CENTRO DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

TESIS

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y DIDÁCTICO DEL ESTUDIANTE PARA PROFESOR DE EDUCACIÓN PRIMARIA SOBRE FRACCIONES Y DECIMALES

PRESENTA

Juan Francisco González Retana

PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTORADO EN INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

TUTOR:
Dr. Daniel Eudave Muñoz

COMITÉ TUTORAL:

Dra. Alicia Ávila Storer
Dr. David Alfonso Páez
Dra. Ana Cecilia Macías Esparza

Aguascalientes, Ags., mayo de 2018

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES

DRA. GRISELDA ALICIA MACÍAS IBARRA
DECANA DEL CENTRO DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES
P R E S E N T E

Por medio de la presente, como comité tutorial designado del estudiante **JUAN FRANCISCO GONZÁLEZ RETANA** con ID 105801 quien realizó la tesis titulada: ***CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y DIDÁCTICO DEL ESTUDIANTE PARA PROFESOR DE EDUCACIÓN PRIMARIA SOBRE FRACCIONES Y DECIMALES***, y con fundamento en el Artículo 175 Apartado II del Reglamento General de Docencia, nos permitimos emitir el **VOTO APROBATORIO** para que él pueda proceder a su impresión. De igual manera, el estudiante podrá continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del grado en el programa de Doctorado en Investigación Educativa.

Ponemos lo anterior a su digna consideración y sin otro particular por el momento, le enviamos un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E
"SE LUMEN PROFERRE"

Aguascalientes, Ags., a 02 de abril de 2018

Dr. Daniel Eudave Muñoz
Tutor de tesis

Dra. Alicia Ávila Storer
Integrante Comité Tutorial

Dra. Ana Cecilia Macías Esparza
Integrante Comité Tutorial

Dr. David Alfonso Páez
Integrante Comité Tutorial

c.c.p. Interesado
c.c.p. Secretaría Técnica del Doctorado en Investigación Educativa

UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE AGUASCALIENTES
CENTRO DE CIENCIAS SOCIALES
Y HUMANIDADES

DEC. CCS Y H OF. N' 0361
Asunto: Conclusión de Tesis

DRA. EN ADMÓN. MARÍA DEL CARMEN MARTÍNEZ SERNA
DIRECTORA GENERAL DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
P R E S E N T E.

Por este conducto le informo que el documento final de Tesis/Trabajo Práctico Titulado: "**CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y DIDÁCTICO DEL ESTUDIANTE PARA PROFESOR DE EDUCACIÓN PRIMARIA SOBRE FRACCIONES Y DECIMALES**", presentado por el sustentante **JUAN FRANCISCO GONZÁLEZ RETANA** con **ID. 105801**, egresado del **DOCTORADO EN INVESTIGACIÓN EDUCATIVA**, cumple las normas y lineamientos establecidos institucionalmente para presentar el examen de grado.

Sin más por el momento, aprovecho la oportunidad para enviarle un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E
"SE LUMEN PROFERRE"
Aguascalientes, Ags. A 11 de Abril del 2018

DRA. GRISELDA ALICIA MACIAS IBARRA
DECANA

c.c.p. Dr. Francisco Javier Pedroza Cabrera. Secretario de Investigación y Posgrado del CCS y H.
c.c.p. Dra. Laura Elena Padilla González. Secretaria Técnica del Doctorado en Inv. Educativa
c.c.p. Mtra. Imelda Jiménez García. Jefa del Depto. De Control Escolar
c.c.p. Mtro. Juan Francisco González. Egresado del Doctorado en Investigación Educativa
c.c.p. Archivo

Educación Matemática

Ciudad de México 15 de abril de 2018.

Dr. Juan Francisco González Retana
Universidad Autónoma de Aguascalientes
México

Me permito comunicar a usted que su artículo, ***Conocimiento común del contenido del estudiante para profesor sobre fracciones y decimales*** ha sido aceptado para su publicación en nuestra revista, en el Vol 30, número 2.

La calidad de este órgano de difusión científica descansa en la publicación de artículos que contribuyan al desarrollo de la Educación Matemática, en sus diferentes dimensiones. Es por ello, que espero que usted siga siendo parte importante de este proyecto editorial.

C O R D I A L M E N T E

Avenilde Romo Vázquez
Editora Responsable

Para la elaboración de esta tesis, se contó con el apoyo de una beca de CONACYT

AGRADECIMIENTOS

Tal vez para muchos este trabajo no signifique demasiado, pero yo aprendí bastante al realizarlo. Creo que eso es lo que cuenta, al fin y al cabo. En esa reflexión aprovecho para, con toda sinceridad, ofrecer mi agradecimiento a quienes considero me ayudaron a terminar. Espero poder escribir lo que realmente les agradezco.

Creo que a quien debo agradecerle en primer lugar es a Intia Leonora, porque ella siempre me tuvo paciencia durante todo el tiempo que pasé en otra ciudad o sentado frente a la computadora intentando elaborar un trabajo digno de presentarse. Le agradezco porque siempre me motiva a que terminé lo que comienzo y porque siempre está a mi lado. En verdad que es una persona de carácter. Una persona a la que admiro y amo.

También agradezco a mi mamá y a mi papá —que gracias al todopoderoso— siguen con nosotros. Les doy las gracias por todo su apoyo pues siempre están al pendiente de cómo estamos, dónde andamos y, en ocasiones, se preocupan por lo que nos hace falta. En verdad mil gracias. Agradezco que mi papá me contagia de su arrojo, de su decisión de hacer las cosas, de enfrentar la vida como se presente, eso no cualquiera lo tiene. Le doy las gracias a mi mamá porque ella, aunque no lo sepa, siempre me motiva a seguir aprendiendo pues sé que ella hubiese querido estudiar más y más. Esto, que para mí es un logro, también es de ella.

A mis hermanos también quiero agradecerles pues de cada uno he aprendido. De mi hermana Rocío y de Romina y Regina —mis sobrinas— me he apropiado de la voluntad de darlo todo sin esperar nada. Gracias por compartir conmigo la fortaleza que las caracteriza. Mi hermano Didier siempre trata de innovar, aunque con su sarcasmo siempre me motiva a seguir adelante.

No quiero dejar sin agradecer al Dr. Daniel Eudave que siempre tiene la disposición para atender mis dudas, mis comentarios y, muy seguido, mis trabajos no tan correctos. Gracias por ser una persona con tal disposición.

Agradecer a mis compañeros del programa de doctorado a Adriana, Vero Noyola —que apostó por la cordura más que por la locura— a Jesús, Gustavo, Charlie, Yahaira, Cintya, Luis Eduardo y a Corina. Gracias por compartir conmigo esta experiencia. De todos aprendí algo nuevo y diferente. Todos tienen habilidades y capacidades que los hacen únicos. Considero que con todos logré una amistad sincera.

Mi agradecimiento a la Dra. Alicia Ávila por sus sugerencias, comentarios y críticas al trabajo siempre con el propósito de apoyar. Al Dr. David Páez por poner la atención en los detalles y sugerir ideas para la mejora del trabajo. A la Dra. Maru Ramírez que, con todos sus conocimientos y experiencia en educación primaria, me apoyó durante la elaboración de este trabajo.

En especial quiero agradecer a los estudiantes (hoy profesores) que permitieron los observara al dar clases. Espero que puedan leer, analizar y criticar lo que escribí de ellos y que, además, les sea de provecho.

DEDICATORIA

Para Intia Leonora

A donde tú vayas, iré yo; y donde tú vivas, viviré yo; tu pueblo será mi pueblo y tu Dios será mi Dios. Donde tú mueras quiero morir… (Rut 1, 16)

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS......13

ÍNDICE DE FIGURAS......14

RESUMEN......17

ABSTRACT......18

INTRODUCCIÓN......19

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA......25

1.1 Resultados, para educación primaria, en la evaluación del aprendizaje en matemáticas......26

1.2 La formación inicial de los docentes de Educación Primaria en México......32

1.3 Cursos incluidos en el Plan 2012 relacionados con matemáticas......33

1.4 La investigación sobre la formación de profesores en matemáticas......36

1.5 Investigación sobre del conocimiento matemático y didáctico del profesor......37

1.6. Investigación de los conocimientos sobre fracciones y decimales de los estudiantes para profesores......42

1.7 Preguntas y objetivos de investigación......47

1.8 Justificación......48

CAPÍTULO 2. El CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DEL PROFESOR......51

2.1. Enfoques para el análisis del conocimiento matemático del profesor......51

2.2 El Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)......57

CAPÍTULO 3. LAS FRACCIONES Y LOS DECIMALES EN EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS RACIONALES......66

3.1 Conjuntos numéricos......66

3.2 Interpretaciones de las fracciones......67

3.2.1 Relación parte-todo......72

3.2.2 Medida......74

3.2.3 Reparto......75

3.2.4 Operador..*75*

3.2.5 Razón *76*

3.3 Los números decimales..77

3.4 Propiedades de las fracciones y los decimales. 80

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA..82

4.1 Exploración del conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones y decimales 82

4.1.1 Examen de conocimientos matemáticos *82*

4.1.2 Cuestionario sobre conocimientos didácticos..*87*

4.2 La observación del conocimiento matemático y didáctico..................................88

4.3 Plan de análisis de los datos: descripción de las categorías e indicadores 91

4.3.1 Plan para el análisis cuantitativo..*91*

4.3.2 Plan para el análisis cualitativo..*92*

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.......................................95

5.1 Análisis de la información fase cuantitativa 95

5.1.1 Resultados del examen de conocimientos matemáticos......................................*95*

5.1.2 Resultados del cuestionario de conocimientos didácticos.................................*112*

5.1.3 Comparación de los resultados del examen sobre fracciones y decimales y el cuestionario de conocimientos didácticos. *126*

5.2. Análisis de la información fase cualitativa...130

5.2.1 Caso 1: Evelyn...*131*

5.2.1.1 Conocimiento común del contenido.. *132*

5.2.1.2 Conocimiento especializado del contenido... *136*

5.2.1.3 Conocimiento en el horizonte matemático.. *142*

5.2.1.4 Conocimiento del contenido y los estudiantes..................................... *144*

5.2.1.5 Conocimiento del contenido y la enseñanza... *155*

5.2.1.6 Conocimiento del currículo *162*

5.2.1.7 Valoración del conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones y decimales de Evelyn 164

5.2.2 Caso 2: Gabriel 168
5.2.2.1 Conocimiento común del contenido 169
5.2.2.2 Conocimiento especializado del contenido 173
5.2.2.3 Conocimiento en el horizonte matemático 178
5.2.2.4 Conocimiento del contenido y los estudiantes 178
5.2.2.5 Conocimiento del contenido y la enseñanza 184
5.2.2.6 Conocimiento del currículo 189
5.2.2.7 Valoración del conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones y decimales de Gabriel 191

5.2.3 Caso 3: Arely 194
5.2.3.1 Conocimiento común del contenido 195
5.2.3.2 Conocimiento especializado del contenido 199
5.2.3.3 Conocimiento en el horizonte matemático 205
5.2.3.4 Conocimiento del contenido y los estudiantes 206
5.2.3.5 Conocimiento del contenido y la enseñanza 211
5.2.3.6 Conocimiento del currículo 218
5.2.3.7 Valoración del conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones y decimales de Arely 220

5.2.4 Caso 4: Héctor 222
5.2.4.1 Conocimiento común del contenido 223
5.2.4.2 Conocimiento especializado del contenido 228
5.2.4.3 Conocimiento en el horizonte matemático 233
5.2.4.4 Conocimiento del contenido y los estudiantes 233
5.2.4.5 Conocimiento del contenido y la enseñanza 236
5.2.4.6 Conocimiento del currículo 241

5.2.4.7 Valoración del conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones y decimales de Héctor *243*

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES **245**

6.1 Sobre el conocimiento matemático de los estudiantes para profesores **246**

6.2 Sobre el conocimiento didáctico de los futuros profesores **248**

6.3 La observación del conocimiento matemático y didáctico **250**

6.4 Comparación entre el conocimiento matemático y didáctico de los estudiantes y la propuesta didáctica contendida en el programa de estudios. **252**

6.5 La formación matemática de los futuros profesores y un nuevo Modelo Educativo **255**

6.6 Alcances y limitaciones del estudio **256**

REFERENCIAS **259**

ANEXOS **271**

Anexo A **271**

Anexo B **273**

Anexo C **274**

Anexo D **275**

Anexo E **276**

Anexo F **288**

Anexo G **290**

Anexo H **302**

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1 Porcentaje de aciertos contenidos relacionados con fracciones y decimales EXCALE 2009. 6° grado......30
Tabla 1.2 Características de los cursos de matemáticas, plan 2012......35
Tabla 2.1 Actividades características del Conocimiento especializado del contenido......55
Tabla 2.2 Actividades características del Conocimiento especializado del contenido......61
Tabla 4.1 Perfil de conocimientos matemáticos sobre fracciones y decimales......84
Tabla 4.2. Índice de confiabilidad y error de medida......85
Tabla 4.3 Valores del Índice de Discriminación......87
Tabla 4.4 Perfil de conocimientos didácticos sobre fracciones y decimales......88
Tabla 4.5 Alumnos observados y los resultados que obtuvieron en los instrumentos administrados......90
Tabla 5.1 Comparación de diferencias entre los puntajes del examen de conocimientos matemáticos por escuela y semestre......99
Tabla 5.2 Puntaje promedio por grupo......100
Tabla 5.3 Porcentaje de respuesta correcta por reactivo en el examen sobre fracciones y decimales......101
Tabla 5.4 Reactivos que implican operaciones básicas con números decimales......102
Tabla 5.5 Reactivos que implican el manejo de propiedades de los números decimales......103
Tabla 5.6 Reactivos que implican operaciones básicas con fracciones......105
Tabla 5.7 Reactivos que implican el uso de dos operaciones básicas con fracciones......107
Tabla 5.8 Reactivos que implican el manejo de propiedades de las fracciones......109
Tabla 5.9 Reactivos que implican operaciones básicas con números decimales y fracciones......110
Tabla 5.10 Porcentaje de respuesta correcta por pregunta (Cuestionario de conocimientos didácticos)......113
Tabla 5.11 Promedio de aciertos por escuela y semestre......125

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Resultados PLANEA en Matemáticas: 6° Grado de Primaria. Tomado de: INEE (2015, p. 4) 27
Figura 1.2. Porcentaje de alumnos por nivel de logro educativo y estrato escolar: Matemáticas. Tomado de: INEE (2013a, p. 66) 28
Figura 1.3. Triángulo didáctico. 31
Figura 2.1. Origen del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). Figura tomada de Tavira Fuentes (2014). 58
Figura 2.2. Modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). Figura tomada de Hill, Ball y Schilling (2008 p. 377). 59
Figura 3.1. Clasificación de los números. Fuente: construcción a partir de (Fernández, 1943). 66
Figura 3.2. Definición de los números racionales desde la teoría de conjuntos. 67
Figura 3.3. Esquema conceptual para la instrucción de los números racionales. Fuente: Behr et al. (1983). 69
Figura 3.4. Ejemplos de representaciones continuas basadas en área. 73
Figura 3.5. Ejemplo de representaciones discretas. 73
Figura 3.6. Ejemplo de fracciones como puntos sobre una recta. 74
Figura 3.7. Ejemplo de unidad de referencia para medir otra. 74
Figura 3.8. Ejemplo de fracciones como operador. Figura tomada de : Llinares y Sánchez (1997, p. 72) 76
Figura 3.9. Apoyo a la comprensión de las fracciones como razón. 76
Figura 3.10. Representación geométrica de la propiedad de densidad en los números racionales. Fuente: Peterson y Hashisaki (1980, p. 239) 81
Figura 4.1. Plan de análisis de la información cuantitativa. 91
Figura 4.2. Plan de análisis de la información cualitativa. 93
Figura 5.1 Puntajes promedio del examen de conocimientos sobre fracciones y decimales por semestre en cada Escuela Normal. 97
Figura 5.2 Procedimiento de solución de un estudiante al reactivo1. 103
Figura 5.3 Respuesta de un estudiante al reactivo 5. 104

