esto basta con mostrar que

$$
\lim_{\delta\to 0} p_i(K_i(t-\delta,t),\cdot)*|u_j(t-\delta,\cdot)|^{\beta_i}(x) = |u_j(t,\cdot)|^{\beta_i}(x),
$$

para casi toda $x\in\mathbb{R}^d$. Consideremos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
&\left|p_i(K_i(t-\delta,t),\cdot)*|u_j(t-\delta,\cdot)|^{\beta_i}(x) - |u_j(t,\cdot)|^{\beta_i}(x)\right|\\
&\qquad\le \left|p_i(K_i(t-\delta,t),\cdot)*|u_j(t-\delta,\cdot)|^{\beta_i}(x) - p_i(K_i(t-\delta,t),\cdot)*|u_j(t,\cdot)|^{\beta_i}(x)\right|\\
&\qquad\quad + \left|p_i(K_i(t-\delta,t),\cdot)*|u_j(t,\cdot)|^{\beta_i}(x) - |u_j(t,\cdot)|^{\beta_i}(x)\right|. \qquad (3.2.2)
\end{aligned}
$$

El primer término de la derecha de la desigualdad anterior se estima por

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(t-\delta,t),y-x)\left||u_j(t-\delta,\cdot)|^{\beta_i}(y) - |u_j(t,\cdot)|^{\beta_i}(y)\right|dy\\
&\qquad \le 2R^{\beta_i-1}||u_j(t-\delta)-u_j(t)||_\infty,
\end{aligned}
$$

el cual tiende a 0 si $\delta\to 0$ (se usa como antes que $u_i(t,\cdot)$ es continua uniformemente en x). De igual forma, usando la Proposición 2.1.11, se tiene que el segundo término en (3.2.2) tiende a 0 si $\delta\to 0$. Se demuestra así el resultado deseado. □

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

Capítulo 4

Comportamiento asintótico

4.1 Soluciones asintóticamente positivas

Teorema 4.1.1. *Sea $u_i = u_i(x,t)$ una solución no negativa no trivial del sistema de ecuaciones (1.2.1). Si $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(x)dx > 0$,*

$$\int_0^1 h_i(s)ds < \infty \quad y \quad \int_1^\infty h_i(s)(K_j(0,s))^{-\frac{d}{\alpha_j}(\beta_i-1)}ds < \infty$$

entonces existe $M_i(\infty) \in (0,\infty)$ tal que $\lim_{t\to\infty} M_i(t) = M_i(\infty)$.

Demostración. Sabemos que

$$u_i(t,x) = U_i(0,t)\varphi_i(x) - \int_0^t h_i(s)U_i(s,t)\left|u_j(s,\cdot)\right|^{\beta_i}(x)\ ds,$$

donde U_i está definido en (1.2.3).

Si la solución u_i es no negativa, entonces

$$0 \le u_i(t,x) \le U_i(0,t)\varphi_i(x), \qquad \forall t>0, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

De la definición (1.2.3) nos queda

$$\|u_i(t)\|_{\beta_j}^{\beta_j} \ \le\ \|p_i(K_i(0,t)) * \varphi_i\|_{\beta_j}^{\beta_j}. \tag{4.1.1}$$

Aplicando la desigualdad de Young (ver Teorema 2.1.2) tenemos de (4.1.1) dos posibles relaciones.

Caso $r = p = \beta_j, q = 1$ y $f = p_i(K_i(0,t))$:

$$\|p_i(K_i(0,t)) * \varphi_i\|_{\beta_j}^{\beta_j} \leq \|p_i(K_i(0,t))\|_{\beta_j}^{\beta_j} \|\varphi_i\|_1^{\beta_j}.$$

Caso $r = p = \beta_j, q = 1$ y $f = \varphi_i$:

$$\|p_i(K_i(0,t)) * \varphi_i\|_{\beta_j}^{\beta_j} \leq \|p_i(K_i(0,t))\|_1^{\beta_j} \|\varphi_i\|_{\beta_j}^{\beta_j} = \|\varphi_i\|_{\beta_j}^{\beta_j}.$$

De estas dos relaciones tomamos la mínima de ellas. De este modo, de (4.1.1)

$$\|u_i(t)\|_{\beta_j}^{\beta_j} \leq \min \{\|p_i(K_i(0,t))\|_{\beta_j}^{\beta_j} \|\varphi_i\|_1^{\beta_j}, \|\varphi_i\|_{\beta_j}^{\beta_j}\}. \tag{4.1.2}$$

Pero por otra parte

$$\|p_i(K_i(0,t))\|_{\beta_j} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |p_i(K_i(0,t),y)|^{\beta_j} dy\right)^{\frac{1}{\beta_j}}.$$

Utilizando la propiedad de homogeneidad de p_i

$$\|p_i(K_i(0,t))\|_{\beta_j} = K_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|p_i(1, K_i(0,t)^{-\frac{1}{\alpha_i}} y)\right|^{\beta_j} dy\right)^{\frac{1}{\beta_j}}.$$

Si hacemos $z = K_i(0,t)^{-\frac{1}{\alpha_i}} y$, entonces $dz = K_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}} dy$ y

$$\begin{aligned}
\|p_i(K_i(0,t))\|_{\beta_j} &= K_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |p_i(1,z)|^{\beta_j} K_i(0,t)^{\frac{d}{\alpha_i}} dz\right)^{\frac{1}{\beta_j}} \\
&= K_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}} K_i(0,t)^{\frac{d}{\alpha_i}\cdot\frac{1}{\beta_j}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |p_i(1,z)|^{\beta_j} dz\right)^{\frac{1}{\beta_j}} \\
&= C K_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}+\frac{d}{\alpha_i}\cdot\frac{1}{\beta_j}} \\
&= C K_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}(1-\frac{1}{\beta_j})},
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

donde C es una constante positiva. Así, de (4.1.2),

$$\begin{aligned}
\|u_i(t)\|_{\beta_j}^{\beta_j} &\leq \min \{C(K_i(0,t))^{-\frac{d}{\alpha_i}(\beta_j-1)} \|\varphi_i\|_1^{\beta_j}, \|\varphi_i\|_{\beta_j}^{\beta_j}\} \\
&\doteq H_i(t,\varphi_i).
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Ahora, sea $\varepsilon \in (0,1]$ y sea $u_{i,\varepsilon}$ la solución del sistema (1.2.1) con condición inicial $\varepsilon\varphi_i$. Entonces es claro que $0 \leq \varepsilon\varphi_i \leq \varphi_i$, y por el lema de comparación de ecuaciones integrales tenemos que

$$0 \leq u_{i,\varepsilon}(t,x) \leq u_i(t,x), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{4.1.5}$$

Utilizando (4.1.4), en este caso para $u_{i,\varepsilon}$,

$$\|u_{i,\varepsilon}(t)\|_{\beta_j}^{\beta_j} \leq H_i(t, \varepsilon\varphi_i) = \varepsilon^{\beta_j} H_i(t,\varphi_i), \qquad \forall \varepsilon \in (0,1]. \tag{4.1.6}$$

De la definición de masa, para un $\varepsilon > 0$ fijo y $t > 0$,

$$\begin{aligned}
M(\varepsilon\varphi_i, t) &= \int_{\mathbb{R}^d} u_{i,\varepsilon}(t,x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} U_i(0,t)\varepsilon\varphi_i(x)dx - \int_0^t h_i(s) \int_{\mathbb{R}^d} U_i(s,t)(u_{j,\varepsilon}(s,\cdot))^{\beta_i}(x)dxds \\
&= \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(0,t), y-x)\varphi_i(y)dydx \\
&\quad - \int_0^t h_i(s) \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(s,t), x-y)(u_{j,\varepsilon}(s,y))^{\beta_i} dydxds \\
&= \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(y)dy - \int_0^t h_i(s) \int_{\mathbb{R}^d} |u_{j,\varepsilon}(s,y))|^{\beta_i} dyds,
\end{aligned}$$

de donde

$$M(\varepsilon\varphi_i, \infty) = \varepsilon\left[\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(y)dy - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty h_i(s)\,\|u_{j,\varepsilon}(s)\|_{\beta_i}^{\beta_i} ds\right]. \tag{4.1.7}$$

Estudiaremos el término asociado a la reacción. De (4.1.6), usando el índice i,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty h_i(s)\,\|u_{j,\varepsilon}(s)\|_{\beta_i}^{\beta_i} ds &\leq \frac{\varepsilon^{\beta_i}}{\varepsilon}\int_0^\infty h_i(s)H_j(s,\varphi_j)ds \\
&\leq \varepsilon^{\beta_i - 1}\int_0^\infty h_i(s)\ \min\left\{C(K_j(0,s))^{-\frac{d}{\alpha_j}(\beta_i-1)}\,\|\varphi_j\|_1^{\beta_i},\ \|\varphi_j\|_{\beta_i}^{\beta_i}\right\}ds.
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Si $s \downarrow 0$, tenemos que $K_j(0,s) \to 0$, y por lo tanto $K_j(0,s)^{-\frac{d}{\alpha_j}(\beta_i-1)} \to \infty$, puesto que $-\frac{d}{\alpha_j}(\beta_i - 1) < 0$. Entonces hay un $t_0 > 0$ para el que

$$CK_j(0,s)^{-\frac{d}{\alpha_j}(\beta_i-1)}\,\|\varphi_j\|_1^{\beta_i} \geq \|\varphi_j\|_{\beta_i}^{\beta_i}, \qquad s \leq t_0,$$

$$CK_j(0,s)^{-\frac{d}{\alpha_j}(\beta_i-1)}\,\|\varphi_j\|_1^{\beta_i} \leq \|\varphi_j\|_{\beta_i}^{\beta_i}, \qquad s \geq t_0,$$

donde hemos usado que $K_j(0,s)$ es monótona creciente. De esta manera resulta que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty h_i(s)\left\|u_{j,\varepsilon}(s)\right\|_{\beta_i}^{\beta_i} ds \leq \varepsilon^{\beta_i-1}\left\|\varphi_j\right\|_{\beta_i}^{\beta_i}\int_0^{t_0} h_i(s)ds \\ + \; C\varepsilon^{\beta_i-1}\left\|\varphi_j\right\|_1^{\beta_i}\int_{t_0}^\infty h_i(s)K_j(0,s)^{-\frac{d}{\alpha_j}(\beta_i-1)}ds.\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

El primer término de la derecha de (4.1.9) es finito, puesto que h es continua en $[0,\infty)$ y

$$\int_0^1 h_i(s)ds < \infty.$$

El segundo término de la derecha de (4.1.9) está bien definido, pues el integrando $h_i(\cdot)K_j(0,\cdot)^{-\frac{d}{\alpha_j}(\beta_i-1)}$ es continuo en $[0,\infty)$ y por hipótesis

$$\int_1^\infty h_i(s)K_j(0,s)^{-\frac{d}{\alpha_j}(\beta_i-1)}ds < \infty.$$

Con estas consideraciones tenemos de (4.1.9) que

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty h_i(s)\left\|u_{j,\varepsilon}(s)\right\|_{\beta_i}^{\beta_i} ds = 0.$$

Puesto que $\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_i(y)dy > 0$, entonces tomando $\eta_i = \frac{1}{2}\left\|\varphi_i\right\|_1$, existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\varepsilon < \varepsilon_0$ tenemos

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty h_i(s)\left\|u_{j,\varepsilon}(s)\right\|_{\beta_i}^{\beta_i} ds \leq \eta_i.$$

Así, de (4.1.7)

$$\begin{aligned}M(\varepsilon\varphi_i,\infty) &= \varepsilon\left[\left\|\varphi_i\right\|_1 - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty h_i(s)\left\|u_{j,\varepsilon}(s)\right\|_{\beta_i}^{\beta_i} ds\right] \\ &\geq \varepsilon\left[\left\|\varphi_i\right\|_1 - \eta_i\right] = \frac{\varepsilon}{2}\left\|\varphi_i\right\|_1 > 0, \;\; \forall\varepsilon < \varepsilon_0.\end{aligned}$$

Para $\varepsilon < \varepsilon_0$ fijo, $M(\varepsilon\varphi_i,\infty)$ es una cota inferior de $M(\varepsilon\varphi_i,t)$, $0 < t < \infty$. Más aún,

$$\lim_{t\to\infty} M(\varepsilon\varphi_i,t) = M(\varepsilon\varphi_i,\infty) > 0.$$

Puesto que $M(\varphi_i,\infty) \geq M(\varepsilon\varphi_i,\infty) > 0$, se obtiene el resultado deseado. □

Teorema 4.1.2. *Vamos a mostrar que si $u_i = u_i(x,t)$ es una solución no negativa no trivial del sistema de ecuaciones (1.2.1), entonces para todo $\gamma_i \in [1,\infty)$ bajo las* *hipótesis del teorema anterior y asumiendo que* $K_i(0,\infty)=\infty$*, tenemos que*

$$\lim_{t\to\infty} K_i(0,t)^{\frac{d}{\alpha_i}(1-\frac{1}{\gamma_i})} \left\| u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t)) \right\|_{\gamma_i} = 0.$$

Demostración. Utilizando la desigualdad del triángulo nos queda,

$$\begin{aligned} \left\| u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t)) \right\|_1 &\leq \left\| u_i(t) - p_i(K_i(t_0,t)) * u_i(t_0) \right\|_1 \\ &\quad + \left\| p_i(K_i(t_0,t)) * u_i(t_0) - M_i(t_0)p_i(K_i(t_0,t)) \right\|_1 \\ &\quad + \left\| M_i(t_0)p_i(K_i(t_0,t)) - M_i(t_0)p_i(K_i(0,t)) \right\|_1 \\ &\quad + \left\| M_i(t_0)p_i(K_i(0,t)) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t)) \right\|_1 \\ &\doteq I + II + III + IV. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Estimamos enseguida cada uno de estos términos.

I: Primero notemos de (1.2.2) que

$$u_i(t_0) = p_i(K_i(0,t_0)) * \varphi_i - \int_0^{t_0} h_i(s)p_i(K_i(s,t_0)) * (u_j(s,\cdot))^{\beta_i} ds.$$

Entonces

$$\begin{aligned} p_i(K_i(t_0,t)) * u_i(t_0) &= p_i(K_i(t_0,t)) * p_i(K_i(0,t_0)) * \varphi_i \\ &\quad - \int_0^{t_0} h_i(s)p_i(K_i(t_0,t)) * p_i(K_i(s,t_0)) * (u_j(s,\cdot))^{\beta_i} ds. \end{aligned}$$

Por la propiedad de semigrupo resulta

$$\begin{aligned} p_i(K_i(t_0,t)) * u_i(t_0) &= p_i(K_i(0,t_0)) + K_i(t_0,t)) * \varphi_i \\ &\quad - \int_0^{t_0} h_i(s)p_i(K_i(s,t_0) + K_i(t_0,t)) * (u_j(s,\cdot))^{\beta_i} ds \\ &= p_i(K_i(0,t)) * \varphi_i - \int_0^{t_0} h_i(s)p_i(K_i(s,t)) * (u_j(s,\cdot))^{\beta_i} ds. \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Como antes, si $t > t_0$,

$$\begin{aligned} u_i(t) &= p_i(K_i(0,t)) * \varphi_i - \int_0^{t_0} h_i(s)p_i(K_i(s,t)) * (u_j(s,\cdot))^{\beta_i} ds \\ &\quad - \int_{t_0}^{t} h_i(s)p_i(K_i(s,t)) * (u_j(s))^{\beta_i} ds. \end{aligned}$$

De (4.1.11) concluimos

$$u_i(t) = p_i(K_i(t_0,t)) * u_i(t_0) - \int_{t_0}^{t} h_i(s)p_i(K_i(s,t)) * (u_j(s))^{\beta_i} ds.$$

De lo cual se sigue, utilizando la desigualdad de Young,

$$\begin{aligned}\|u_i(t) - p_i(K_i(t_0,t)) * u_i(t_0)\|_1 &= \left\| \int_{t_0}^{t} h_i(s)p_i(K_i(s,t)) * (u_j(s))^{\beta_i} ds \right\|_1 \\ &\leq \int_{t_0}^{t} h_i(s) \left\| p_i(K_i(s,t)) * (u_j(s))^{\beta_i} \right\|_1 ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} h_i(s) \|p_i(K_i(s,t))\|_1 \|u_j(s)\|_{\beta_i}^{\beta_i} ds.\end{aligned}$$

II: Si hacemos un cambio de variable en p_i, de t a $K_i(t_0,t)$, y consideramos que

$$K_i(1,t) = \int_1^t k_i(s)ds \to \infty, \text{ cuando } t \to \infty,$$

entonces del Lema 2.1.6 concluimos

$$\|p_i(K_i(t_0,t)) * u_i(t_0) - M_i(t_0,\infty)p_i(K_i(t_0,t))\|_1 \to 0, \text{ cuando } t \to \infty.$$

III: Para este caso tenemos

$$\begin{aligned}&\|M_i(t_0)p_i(K_i(t_0,t)) - M_i(t_0)p_i(K_i(0,t))\|_1 \\ &= M_i(t_0) \|p_i(K_i(0,t)) - p_i(K_i(t_0,t))\|_1 \\ &= M_i(t_0) \|p_i(K_i(0,t_0) + K_i(t_0,t)) - p_i(K_i(t_0,t))\|_1 \\ &= M_i(t_0) \left\| p_i(K_i(t_0,t)) * p_i(K_i(0,t_0)) - p_i(K_i(t_0,t)) \int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(0,t_0),x)dx \right\|_1.\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 2.1.6, y sustituyendo $u_i(t_0)$ por $p_i(K_i(0,t_0))$, obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} \|M_i(t_0)p_i(K_i(t_0,t)) - M_i(t_0)p_i(K_i(0,t))\|_1 = 0.$$