Figura 5.4 Procedimiento de solución de un estudiante al reactivo 26. 105
Figura 5.5 Procedimiento de solución de un estudiante al reactivo 25. 107
Figura 5.6 Procedimiento de solución de un estudiante al reactivo 22. 108
Figura 5.7 Respuesta de un alumno al reactivo 9 del examen de conocimientos sobre fracciones y decimales. 110
Figura 5.8 Proceso de solución de un estudiante al reactivo 18. 111
Figura 5.9. Ejemplos de procesos de solución de dos estudiantes a la pregunta 12. Cuestionario de conocimientos didácticos. 114
Figura 5.10. Respuestas de tres estudiantes a la pregunta 7. Cuestionario de conocimientos didácticos. 116
Figura 5.11. Respuestas de dos estudiantes a la pregunta 3. Cuestionario de conocimientos didácticos. 118
Figura 5.12. Respuesta de un estudiante a la pregunta 11. Cuestionario de conocimientos didácticos. 120
Figura 5.13. Puntajes promedio en el cuestionario de conocimientos didácticos sobre fracciones y decimales por semestre. 122
Figura 5.14 Comparación de promedio de aciertos por escuela y semestre. Cuestionario de conocimientos didácticos 123
Figura 5.15 Diagrama de dispersión de los conocimientos matemáticos y los conocimientos didácticos sobre fracciones y decimales. 127
Figura 5.16 Respuesta de Evelyn al reactivo número 18 del examen de conocimientos matemáticos. 134
Figura 5.17 Respuesta de Evelyn al reactivo número 9 del examen de conocimientos matemáticos. 135
Figura 5.18 Respuesta de Evelyn al reactivo número 24 del examen de conocimientos matemáticos. 136
Figura 5.19. Desafío No. 66, libro de texto cuarto grado, página 123. 143
Figura 5.20. Actividad propuesta por Evelyn en la sesión 3. 147
Figura 5.21. Lección 65. ¿Qué parte es? Primaria. Cuarto Grado. 149
Figura 5.22. Respuesta de Evelyn a la pregunta 6 del cuestionario 166

Figura 5.23. Respuesta de Gabriel al reactivo 26 en el examen de conocimientos sobre fracciones y decimales. 170
Figura 5.24. Respuesta de Gabriel al reactivo no. 13. Examen sobre fracciones y decimales. 173
Figura 5.25. Respuesta de Gabriel a la pregunta 4. Cuestionario de conocimientos didácticos. 183
Figura 5.26. Solución al ejemplo con que Gabriel dio inicio a la sesión 5. 186
Figura 5.27. Ejercicios que Gabriel propuso durante la sesión de observación 1 190
Figura 5.28. Desafío 29, Partes de un todo. Primaria. Cuarto grado. 191
Figura 5.29. Respuesta de Arely al reactivo 22. Examen sobre fracciones y decimales. 196
Figura 5.30. Respuesta de Arely al reactivo 23. Examen de fracciones y decimales 198
Figura 5.31. Respuesta de Arely al reactivo 9. Examen de fracciones y decimales 199
Figura 5.32. Ejercicio distintas formas de representación de fracciones, presentado por Arely. 200
Figura 5.33. Actividad sobre relación entre una fracción y el todo de referencia. 205
Figura 5.34. Respuesta de Arely a la pregunta 10. Cuestionario conocimientos didácticos 207
Figura 5.35. Respuesta de Arely a la pregunta 13. Cuestionario de conocimientos didácticos. 208
Figura 5.36. Respuesta de Héctor al reactivo 19. Examen sobre fracciones y decimales. 224
Figura 5.37. Reactivo 26. Examen de conocimientos sobre fracciones y decimales 225

RESUMEN

El aprendizaje de las fracciones y los decimales representa una dificultad para los estudiantes de educación primaria, lo mismo que para los profesores y estudiantes para profesores, toda vez que su empleo involucra una compresión distinta respecto a otros conjuntos de números, como por ejemplo los naturales. Dada la importancia del rol docente en el aprendizaje matemático, el análisis del conocimiento que poseen los futuros profesores se torna importante.

El presente trabajo ofrece un análisis del conocimiento matemático y didáctico sobre las fracciones y los decimales de estudiantes que aspiran a ser profesores de primaria. Se muestra cómo los futuros profesores emplean su conocimiento mientras enseñan contenidos matemáticos que involucran fracciones o decimales en la escuela primaria.

Se utilizó el Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza para analizar el conocimiento de los futuros profesores. Se desarrolló una prueba de conocimientos matemáticos y un cuestionario de conocimientos didácticos acerca de cómo se enseñan las fracciones y los decimales la escuela primaria. Ambos instrumentos se administraron a 275 alumnos de 5º y 7º semestres de dos escuelas formadoras de docentes en el estado de Durango, México. Con base en los resultados se seleccionaron cuatro estudiantes ─dos por escuela─ para identificar cuáles conocimientos ponen en práctica al enseñar fracciones y decimales.

Entre los principales resultados se destaca que en su mayoría los futuros profesores tienen los conocimientos esperables de alguien que estudió para profesor de educación primaria y que tienen mayor dificultad para resolver problemas que involucran el uso de fracciones que aquellos que implican números decimales. Se detectaron algunos errores en los procesos de resolución de problemas que son elementales en el manejo de fracciones y decimales. Durante la exploración de los conocimientos didácticos en el cuestionario se observaron algunas dificultades de los futuros profesores para identificar errores en el aprendizaje de las fracciones y decimales en niños que cursan la educación primaria.

Durante la observación de la práctica de los estudiantes se percibieron limitaciones para diseñar actividades de enseñanza bajo el enfoque didáctico que se sugiere en los programas de matemáticas, así como para identificar dificultades que los alumnos de educación primaria enfrentan al estudiar fracciones o decimales. Además de que, con frecuencia, emplean estrategias de enseñanza basadas en un enfoque didáctico de corte tradicional.

El estudio aporta una reflexión sobre la implicación de estos conocimientos para el logro de las exigencias que el programa curricular de educación primaria demanda. También acerca de la formación matemática que los futuros profesores reciben durante su estancia en la escuela normal.

ABSTRACT

The learning of fractions and decimals represents a difficulty for elementary school students, since their use involves a different understanding with respect to other sets of numbers, such as natural ones. Given the importance of the teaching role in mathematical learning the analysis of knowledge that a teacher has becomes important.

The present work offers the analysis of mathematical and didactic knowledge about the fractions and decimals of students who aspire to be primary school teachers. It shows how preservice teachers use their knowledge while teaching mathematical content involving fractions or decimals in elementary school.

The Mathematical Knowledge for Teaching Model is used to analyze the knowledge of preservice teachers. We have created a mathematical test and a questionnaire on didactic knowledge about fractions and decimals taught in elementary school. Both instruments have been given to 275 students of fifth and seven grades from two schools. These schools are training our future teachers from Durango state in Mexico. As soon as we have the results of this test we will select four students. This means two students per school. As a result, we are going to identify which knowledge to put into practice when teaching fractions and decimals.

The main results have pointed out that the majority of future teachers have expected knowledge of a graduate of teachers training education. These teachers have greater difficulty in solving problems that involve the use of fractions than those that involve decimal numbers. Some errors were detected in the problem-solving processes that are important in the handling of fractions and decimals.

During the observation of the student's practice, limitations to design activities under the didactic in the mathematics programs. We identify difficulties that elementary school students face when studying fractions or decimals. In addition to that, they often employ teaching strategies based on a traditional didactic approach.

The study provides a reflection on the implication of this knowledge for the demands of the curricular program of primary education. It also on the mathematical training that preservice teachers receive during their stay learning at (The Normal School) in Durango.

INTRODUCCIÓN

La investigación que aquí se reporta tiene como telón de fondo los primeros años de la implementación de la reforma al plan de estudios para la formación de profesores en educación primaria iniciada en el año 2012. Con dicha reforma se pretende formar docentes que cuenten las herramientas necesarias para "responder a la transformación social, cultural, científica y tecnológica que se vive en nuestro país[México]" (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2011a, p. 2).

El Plan de estudios 2012 de la Licenciatura en Educación Primaria se diseñó con base en un modelo por competencias. Para ello, según se menciona en el Acuerdo Presidencial 469 publicado en agosto del mismo año, se analizaron las tendencias internacionales y nacionales de formación de docentes y las teorías que les servían de fundamento. Se decidió que la formación docente debería estar centrada en el aprendizaje, el desarrollo de competencias y en la flexibilidad curricular académica y administrativa.

Es justamente el enfoque basado en el desarrollo de competencias el que permea todos los programas que conforman las asignaturas de la malla curricular de este Plan de estudios. Se trata de un enfoque con el que se busca que los profesores desarrollen competencias genéricas (aquellas con las que cualquier egresado de un programa de educación superior debe contar) y profesionales (las propias de un profesor de educación primaria).

El trabajo que se presenta se enfoca, de manera particular, en la formación matemática de los estudiantes para profesores. El análisis de los procesos de formación inicial en el área de matemáticas resulta importante toda vez que los conocimientos, habilidades y actitudes que desarrollen antes de incorporarse al servicio docente son indispensables para el logro de los aprendizajes matemáticos de los alumnos de educación primaria.

En el plan de estudios 2012 la formación matemática de los profesores de educación primaria, se estructura a través de cuatro cursos: *Aritmética: su aprendizaje y enseñanza*; *Algebra: su aprendizaje y enseñanza*; *Geometría: su aprendizaje y enseñanza*, y; *Procesamiento de información estadística*. En cada uno de ellos se sugiere el estudio de temas que permitan, en primer lugar, la consolidación de los conocimientos matemáticos propios de cada curso.

En segundo lugar, el desarrollo de conocimientos didácticos que preparen a los futuros profesores para promover el aprendizaje matemático en alumnos de educación primaria.

La investigación que se reporta se centra, de manera particular, en el análisis del conocimiento matemático de los estudiantes para profesor de educación primaria, pues son un elemento esencial para el desarrollo de la práctica de enseñanza. Estudiar este conocimiento implica el análisis de dos tipos de ellos. Por un lado, del conocimiento de los contenidos matemáticos que un profesor enseña; y por el otro, del conocimiento didáctico para acercar a los alumnos a un contenido en específico.

El interés por el análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos que tienen los profesores es un tema de estudio vigente en la investigación en educación matemática. Se pueden encontrar investigaciones en las que se indagan, desde diversas perspectivas teóricas, los conocimientos disciplinares ─matemáticos─ y los conocimientos didácticos (Ball, 2003; Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán, 2012; Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015; Rojas, Flores y Carrillo, 2015; por mencionar algunos).

Los trabajos de Shulman (1986, 1987) fueron un punto de partida para estudiar el conocimiento del profesor. En las ideas que discute en sus dos trabajos que tratan el tema afirma que los profesores necesitan *un conocimiento base para la enseñanza*, el cual se compone de un conjunto de conocimientos disciplinares sobre la materia que se enseña y de conocimientos acerca de cómo enseñar dicha materia (conocimientos didácticos).

Uno de ellos es el conocimiento del contenido, es decir, el conocimiento que los profesores deben tener acerca de los temas que enseñará. Un profesor debe tener conocimiento de los temas que se estudian en la asignatura que imparte. Este conocimiento, desde la perspectiva de Shulman, es indispensable para la enseñanza.

De la propuesta de Shulman surge el denominado Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK por sus siglas en inglés de *Pedagogical Content Knowledge*); fue uno de los tipos de conocimiento que llamó más la atención a la comunidad de investigadores interesados en el análisis de la enseñanza. El PCK se refiere al conocimiento de cómo enseñar una materia en particular, lo que implica idear las formas de representar un contenido: "las analogías. ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosos, en otras palabras, las formas de representación y formulación del tema que lo hace comprensible para otros" (Shulman, 1987, p. 9).

En educación matemática a partir de los aportes de Shulman, Deborah Ball desarrolla el modelo conocido como el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT, por sus siglas en inglés de *Mathematics Knowledge for Teaching*). En la investigación aquí reportada se retomó el modelo del MKT como el referente teórico que permitió el diseño de los instrumentos de recogida de información, así como elementos para la realización del análisis de datos.

El estudio del conocimiento matemático y didáctico de los estudiantes para profesor tiene su principal fundamento en la importancia que adquiere ─el conocimiento─ para el desarrollo de la práctica de enseñanza dentro de las aulas y su impacto en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

De los conocimientos matemático y didáctico de los profesores dependen, en gran medida, aspectos como:

a) La manera en la que se diseñan y ejecutan planes de clase, pues de acuerdo con sus conocimientos los futuros profesores planean y conducen cada una de las actividades que desarrollan durante la clase.
b) Cómo anticipan los posibles errores de los estudiantes durante el estudio de un tema. Además de cómo reaccionan ante preguntas o comentarios planteados por los alumnos durante el desarrollo de una clase.
c) La forma en que pueden relacionar temas de matemáticas con temas de otras asignaturas o con contenidos matemáticos de otros grados e incluso de otros niveles educativos.
d) La interpretación que realicen de los programas de estudios, de los libros de texto y de otros materiales de apoyo a la enseñanza y el aprendizaje; por ejemplo, materiales didácticos, organización de la clase, actividades de aprendizaje que se diseñen, entre otros.
e) El empleo de diversos recursos tecnológicos ─por ejemplo software didáctico o sitios web─ que favorezcan el aprendizaje matemático de los alumnos.

Los motivos que dieron origen a la presente investigación se deben, en primer lugar, a un constante interés por la realidad educativa, por aquello que sucede día a día en las aulas y que los maestros enfrentan con los recursos y conocimientos que poseen. Porque los profesores tienen que tomar decisiones didácticas constantemente y en fracciones de segundo, así como valorar los resultados que se obtengan a partir de tales decisiones. En segundo lugar, al interés por los procesos de formación inicial de los profesores de educación primaria, en particular en lo que refiere a la educación matemática. En tercero, por la atracción a esa idea de que el docente de educación primaria debe poseer conocimiento (matemático y didáctico) que le permitan desarrollar promover aprendizajes matemáticos en los estudiantes

Considerando lo anterior, se diseñó la investigación que se reporta. En ella, por medio de instrumentos de obtención de datos tanto cuantitativos como cualitativos, se obtuvieron datos que ayudaron a describir los conocimiento matemático y didáctico de los estudiantes para profesor en torno a las fracciones y los decimales. La descripción incluyó la comparación de los conocimientos que los futuros profesores evidenciaron al enseñar matemáticas con los necesarios para enseñar fracciones y decimales en la escuela primaria (SEP, 2011a).

La investigación aporta información para la mejora de los procesos de formación matemática y didáctica de los futuros docentes. Los resultados de la investigación ofrecen elementos que permiten reflexionar acerca de cuáles son posibilidades de mejora que se pueden realizar. Además, contribuye a la identificación de qué conocimientos (sobre fracciones y decimales) es necesario fortalecer.