IV: Para este caso basta factorizar adecuadamente y usar que p_i integra uno,

$$\begin{aligned}\|M_i(t_0)p_i(K_i(0,t)) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_1 &= |M_i(t_0) - M_i(\infty)| \, \|p_i(K_i(0,t))\|_1 \\ &= |M_i(t_0) - M_i(\infty)| < \infty.\end{aligned}$$

Así, tomando límite en las cuatro estimaciones y usando que (II), (III) tienden a cero, resulta

$$\limsup_{t\to\infty} \|u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_1 \leq \int_{t_0}^{\infty} h_i(s)\, \|u_j(s)\|_{\beta_i}^{\beta_i}\, ds + |M_i(t_0) - M_i(\infty)|. \tag{4.1.12}$$

De (2.2.2) y (2.2.3) tenemos

$$0 \leq M_i(\infty) = \|\varphi_i\|_1 - \int_0^{\infty} h_i(s)\, \|u_j(s)\|_{\beta_i}^{\beta_i}\, ds < \infty,$$

de donde

$$\int_0^{\infty} h_i(s)\, \|u_j(s)\|_{\beta_i}^{\beta_i}\, ds \leq \|\varphi_i\|_1 < \infty.$$

Entonces el límite, en la norma $\|\cdot\|_1$, en (4.1.12) existe y por lo tanto, si $t_0 \to \infty$,

$$\lim_{t\to\infty} \|u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_1 = 0. \tag{4.1.13}$$

Ahora, sea $\gamma_i \in (1,\infty)$ y tomemos $m_i = \gamma_i + 1$. Similarmente a (4.1.1), de la desigualdad de Young y (4.1.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \|u_i(t)\|_{\gamma_i} &\leq \|p_i(K_i(0,t)) * \varphi_i\|_{\gamma_i} \\ &\leq \|p_i(K_i(0,t))\|_{\gamma_i} \|\varphi_i\|_1 \\ &= CK_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}(1-\frac{1}{\gamma_i})} \|\varphi_i\|_1 . \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Entonces, usando que $\gamma_i = \frac{m_i-\gamma_i}{m_i-1} + \frac{m_i(\gamma_i-1)}{m_i-1}$ resulta

$$\|u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_{\gamma_i} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u_i(t,x) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t),x)|^{\gamma_i} dx\right)^{\frac{1}{\gamma_i}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u_i(t,x) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t),x)|^{1/r} \, |u_i(t,x) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t),x)|^{m_i/q}\, dx\right)^{\frac{1}{\gamma_i}},$$

donde

$$r = \frac{m_i - 1}{m_i - \gamma_i}, \quad q = \frac{m_i - 1}{\gamma_i - 1}, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1.$$

Definamos también

$$|v(t,x)| = |u_i(t,x) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t),x)|^r,$$

$$|w(t,x)| = |u_i(t,x) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t),x)|^q,$$

entonces

$$\|u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_{\gamma_i} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v(t,x)||w(t,x)|dx\right)^{\frac{1}{\gamma_i}}.$$

Por la desigualdad de Hölder (ver el Teorema 2.1.1)

$$\|u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_{\gamma_i} \leq \left(\left(\int_{\mathbb{R}^d} |v(t,x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |w(t,x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{\gamma_i}}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\|u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_{\gamma_i} &\leq \Bigg(\left(\int_{\mathbb{R}^d} |u_i(t,x) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t),x)|\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u_i(t,x) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t),x)|^{m_i}\, dx\right)^{\frac{m_i}{m_i}\cdot\frac{1}{q}} \Bigg)^{\frac{1}{\gamma_i}} \\ &= \|u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_1^{\frac{1}{\gamma_i}\cdot\frac{1}{r}} \|u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_{m_i}^{\frac{m_i}{\gamma_i}\cdot\frac{1}{q}} \\ &= \|u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_1^{1-\delta_i} \|u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_{m_i}^{\delta_i},\end{aligned}$$

donde $\delta_i = \frac{m_i(\gamma_i - 1)}{\gamma_i(m_i-1)}$. Aplicando la desigualdad de Minkowski (Teorema 2.1.4) al segundo término del lado derecho nos queda

$$\begin{aligned}\|u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_{\gamma_i} &\leq \|u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_1^{1-\delta_i} \\ &\quad \times \left(\|u_i(t)\|_{m_i} + \|M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_{m_i}\right)^{\delta_i}.\end{aligned}$$

Usando la desigualdad elemental (2.1.1), $\delta > 0, a, b > 0$,

$$(a+b)^\delta \leq 2^\delta(a^\delta + b^\delta),$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\|u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_{\gamma_i} &\leq \|u_i(t) - M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_1^{1-\delta_i} \\ &\quad \times 2^{\delta_i}\left(\|u_i(t)\|_{m_i}^{\delta_i} + M_i(\infty)^{\delta_i}\|p_i(K_i(0,t))\|_{m_i}^{\delta_i}\right).\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\|p_i(K_i(0,t))\|_{m_i}^{\delta_i} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(0,t),x)\, p_i(K_i(0,t),x)^{m_i-1}dx\right)^{\frac{\delta_i}{m_i}} \\
&= K_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}(m_i-1)\cdot\frac{\delta_i}{m_i}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(0,t),x)\, p_i(1,K_i^{-\frac{1}{\alpha_i}}(0,t)x)^{m_i-1}dx\right)^{\frac{\delta_i}{m_i}} \\
&= K_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}(m_i-1)\cdot\frac{\delta_i}{m_i}} p_i(1,0)^{m_i-1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} p_i(K_i(0,t),x)dx\right)^{\frac{\delta_i}{m_i}} \\
&= K_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}(m_i-1)\cdot\frac{\delta_i}{m_i}} p_i(1,0)^{m_i-1} \\
&= CK_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}(m_i-1)\cdot\frac{\delta_i}{m_i}} \\
&= CK_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}(1-\frac{1}{\gamma_i})}.
\end{aligned}$$

De esta igualdad y (4.1.14) deducimos que

$$\begin{aligned}
\|u_i(t)-M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_{\gamma_i} &\le \|u_i(t)-M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_1^{1-\delta_i} \\
&\quad \times 2^{\delta_i}\left(CK_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}(1-\frac{1}{\gamma_i})\delta_i}\|\varphi_i\|_1 + M_i(\infty)^{\delta_i}CK_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}(1-\frac{1}{\gamma_i})}\right) \\
&= \|u_i(t)-M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_1^{1-\delta_i} \times K_i(0,t)^{-\frac{d}{\alpha_i}(1-\frac{1}{\gamma_i})}2^{\delta_i}\left(C\|\varphi_i\|_1 + M_i(\infty)^{\delta_i}C\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$K_i(0,t)^{\frac{d}{\alpha_i}(1-\frac{1}{\gamma_i})}\|u_i(t)-M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_{\gamma_i} \le C\|u_i(t)-M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_1^{1-\delta_i}.$$

De este modo

$$\lim_{t\to\infty} K_i(0,t)^{\frac{d}{\alpha_i}(1-\frac{1}{\gamma_i})}\|u_i(t)-M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_{\gamma_i} \le \lim_{t\to\infty} C\|u_i(t)-M_i(\infty)p_i(K_i(0,t))\|_1^{1-\delta_i}.$$

Usando (4.1.13) obtenemos el resultado deseado. □

4.2 Soluciones asintóticamente nulas

Teorema 4.2.1. *Sea $u_i = u_i(t,x)$ una solución no negativa y no trivial de (1.2.1), y sea $\frac{1}{p_j}+\frac{1}{\overline{p}_j}=1$. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

(i)
$$\lim_{R\to\infty} R^{d+\alpha_i-\alpha_i l_j}\int_0^{2R^{\alpha_i}} k_i(K_i^{-1}(t))dt = 0,$$

(ii)
$$\lim_{R\to\infty} R^{\frac{d}{p_j}-\alpha_i-\frac{\alpha_i}{\overline{p}_j}}\left(\int_0^{2R^{\alpha_i}} k_i(K_i^{-1}(t))dt\right)^{1/\overline{p}_j} < \infty,$$

y además

$$\lim_{S\to\infty} S^{d-\alpha_i\overline{p}_j}\lim_{R\to\infty} R^{d-\alpha_i\overline{p}_j}\int_0^{2R^{\alpha_i}} k_i(K_i^{-1}(t))^{\overline{p}_j-1}dt = 0,$$

entonces $\qquad \lim_{t\to\infty} M_i(t) = 0.$

Demostración. Consideremos las funciones auxiliares

$$f_i(t,x) = \left(f_{i_1}(x)\ f_{i_2}(t)\right)^{l_j},$$

donde $l_j = 1 + \overline{p}_j$; además

$$f_{i_1}(x) = \psi\left(\frac{|x|}{S\ R}\right),$$

donde S, R son constantes, y

$$f_{i_2}(t) = \psi\left(\frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}}\right).$$

La función ψ es una función suave en $[0,\infty)$ decreciente tal que

$$\psi(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & \quad r \geq 2, \end{cases}$$

y con pendiente acotada. Esto implica que los soportes de f_{i_1} y f_{i_2} están dados por

$$\begin{aligned} \Omega_{i_1} &= \text{sop} f_{i_1} = \{x : |x| \leq 2SR\}, \\ \Omega_{i_2} &= \text{sop} f_{i_2} = \{t : K_i(t) \leq 2R^{\alpha_i}\}. \end{aligned}$$

Multiplicando (1.2.1) por $f_i(t,x)$ e integrando con respecto a x y t:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{i_1}}\int_{\Omega_{i_2}} f_i(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} dt\ dx = & \int_{\Omega_{i_1}}\int_{\Omega_{i_2}} f_i(t,x) k_i(t) \Delta_{\alpha_i} u_i(t,x) dt\ dx \\ & - \int_{\Omega_{i_1}}\int_{\Omega_{i_2}} f_i(t,x) h_i(t) \left|u_j(t,x)\right|^{p_i} dt\ dx. \end{aligned}$$

Llamemos a cada término como se infiere de la siguiente igualdad, $(a) = (b) - (c)$. Vamos a estimar cada término; iniciemos con

$$\begin{aligned} (a) &= \int_{\Omega_{i_1}} \left(\int_0^{K_i^{-1}(2R^{\alpha_i})} f_i(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} dt\right) dx \\ &= \int_{\Omega_{i_1}} \left(f_i(t,x) u_i(t,x)\Big|_0^{K_i^{-1}(2R^{\alpha_i})} - \int_0^{K_i^{-1}(2R^{\alpha_i})} u_i(t,x) \frac{\partial f_i(t,x)}{\partial t} dt\right) dx. \end{aligned}$$

Considerando el soporte de f_i, resulta que $f_i(K_i^{-1}(2R^{\alpha_i}), x) = 0$. Así

$$(a) = -\int_{\Omega_{i_1}} \psi\left(\frac{|x|}{S\ R}\right)\varphi_i(x)dx - \int_{\Omega_{i_1}}\int_{\Omega_{i_2}} u_i(t,x)f_{i_1}(x)^{l_j} l_j f_{i_2}(t)^{l_j-1}\frac{\partial f_{i_2}(t)}{\partial t}dt\ dx.$$

Para calcular la parte (b) usamos que Δ_α es un operador auto-adjunto con respecto a la medida de Lebesgue

$$\begin{aligned}(b) &= \int_{\Omega_{i_1}}\int_{\Omega_{i_2}} k_i(t)u_i(t,x)\Delta_{\alpha_i} f_i(t,x)dt\ dx\\ &= \int_{\Omega_{i_1}}\int_{\Omega_{i_2}} k_i(t)u_i(t,x)f_{i_2}(t)^{l_j}\Delta_{\alpha_i}\left(f_{i_1}(x)\right)^{l_j} dt\ dx.\end{aligned}$$

Así, nos queda

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{i_1}} \psi\left(\frac{|x|}{S\ R}\right)\varphi_i(x)dx - \int_{\Omega_{i_1}}\int_{\Omega_{i_2}} f_i(t,x)h_i(t)|u_j(t,x)|^{p_i}dt\ dx\\ &\quad = -\int_{\Omega_{i_1}}\int_{\Omega_{i_2}} k_i(t)u_i(t,x)f_{i_2}(t)^{l_j}\Delta_{\alpha_i}\left(f_{i_1}(x)\right)^{l_j} dt\ dx\\ &\qquad - l_j\int_{\Omega_{i_1}}\int_{\Omega_{i_2}} f_{i_1}(x)^{l_j}u_i(t,x)f_{i_2}(t)^{l_j-1}\frac{\partial}{\partial t}f_{i_2}(t)dt\ dx.\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Usando que $\Delta_{\alpha_i} f^l \geq l f^{l-1}\Delta_{\alpha_i} f$ (esta desigualdad se puede consultar en [14])

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{i_1}} \psi\left(\frac{|x|}{S\ R}\right)\varphi_i(x)dx - \int_{\Omega_{i_1}}\int_{\Omega_{i_2}} f_i(t,x)h_i(t)|u_j(t,x)|^{p_i}dt\ dx\\ &\quad\leq\ -\int_{\Omega_{i_1}}\int_{\Omega_{i_2}} k_i(t)u_i(t,x)f_{i_2}(t)^{l_j} l_j f_{i_1}(t)^{l_j-1}\Delta_{\alpha_i}\left(f_{i_1}(x)\right) dt\ dx\\ &\qquad -l_j\int_{\Omega_{i_1}}\int_{\Omega_{i_2}} f_{i_1}(x)^{l_j}u_i(t,x)f_{i_2}(t)^{l_j-1}\frac{\partial}{\partial t}f_{i_2}(t)dt\ dx\\ &\quad\doteq\ A+B.\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

donde A y B son los términos respectivos.

Ahora estimaremos cada uno de estos términos, usando la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Young numérica (ver la Proposición 2.1.3)

$$ab \leq \varepsilon a^{p_i} + c(\varepsilon)b^{\bar{p}_i}.$$

Vamos a considerar dos casos.

I: Aplicando dos veces la desigualdad de Young,

$$
\begin{aligned}
A &= l_j \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} f_i(t,x) \left\{ u_i(t,x) f_{i_1}(x)^{-1} \Delta_{\alpha_i} \left(f_{i_1}(x) \right) k_i(t) \right\} dt\, dx \\
&\leq l_j \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} f_i(t,x) \left\{ \varepsilon |u_i(t,x)|^{p_j} + c(\varepsilon) f_{i_1}(x)^{1-l_j} \left| \Delta_{\alpha_i} (f_{i_1}(x) \right|^{l_j-1} k_i(t)^{l_j-1} \right\} dt\, dx.
\end{aligned}
$$

Para el otro término nos queda

$$
\begin{aligned}
B &= l_j \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} f_i(t,x) \left\{ u_i(t,x) f_{i_2}(t)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} f_{i_2}(t) \right\} dt\, dx \\
&\leq l_j \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} f_i(t,x) \left\{ \varepsilon |u_i(t,x)|^{p_j} + c(\varepsilon) f_{i_2}(t)^{1-l_j} \left| \frac{\partial}{\partial t} f_{i_2}(x) \right|^{l_j-1} \right\} dt\, dx.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo esto en (4.2.2)

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{i_1}} \psi \left(\frac{|x|}{S\ R} \right) \varphi_i(x) dx - \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} f_i(t,x) h_i(t) |u_j(t,x)|^{p_i} dt\, dx \\
&\quad \leq \varepsilon l_j \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} f_i(t,x) |u_i(t,x)|^{p_j} dt\, dx + \varepsilon l_j \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} f_i(t,x) |u_i(t,x)|^{p_j} dt\, dx \\
&\qquad + l_j c(\varepsilon) \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} f_{i_1}(x) f_{i_2}(t)^{l_j} \left| \Delta_{\alpha_i} (f_{i_1}(x)) \right|^{l_j-1} k_i(t)^{l_j-1} dt\, dx \\
&\qquad + l_j c(\varepsilon) \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} f_{i_2}(t) f_{i_1}(x)^{l_j} \left| \frac{\partial}{\partial t} f_{i_2}(t) \right|^{l_j-1} dt\, dx,
\end{aligned}
$$

que nos conduce a

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{i_1}} \psi \left(\frac{|x|}{S\ R} \right) \varphi_i(x) dx - \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} f_i(t,x) \left\{ h_i(t) |u_j(t,x)|^{p_i} - \varepsilon l_j |u_i(t,x)|^{p_j} \right. \\
&\qquad \left. - \varepsilon l_j |u_i(t,x)|^{p_j} \right\} dt\, dx \\
&\quad \leq c(\varepsilon) l_j \left\{ \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} f_{i_1}(x) f_{i_2}(t)^{l_j} \left| \Delta_{\alpha_i} (f_{i_1}(x)) \right|^{l_j-1} k_i(t)^{l_j-1} dt\, dx \right. \\
&\qquad \left. + \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} f_{i_2}(t) f_{i_1}(x)^{l_j} \left| \frac{\partial}{\partial t} f_{i_2}(t) \right|^{l_j-1} dt\, dx \right\} \\
&\quad \doteq c(\varepsilon) l_j \{ I_{11} + I_{12} \},
\end{aligned}
$$

donde

$$I_{11} = \left(\int_{\Omega_{i_2}} f_{i_2}(t)^{l_j} k_i(t)^{l_j-1} dt\right)\left(\int_{\Omega_{i_1}} f_{i_1}(x)\left|\Delta_{\alpha_i}(f_{i_1}(x))\right|^{l_j-1} dx\right) \doteq I_{11,t} I_{11,x}.$$