El texto se compone de seis capítulos. En el primero se integra información que ayudó a la delimitación del objeto de estudio: el conocimiento matemático y didáctico de los estudiantes para profesor. Se presenta resultados de diversas evaluaciones del logro educativo realizadas a los alumnos de educación primaria, en particular en la asignatura de matemáticas. Con el análisis de los resultados se hace visible la importancia del profesor como un elemento esencial en el aprendizaje matemático. En el caso de los profesores en formación se destaca la trascendencia de contar con un conocimiento sólido, para enfrentar el reto que tienen delante.

Se advierte que es indispensable considerar, como punto de partida, la formación inicial de los profesores, pues es en ella donde adquieren los conocimientos tanto disciplinares (en este caso matemáticos) como didácticos para su trabajo docente. En este apartado se expone la necesidad de estudiar los conocimientos de los futuros profesores sobre un tema que históricamente ha resultado difícil para aprender y enseñar: las fracciones y los decimales.

Analizar el conocimiento matemático y didáctico de los futuros profesores implica conocer, ente otros elementos, las características del plan de estudios con el cual son formados. En el primer capítulo se hace un breve recorrido no solo por el actual plan de estudios, sino por algunos los anteriores ─los planes de 1984 y 1997─ con el propósito mostrar la manera en que la formación matemática de los profesores de primaria se ha ido modificando.

En este apartado también se resumen investigaciones que estudian los conocimientos matemáticos de los profesores en formación. Como punto de partida, se muestran reportes de investigación que indagan tanto los conocimientos matemáticos como didácticos de los estudiantes para profesores sobre los números racionales con el fin de mostrar que el análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos sobre fracciones y decimales es un problema que está en el interés de la comunidad de investigadores en educación matemática, y que aún es necesario continuar con su exploración dados los resultados de aprendizaje y la dificultad que estos números representan tanto en su enseñanza como en su aprendizaje.

En el segundo capítulo se describe el marco teórico que sustenta el estudio. Se trata de la propuesta denominada *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (*Mathematical Knowdelge for Teaching*, MKT), de Ball (2003), pues como se comentó anteriormente, dicho modelo sirvió de base teórica para el análisis de los resultados de este estudio.

En el capítulo tres se describen las características de las fracciones ─en particular sus diversas interpretaciones─ y de los números decimales como parte del conjunto de los números racionales.

En el capítulo cuatro se describe la metodología que se siguió para la realización de la investigación. Como se señaló antes, el estudio se realizó en dos etapas. En la primera se desarrollaron y administraron dos cuestionarios con los que se exploró el conocimiento matemático y didáctico de futuros profesores de dos Escuelas Normales del estado de Durango en México. La segunda etapa consistió en la realización de observaciones durante las jornadas de práctica que los estudiantes para profesor realizan como parte de su formación.

El capítulo cinco presenta el análisis de la información que se obtuvo. Tanto de la aplicación de los cuestionarios con los que se exploró el conocimiento matemático y didáctico como de las observaciones de las clases que impartieron los estudiantes que se seleccionaron.

Finalmente, en el capítulo seis se exponen las conclusiones y en ellas se reflexiona sobre las preguntas y objetivos planteados al inicio de la investigación. Se realiza una valoración de los alcances y las limitaciones del estudio y, para terminar, se sugieren otras posibles investigaciones.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las Matemáticas ocupan un lugar más importante en el currículo de Educación Primaria en México, pues el tiempo propuesto para su estudio es de poco más del 20% del tiempo total. De las 900 horas anuales de estudio que se le dedican a este nivel educativo, 200 de ellas están destinadas al logro de los aprendizajes matemáticos (SEP, 2011a).

En términos generales se reconoce que el estudio de las matemáticas en educación primaria es importante porque contribuye al desarrollo intelectual de los individuos y proporciona las bases de conocimiento que se vuelven un punto de partida para continuar hacia otros grados o niveles educativos y resolver problemas de la vida cotidiana. Pero, estudiar matemáticas tiene razones más profundas, así por ejemplo, para Schulmaister (2009) gracias a ellas diversas situaciones o problemas del mundo real pueden ser explicadas ─desde el reparto de dulces entre niños hasta la estimación del tamaño del planeta Tierra─. Además, este autor menciona que “las matemáticas ofrecen… la oportunidad de plantear conjeturas, de contrastarlas, de detectar y analizar los errores, y así desarrollar nuevas conjeturas, hasta llegar a construir teorías que pueden ser aplicadas de manera generalizada en muchos problemas” (p. 12).

Para Godino, Batanero y Font (2003) con el estudio de las matemáticas en el aula lo que se pretende es proporcionar habilidades para “interpretar y evaluar críticamente la información matemática… en diversos contextos; discutir o comunicar información matemática, cuando sea relevante, y; resolver los problemas matemáticos que encuentre en la vida diaria o en el trabajo profesional” (p. 24). Las matemáticas, vistas de esta manera, contribuyen a la formación personal y social de los individuos. Sin embargo, aunque son un elemento importante en la educación primaria, en México aún se tienen dificultades para el logro de los aprendizajes matemáticos incluidos en los planes de estudio de educación básica.

1.1 Resultados, para educación primaria, en la evaluación del aprendizaje en matemáticas

Producto de una cultura de la evaluación impulsada tanto por organismos internacionales como por iniciativa propia, México realiza ejercicios de evaluación a gran escala de los aprendizajes de los estudiantes. Estas evaluaciones se han centrado en tres áreas: Lengua, Matemáticas y Ciencias. Los resultados obtenidos muestran, de manera general, que los estudiantes de educación primaria en México alcanzan niveles deficientes en el aprendizaje de las matemáticas.

Algunos ejemplos de evaluaciones nacionales son los resultados del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) 2015 (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE], 2015) para sexto grado muestran que la mayoría de los alumnos se ubican en los Niveles 1 y 2, lo que significa que solamente escriben, comparan y resuelven problemas aritméticos con números naturales. Solo el 7% son capaces de resolver problemas que involucran números naturales, decimales y fraccionarios; o en donde el cálculo de promedios y medianas, así como la comparación de razones se ven involucrados (ver figura 1.1).

Nivel IV
- Resuelven problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios.
- Resuelven problemas de aplicación de áreas.
- Resuelven problemas que implican calcular promedios y medianas, y comparar razones.

Nivel III
- Resuelven problemas aritméticos con números naturales o decimales
- Resuelven problemas de aplicación de perímetros.

Nivel II
- Resuelven problemas aritméticos (que involucran suma, resta, multiplicación y división) con números naturales.

Nivel I
- Escriben y comparan números naturales. Sin embargo no resuelven problemas aritméticos con números naturales.

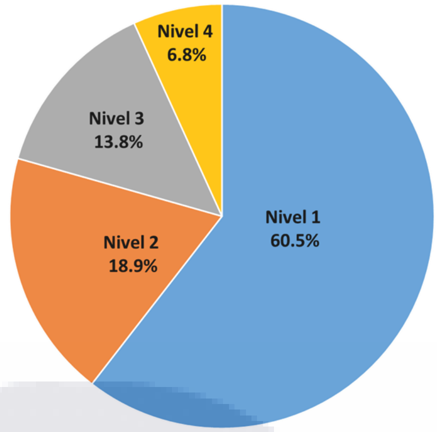


Figura 1.1. Resultados PLANEA en Matemáticas: 6° Grado de Primaria. Tomado de: INEE (2015, p. 4)

Otro ejemplo lo constituyen los resultados de la aplicación de los Exámenes de Calidad y Logro Educativo (EXCALE) de 2009 para los alumnos de sexto grado de primaria son otro ejemplo de los resultados que los alumnos de este nivel obtienen (INEE, 2013a). La mayoría de los estudiantes (68%) evaluados se ubicaron en los niveles de logro “Por debajo del básico” y “Básico” (ver Figura 1.2). De acuerdo con los resultados, los alumnos que se ubican en estos niveles son capaces de resolver problemas que implican calcular la media aritmética, resolver problemas de suma con dos sumandos, resolver problemas de conversión de metros a centímetros, resolver problemas que impliquen dos operaciones (multiplicación y división), entre otras tareas. El 24% de los alumnos se ubicó en el nivel “Medio” y únicamente el 8% en el nivel “Avanzado”. En este último nivel los estudiantes pueden, por ejemplo, resolver problemas que relacionan dos números que representan la parte y el todo, resolver operaciones con números fraccionarios, convertir números fraccionarios a decimales, resolver problemas de porcentajes, entre los principales (INEE, 2013a).

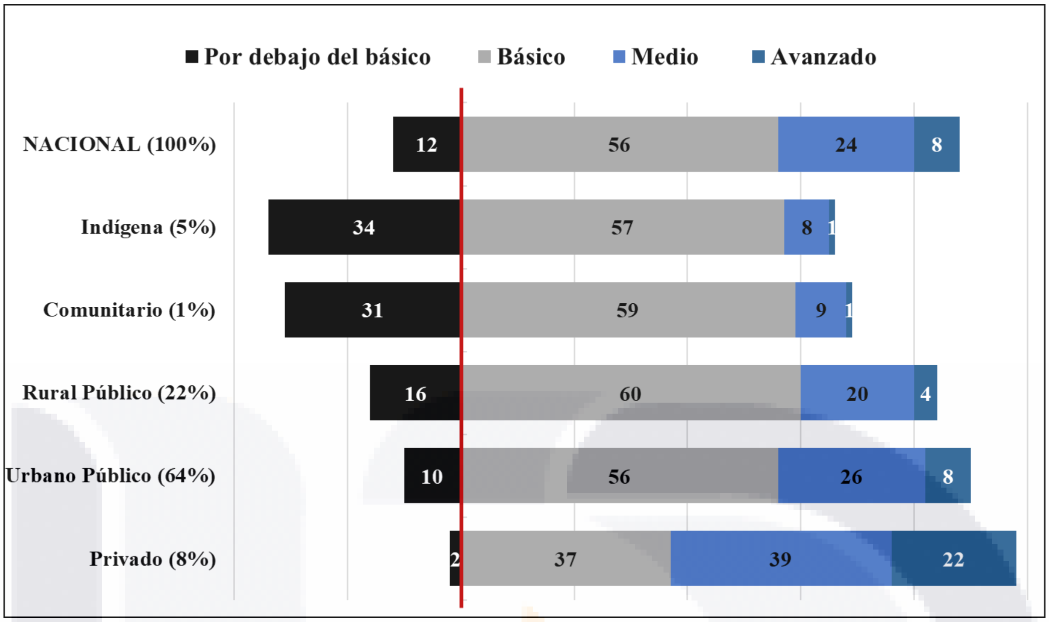


Figura 1.2. Porcentaje de alumnos por nivel de logro educativo y estrato escolar: Matemáticas. Tomado de: INEE (2013a, p. 66)

En el nivel internacional, México también ha participado en evaluaciones a gran escala. En el Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE), que se aplicó en junio de 2013 a una muestra nacional de las escuelas primarias, los resultados que obtiene México concuerdan con los resultados de las evaluaciones nacionales ya citadas.

Cerca de una cuarta parte (23%) de los alumnos alcanzó el nivel 1, lo cual significa que pueden realizar tareas como “estimar pesos y longitudes de objetos, ordenar números naturales y decimales, hacer uso del sistema monetario” (Flores y Díaz, 2016, p. 22), entre otras. Una proporción importante (40%) de los alumnos de sexto grado que fueron evaluados, se ubicó en el nivel 2, lo que quiere decir que son capaces, entre otras cuestiones, de “resolver problemas simples con números naturales, decimales y fracciones; calcular perímetros y áreas de polígonos; además de que pueden identificar diferentes tipos de ángulos y resolver problemas que los involucren” (Flores y Díaz, 2016, p. 21). Otro 23% se ubicó en el nivel 3, algunas de las tareas que pueden realizar los alumnos son “resolver problemas que contengan proporciones, que involucren ángulos o el cálculo de perímetros y áreas de polígonos” (Flores y Díaz, 2016, p. 22). El 14% restante alcanzó el nivel 4 en el que además de poder realizar las tareas de los niveles anteriores son “capaces de interpretar datos de tablas o gráficas complejas para resolver problemas que incluyen conversión de unidades de medida y uso de números decimales y fracciones"(Flores y Díaz, 2016, p. 22).

Los resultados del Programme for International Student Assessment (mejor conocido por sus siglas como PISA) señalan algo muy similar a las evaluaciones antes citadas[1]. En la evaluación 2012 México obtuvo un promedio de 413 puntos y se ubicó por debajo de la media de los países que conforman la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) (que fue de 494 puntos). Con relación a los niveles de logro, el 55% de los estudiantes mexicanos se ubicaron "por debajo del nivel 1" o en el "nivel 1" y solo 4% en los "niveles 4 a 6", según los criterios definidos por PISA:

> Los estudiantes cuyo desempeño se situó "debajo del nivel 1" son capaces de realizar tareas matemáticas muy sencillas, tales como leer un solo valor en una gráfica o tabla en la que se identifica claramente los nombres de las variables, de modo que los criterios de selección son claros y la relación entre la tabla y los aspectos del contexto descrito son evidentes. También pueden realizar operaciones aritméticas con números enteros siguiendo instrucciones claras y bien definidas. Muchos de estos estudiantes probablemente tendrán serias dificultades para usar las matemáticas como una herramienta para beneficiarse de nuevas oportunidades educativas y de aprendizaje a lo largo de la vida, o para poder desarrollar un pensamiento o razonamiento matemático que les permita manejar abstracciones (INEE, 2013b, p. 36)

Los resultados de las evaluaciones nacionales e internacionales que se presentaron ofrecen un panorama del aprendizaje matemático de los alumnos de educación primaria. Los resultados sugieren que los alumnos tienen problemas para realizar tareas matemáticas como resolver problemas y operaciones con números fraccionarios o convertir números fraccionarios a decimales.

De acuerdo con los resultados de las distintas evaluaciones, uno de los temas en matemáticas que más dificultad presenta para su aprendizaje lo constituyen las fracciones y

[1] PISA se centra en la valoración de la denominada *Competencia Matemática* que incluye un repertorio de conocimientos y habilidades que los estudiantes deben adquirir dentro y fuera de la escuela, y no en los contenidos del currículo escolar.

decimales. Post (1981), Ávila (2008) y Parra y Flores (2008) afirman que éstas dificultades radican, en gran medida, en la comprensión de este conjunto de números, pues, la mayoría de las veces hacen los emplean bajo la lógica de los números naturales.

Algunas dificultades se pueden observar en el porcentaje de respuesta a los reactivos que incluyeron fracciones y decimales en los Exámenes de Calidad y Logro Educativo (Excale). En la tabla 1 se muestra el porcentaje de respuesta correcta para reactivos que involucraron fracciones y decimales en la aplicación en sexto grado de primaria (INEE, 2012) (por ejemplo véase la Tabla 1.1).

Tabla 1.1

Porcentaje de aciertos en contenidos relacionados con fracciones y decimales EXCALE 2009. 6° grado.