Notemos que

$$I_{11,t} = \int_{\frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}} \leq 2} \psi\left(\frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}}\right)^{l_j} k_i(t)^{l_j-1} dt.$$

Haciendo el cambio de variable

$$S = \frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}} \;\Rightarrow\; t = K_i^{-1}(SR^{\alpha_i}) \;\Rightarrow\; dt = \frac{R^{\alpha_i} dS}{K_i'(K_i^{-1}(SR^{\alpha_i}))}, \tag{4.2.3}$$

tenemos

$$\begin{aligned} I_{11,t} &= \int_{S \leq 2} \psi(S)^{l_j} k_i(K_i^{-1}(SR^{\alpha_i}))^{l_j-1} \frac{R^{\alpha_i} dS}{k_i(K_i^{-1}(SR^{\alpha_i}))} \\ &= \int_{S \leq 2} \psi(S)^{l_j} R^{\alpha_i} k_i\left(K_i^{-1}(SR^{\alpha_i})\right)^{l_j-2} dS. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$I_{11,x} = \int_{\Omega_{i_1}} \psi\left(\frac{|x|}{SR}\right)\left|\Delta_{\alpha_i}\left(\psi\left(\frac{|x|}{SR}\right)\right)\right|^{l_j-1} dx.$$

De la definición de Δ_α dada en [14] se desprende que

$$\Delta_\alpha \psi(ax) = a^\alpha (\Delta_\alpha \psi)(ax).$$

Entonces

$$I_{11,x} = \int_{\frac{|x|}{SR} \leq 2} \psi\left(\frac{|x|}{SR}\right)\left|(\Delta_{\alpha_i}\psi)\left(\frac{|x|}{SR}\right) \cdot \frac{1}{S^{\alpha_i} R^{\alpha_i}}\right|^{l_j-1} dx.$$

Haciendo el cambio de variable

$$z = \frac{x}{R}, \qquad dx = R^d dz, \tag{4.2.4}$$

obtenemos

$$I_{11,x} = \int_{|z| \leq 2S} \psi\left(\frac{|z|}{S}\right)\left|(\Delta_{\alpha_i}\psi)\left(\frac{|z|}{S}\right)\right| \frac{R^d dz}{S^{\alpha_i(l_j-1)} R^{\alpha_i(l_j-1)}}$$

$$= \frac{R^d}{(SR)^{\alpha_i(l_j-1)}} = c\ R^{d-\alpha_i(l_j-1)}.$$

Por lo tanto

$$I_{11} = c\ \int_{S\leq 2} \psi(S)^{l_j} R^{d-\alpha_i l_j+2\alpha_i} k_i \left(K_i^{-1}(SR^{\alpha_i})\right)^{l_j-2} dS,$$

donde c es una constante positiva. Ahora trabajemos con

$$I_{12} = \left(\int_{\Omega_{i_1}} f_{i_1}(x)^{l_j} dx\right) \left(\int_{\Omega_{i_2}} f_{i_2}(t) \left|\frac{\partial}{\partial t} f_{i_2}(t)\right|^{l_j-1} dt\right) \doteq I_{12,x} I_{12,t}.$$

Vemos que

$$\begin{aligned} I_{12,t} &= \int_{\Omega_{i_2}} \psi\left(\frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}}\right) \left|\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(\frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}}\right)\right|^{l_j-1} dt \\ &= \int_{\frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}}\leq 2} \psi\left(\frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}}\right) \left|\psi'\left(\frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}}\right) \frac{k_i(t)}{R^{\alpha_i}}\right|^{l_j-1} dt. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable (4.2.3)

$$\begin{aligned} I_{12,t} &= \int_{S\leq 2} \psi(S)\, |\psi'(S)|^{l_j-1} \left|\frac{k_i(K_i^{-1}(R^{\alpha_i}S))}{R^{\alpha_i}}\right|^{l_j-1} \frac{R^{\alpha_i} dS}{k_i(K_i^{-1}(R^{\alpha_i}S))} \\ &= R^{\alpha_i-\alpha_i(l_j-1)} \int_{S\leq 2} \psi(S)\, |\psi'(S)|^{l_j-1}\, k_i \left(K_i^{-1}(R^{\alpha_i}S)\right)^{l_j-2} dS. \end{aligned}$$

Así mismo

$$I_{12,x} = \int_{\frac{|x|}{RS}\leq 2} \psi\left(\frac{|x|}{RS}\right)^{l_j} dx = \int_{|z|\leq 2} \psi(|z|)^{l_j} R^d dz = R^d \int_{|z|\leq 2} \psi(|z|)^{l_j} dz = R^d,$$

donde se hizo el cambio de variable (4.2.4). Entonces

$$I_{12} = \int_{S\leq 2} \psi(S)\, |\psi'(S)|^{l_j-1}\, R^{d+2\alpha_i-\alpha_i l_j} k_i \left(K_i^{-1}(R^{\alpha_i}S)\right)^{l_j-2} dS.$$

Haciendo el cambio de variable

$$t = R^{\alpha_i} S, \qquad dS = R^{-\alpha_i} dt, \tag{4.2.5}$$

vemos que se cumple la hipótesis (i). Así, el resultado es consecuencia inmediata de que ψ tiene pendiente acotada, es decir, $||\psi'||_\infty < \infty$.

II: Aplicando una vez la desigualdad de Young

$$\begin{aligned}
A &\leq l_j \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} (u_i(t,x)) \left(k_i(t) f_{i_2}(t)^{l_j} f_{i_1}(x)^{l_j-1} |\Delta_{\alpha_i}(f_{i_1}(x))| \right) dtdx \\
&\leq l_j \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} \left\{ \varepsilon |u_i(t,x)|^{p_j} + c(\varepsilon) \left(k_i(t) f_{i_2}(t)^{l_j} f_{i_1}(x)^{l_j-1} \left|\Delta_{\alpha_i}(f_{i_1}(x))\right| \right)^{\overline{p}_j} \right\} dtdx \\
&= l_j \varepsilon \int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} |u_i(t,x)|^{p_j} dxdt \\
&\quad + l_j c(\varepsilon) \int_{\Omega_{i_2}} \int_{\Omega_{i_1}} k_i(t)^{\overline{p}_j} f_{i_2}(t)^{l_j \overline{p}_j} f_{i_1}(x)^{(l_j-1)\overline{p}_j} \left|\Delta_{\alpha_i}(f_{i_1}(x))\right|^{\overline{p}_j} dxdt, \qquad (4.2.6)
\end{aligned}$$

y aplicando una vez la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
B &\leq l_j \left(\int_{\Omega_{i_3}} \int_{\Omega_{i_1}} |u_i(t,x)|^{p_j} dtdx \right)^{1/p_j} \\
&\quad \times \left(\int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} f_{i_1}(x)^{l_j \overline{p}_j} f_{i_2}(t)^{(l_j-1)\overline{p}_j} \left| \frac{\partial}{\partial t} f_{i_2}(t) \right|^{\overline{p}_j} dxdt \right)^{1/\overline{p}_j}. \qquad (4.2.7)
\end{aligned}$$

Nótese que $\Omega_{i_3} = \left\{ t:\ 1 \leq \frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}} \leq 2 \right\}$; esto es debido a que la derivada de ψ es cero cuando $t < 1$.
Además, nótese que $\Omega_{i_3} \to \emptyset$, cuando $R \uparrow \infty$; en efecto, basta escribir

$$\Omega_{i_3} = \left\{ t:\ R^{\alpha_i} \leq K_i(t) \leq 2R^{\alpha_i} \right\}.$$

(Observe que esto es evidente cuando $K_i(\infty) < \infty$). Por lo tanto, la integrabilidad de $|u_i(t,x)|^{p_j}$ implica que

$$\int_{\Omega_{i_3}} \int_{\Omega_{i_1}} |u_i(t,x)|^{p_j} dtdx \ \longrightarrow 0, \ \text{cuando } R \to \infty.$$

Así, hay que trabajar con el término (4.2.7); es decir

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\Omega_{i_1}} \int_{\Omega_{i_2}} f_{i_1}(x)^{l_j \overline{p}_j} f_{i_2}(t)^{(l_j-1)\overline{p}_j} \left| \frac{\partial}{\partial t} f_{i_2}(t) \right|^{\overline{p}_j} dxdt \right)^{1/\overline{p}_j} \\
&= \left(\int_{\Omega_{i_2}} f_{i_2}(t)^{(l_j-1)\overline{p}_j} \left| \frac{\partial}{\partial t} f_{i_2}(t) \right|^{\overline{p}_j} dt \right)^{1/\overline{p}_j} \left(\int_{\Omega_{i_1}} f_{i_1}(x)^{l_j \overline{p}_j} dx \right)^{1/\overline{p}_j} \\
&\doteq II_{2,t} II_{2,x}.
\end{aligned}$$

Trabajaremos primero con

$$II_{2,t} = \left(\int_{\frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}} \leq 2} \psi \left(\frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}} \right)^{(l_j-1)\overline{p}_j} \left| \psi' \left(\frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}} \right) \frac{k_i(t)}{R^{\alpha_i}} \right|^{\overline{p}_j} dt \right)^{1/\overline{p}_j}.$$

Con el cambio de variable (4.2.3) obtenemos

$$II_{2,t} = \left(\int_{S \leq 2} \psi(S)^{(l_j-1)\overline{p}_j} \left| \psi'(S) \right|^{\overline{p}_j} \frac{k_i(K_i^{-1}(R^{\alpha_i} S))^{\overline{p}_j}}{R^{\alpha_i \overline{p}_j}} dS \right)^{1/\overline{p}_j}.$$

Podemos tomar $||\psi'||_\infty \leq M$ (acotada)

$$II_{2,t} \leq c\, R^{-\alpha_i} \left(\int_{S \leq 2} k_i(K_i^{-1}(R^{\alpha_i} S))^{\overline{p}_j} dS \right)^{1/\overline{p}_j},$$

donde c es una constante positiva.

Con el cambio de variable (4.2.5) resulta

$$\begin{aligned} II_{2,t} &\leq c\, R^{-\alpha_i} \left(\int_0^{2R^{\alpha_i}} k_i(K_i^{-1}(t))^{\overline{p}_j} R^{-\alpha_i} dt \right)^{1/\overline{p}_j} \\ &= c\, R^{-\alpha_i - \alpha_i/\overline{p}_j} \left(\int_0^{2R^{\alpha_i}} k_i(K_i^{-1}(t))^{\overline{p}_j} dt \right)^{1/\overline{p}_j}. \end{aligned}$$

De igual forma, procedemos con el término

$$II_{2,x} = \left(\int_{\frac{|x|}{SR} \leq 2} \psi \left(\frac{|x|}{SR} \right)^{l_j \overline{p}_j} dx \right)^{1/\overline{p}_j}.$$

Haciendo el cambio de variable

$$z = \frac{x}{SR}, \qquad dx = S^d R^d dz, \tag{4.2.8}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} II_{2,x} &= \left(\int_{|z| \leq 2} \psi(|z|)^{l_j \overline{p}_j} S^d R^d dz \right)^{1/\overline{p}_j} = (SR)^{d/\overline{p}_j} \left(\int_{|z| \leq 2} \psi(|z|)^{l_j \overline{p}_j} dz \right)^{1/\overline{p}_j} \\ &= c\, (SR)^{d/\overline{p}_j}. \end{aligned}$$

De este modo

$$B \leq c \left(\int_{\Omega_{i_3}} \int_{\Omega_{i_1}} |u_i(t,x)|^{p_j} dt dx \right)^{1/p_j} R^{\frac{d}{\overline{p}_j} - \alpha_i - \frac{\alpha_i}{\overline{p}_j}} S^{\frac{d}{\overline{p}_j}} \left(\int_0^{2R^{\alpha_i}} k_i(K_i^{-1}(t)) dt \right)^{1/\overline{p}_j}.$$

De la hipótesis se sigue que $B \to 0$, cuando $R \to \infty$.

Así, el único término que sobrevive es el término A. De (4.2.2) y (4.2.6) resulta

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(x)dx - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} h_i(t)|u_j(t,x)|^{p_i} dtdx \\
&\leq l_j\varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |u_i(t,x)|^{p_j} dxdt \\
&\quad + l_j c(\varepsilon) \lim_{R\to\infty} \int_{\Omega_{i_2}} k_i(t)^{\overline{p}_j} f_{i_2}(t)^{l_j\overline{p}_j} dt \int_{\Omega_{i_1}} f_{i_1}(x)^{(l_j-1)\overline{p}_j} \left|\Delta_{\alpha_i}(f_{i_1}(x))\right|^{\overline{p}_j} dx
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

$$\doteq l_j\varepsilon \int_0^\infty \|u_i(t)\|_{p_j}^{p_j} dt + l_j c(\varepsilon) \lim_{R\to\infty} II_{1,t} II_{1,x}.$$

Evaluamos

$$II_{1,t} = \int_{\frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}}\leq 2} \psi\left(\frac{K_i(t)}{R^{\alpha_i}}\right)^{l_j\overline{p}_j} k_i(t)^{\overline{p}_j} dt,$$

haciendo uso del cambio de variable (4.2.3), resulta

$$\begin{aligned}
II_{1,t} &= \int_{S\leq 2} \psi(S)^{l_j\overline{p}_j} k_i(K_i^{-1}(SR^{\alpha_i}))^{\overline{p}_j} \frac{R^{\alpha_i} ds}{k_i(K_i^{-1}(R^{\alpha_i}S))} \\
&\leq \int_0^2 k_i(K_i^{-1}(SR^{\alpha_i}))^{\overline{p}_j-1} R^{\alpha_i} dS,
\end{aligned}$$

y con el cambio de variable (4.2.5) obtenemos

$$II_{1,t} \leq \int_0^{2R^{\alpha_i}} k_i(K_i^{-1}(t))^{\overline{p}_j-1} dt.$$

Por otra parte, ahora trabajemos con

$$\begin{aligned}
II_{1,x} &= \int_{\frac{|x|}{SR}\leq 2} \psi\left(\frac{|x|}{SR}\right)^{(l_j-1)\overline{p}_j} \left|\Delta_{\alpha_i}\left(\psi\left(\frac{|x|}{SR}\right)\right)\right|^{\overline{p}_j} dx \\
&= \int_{\frac{|x|}{SR}\leq 2} \psi\left(\frac{|x|}{SR}\right)^{(l_j-1)\overline{p}_j} \left|(\Delta_{\alpha_i}\psi)\left(\frac{|x|}{SR}\right)\frac{1}{(SR)^{\alpha_i}}\right|^{\overline{p}_j} dx.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable (4.2.8),

$$\begin{aligned}
II_{1,x} &= \int_{|z|\leq 2} \psi(|z|)^{(l_j-1)\overline{p}_j} \left|(\Delta_{\alpha_i}\psi)(|z|)\right|^{\overline{p}_j} dz\, (SR)^{d-\alpha_i\overline{p}_j} \\
&= c\,(SR)^{d-\alpha_i\overline{p}_j}.
\end{aligned}$$

Así (4.2.9) es estimada por

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(x) - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} h_i(t)|u_j(t,x)|^{p_i} dtdx$$
$$\leq l_j\varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |u_i(t,x)|^{p_j} dxdt + l_j c(\varepsilon) c\, S^{d-\alpha_i \overline{p}_j} \lim_{R\to\infty} R^{d-\alpha_i \overline{p}_j} \int_0^{2R^{\alpha_i}} k_i(K_i^{-1}(t))^{\overline{p}_j - 1} dt.$$

Las hipótesis implican que el segundo término de la derecha tiende a cero,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(x) - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} h_i(t)|u_j(t,x)|^{p_i} dtdx \leq l_j\varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |u_i(t,x)|^{p_j} dxdt,$$

haciendo $\varepsilon \downarrow 0$, resulta

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(x)dx - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} h_i(t)|u_j(t,x)|^{p_i} dtdx = 0.$$

El resultado es consecuencia de (4.1.7), tomando $\varepsilon = 1$ y $\beta_i = p_i$. $\square$

Conclusiones

En este trabajo el sistema de ecuaciones considerado es de mayor complejidad respecto a lo que se puede encontrar publicado actualmente en el tema, y se encontró que es posible dar condiciones sobre los parámetros del sistema para describir los comportamientos asintóticos positivo y cero en el decaimiento asintótico de la masa. Sin embargo, durante el desarrollo del análisis se encontraron dos hechos que no fue posible validarlos debido a la naturaleza compleja del fenómeno planteado. Estos fueron:

- El lema de comparación. Aunque es posible establecer este lema para las condiciones del sistema analizado, su validez sólo puede asegurarse localmente en $t \in (0, \tau)$; esto es porque el operador fraccionario tiene un caracter global y no hay elementos para suponer que la relación $u_\varepsilon < u$ se pueda extender en forma global (ver (4.1.5)). La bibliografía disponible no menciona nada al respecto.
- La positividad de la solución. Como se mencionó durante el desarrollo del presente trabajo, la positividad se basa fuertemente en el principio del máximo, el que, siendo válido en ecuaciones diferenciales y para el Laplaciano ordinario, $\alpha = 2$ (ver [9]), no se cumple para el Laplaciano fraccionario. Igualmente, no hay información disponible sobre la aplicación de este principio con un Laplaciano fraccionario.