Contenido temático	% de respuesta correcta
Ordenar en forma ascendente números decimales hasta milésimos.	18
Resolver problemas de fracciones que relacionan dos números que representan la parte y el todo.	18
Resolver problemas de suma de fracciones de diferente denominador (tercios y cuartos).	24
Resolver problemas que impliquen una suma de fracciones con diferente denominador (medios y octavos).	26
Resolver problemas de resta de fracciones con diferentes denominadores.	29
Ordenar fracciones impropias en forma descendente.	29
Sumar fracciones con distinto denominador (tercios y cuartos).	29
Sumar dos fracciones con diferente denominador (medios y tercios).	29
Resolver problemas aditivos con dos operaciones de fracciones, con denominadores distintos.	32

Nota. Tomado de INEE (2013a)

Los anteriores resultados son ejemplo de que, aunque a la asignatura de matemáticas se le otorga un lugar importante en el currículo de educación primaria, los alumnos no alcanzan los aprendizajes esperados. Si se considera que una de las figuras importantes en el aprendizaje escolar la constituye el profesor, su conocimiento al respecto ─tanto matemático como didáctico─ se vuelven significativos. De ellos depende, en gran medida, la manera en que promueven los aprendizajes. Al respecto Hill, Rowan y Ball (2005) señalan que los profesores necesitan un tipo de conocimiento matemático que les permita proporcionar explicaciones a sus estudiantes, analizar sus respuestas y emplear diversos recursos para representar conceptos matemáticos.

En el triángulo didáctico (figura 1.3), uno de los modelos más difundidos y empleados en la literatura en educación matemática, uno de los elementos esenciales lo constituye precisamente el profesor. En el aprendizaje de las matemáticas, particularmente en un tema como las fracciones y los números decimales, su conocimiento al respecto ─tanto matemático como didáctico─ se vuelven significativos, pues, como ya se dijo, de ellos depende la manera en que promueve los aprendizajes sobre estos temas.

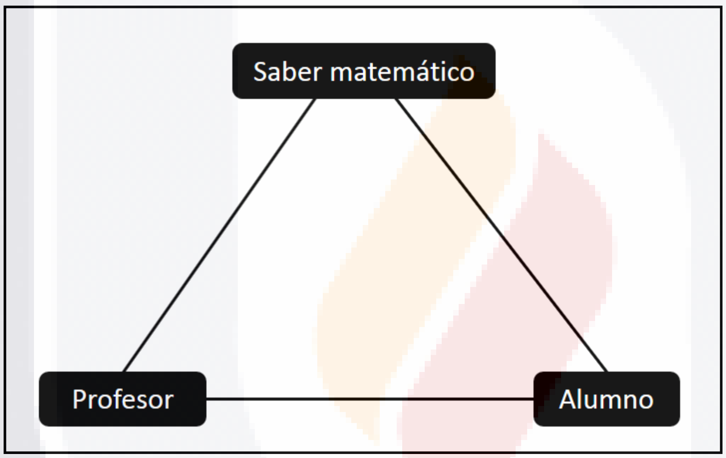


Figura 1.3. Triángulo didáctico.

Más aún la formación que los profesores reciben antes de incorporarse al servicio docente resulta un elemento de interés para su investigación. Se espera que durante dicha formación los futuros profesores adquieran el conocimiento tanto matemático como didáctico necesario para llevar a cabo la práctica de enseñanza.

1.2 La formación inicial[2] de los docentes de Educación Primaria en México

La formación inicial de los docentes de educación básica constituye un elemento fundamental para el Sistema Educativo Mexicano. Esta tarea le corresponde, en México, a las Escuelas Normales, aunque también existen otras instituciones que contribuyen a ello (por ejemplo, la Universidad Pedagógica Nacional). En dichas escuelas los futuros maestros adquieren los conocimientos necesarios para el trabajo educativo con los niños de educación preescolar, primaria y secundaria.

Para la formación de docentes de primaria en México, en el pasado inmediato, sobresalen tres procesos de reforma cuyo interés es la mejora de la formación inicial de los profesores de educación primaria. En el año de 1984[3] se reformaron tanto el plan como los programas de estudio (SEP, 1988). Se otorgó un peso importante a contenidos teóricos que, hasta entonces, no habían sido estudiados en la formación inicial de profesores. Se incluyeron cursos relacionados con psicología evolutiva, social, educativa y del aprendizaje y materias como sociología de la educación, diseño curricular, teoría educativa, evaluación educativa. La intención fue proporcionar a los futuros profesores una serie de elementos, provenientes de diferentes corrientes teóricas del aprendizaje y la didáctica, para que fueran incorporados a la práctica docente.

Este plan de estudios comprendió solo dos cursos relacionados, de manera explícita, con matemáticas. En el primer semestre se ubicó el curso de Matemáticas; en el segundo, se incluyó el curso de Estadística donde se estudiaban contenidos que pretendían reforzar los conocimientos adquiridos por el estudiante en el nivel de bachillerato. Los temas relacionados con didáctica de las matemáticas se estudiaban en los semestres posteriores en los cursos denominados Contenidos de aprendizaje de la educación primaria.

En 1997 se implementó un nuevo plan para la formación de profesores de educación primaria (SEP, 1997). Se caracterizó por disminuir la carga teórica que tenía el de 1984 y enfatizó el tiempo que los estudiantes de las escuelas normales deberían pasar en jornadas de

---

[2] Por formación inicial se entiende aquellos estudios que realiza una persona antes de incorporarse al servicio docente.
[3] Para este año los estudios en la educación normal adquirieron el grado de licenciatura, lo que significó que el acceso a las escuelas normales requiriera de los estudios de bachillerato.

práctica *real* en escuelas primarias. De tal manera que los dos últimos semestres de la carrera se dedicaron, casi de manera exclusiva, a la práctica docente en condiciones reales.

Este plan incluyó dos cursos relacionados con la formación matemática. En el segundo semestre se incorporó la asignatura Matemáticas y su enseñanza I; en el tercer semestre Matemáticas y su enseñanza II. En ambos cursos se proyectó el análisis de los contenidos matemáticos de la educación primaria, así como las características del enfoque de enseñanza para este nivel. También se incorporaron temas relacionados con el análisis de los procesos de aprendizaje matemático de los alumnos de primaria. Con lo anterior, se intentaron desarrollar los conocimientos y habilidades didácticas que un profesor debiera poseer para promover el aprendizaje matemático.

En 2012 se realizó la última reforma en el sistema de formación de profesores de Educación Primaria (SEP, 2012a). Uno de los cambios que se llevaron a cabo es que se estableció un nuevo Plan de estudios, el cual conserva parte de las características del anterior; por ejemplo, el tiempo otorgado al desarrollo de práctica por parte de los estudiantes para profesores. Su particularidad principal es la adopción de un enfoque centrado en el aprendizaje y en el desarrollo de competencias profesionales en la formación de los futuros profesores.

El plan de estudios de 2012 para la formación de profesores en educación primaria es enfático en la preparación para la enseñanza y el aprendizaje. Tan es así que esta preparación se constituye en uno de los trayectos de formación compuesto por un mayor número de cursos. Comprende 20 de los 54 cursos que componen toda la malla curricular. De esos 20, cuatro corresponden al área de matemáticas[4] y los demás a disciplinas como español, ciencias naturales, educación cívica y ética, geografía, historia y educación artística.

1.3 Cursos incluidos en el Plan 2012 relacionados con matemáticas

Los cuatro cursos relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas del Plan de estudios vigente (2012) son: *Aritmética su aprendizaje y enseñanza* (que se

[4] En los planes 1984 y 1997 se contemplaban únicamente dos cursos relacionados directamente con las matemáticas.

estudia en el primer semestre), *Álgebra su aprendizaje y su enseñanza* (segundo semestre), *Geometría su aprendizaje y enseñanza* (tercer semestre) y *Procesamiento de información estadística* (cuarto semestre). Con los contenidos, las actividades y el análisis de estas, se pretende que los futuros docentes desarrollen un conocimiento disciplinar y didáctico que les permitirán desempeñarse de manera efectiva en el aula.

Cada curso presenta la siguiente estructura: se comienza con el estudio especializado de conceptos matemáticos propios de cada rama, luego se analizan consideraciones sobre los procesos de aprendizaje de los alumnos, para continuar con temas acerca del diseño y gestión de entornos de aprendizaje. Finalmente, se realiza un espacio para la reflexión y transformación de la práctica docente que radica en que los estudiantes analicen las acciones que realizaron durante las jornadas de práctica y, con base en ello, realicen adecuaciones para la mejora de la misma. En la tabla 1.2 se resumen las principales características de cada curso.

Tabla. 1.2

Características de los cursos de matemáticas, plan 2012.

Curso	Características
Aritmética: su aprendizaje y enseñanza	Tiene cuatro unidades temáticas en las que se estudian temas que en principio buscan la consolidación de las nociones aritméticas, pasan por el análisis de los problemas que se relacionan con la enseñanza de las operaciones aritméticas, el estudio de las estrategias didácticas, para llegar al hasta el análisis de contenidos para el desarrollo del razonamiento proporcional.
Álgebra: su aprendizaje y enseñanza	Comprende tres unidades temáticas. En las que se transita desde el acercamiento a los conceptos de función y ecuación, el comportamiento de funciones lineales, cuadráticas y racionales hasta los procedimientos para operar con expresiones algebraicas y resolver ecuaciones. Se propone que durante el desarrollo de las temáticas se analicen elementos de carácter didáctico.
Geometría: su aprendizaje y enseñanza	Está compuesto por tres unidades temáticas donde se estudian temas básicos de la geometría con fin de actualizar los conocimientos de los futuros docentes, además se plantea el análisis de los problemas en el aprendizaje de la geometría. En la segunda unidad se propone el estudio temas relacionados con la noción de medida. En la tercera unidad se analizan los contenidos del eje *forma, espacio y medida* de educación preescolar y primaria.
Procesamiento de información estadística	El propósito del curso radica en promover la comprensión y aplicación de conceptos y procedimientos básicos de probabilidad y estadística descriptiva e inferencial, para recolectar, organizar, presentar y analizar datos para abordar la resolución de problemas en el contexto educativo. Además, se espera que los futuros docentes apliquen estos conceptos y procedimientos en la realización de proyectos de investigación, así como en la elaboración de su documento recepcional.

Nota. Construcción propia a partir de cada uno de los programas de estudio (SEP, 2012b, 2012c, 2013a, 2013h).

En los cuatro cursos se incluye el análisis de los procesos de aprendizaje matemático de los alumnos como un elemento importante en la formación de profesores. Para ello se sugieren actividades mediante las cuales los futuros docentes reflexionen sobre los problemas y dificultades en el aprendizaje de nociones matemáticas que los alumnos de primaria enfrentan. Además, se incluyen actividades para que se analice la estructura de los contenidos matemáticos presenten en los programas de estudio relacionados con cada rama de las matemáticas. Se espera que los futuros docentes conozcan las orientaciones pedagógicas y didácticas para la enseñanza de las matemáticas. En los temas que componen cada curso se otorga un lugar importante al conocimiento y empleo de diversos materiales que auxilien la práctica de la enseñanza de las matemáticas como textos, manuales, sitios web entre otros.

1.4 La investigación sobre la formación de profesores en matemáticas

La formación de profesores en el área de matemáticas es un objeto de estudio que ha estado, por mucho tiempo, en el interés de los investigadores educativos. Se han realizado diversas investigaciones interesadas por una variedad de temas, por ejemplo: los conocimientos de los profesores, las actitudes hacia las matemáticas, la manera en que se enseñan o aprenden diversos objetos matemáticos, maneras de organizar el trabajo en el aula entre otros (Padrón, 2008; Mochón y Flores, 2010; Bernabeu, Torres, García y Batanero, 2015; por mencionar solo algunos).

Existen investigaciones cuyo objeto de estudio se centra en identificar y analizar los conocimientos matemáticos ─de carácter disciplinar─ que tienen los profesores como un elemento importante para la promoción del aprendizaje matemático (Grossman, 1990; Rivas, Godino y Castro, 2012; Carrillo, Henríquez y Manzi, 2011; Bernabeu et al., 2015). Otros estudios investigan lo que denominan el conocimiento didáctico que tienen los docentes para enseñar diferentes objetos matemáticos (Shulman, 1987; Ball, 2003; Hill, Ball y Schilling, 2008; Sosa y Astudillo, 2008; Rowland y Ruthven, 2011; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Rojas, Flores y Carrillo, 2015).

Sánchez (2011) realizó una revisión acerca de la investigación en formación de profesores de matemáticas, y menciona que uno de los intereses que se manifiestan es el estudio de los conocimientos que los profesores adquieren como parte de su formación inicial o como parte de la experiencia en la práctica cuando se encuentran en servicio. Respecto a este último interés, Sánchez (2011) señala que los aportes están centrados en analizar qué tipo de conocimientos y habilidades se requieren para ser considerado un "buen" maestro de matemáticas. Y señala que los estudios revisados coinciden en que los profesores necesitan tanto conocimientos matemáticos como conocimientos acerca de la enseñanza de las matemáticas (didácticos). El propio Sánchez (2011) indica que uno de los conceptos a los que con frecuencia se recurre es el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK, *Pedagogical Content Knowledge*). El PCK es definido como el conocimiento que va más allá del tema de la materia, es decir el conocimiento de cómo enseñar un tema propio de una asignatura (Shulman, 1987).

En México, las investigaciones relacionadas con la formación de profesores en el área de matemáticas es un campo que también ha estado en el interés de los investigadores. Aun cuando tienen aportaciones interesantes, se requieren otras investigaciones para profundizar en estas aportaciones debido a los nuevos cambios como lo es la reforma educativa donde al futuro profesor se le exige un amplio conocimiento matemático.

Ávila, Block y Carvajal (2013) reportan, en el Estado del Conocimiento elaborado para el Consejo Mexicano Investigación Educativa (COMIE) durante la década comprendida entre el año 2002 a 2012 solo diez trabajos que pueden ser representativos de la investigación sobre la formación de profesores en el área de matemáticas, mismos que agrupan bajo el título de: estudios sobre las *Concepciones, conocimientos y formación de profesores*.

Estos autores reportan un solo estudio en el contexto de la formación inicial de profesores de educación primaria. En dicho estudio se indaga acerca del contenido de fracciones: de manera específica se analiza la propuesta curricular que subyace su enseñanza y aprendizaje y la manera en cómo es interpretada y puesta en marcha por docentes de algunas escuelas normales (Ávila, Block y Carvajal, 2013).

1.5 Investigación sobre del conocimiento matemático y didáctico del profesor

Un aporte importante a la línea de investigación que explora el conocimiento del profesor lo realiza Shulman (1986, 1987) quien señaló que los profesores necesitan poseer un *conocimiento base para la enseñanza*, es decir, un conjunto de conocimientos ─amalgamados entre sí─ acerca de la materia que se enseña y de su didáctica. Según este autor, el conocimiento base para la enseñanza se compone de:

a) Conocimiento del contenido.
b) Conocimiento pedagógico en general.
c) Conocimiento del currículo.

d) Conocimiento pedagógico del contenido.
e) Conocimiento de los estudiantes y de sus características.
f) Conocimiento de los contextos educativos.
g) Conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.

Es importante señalar que los aportes de Shulman no surgieron en el ámbito de la educación matemática, sino en el campo de la enseñanza en general. Fueron los investigadores en el área de matemáticas quienes comenzaron a emplear su propuesta.

Deborah Ball (2003) es quien retoma los aportes de Shulman y realiza un trabajo en el que reflexiona acerca de la importancia del conocimiento matemático y didáctico del profesor para desarrollar una práctica de enseñanza. Presenta algunas características de este conocimiento a fin de que sean exploradas a mayor detalle. Señala que el profesor necesita un *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*, constituido a su vez por: conocimientos de tipo disciplinario (Content of Knowledge, *Conocimiento del Contenido*) y *Conocimientos didácticos*, particulares de las matemáticas. Este último tipo de conocimientos los agrupa bajo el nombre de "*Conocimiento Pedagógico del Contenido*" (PCK, Pedagogical Content Knowledge).