Esto da pauta a trabajos posteriores para realizar una investigación más detallada en otros campos, buscando información sobre el tema que pueda trasladarse al sistema anómalo planteado. Adicionalmente, se presenta la oportunidad de analizar con profundidad un sistema ordinario ($\alpha = 2$) para entender las condiciones por las que ambos postulados son factibles en dichos sistemas.

Referencias

Libros

[1] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Robert E. Krieger Publishing Company, 1983.

[2] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1983.

[3] G. B. Folland, *Real Analysis*, John Wiley & Sons, 1999.

[4] H. A. Jakobsen,*Chemical Reactor Modeling*, Springer International Publishing Switzerland, 2014.

[5] M. Clapp, *Análisis matemático*, Colección Papirhos, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2015.

Artículos

[6] R. J. Adler, M. Lewin, *Local time anf Tanaka formulae for super Brownian and super stable processes*, Stochastic Processes and their Applications 41, Elsevier Science Publishers, 1992.

[7] A. Gmira, L.Veron, *Large Time Behaviour of the Solutions of a Semilinear Parabolic Equation in* $\mathbb{R}^N$, Journal of Differential Equations 53, Academic Press, 1984.

[8] L. Amour, M. Ben-Artzi, *Global Existence and Decay for Viscous Hamilton-Jacobi Equations*, Nonlinear Analysis, Theory & Applications, Vol. 31, No. 5/6, Elsevier Science Ltd, 1998.

[9] R. G. Pinsky, *Decay of Mass for the Equation* $u_t = \Delta u - a(x)u^p|\nabla u|^q$, Journal of Differential Equations 165, Academic Press, 2000.

[10] P. Laurençot, *Decay of Mass for a Semilinear Parabolic System: The Critical Case*, Osaka Journal of Mathematics 40, 2003.

[11] L. Amour, T. Raoux, *The Cauchy problem for a coupled semilinear parabolic system*,Nonlinear Analysis 52, Elsevier, 2003.

[12] M. Jleli, B. Samet, *The decay of mass for a nonlinear fractional reaction-difussion equation*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, John Wiley and Sons, 2014.

[13] A. Fino, G. Karch, *Decay of mass for nonlinear equation with fractional Laplacian*, Monatshefte für Mathematik, Springer, 2010.

[14] J. Droniou, C. Imbert, *Fractal first order partial differential equations*, Rational Mechanics and Analysis, Springer, 2006.

[15] K. Bogdan, W. Hansen, T. Jakubowski, *Time-dependent Schrödinger perturbations of transition densities*, arXiv:0806.3549v3, 2008.

[16] D. Hernández, *Difusión anómala: fundamentos y aplicaciones*, Miscelania Matemática 58 Extraordinario, Sociedad Matemática Mexicana, 2014.

[17] B. M. Regner, D. Vučinić, *Anomalous Diffusion of Single Particles in Cytoplasm*, Biophysical Journal, Volume 104, 2013.

[18] C. Varea, D. Hernández, *Difusión anómala en sistemas complejos*, Revista Digital Universitaria, UNAM, Volumen 11 Número 6, 2010.

[19] N. E. Humphries, N. Queiroz, Jennifer R.M. Dyer, *Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators*, Nature Letters, Vol. 465, 24 June 2010, nature.com

[20] A. M. A. El-Sayed, S. Z. Rida, A. A. M. Arafa, *On the Solutions of the Generalized Reaction-Diffusion Model for Bacterial Colony*, Acta Applicandae Mathematicae (2010) 110: 1501-1511, Springer Science+Business Media.

[21] G. Ramos, et al, *Lévy walk patterns in the foraging movements of spider monkeys (Ateles geoffroyi)*, Behavioral Ecology and Sociobiology, Springer Verlag, 2004.

[22] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, Volume 198, Academic Press, 1999.

[23] M. Pilar, *Modelos Diferenciales y Funciones Especiales en el Ámbito del Cálculo Fraccionario*, Universidad Complutense de Madrid, 2008.

[24] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, University of Tokio, 1966.

Anexo A

Espacios de Sobolev

Las ecuaciones diferenciales se definen en forma natural en los espacios vectoriales conocidos como de Sobolev, por lo que se presenta una breve exposición de sus principales características. Las notas están elaboradas con información tomada principalmente de [5], en donde pueden encontrarse demostraciones y mayor información al respecto.

A.1 Antecedentes

Antes de definir los conceptos que nos permitan enunciar algunas de las propiedades de los espacios de Sobolev asentamos algunos conceptos previos para facilitar su comprensión.

Espacio vectorial. Un espacio vectorial es una tercia $(X, +, \cdot)$, o simplemente X, donde X es un conjunto no vacío con dos operaciones algebraicas definidas sobre sus elementos, llamados vectores: la suma vectorial $(+)$ y el producto por escalar $(\cdot)$.

Espacio vectorial normado. Un espacio normado es un par $(X, \| \cdot \|)$, donde X es un espacio vectorial con una aplicación $\| \cdot \|$: $X \to \mathbb{R}$, llamada *norma*, con las propiedades siguientes.

1. $\| x \| \geq 0$,
2. $\| x \| = 0 \iff x = 0$,
3. $\| \alpha x \| = |\alpha| \ \| x \|$,
4. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$, (desigualdad del triángulo).

Se llama *seminorma* a la aplicación que cumple los puntos 1, 3 y 4. Las normas comúnmente utilizadas en este trabajo son,

$$\begin{aligned}
\| x \| \; &\doteq \max\{|x| : \; x \in X\}, && \text{(norma uniforme)},\\
\| x \|_p \; &\doteq \left(\int_X |x|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty), && \text{(norma } p\text{)},\\
\| x \|_\infty &\doteq \sup\{x \; : \; x \in X\} && \text{(norma infinita)}.
\end{aligned}$$

Si además para toda sucesión $(x_n) \in X$ que cumple que $||x_m - x_n|| \to 0$ si $n, m \to \infty$, existe $x \in X$, tal que $||x_n - x|| \to 0, \; n \to \infty$, entonces el espacio vectorial es *completo*.

Espacio de Banach. Es un espacio vectorial normado completo.

A.2 Espacios de funciones

Denotamos por Ω a un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$.
Los espacios de funciones se denotan de acuerdo con

$$F_m^{d,n},$$

donde

- d es la derivabilidad de las funciones contenidas en el espacio,
- n es la norma usual en F,
- m indica una propiedad de las funciones del espacio.

Así, por ejemplo,

- F^0 es el espacio de funciones f que no son derivables necesariamente,
- F^n espacio de las funciones f que son n veces derivables,
- F^∞ espacio de funciones derivables indefinidamente,
- F_b espacio de funciones acotadas,
- F_c espacio de funciones con soporte compacto (el conjunto cerrado y acotado de $x \in \Omega$ donde $f(x)$ no es cero; se denota como sop$\{f\}$),
- F_0 espacio de funciones con límite cero (se desvanecen en el infinito).
- $F_b^{n,p}$ espacio de funciones acotadas, derivables n veces y evaluadas en la norma p.

Pueden omitirse los índices si no son necesarios y siempre que esto no cause confusión en el contexto de lo que se describe.

Clases de equivalencia. Son subconjuntos de Ω de la forma

$$[a] \doteq \{b \in \Omega : b \sim a,\ a \in \Omega\},$$

donde $\sim$ es una relación de equivalencia (i.e., b y a son elementos con atributos o propiedades similares). El conjunto formado por todas las clases de equivalencia en Ω,

$$\tilde{\Omega} \doteq \{[a] : a \in \Omega\}$$

se denomina *conjunto cociente*. Toda clase de equivalencia induce una partición en Ω.

Espacios de Lebesgue L^p. Son espacios de Banach cuyos elementos son clases de equivalencia de funciones medibles $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $|f|^p$ es integrable y su norma es $\|\cdot\|_p$.

Espacio L^∞. Es un espacio de Lebesgue con $p = \infty$. En este caso se usa la norma $\|\cdot\|_\infty$ y se dice que las funciones en este espacio son *esencialmente acotadas* (por el supremo esencial).

Espacio de Hilbert H**.** Es un espacio de Banach que es completo respecto a la norma inducida por el producto escalar,

$$\| v \| \doteq \sqrt{\langle v, v\rangle},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ es el producto escalar.
Para cualquier abierto Ω de $\mathbb{R}^n$, el espacio $L^2(\Omega)$ con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle \doteq \int_\Omega f\ g, \qquad f, g \in L^2(\Omega),$$

es un espacio de Hilbert.

Espacio de las funciones continuas C. Se dice que una función es puntualmente continua en $x_0 \in \Omega$ si, para cada $(x_n) \in \Omega$ tal que $x_n \to x_0$, se cumple que $f(x_n) \to f(x_0)$, $n \to \infty$. Si esta condición se cumple para todo $x \in \Omega$ entonces se dice que f es continua. Si Ω es compacto (cerrado y acotado) entonces f es uniformemente continua.

La norma usual en este espacio es la uniforme $\|\cdot\|$. El espacio $C(\Omega)$ tiene muchos subespacios importantes $C_m^n(\Omega)$. O bien el subespacio $C_c^\infty(\Omega)$, que contiene funciones de clase C^∞ con soporte compacto en Ω; dicho subespacio es denso en $L^p(\Omega)$, es decir, $\overline{C_c^\infty(\Omega)} = L^p(\Omega)$.

Aproximación por convoluciones. Si $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$, entonces $g * f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap \; L^p(\mathbb{R}^n)$. Escogiendo g_k de manera adecuada, se obtiene una sucesión $g_k * f$ de funciones con soporte compacto que converge a f en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Este producto es de gran importancia en la solución de ecuaciones diferenciales parciales.

Sucesión regularizante. Una sucesión de funciones (ρ_k) se llama *regularizante* (o tiene la propiedad de regularidad) si para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \rho_k \geq 0, \qquad \operatorname{sop}(\rho_k) \subset \overline{B}^n(0, 1/k), \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k = 1,$$

donde $\overline{B}^n$ es una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$. La sucesión regularizante estandar es

$$\rho_k(x) \doteq c k^n \rho(kx),$$

donde $c = (\int_{\mathbb{R}^n} \rho)^{-1}$ y

$$\rho(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right), & \text{si } \; \| x \| < 1, \\ 0, & \text{si } \; \| x \| \geq 1. \end{cases}$$

Si $g \in C_c^0(\Omega)$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_k * g \in C_c^\infty(\Omega)$ para todo $k \geq k_0$ y

$$\lim_{k \to \infty} \| g - (\rho_k * g) \|_p = 0, \qquad \forall p \in [1, \infty].$$

A.3 Espacios de Sobolev W

Derivadas y soluciones débiles

Supongamos que $v_i \in L^1_{loc}(\Omega), \; i = 1, ..., n$ son las i-ésimas componentes de la derivada de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, donde el subíndice *loc* indica que u, v_i son integrables localmente en un subconjunto compacto de Ω. Se dice que v_i es una *derivada débil* de u, denotada como $D_i u := v_i$, si

$$\int_\Omega D_i(\varphi u) = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Esto es

$$\int_\Omega u(D_i\varphi) + \int_\Omega (D_i u)\varphi = 0,$$

o equivalentemente

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega v_i\varphi = 0, \quad \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega), \tag{A.3.1}$$

Si $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$, entonces φu es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^n$.
Si $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ y $u,w\in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces $\lambda u+\mu w$ es débilmente diferenciable y

$$D_i(\lambda u+\mu w) = \lambda D_i u + \mu D_i w, \quad \forall i=1,...,n.$$

La función característica $\mathbf{1}_{(-\infty,0)}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ no es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}$. La función $\parallel x\parallel^p$, con $p+n>1$, es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^n$.

Las derivadas débiles son una herramienta muy útil en el estudio de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, ya que permiten encontrar soluciones más fácilmente; estas soluciones se llaman *soluciones débiles*. Si se encuentra que la ecuación diferencial tiene una solución de este tipo, entonces se analiza si es diferenciable en el sentido usual y si efectivamente satisface la ecuación.

Los espacios de Sobolev son espacios de Banach que contienen a $C_c^1(\Omega)$ como subespacio denso, y consiste de funciones en $L^p(\Omega)$ que tienen derivadas parciales débiles que también son elementos de $L^p(\Omega)$. Esto es,

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) := \{u\in L^p(\Omega) : u \text{ es débilmente diferenciable en } \Omega,\\ D_i u\in L^p(\Omega),\ \ \forall i=1,...,n\}. \end{aligned}$$

La norma para $u\in W^{1,p}(\Omega)$ se define como

$$\parallel u\parallel_{W^{1,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\parallel u\parallel_p^p + \parallel D_1 u\parallel_p^p + \cdots + \parallel D_n u\parallel_p^p\right)^{1/p}, & \text{si } p\in[1,\infty),\\ \text{máx}\{\parallel u\parallel_\infty + \parallel D_1 u\parallel_\infty + \cdots + \parallel D_n u\parallel_\infty\}, & \text{si } p=\infty. \end{cases}$$

Algunas características importantes son:

1. $\rho * u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)\cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
2. Para todo $p\in[1,\infty)$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y su cerradura es el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$.
3. Si $u\in C_c^1(\Omega)$, entonces $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

4. $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$.

A.4 Un problema parabólico con condición inicial

Sea $\{U(s,t) : t \geq s \geq 0\}$ una familia de evolución de operadores continuos en un espacio de Banach Ω. Si $\{P_t : t \geq 0\}$ es una familia de operadores cerrados en Ω, con dominio $D(P_t)$, entonces se dice que $\{U(s,t) : t \geq s \geq 0\}$ está asociada a la familia $\{P_t : t \geq 0\}$ si

$$\begin{aligned} &(a)\ \ U(s,t)\Omega \subset D(P_t) \ \text{ para cada } t \geq s \geq 0, \text{ y} \\ &(b)\ \ U(s,\cdot) \in C^1\left((s,\infty),\Omega\right), \qquad \frac{\partial U}{\partial t}(s,t) = P_t U(s,t). \end{aligned} \tag{A.4.1}$$

Así, la familia de operadores

$$U(s,t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(K(s,t), y-x) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ f \in C_b(\mathbb{R}^n),$$

es una familia de evolución en $\mathbb{R}^n$, donde p es la solución fundamental, ver Sección 2.1.3.

Proposición A.4.1. *Sea u_i una solución clásica de* (1.2.1)*. Entonces u_i es una solución de la ecuación integral* (1.2.2)*.*

Demostración. Sean $s \leq t, x \in \mathbb{R}^n$,

$$g_i(s,x) = \int_{\mathbb{R}^n} p_i(K_i(s,t), y-x) u_i(s,y) dy.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} g_i(s,x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\partial}{\partial s} p_i(K_i(s,t), y-x) \frac{\partial}{\partial s} K_i(s,t) u_i(s,y) \right. \\ &\qquad \left. + p_i(K_i(s,t), y-x) \frac{\partial}{\partial s} u_i(s,y) \right] dy. \end{aligned}$$

De (1.2.4) vemos que

$$K(s,t) = \int_s^t k(r)dr = \int_0^t k(r)dr - \int_0^s k(r)dr \ \Rightarrow \ \frac{\partial}{\partial s} K(s,t) = -k(s).$$

Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial s} g_i(s,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[-\frac{\partial}{\partial s} p_i(K_i(s,t), y-x) k_i(s) u_i(s,y) \right.$$

$$+ p_i(K_i(s,t), y-x)\frac{\partial}{\partial s}u_i(s,y)\Bigg] dy.$$

Sustituyendo (1.2.1) en el segundo integrando,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}g_i(s,x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[-k_i(s)\frac{\partial}{\partial s}p_i(K_i(s,t), y-x)u_i(s,y)\right.\\
&\quad \left. + p_i(K_i(s,t), y-x)\left\{k_i(s)\Delta_{\alpha_i}u_i(s,y) - h_i(s)\,|u_j(s,y)|^{\beta}\right\}\right] dy,\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} k_i(s)\left(\Delta_{\alpha_i} - \frac{\partial}{\partial s}\right)p_i(K_i(s,t), y-x)u_i(s,y)dy\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} h_i(s)p_i(K_i(s,t), y-x)|u_j(s,y)|^{\beta}dy.
\end{aligned}$$

Usando la Proposición 2.3.2, la primera integral del lado derecho es cero, así

$$\frac{\partial}{\partial s}g_i(s,x) = -\int_{\mathbb{R}^n} h_i(s)p_i(K_i(s,t), y-x)|u_j(s,y)|^{\beta}dy.$$

Del teorema fundamental del cálculo, deducimos que

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}g_i(s,x)ds = g_i(t,x) - g_i(0,x).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} h_i(s)p_i(K_i(s,t), y-x)|u_j(s,y)|^{\beta}dy\, ds &= \int_{\mathbb{R}^n} p_i(K_i(t,t), y-x)u_i(t,y)dy\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} p_i(K_i(0,t), y-x)u_i(0,y)dy\\
&= u(t,y) - \int_{\mathbb{R}^n} p_i(K_i(0,t),\cdot)\varphi(y)dy.
\end{aligned}$$

donde usamos que $\int_{\mathbb{R}^n} p_i(K_i(t,t), y-x)u_i(t,y)dy = u(t,x)$ por ser $p(K(s,t),\cdot)$ una unidad aproximada (ver Propiedad (ii) de Sección 2.1.3). □