Diversos trabajos (Hill, Schilling y Ball, 2004; Hill, Rowan y Ball, 2005; Hill, Ball y Schilling 2008) se han desarrollado teniendo como base los aportes de Ball. Los aportes de esta autora han llevado a construir o generar una línea de investigación que centra en el estudio de la naturaleza del conocimiento matemático para la enseñanza. Los estudios realizados en dicha línea analizan los conocimientos tanto matemáticos como didácticos que es necesario que los profesores tengan para planificar y desarrollar actividades de enseñanza en matemáticas. Además, se interesan por la relación de estos conocimientos con distintas variables, como, por ejemplo, el rendimiento de los estudiantes en matemáticas.

Existen una multiplicidad de investigaciones en las que se ha empleado el *Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT por sus siglas en inglés Mathematical Knowledge for Teaching)[5], la mayoría de ellos en el contexto de los Estados Unidos y otros países (Beswick, Callingham y Watson, 2011; Burge-Carlucci, 2014; Campbell y Malkus,

[5] Las características de este modelo se describen en el capítulo siguiente.

2013; Copur-Gencturk y Lubienski, 2012; Flake, 2014; Khakasa y Berger, 2015; Lim-Teo, Chua, Cheang y Yeo, 2006; Subramaniam, 2014; Wilson, Sztajn, Edgington Confrey, 2013).

Autores como Copur-Gencturk y Lubienski (2012), Subramaniam (2014) y Speer, King y Howell (2014) retoman estas ideas y exploran las características del Conocimiento Pedagógico del Contenido tanto en profesores en servicio como en profesores en formación. Se interesan particularmente por analizar algunas de las dimensiones que componen los conocimientos de los profesores y cómo éstos se relacionan con su actuar en el aula y cómo pueden ser favorecidos.

Otros autores reflexionan sobre algunos de los subdominios que conforman el MKT. Por ejemplo, Speer, King y Howell (2014) investigan las nociones de *Conocimiento común del contenido* (CCK) y *Conocimiento especializado del contenido*. Mencionan que hay un hecho que parece obvio: los profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos preparan de manera diferente el contenido matemático a enseñar. Así quienes trabajan en niveles educativos más avanzados ─se supone─ poseen un conocimiento matemático más robusto que les permite planificar y ejecutar una clase de manera distinta a un profesor de niveles primarios. Sin embargo, los autores reflexionan acerca de que no siempre sucede. Por tal razón ven necesario delimitar lo que para un profesor de primaria implica un conocimiento común con respecto a un profesor que enseña en secundaria.

En seguida se presentan, de manera más detallada, algunos estudios en los que se emplea como referente teórico el MKT, la intención es mostrar la manera en que es empleado el modelo, así como las principales conclusiones que obtuvieron los autores de cada investigación.

Subramaniam (2014) estudia cuál es el Conocimiento Pedagógico de los futuros profesores acerca de la estimación de longitudes. Se trata de un estudio en el que se reporta que gran parte del conocimiento que poseen los futuros profesores, lo basan en sus creencias acerca del tema ─la estimación de longitudes─, además de que tienden a recurrir al uso de objetos familiares para una mejor comprensión. Una de las principales conclusiones que este autor describe es que algunos de los estudiantes para profesores que participaron en el estudio no tienen una construcción mental del concepto ─conocimiento del contenido─ sólida para enseñar el tema.

En contextos distintos al estadounidense, otros trabajos de investigación que han empleado el MKT es el de Mochón y Flores (2010) quienes indagan, en profesores de educación primaria de México, cuáles son los conocimientos matemáticos con que cuentan. Estos autores investigaron el conocimiento acerca de cuatro temas: sistema decimal y operaciones; cálculo mental y estimación; fracciones y decimales, y; razonamiento proporcional. Mochón y Flores (2010) afirman que los conocimientos de los profesores influyen, de manera directa, en su capacidad didáctica, es decir, en la manera en que planifican una clase, las actividades y ejercicios que proponen así como la evaluación que realizan de ellos. Los autores se interesan por identificar cómo los conocimientos matemáticos de los profesores pueden ser fortalecidos. Para ello diseñaron talleres en los que, mediante el análisis y reflexión de los ejercicios matemáticos y situaciones de clase los docentes participantes reforzaran o en su caso adquirieran los conocimientos matemáticos sobre los temas discutidos (sistema decimal y operaciones; cálculo mental y estimación; fracciones y decimales, y; razonamiento proporcional).

Una de las principales tareas que realizaron los investigadores fue identificar el Conocimiento Pedagógico del Contenido matemático y el Conocimiento Matemático para la Enseñanza de los profesores. Esto mediante algunos instrumentos como cuestionarios con preguntas tanto cerradas como abiertas, entrevistas y observaciones de clase.

Los principales hallazgos que reportan son que el conocimiento matemático de los profesores se limita una enseñanza de tipo instrumental, esto es, se basa primordialmente en procedimientos mecánicos y en sus propias ideas entorno a la enseñanza. Aun cuando identifican conocimientos matemáticos para la enseñanza de tipo conceptual, éstos son muy limitados y por eso a los profesores les causa inseguridad para dar explicaciones y los lleva a recurrir solo a técnicas repetitivas de solución y a procedimientos aprendidos de memoria.

En un trabajo más reciente Sgreccia y Massa (2012) analizaron el *Conocimiento especializado del contenido* (solo uno de los subdominios del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* a los que Ball pone mayor importancia) que es requerido para enseñar matemáticas, en específico lo relacionado con cuerpos geométricos, en estudiantes para profesores de Matemáticas en la Universidad de Nacional de Rosario en Argentina.

Mediante la aplicación de un cuestionario y la realización de entrevistas a estudiantes para profesores próximos a egresar, así como a profesores recién egresados, los autores mencionan que, aunque las respuestas de los participantes muestran indicios de un conocimiento matemático bastante consolidado, cuentan con evidencia que les permite sostener que algunos presentan debilidades. Como por ejemplo al clasificar de cuerpos de tres dimensiones (3d) o al identificar formas comunes de las superficies laterales de cilindros y prismas.

Friz, Sanhueza y Sánchez (2009) exploran los conocimientos matemáticos con que cuentan los estudiantes de pedagogía de una universidad chilena. Para ello, analizan los contenidos en los que alumnos de educación primaria presentan algunas dificultades. Estas dificultades fueron identificadas a partir de los resultados de la prueba SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de Enseñanza). Con base en dicha información, diseñaron y administraron un cuestionario a 145 estudiantes de pedagogía en el que se indagó: qué conocimientos poseen los futuros profesores para enfrentar las dificultades encontradas en los alumnos de primaria a través de la prueba SIMCE. Una de sus principales conclusiones es que, al igual que los alumnos de primaria, los estudiantes de pedagogía tienen carencias en los conocimientos matemáticos que les permiten resolver problemas.

Nortes Checa y Martínez-Artero (2013) exploraron los conocimientos matemáticos de los alumnos que cursaban el Grado de Maestro de Primaria en la Universidad de Murcia, España, mediante la administración de una prueba de conocimientos y destrezas matemáticas que fue construida a partir un examen que se aplicó a jóvenes de Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

Estos autores mencionan que los alumnos del Grado de Maestro ingresan al programa sin tener los conocimientos que se supone debieron adquirir después de haber cursado la Enseñanza Obligatoria, lo que ocasiona que su formación y desempeño docente se vuelvan deficientes. Los autores administraron a los futuros profesores una prueba de matemáticas. Con base en los resultados de la prueba indican que los conocimientos que los profesores tienen más débiles se relacionan con cálculo de porcentajes, uso de decimales y fracciones. Este estudio pone de manifiesto que un tema que resulta complicado para los futuros profesores lo representan las fracciones y los decimales. Sugieren que es necesario estudiar aún más a fondo los procesos de actualización de profesores, particularmente lo que se refiere a la comprensión de conceptos y procesos algorítmicos, aunque también señalan que conviene que se estudien ─conceptos y procesos algorítmicos─ desde una dimensión didáctica.

1.6. Investigación de los conocimientos sobre fracciones y decimales de los estudiantes para profesores

Este apartado contiene resultados de algunos estudios que investigan el conocimiento matemático y didáctico de futuros profesores sobre los números racionales ya sea como fracciones o decimales. También hay investigaciones donde se discuten los números racionales con uso de rectas numéricas, donde se analiza, por ejemplo, orden o comparación. De igual modo, se presentan trabajos centrados principalmente en analizar el significado de estos mediante el uso de las operaciones básicas.

Olanoff, Jane-Jane Lo y Tobias (2014) realizan una revisión de los estudios en los que se exploran los conocimientos para la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria. Esta revisión implicó el análisis de poco más de 43 estudios publicados en Journals de carácter internacional por lo que los autores advierten que no es un panorama de toda la investigación relacionada con las fracciones. Pero sí puede tomarse como punto de referencia para el desarrollo de otros estudios en el tema.

Sus propósitos radicaron en identificar qué saben los futuros profesores sobre esta temática y así identificar temas de investigación poco estudiados que desencadenen otras investigaciones. En el análisis se resalta que los marcos referenciales más empleados son las propuestas de Shulman (1987) y las derivaciones de los trabajos de Ball (2003). Entre sus principales conclusiones reportan que:

a) Los estudiantes para profesores pueden resolver de manera correcta problemas que implican el uso de fracciones, en términos de Ball (2003) se puede decir que poseen un *Conocimiento común del contenido* robusto, aunque carecen de flexibilidad en sus procedimientos de resolución esto es, solo pueden resolver problemas empleando una sola forma.
b) Cuando resuelven un problema que implica el uso de fracciones no son capaces de explicar los procedimientos empleados.

c) Tienen problemas al momento de representar situaciones mediante diagramas, así como en la elaboración de problemas con fracciones o decimales.
d) Un tema ausente en las investigaciones que los autores analizan es lo que Ball (2003) denomina *Conocimiento del contenido y los estudiantes*, que implica conocer los procesos de aprendizaje de los alumnos.
e) Según Olanoff, Jane-Jane Lo y Tobias (2014) de los estudios que revisaron pocos analizan opciones concretas para la mejora de los conocimientos matemático y didáctico de los de los estudiantes para profesor acerca de las fracciones.

A través de una serie de entrevistas clínicas con estudiantes para profesores de educación primaria, Domoney (2001) realizó una investigación en la que demostró que los estudiantes para profesores tienen limitaciones en la comprensión de las fracciones como uno número en sí mismo. Para ello analizó primeramente los programas de estudio de matemáticas de educación primaria e identificó que los números racionales aparecen en mayor medida como fracciones y decimales y operaciones sobre la equivalencia de fracciones. A partir de dicho análisis diseñó una guía de entrevista mediante la cual obtuvo datos que le permitieron darse cuenta de que la idea de comprender una fracción como un número sorprende a los estudiantes para profesores. Lo anterior porque en ellos permeaba la idea de que una fracción es “la parte de un todo”, es decir, los futuros profesores interpretaban a las fracciones como una relación entre dos cantidades o dos números enteros. Domoney (2001) menciona que el hecho de que predomine la idea de fracción en su interpretación “parte-todo” quizá tenga su explicación en que los estudiantes para profesores durante el estudio de las fracciones recurren a la manera en cómo los aprendieron.

Konic (2013) evalúa los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación primaria sobre los números decimales. Particularmente el *Conocimiento común del contenido* matemático, el conocimiento especializado y el *Conocimiento del contenido y los estudiantes* (Hill, Ball y Schilling, 2008). Para tal efecto diseña un cuestionario que comprende la resolución de problemas que implican el uso de decimales.

En sus resultados reporta que casi la mitad de los futuros profesores que encuestó fueron capaces de resolver problemas que involucraron números decimales. Sin embargo, el resto presentó dificultades para argumentar el uso de ciertos procedimientos empleados para la solución de problemas. Al evaluar el *Conocimiento del contenido y los estudiantes* Konic (2013) menciona que al enfrentar a los futuros profesores a diversos formas de solución que alumnos de primaria dan a un problema, sus conocimientos acerca de cómo se apropian del aprendizaje son difusos. Además, que los futuros profesores que participaron en su muestra presentan "importantes carencias cognitivas" sobre estos números. La autora señala que muchos de los conflictos de los estudiantes para profesores sobre la solución de problemas con números decimales radican en "no dominar conceptualmente el tipo de números con los que se está operando" (p. 631).

Gairín (2004) reporta algunas de las características del conocimiento que un grupo de estudiantes para profesores tienen con relación a dos aspectos muy concretos: las fracciones y las expresiones decimales. Con base en las respuestas a un cuestionario este autor describe las siguientes características del conocimiento de los futuros profesores:

a) Tienen un significado de fracción como relación parte todo y muy pocos hacen referencia a otro tipo de interpretaciones.
b) La notación decimal es reconocida casi exclusivamente con un significado de número, no se asocia a cantidades de magnitud ni se sustenta en el uso de modelos.
c) La relación que establecen entre la interpretación de los números racionales como fracción y como decimales es de carácter algorítmica, es decir recurren a la conversión para comparar una fracción con un decimal convierten la fracción en decimal mediante la división de numerador entre el denominador.
d) Para establecer relaciones entre el orden de las fracciones recurren a técnicas de cálculo, lo que significa que al comprar dos fracciones regularmente las trasforman en decimales para conocer cuál de ellas es mayor o menor.
e) Recurren a su conocimiento sobre números naturales para trabajar con los racionales, cuestión que obstaculiza la conceptualización de estos últimos. (p. 237)

Una reflexión importante que realiza Gairín (2004) es sus hallazgos concuerdan con los encontrado en otras investigaciones, en donde se pone de manifiesto que los conocimientos sobre fracciones y decimales de los profesores en formación son limitados. Que los estudiantes operan mejor con los números decimales que con las fracciones.

Otros estudios se interesan por comparar los conocimientos de los futuros profesores de educación primaria acerca de las fracciones y los decimales con los de estudiantes para profesores que tienen una formación más especializada, por ejemplo, para el área de matemáticas (Durmuş, 2005; Depaepe et al., 2015).

Con el afán de comparar los niveles de conceptualización acerca de este temática Durmuş (2005) aplica un cuestionario denominado The Rational Number Conceptualization Test a 277 estudiantes para profesores (145 de primaria, 72 de matemáticas y 62 de ciencias), además realiza una entrevista semiestructurada a algunos de los futuros profesores. Entre sus principales conclusiones expone que los significados más comunes que les otorgan a los números racionales es el de fracción (en su relación parte-todo) y como razón. Los estudiantes para profesores presentan más problemas con la multiplicación y división de fracciones y los decimales que con la suma y la resta; tan es así que les es más sencillo elaborar problemas en los que se empleen estas últimas operaciones.

Al comparar los puntajes obtenidos en The Rational Number Conceptualization Test de los futuros profesores de primaria con los que estudian para ser profesores de matemáticas Durmuş (2005) reporta que son estos últimos quienes obtienen un nivel más alto. Señala que quizá esto se deba el examen de ingreso a la carrera de profesor de matemáticas, pues se exige una comprensión más completa de los números racionales como de otras áreas.

Una investigación con propósitos similares es la desarrollada por Depaepe et al. (2015). En ella se parte del supuesto que, aunque existen muchas investigaciones que se interesan por el análisis y la descripción de los conocimientos tanto matemático como didáctico de los estudiantes para profesor, aún no se han desarrollado estudios en los que se compare el conocimiento matemático con el didáctico en temas tan específicos como los números racionales.

Estos autores diseñan y aplican una prueba formada por 48 reactivos que les permiten describir el conocimiento matemático y didáctico de los futuros profesores en torno a los números racionales (sobre todo en su interpretación como fracciones y decimales). Se plantean tres objetivos principales: identificar las dificultades de los futuros profesores acerca del conocimiento matemático y didáctico; identificar la relación entre estos tipos de conocimiento, y comparar el conocimiento matemático y didáctico de los estudiantes para profesores de primaria y de secundaria.

Sus resultados coinciden con lo que otros estudios reportan: los estudiantes presentan conocimientos matemático y didáctico limitados acerca de los números racionales. Llama la atención que encuentran puntajes menores en los reactivos acerca del conocimiento didáctico lo que sugiere que los futuros profesores presentan complicaciones para identificar y atender dificultades relacionadas con estrategias de resolución de problemas de estos números en los alumnos de educación primaria. Señalan que los estudiantes para profesores tienen más problemas al enfrentarse a los reactivos del conocimiento didáctico que implican el uso de fracciones que aquellos en los que se utiliza decimales.

En cuanto a la relación entre el conocimiento matemático y didáctico mencionan que encontraron una correlación positiva. Advierten que, aunque un conocimiento matemático sólido apoya en gran medida un conocimiento didáctico este no es suficiente

> Algunos de los futuros profesores tienen conocimientos didácticos más consolidados que un conocimiento matemático, ya que son capaces de plantear situaciones de aprendizaje que impliquen fracciones o decimales, pero no pueden distinguir propiedades como por ejemplo ¿cuántos números hay entre 7.2 y 7.4?” (Depaepe et al., 2015 p. 88).

Los resultados del estudio de Depaepe et al. (2015) coinciden con otras investigaciones (Durmuş, 2005, por ejemplo) cuando afirman que los estudiantes para profesores de un área especializada como matemáticas o ciencias cuentan con un conocimiento matemático más alto que los futuros profesores de educación primaria.

En general, los estudios que se presentan, aunque no corresponden a una revisión exhaustiva acerca del conocimiento sobre fracciones y decimales de los futuros profesores, proporcionan un panorama importante. Entre ellos hay algunos puntos de coincidencia, entre los que destacan que los estudiantes para profesores:

a) Tienen conocimientos matemático y didáctico limitados acerca de las fracciones y los decimales.
b) En general, interpretan las fracciones únicamente como la relación entre dos números naturales.

c) Que el conocimiento didáctico que emplean para resolver algunas situaciones de enseñanza es más limitado que el conocimiento matemático que utilizan para resolver problemas con fracciones o decimales.

1.7 Preguntas y objetivos de investigación

En los apartados anteriores se muestra que las fracciones y los números decimales son uno de los temas en los que los alumnos de educación primaria presentan dificultades importantes. Se sostiene que la formación matemática de los futuros profesores es uno de los elementos importantes para el desarrollo del aprendizaje matemático en los alumnos. Que la investigación acerca del conocimiento matemático y didáctico de los estudiantes para profesores es un objeto que está presente en la investigación matemática.

Con base en ello esta investigación se enfoca a dos escuelas normales, las de mayor antigüedad, del estado de Durango[6] (una urbana y una rural), y pretende dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Qué conocimiento matemático y didáctico tiene el estudiante para profesor de educación primaria sobre las fracciones y los números decimales?
- ¿Cuál es el conocimiento matemático y didáctico que el estudiante para profesor de educación primaria pone en práctica al enseñar las fracciones y los números decimales en el aula de clases?
- ¿Qué discrepancias y semejanzas existen entre el conocimiento matemático y didáctico sobre las fracciones y los números decimales de los estudiantes para profesor de educación primaria con lo establecido en los programas de matemáticas de educación primaria?

Con el afán de dar respuesta a las preguntas anteriores esta investigación tiene como objetivo principal analizar el conocimiento matemático y didáctico que los estudiantes para

[6] El autor de la investigación que aquí se reporta se desempeña como docente en la ciudad de Durango y pretende aportar información sobre la formación docente en la entidad.

profesores tienen acerca de las fracciones y los números decimales. El interés no solo se centra en determinar cuáles son estos conocimientos, sino cómo son empleados por los futuros profesores durante el desarrollo de sus prácticas en condiciones escolares reales. Se espera con ello contar con información para la mejora de los procesos de formación en matemáticas. Así los objetivos que se pretenden alcanzar son:

- Describir el conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones y decimales de los estudiantes para profesor de educación primaria.
- Identificar el conocimiento matemático y didáctico que los estudiantes para profesor de educación primaria ponen en práctica al enseñar las fracciones y los números decimales a los alumnos de educación primaria.
- Comparar el conocimiento matemático y didáctico que los estudiantes para profesor de educación primaria ponen en práctica, sobre las fracciones y los números decimales, con lo establecido en los programas de matemáticas en educación primaria.

1.8 Justificación

Se considera que una investigación sobre el conocimiento matemático y didáctico del estudiante para profesor resulta importante por las razones que se presentan a continuación. Es una temática que, aunque se ha estudiado en el contexto mexicano, aún es necesario profundizar en ella. En el estado del conocimiento que comprendió los años de 2002 a 2012 Ávila, Block y Carvajal (2013) reportan solo un estudio acerca de la formación de profesores. Analizar los conocimientos y la forma en que los estudiantes para profesor de educación primaria hacen uso de sus conocimientos matemático y didáctico en contextos educativos reales, proporcionará información para proponer alternativas de mejora o transformación de cómo éstos pudieran ser desarrollados en las escuelas formadoras de docentes.

Se considera que es un tema vigente. En México la formación de docentes se encuentra en un proceso de transición. En 2012 se estableció en un nuevo Plan de Estudios con el que se espera una mejora en los conocimientos y las habilidades, matemáticos y didácticos del nuevo docente. Esto otorga relevancia al estudio, pues un análisis de dichos conocimientos permitirá una valoración de la formación matemática de los futuros profesores de primaria.

Históricamente las fracciones y los números decimales han representado una dificultad en su aprendizaje y en su enseñanza. No obstante, es un tema al que se le otorga un lugar importante en el currículo de educación primaria desde el tercer hasta el sexto grado, comenzando con el estudio de las primeras nociones hasta la realización de operaciones aritméticas con fracciones y decimales. En todo lo anterior el conocimiento del profesor tiene un lugar importante, pues es quien diseña y ejecuta estrategias con las que se promueva el aprendizaje de las fracciones y los decimales.

El conocimiento de los profesores en formación acerca de las fracciones y los decimales es un objeto de estudio que, aunque no nuevo, sí vigente (Domoney, 2001; Durmuş, 2005; Carrillo, Henríquez y Manzi, 2011; Depaepe et al., 2015) en el que los resultados de las investigaciones apuntan hacia una comprensión limitada de los futuros profesores en torno a este conjunto de números, por lo que vale la pena continuar explorando al respecto.

En el plan de estudios para la formación de profesores de primaria se le otorga un lugar importante a la consolidación y estudio de las fracciones y los decimales. Tan es así que la tercera unidad temática, del curso *Aritmética: su aprendizaje y enseñanza* es dedicada exclusivamente al estudio de este conjunto de números, lo que sugiere que, desde la formación inicial, se otorga importancia al aprendizaje y la enseñanza de estos números.

El en curso de *Aritmética: su aprendizaje y enseñanza*, se propone que se analicen

> los elementos conceptuales que permiten lograr una mejor comprensión de los números racionales, esto implica el conocimiento y uso de las diferentes formas de representación y notación, lo cual incluye identificar y usar distintas expresiones matemáticas para referirse a un mismo número, ya sea como fracción común, como decimal o mediante la notación científica (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2013a, p. 11).

Igualmente se propone el estudio de las operaciones con fracciones y decimales de tal manera que se le otorgue sentido a los algoritmos que se emplean (SEP, 2013a).

Aunado a los elementos señalados antes, el estudio del conocimiento matemático y didáctico del estudiante para profesor tiene también la finalidad de contribuir al fortalecimiento de los procesos de formación inicial de profesores. El análisis los conocimientos matemáticos y didácticos que los futuros profesores desarrollan a lo largo de su carrera aporta información sobre posibles mejoras a la formación inicial de docentes.

El estudio de los procesos de formación inicial de los profesores (formación matemática como es el caso de la investigación que aquí se reporta) contribuye a la comprensión de los conocimientos necesarios que debe tener un profesor para promover de manera efectiva el aprendizaje matemático en la escuela primaria. Esto porque desde la formación inicial es necesario que los profesores adquieran las bases para el desarrollo de una práctica de la enseñanza de las matemáticas en las que se consideren las características y necesidades de los alumnos.

CAPÍTULO 2. El CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DEL PROFESOR

En este capítulo se describe el modelo del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (*Mathematical Knowledge for Teaching* MKT, por sus siglas en inglés) como el referente teórico utilizado en el presente estudio. Antes, se presentan otras propuestas que también son empleadas para el análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores. En propósito de incluirlas es solo proporcionar una visión general de ellas. No se trata de una revisión exhaustiva de todas las propuestas que existen sino un recorrido por las ideas de otros autores interesados en el conocimiento matemático de los profesores.

2.1. Enfoques para el análisis del conocimiento matemático del profesor

En 1986 Shulman presentó tres categorías para analizar el conocimiento del profesor:

a) Conocimiento del contenido.
b) Conocimiento pedagógico del contenido.
c) Conocimiento del currículo (Shulman, 1986).

En un trabajo posterior el propio Shulman (1987) desarrolló aún más sus ideas. Describió que los profesores necesitan poseer lo que denominó un *Conocimiento Base para la Enseñanza,* conformado por:

a) Conocimiento del contenido.
b) Conocimiento pedagógico en general.
c) Conocimiento del currículo.
d) Conocimiento pedagógico del contenido.
e) Conocimiento de los estudiantes y de sus características.
f) Conocimiento de los contextos educativos.
g) Conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación. (p. 8)

Shulman no ubica su propuesta como propia de un área, asignatura o disciplina en concreto, sostiene que los tipos de conocimiento que la conforman deben ser desarrollados por cualquier profesor de cualquier materia. Como ya se comentó, fue Deborah Ball (2003) y sus colaboradores quienes extienden las ideas de Shulman al campo de la educación matemática. En el apartado siguiente se presenta el modelo de Ball, pero para darle contexto previamente se comentan, de manera sintética, otros enfoques.

Uno de estos modelos es el que Schoenfeld y Kilpatrick (2008) proponen, lo denominan *Teoría de la Proficiencia*[1] en la enseñanza de las matemáticas. Según estos autores, para enseñar matemáticas un profesor debe:

a) Conocer las matemáticas escolares en profundidad y amplitud.
b) Reconocer a los estudiantes como personas que piensan.
c) Reconocer a los estudiantes como personas que aprenden.
d) Diseñar y gestionar ambientes de aprendizaje.
e) Desarrollar normas para apoyar el discurso en el aula como parte de la "enseñanza para la comprensión".
f) Construir relaciones que favorezcan el aprendizaje.
g) Reflexionar sobre la propia práctica (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008).

Estos autores destacan el hecho de que su propuesta es apenas el inicio de lo que pretenden se convierta en una *Teoría de la Proficiecia* y que obviamente aún necesita ciertos ajustes. Uno de los elementos que sobre sale en esta propuesta es que se hace explícito un espacio para la reflexión sobre la práctica de enseñanza.

El Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) del profesor desarrollado por Godino (2009) es otro de los aportes reportados en la literatura. Este modelo tiene soporte teórico en el Enfoque Ontosemiótico de Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS)[2]. Está compuesto por seis facetas y cuatro niveles que se pueden entender como las categorías

[1]El término *proficiencia* no existe en español, pero puede ser traducido como *competencia en, habilidad en, capacidad en* o *dominio de*. Así una traducción posible de la propuesta de Schoenfeld y Kilpatrick (2008) puede ser: *Un marco provisional de competencia en la enseñanza de las matemáticas*.
[2] El EOS "es un marco teórico que propone articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje" (Godino, 2009, p. 20).

del conocimiento del profesor. Godino emplea la frase Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor a fin de concatenar tanto los conocimientos matemáticos como los relativos a la didáctica de las matemáticas.

Pino-Fan y Godino (2015) realizan una valoración del modelo anterior y, con base en ello, proponen tres dimensiones para el análisis del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor (CDM):

a) La Dimensión Matemática que incluye el *Conocimiento común del contenido* (CCC) y el Conocimiento Ampliado del Contenido (CAC).
b) La Dimensión Didáctica se compone de las siguientes facetas: (a) epistémica, (b) cognitiva, (c) afectiva, (d) interaccional, (e) mediacional, y (f) ecológica.
c) La Dimensión Meta Didáctico-Matemática se compone de los conocimientos referidos a las normas y metanormas, restricciones contextuales, la reflexión sobre la práctica y al análisis y valoración de la idoneidad didáctica[3].

La contribución de Pino-Fan y Godino (2015) es un sistema de categorías integral, con el que se intenta comprender el conocimiento matemático y didáctico de los profesores. Se trata de una propuesta que concibe el conocimiento de los profesores como un fenómeno complejo que va más allá de solo el conocimiento matemático y su didáctica.

Otro aporte es el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge, MTSK) que desarrollan Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán (2012). Esta propuesta se basa en la idea de que el conocimiento de un profesor de matemáticas debe estar compuesto por dos grandes tipos de conocimiento: Conocimiento Matemático y Conocimiento Didáctico del Contenido. En esto concuerdan con Ball (2003), es más, se puede decir que las ideas de estos autores surgen del análisis y refinamiento de los subdominios del MKT.

[3] La idoneidad didáctica es una herramienta didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. Se puede definir como la articulación coherente y sistemática de componentes como: idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica (ver Godino, 2011). En Godino, Bencomo, Font, y Wilhelmi (2006); Godino (2011); Godino, Rivas, Castro y Konic (2012) y Godino, Batanero, Rivas y Arteaga (2013) pueden encontrarse ejemplos.

El Conocimiento Matemático (MK, *Mathematical Knowledge* por sus siglas en inglés) está compuesto por tres subdominios:

a) El Conocimiento de los temas.
b) Conocimiento de la estructura de las matemáticas.
c) El Conocimiento de la práctica matemática.

El Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK, *Pedagogical Content Knowledge* por sus siglas en inglés) está integrado por los siguientes subdominios:

a) El Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas.
b) El Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM, Knowledge of Features of Mathematics Learning).
c) El Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje.

Las coincidencias que existen entre las propuestas para analizar el conocimiento del profesor son muchas la principal es que para enseñar matemáticas es necesario contar con un repertorio de conocimientos que van más allá de un manejo de las reglas, teoremas, proposiciones y algoritmos. Es preciso un conocimiento didáctico que involucra las propuestas y metodologías existentes.

Todas las propuestas contemplan que el profesor debe tener un conocimiento de los temas que enseña. Es decir que sea capaz de resolver los problemas y ejercicios que se plantean en el curso donde enseña, en otras palabras, resolver los problemas que plantea sus alumnos. Otro componente importante, presente en todos los aportes, es el conocimiento de los estudiantes, con diversos énfasis. Aunque como se verá más adelante, hay ciertos factores con respecto a los estudiantes, que no son tomados en cuenta en todos los modelos.

Un intento por resumir y comparar las diferentes categorías o dimensiones que conforman las propuestas mencionadas se presenta en la tabla 2.1. La finalidad de este breve recorrido es presentar las características generales de algunas propuestas empleadas en la investigación para dar contexto a la que se toma como base de esta tesis. Es evidente que faltan otras, pero se considera que con lo anterior puede tenerse una visión general de ellas.

Tabla 2.1

Comparación de las dimensiones por modelos del conocimiento del profesor

Conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 1987)	**Mathematical Knowledge Teaching** (Ball, 2003)	**Mathematical Teacher's Specialized Knowledge** (Carrillo, et al., 2012)	**Teoría de la Proficiencia** (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008)	**Conocimiento Didáctico-Matemático** (Pino-Fan y Godino, 2015)
Conocimiento del contenido	Conocimiento común del contenido	Conocimiento de los temas		Conocimiento común del contenido.
				Conocimiento ampliado del contenido.
	Conocimiento especializado del contenido.	Conocimiento de la estructura de las matemáticas.	Conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud.	Faceta Epistémica.
	Conocimiento del horizonte matemático.	Conocimiento de la práctica matemática.		
Conocimiento de los estudiantes y sus características.	Conocimiento del contenido y los estudiantes.	Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas.	Conocimiento de los estudiantes como personas que piensan.	Faceta Cognitiva
			Conocimiento de los estudiantes como personas que aprenden.	Faceta Afectiva

Conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 1987)	**Mathematical Knowledge Teaching** (Ball, 2003)	**Mathematical Teacher's Specialized Knowledge** (Carrillo, et al., 2012)	**Teoría de la Proficiencia** (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008)	**Conocimiento Didáctico-Matemático** (Pino-Fan y Godino, 2015)
Conocimiento pedagógico general.				
Conocimiento pedagógico del contenido.	Conocimiento del contenido y la enseñanza.	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas.	Diseñar y gestionar entornos de aprendizaje	
			Construir relaciones que apoyen el aprendizaje.	Faceta Interaccional.
			Desarrollar normas de la clase como parte de la "enseñanza para la comprensión".	Faceta Mediacional.
Conocimiento curricular Conocimiento de contextos educativos. Conocimientos de los fines, propósitos y valores de la educación.	Conocimiento del currículo.	Conocimiento de los estándares de aprendizaje.		Faceta Ecológica.

Fuente: Construcción propia a partir de Pino-Fan y Godino (2015)

2.2 El Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)

A partir de los aportes de Shulman, los trabajos realizados por Ball (2000), Ball (2003), Hill, Schilling y Ball (2004), Hill, Rowan y Ball (2005) y Hill, Ball y Schilling (2008) permitieron proponer un modelo para entender el conocimiento del profesor que enseñanza matemáticas denominado *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*. En este modelo se analizan tanto el conocimiento matemático como el didáctico de los profesores. La propuesta tiene origen en la necesidad de que, según Ball (2000), los profesores desarrollen una práctica de enseñanza de calidad en matemáticas.

Ball (2000) realiza un análisis acerca del Conocimiento del Contenido para la Enseñanza (Knowledge for Teaching). Expone la idea de que los profesores que imparten matemáticas necesitan no solo conocer los contenidos que enseñan, sino contar con el conocimiento para hacerlos comprensibles a los alumnos, o en palabras de Shulman, un Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK, Pedagogical Content Knowledge). Ball (2000) enfatiza la importancia de ambos conocimientos para la enseñanza de las matemáticas.

Con la idea del Conocimiento Pedagógico del Contenido de Shulman entendido como aquel que "incluye las formas usuales para representar las ideas… analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones, en otras palabras, los caminos para representar y formular el tema para hacerlo más comprensibles a los demás" (Shulman, 1986, p. 9) y las ideas de Ball (2000) acerca de la importancia del Conocimiento del Contenido Matemático surge la propuesta del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (Mathematical Knowledge for Teaching MKT) (figura 2.1).

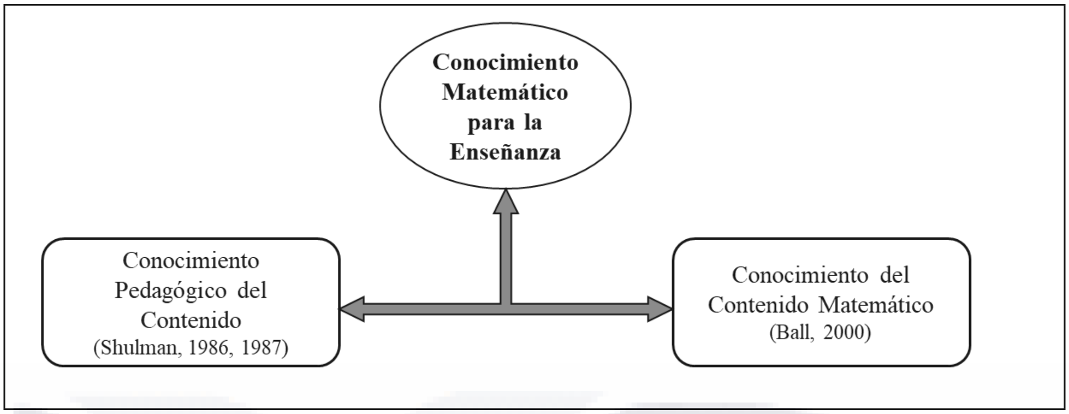


Figura 2.1. Origen del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). Figura tomada de Tavira Fuentes (2014).

El *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT) es el conocimiento y las habilidades y hábitos mentales que son empleados para el trabajo de enseñanza. El trabajo de enseñanza son todas aquellas tareas y responsabilidades que tienen los profesores para enseñar las matemáticas, tanto dentro como fuera del aula (Ball et al., 2006).

> Ejemplos de este "trabajo de enseñanza" incluyen explicar términos y conceptos a los estudiantes, interpretar las declaraciones y soluciones de los estudiantes, juzgar y corregir tratamientos de libros de texto de temas particulares, usar representaciones con precisión en el aula y proporcionar a los estudiantes ejemplos de conceptos matemáticos (Hill, Rowan y Ball, 2005, p. 373)

En el MKT involucra dos dominios relacionados entre sí: *Conocimiento del Contenido Matemático* y *Conocimiento Pedagógico del Contenido Matemático*, cada uno conformado por tipos distintos de conocimiento denominados subdominios (Figura 2.2).

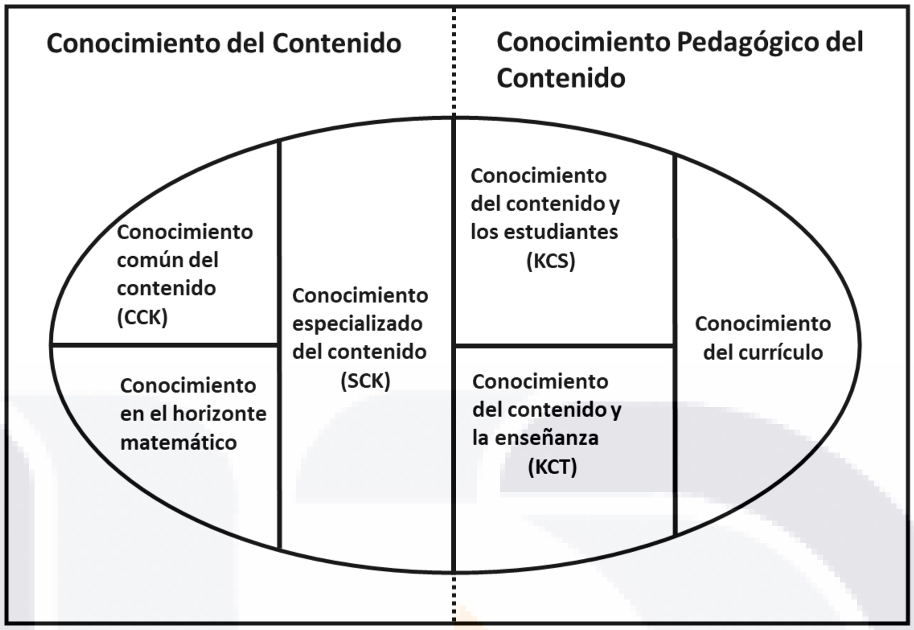


Figura 2.2. Modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). Figura tomada de Hill, Ball y Schilling (2008 p. 377).

El *Conocimiento del contenido* se refiere a los conocimientos matemáticos que se supone posee una persona que se dedica a la enseñanza de las matemáticas, como producto de su paso por la escuela básica y de su formación en docencia. Se conforma por tres subdominios:

a) *Conocimiento común del contenido* (*CCK, Common Content Knowledge*, por sus siglas en inglés).
b) *Conocimiento especializado del contenido* (*SKC, Specialized Content Knowledge*)
c) *Conocimiento en el horizonte matemático* (Ball, Thames y Phelps, 2008).

El *Conocimiento Común de Contenido (CCK)* es definido como los conocimientos y las habilidades para resolver los problemas y ejercicios que se proponen en el nivel educativo donde el profesor se desempeña. Se trata de una serie de conocimientos que son empleados no solo en la enseñanza de las matemáticas sino en una variedad de entornos (Hill, Ball y Schilling, 2008), es decir, un conocimiento matemático que pueden tener otras personas que no son profesores y que no se dedican a enseñar. El *Conocimiento común del contenido* "es el relativo a la matemática teórico-práctica como cuerpo de conocimiento de posible aplicación a otros campos; puede considerarse similar a las matemáticas que se hallan en los libros de texto" (Montes, et. al., 2015, p. 40). Al respecto Ball, Thames y Phelps (2008) señalan que los profesores necesitan un conocimiento matemático que les permita resolver los problemas que ellos les plantean a sus estudiantes.

El *Conocimiento especializado del contenido* (SKC) es aquel que se compone del conocimiento y las habilidades necesarias para que los profesores desarrollen el trabajo de enseñar matemáticas. Normalmente no se necesita para fines distintos de la enseñanza. Es un tipo de conocimiento matemático que los maestros deben poseer porque la enseñanza implica hacer que las características de un contenido particular sean visibles y accesibles para los estudiantes.

Implica, entre otros, el conocimiento de las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos matemáticos (Hill, Ball y Schilling, 2008). Involucra conocer la naturaleza matemática de los errores que cometen los alumnos y razonar si alguna de las soluciones que dan sus alumnos podrían funcionar en general o no (Sosa, 2011). Ball, Thames y Phelps (2008) son enfáticos en señalar que se trata de un conocimiento matemático que se emplea en contextos de enseñanza de las matemáticas y que no es empleado ni necesario e incluso deseable por cualquier otra persona que no se dedique a ello. El SKC, es a decir de Montes et al. (2015), una de las grandes aportaciones de Ball y colaboradores, pues enfatiza los conocimientos que realmente requiere un profesor de matemáticas, a diferencia de otros usuarios de la matemática. Actividades como las que se muestran en la tabla 2.1 son características de este subdominio.

Tabla 2.2

Actividades características del Conocimiento especializado del contenido.

Actividades matemáticas de enseñanza
• Presentación de ideas matemáticas. • Responder a los "por qué" de los estudiantes. • Encontrar un ejemplo para hacer específico un contenido matemático. • Reconocer lo que está involucrado en el uso de una representación matemática particular. • Enlazar a las representaciones matemáticas con las ideas subyacentes y con otras representaciones. • Conectar un tema que se está enseñando a temas de años anteriores o futuros. • Explicar los objetivos y metas matemáticas a los padres. • Evaluar y adaptar el contenido matemático de los libros de texto. • Modificar las actividades para que sean más fáciles o más difíciles. • Evaluar la plausibilidad de las participaciones de los estudiantes (a menudo con rapidez). • Dar o evaluar explicaciones matemáticas. • Elegir y desarrollar definiciones utilizables. • Usar la notación y el lenguaje matemáticos además de evaluar su uso. • Hacer preguntas matemáticas productivas. • Seleccionar ciertas representaciones matemáticas para fines particulares. • Reconocer equivalencias.

Nota. Tomado de Ball, Thames y Phelps (2008, p. 400)

> "Tomadas en conjunto, estas tareas exigen una comprensión y un razonamiento matemáticos únicos. La enseñanza requiere un conocimiento más allá del que se enseña a los estudiantes… entender diferentes interpretaciones de las operaciones… que los estudiantes no necesitan distinguir explícitamente" (Ball, Thames y Phelps 2008, p. 400)

El *Conocimiento en el horizonte matemático* hace referencia al conocimiento para poder establecer las relaciones entre contenidos matemáticos de diferentes niveles educativos; lo que se conoce como una relación vertical (contenidos de educación primaria con los de educación secundaria) "un maestro de primaria tiene que saber con qué dificultades se enfrentarán sus estudiantes para sentar una base conceptual firme" (Fernández y Figueiras 2010, p. 294). O a las relaciones de los contenidos matemáticos o de otra

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

asignatura de un mismo nivel o grado educativo entendidas como relaciones horizontales. Fernández y Figueiras (2010) mencionan que se trata de un conocimiento por medio del cual el profesor es consciente de la importancia de las relaciones entre los contenidos matemáticos del currículo. Este conocimiento va más allá del *Conocimiento del currículo*; implica "una visión global de la educación matemática de los estudiantes" (Martínez, Giné, Fernández, Figueiras y Deulofeu 2011, p. 430). En otras palabras, el *Conocimiento en el horizonte matemático* involucra contar con un panorama longitudinal de los conceptos matemáticos y la relación que existe entre ellos. Este conocimiento "incluye las habilidades que tienen los profesores para saber la importancia que tiene un determinado contenido matemático durante su trayectoria curricular" (Sosa, 2011, p. 31)

El *Conocimiento Pedagógico del Contenido* (*PCK*) se concibe como los conocimientos indispensables para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas[1]. Está integrado por los siguientes subdominios:

a) El *Conocimiento del contenido y los estudiantes* (*KCS*).
b) *Conocimiento del contenido y la enseñanza* (*KCT*).
c) *Conocimiento del currículo.*

El *Conocimiento del contenido y los estudiantes* (*KCS*), comprende conocer a los estudiantes y lo que saben de matemáticas, entrelaza un conocimiento del contenido con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan y aprenden (Hill, Ball y Schilling, 2008). En palabras de Ball, Thames y Phelps (2008) implica al profesor ser capaz de anticipar lo que los estudiantes pueden pensar y lo que encontrarán confuso. Al asignar una tarea, los maestros necesitan anticipar lo que los estudiantes probablemente harán con ella y si les resultará fácil o difícil. De igual forma, los profesores necesitan predecir lo que los estudiantes encontrarán interesante y motivador. Este conocimiento ayuda al profesor al diseño de actividades para abordar contenidos matemáticos.

[1] En este estudio para el análisis de los Conocimientos Didácticos se retoma la definición del Pedagogical Content Knowledge propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008).

Los maestros también deben ser capaces de escuchar e interpretar el pensamiento emergente e incompleto de los estudiantes, expresado en la manera en que los alumnos usan el lenguaje matemático. Cada una de estas tareas requiere una interacción entre la comprensión matemática específica y la familiaridad con los estudiantes y su pensamiento matemático (Hill, Ball y Schilling, 2008). Al respecto Sosa (2011, p. 32) señala que los profesores… hacen una imagen de lo que posiblemente harán los alumnos en las tareas matemáticas que les asignan [dentro de este subdominio] se considera la capacidad [de] los maestros para escuchar y comprender el pensamiento de los alumnos en su lenguaje usual".

El *Conocimiento del contenido y la enseñanza* (*KCT*) involucra conocer diversas maneras de acercar a los estudiantes algún contenido matemático a los alumnos, esto es, ventajas educativas de utilizar o seguir una determinada estrategia al estudiar un tema con los estudiantes. El profesor decide con qué ejemplos inicial un tema y cuáles para adentrar a los estudiantes más en el contenido, "qué aportaciones de los alumnos tomar en cuenta, cuáles ignorar y cuáles destacar para usarlas posteriormente …cuándo aclarar más una idea, cuándo hacer una nueva pregunta o encomendar una nueva tarea para fomentar más el pensamiento matemático de los alumnos" (Ball, Thames y Phelps 2008, p. 401). Los maestros valoran las ventajas y desventajas de ciertos diseños de instrucción para identificar aquellos que les pueden ser de utilidad para acercar a los estudiantes a los aprendizajes matemáticos.

El *Conocimiento del currículo* supone el conocimiento de la composición y estructura curricular. El profesor debe tener un dominio de cómo está organizado el currículo del nivel y el grado educativo donde se desempeña. Este tipo de conocimiento le permite la planificación de las actividades para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes (Ball, Thames y Phelps, 2008).

La propuesta del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* se continua en trabajos realizados en el Departamento de Educación de la Universidad de Michigan. Es en dos proyectos donde esta propuesta se precisa con mayor detalle: el denominado Mathematics Teaching and Learning to Teach (MTML) y el proyecto Learning Mathematics for Teaching (LMT) (Universidad de Michigan, 2017b). En ambos, se interesan sobre qué y cómo los profesores hacen al enseñar matemáticas.

Los investigadores que participan en el MTLM se interesan por "identificar la comprensión matemática, la apreciación y el conocimiento que importan para enseñar"

(Universidad de Michigan, 2017b). Para ello realizan observaciones de las clases de matemáticas que imparten profesores en la escuela primaria. En el LMT se desarrollan instrumentos para *medir* los conocimientos matemáticos para la enseñanza. Dichos instrumentos incluyen “elementos que reflejan… tareas matemáticas reales que los maestros enfrentan en las aulas, por ejemplo, evaluar el trabajo del estudiante, representar números y operaciones y explicar reglas o procedimientos matemáticos comunes” (Universidad de Michigan, 2017a).

Otras experiencias de aplicación del modelo del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* son diversas (Buforn y Fernández, 2014; Ciccioli y Sgreccia, 2017; Couoh-Noh, Cabañas-Sánchez, Llinares y Valls, 2015; Haroun, Ng, Abdelfattah y AlSalouli, 2016; Hatisaru y Erbas, 2017; Hill, Umland, Litke y Kapitula, 2012; Martínez, Giné, Fernández, Figueiras y Deulofeu, 2011; Wilkie, 2016; Youchu, 2016, por mencionar algunos). Se han realizado en diversos contextos, con profesores de diferentes niveles educativos e investigando el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* en su conjunto o interesándose en algunos de los subdominios que lo conforman. Los siguientes son algunos ejemplos.

Ciccioli y Sgreccia (2017) estudian la formación que se ofrece a futuros profesores de matemáticas para con ello configurar su conocimiento matemático para enseñar (MKT) sobre temas relacionados con geometría analítica elemental. Hatisaru y Erbas (2017) exploran las probables interrelaciones entre conocimiento matemático de profesores acerca del conocimiento de función y los resultados de aprendizaje de este concepto.

Temas como el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* en los que se investiga el conocimiento de los estudiantes para profesores acerca de la generalización de patrones recurren al modelo del MKT como referente teórico (Wilkie, 2016). El MKT también se emplea para describir las características del conocimiento de futuros profesores sobre el concepto de límite al infinito de una función (Couoh-Noh et al., 2015). Algunos estudios se centran en el estudio de alguno de los subdominios del MKT en particular, por ejemplo, Buforn y Fernández (2014) analizan el *Conocimiento especializado del contenido* sobre el razonamiento proporcional de estudiantes para profesores. Martínez et al. (2011) indagan el *Conocimiento en el horizonte matemático* que necesitan los profesores para apoyar a los alumnos en la transición de un nivel educativo a otro, particularmente de primaria a secundaria.

Otros estudios que emplean el MKT como soporte teórico que exploran las diferencias del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* por género (Haroun et al., 2016). En este estudio se emplea una versión traducida de los instrumentos elaborados en el proyecto LMT y se aplica a profesores en Arabia Saudita. Algunos más parten de los supuestos del MKT para el desarrollo de instrumento de evaluación sobre el conocimiento matemático de profesores (Khakasa y Berger, 2015)

El hecho de considerar el MKT como el referente teórico para esta tesis, radica en que:

a) Se considera que brinda una serie de elementos que permiten categorizar de forma específica el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (Sosa, 2011) de los profesores, en este caso para los futuros profesores.
b) Es un modelo ampliamente utilizado para el estudio del conocimiento de los profesores sobre diversos conceptos matemáticos.
c) Además, de que se deriva del análisis directo de la práctica de profesores en servicio.

En un estudio en el que analiza el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* de profesores de bachillerato, Sosa (2011) diseña una serie de indicadores permiten "profundizar en la comprensión de los distintos subdominios del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (CME)" (p. 411).

Para la elaboración de los indicadores Sosa (2011) analiza las sesiones de clase de dos profesoras de bachillerato mientras enseñan el contenido de matrices. Realiza lo que denomina acercamientos (es decir ejercicios de análisis de las sesiones hasta llegar a lo que se conoce como saturación teórica) a la información que recoge. Con base en ello, propone los indicadores que se muestran en el anexo H para el análisis de cada subdominio del MKT. Este conjunto de indicadores sirve de base para la descripción de los conocimientos matemáticos y didácticos sobre fracciones y decimales de los estudiantes para profesores de educación primaria en esta investigación.

CAPÍTULO 3. LAS FRACCIONES Y LOS DECIMALES EN EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

En este capítulo se muestran las características de los números racionales en tanto fracciones y los números decimales. Dado que el objeto de estudio de la presente investigación es describir el conocimiento de futuros profesores sobre este conjunto de números.

3.1 Conjuntos numéricos

En el programa de estudios de la asignatura de *Aritmética, su aprendizaje y enseñanza* de la Licenciatura en Educación Primaria (SEP, 2013a) se sugiere, entre otras cuestiones, el estudio de la noción de número, la clasificación de los conjuntos de números y los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división.

Los números se organizan en los siguientes conjuntos: naturales, enteros, racionales, reales, irracionales y complejos. En la figura 3.1 se muestra una clasificación de ellos. Es esperable que los profesores en formación inicial conozcan las características de cada conjunto, pues en gran medida, de ello dependen las interpretaciones que puedan realizar y las formas en que los emplean.

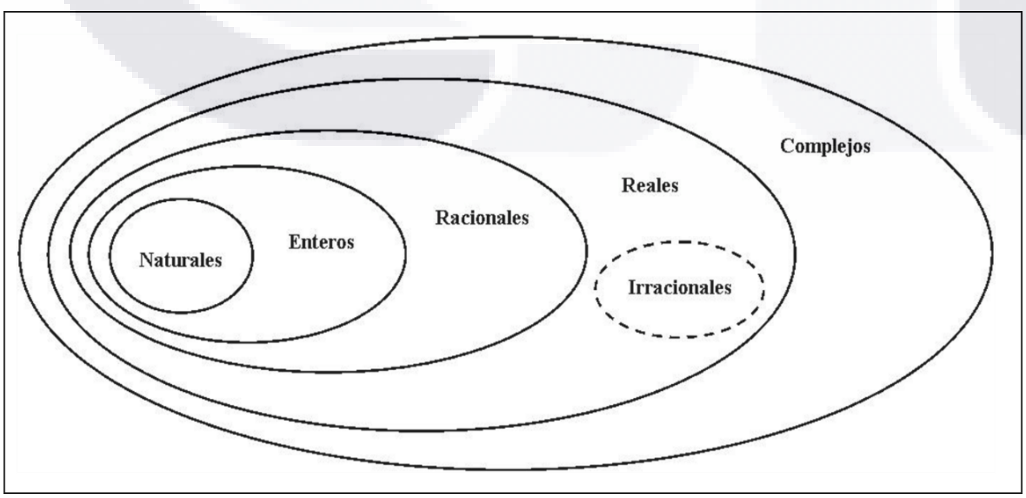


Figura 3.1. Clasificación de los números. Fuente: construcción a partir de (Fernández, 1943).

Los números racionales son parte de un conjunto más amplio de números (ver figura 3.1). Se representan por la letra $\mathbb{Q}$ e incluyen a su vez a los números naturales y enteros. Como ya se dijo, se espera que un futuro profesor cuente con conocimientos acerca de este grupo de números, así como de la manera en que pueden ser aprendidos y enseñados. Desde la teoría de conjuntos los números racionales se definen de la siguiente manera (ver figura 3.2):

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \; / \; p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}}$$

Figura 3.2. Definición de los números racionales desde la teoría de conjuntos. Fuente: tomado de Peterson y Hashisaki (1980).

Así los números racionales ($\mathbb{Q}$) son todos aquellos que pueden expresarse de la forma $\frac{p}{q}$, tal que tanto *p* como *q* pertenecen al conjunto de números enteros ($\mathbb{Z}$) y en donde *q* sea diferente de cero. Al número *p* se llama numerador y *q* denominador. Por esta razón es que comúnmente a los números racionales se les asocia casi exclusivamente con las fracciones. Ahora bien, el interés de este trabajo de investigación se centra no solo en las fracciones sino también en los números decimales, que igualmente, son números racionales. A continuación, se presentan las características que permitan una compresión general tanto de las fracciones como de los números decimales.

3.2 Interpretaciones de las fracciones

Dado el interés por el conocimiento que tienen los futuros profesores sobre las fracciones y los decimales, en esta sección se presentan algunas de las maneras de interpretar las fracciones, para ello se retoman ideas de diversos autores como Peterson y Hashisaki

(1980), Kieren, (1980, 1983 y 1988), Freudenthal (1983), Behr, Lesh, Post y Silver (1983), Mochón (1995), Llinares y Sánchez (1997), Fandiño (2009) entre otras.

Según Peterson y Hashisaki (1980) la interpretación de los números racionales como "fracción" ($\frac{p}{q}$, por ejemplo) o como "partición" es la más "familiar", las más empleada en los libros de texto y en diversos materiales utilizados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Así, la fracción $\frac{p}{q}$ puede ser entendida como "p" partes de "q".

Freudenthal (1983) introdujo dos nociones importantes para la comprensión de las fracciones: como *fracturador* y como *comparador*. En la idea de fracción como *fracturador* un *todo* (discreto o continuo; definido o indefinido; estructurado o carente de estructura) se tiene que subdividir en partes iguales. Considerando a la fracción como *comparador,* se hace una comparación cuantitativa entre dos *todos* diferentes, mismos que pueden ser representados como cantidades discretas o continuas o comparados con un *todo* independiente. De estas definiciones se extendieron a otras interpretaciones de las fracciones.

Otra clasificación, que aparece con frecuencia en la literatura, es la que Behr, Lesh, Post y Silver (1983) proponen. En el marco del denominado The Rational Number Project sostienen que, las fracciones, son uno de los temas más complejos para los estudiantes, desde aquellos que cursan educación básica hasta estudios de educación superior. Para estos autores las fracciones tienen diversas interpretaciones, por ejemplo, como:

a) Relación Parte-todo y medida
b) Razón
c) Cociente
d) Operador

Afirman que las fracciones en su interpretación *Parte-todo* es fundamental para el aprendizaje. Esta noción es considerada para su estudio desde los primeros grados de educación primaria. Allí se comienza con actividades donde los alumnos tienen que otorgar significado a la expresión "una mitad de..." Behr et al. (1983) señalan, además, que entre los subconstructos o interpretaciones de las fracciones existen conexiones, mismas que, deben servir, de apoyo para la planeación de actividades de enseñanza y aprendizaje. En ese sentido estos mismos autores sugieren que la interpretación *Parte-todo* es un punto de partida para el aprendizaje, pues a partir de ella es posible transitar a la comprensión de otras maneras de entender las fracciones (ver figura 3.3).

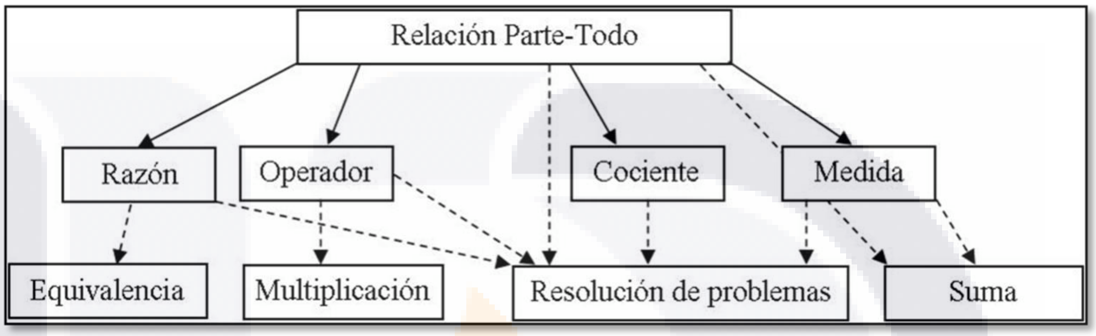


Figura 3.3. Esquema conceptual para la instrucción de los números racionales. Fuente: Behr et al. (1983).

La información de la figura 3.3 sugiere que la interpretación *Parte-todo* es uno de los subconstructos más importantes en el aprendizaje de las fracciones. El subconstructo razón apoya en gran medida el aprendizaje del concepto equivalencia; y los significados de cociente y medida pueden ser usados para el desarrollo de la comprensión de la suma y multiplicación con números racionales (Behr et al., 1983)

Kieren (1988) menciona que las fracciones deben ser entendidas como un "megaconcepto", es decir, una idea de alta complejidad que está formada por una serie de interpretaciones y definiciones que es necesario detallar. Para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en la escuela primaria es importante que un profesor conozca cada uno de los significados o interpretaciones que se le asocian.

Kieren (1988), que coincide con las propuesta de Behr et al. (1983) señala que las fracciones pueden ser entendidas como:

a) Parte-todo
b) Cociente
c) Medida

d) Razón
e) Operador

Mochón (1995) presenta una clasificación de las fracciones que sigue la idea de Freudenthal (1983). Este autor propone las siguientes formas de entender las fracciones:

a) Medida
b) Cociente
c) Operador
d) Razón

A estas interpretaciones de las fracciones Mochón (1995) las llama subconstructos de las fracciones. Y apunta:

> La fracción se pude comportar como una medida, un operador, una razón o un cociente o como la parte de un todo. Cada uno de estos, conceptualiza a la fracción de una manera diferente y contribuye para formar una imagen más nítida de la fracción, la cual es necesaria tanto para la resolución de problemas que involucran estos conceptos, como para la mejor comprensión de los algoritmos asociados con la fracción. (p. 24)

Fandiño (2009) propone las siguientes formas de entender el concepto de fracción, y enumera lo que para esta autora son los "principales significados que la palabra fracción puede asumir en matemática y por lo tanto en el proceso de enseñanza-aprendizaje" (Fandiño, 2009, p. 102). Estos significados son:

a) Parte de una unidad-todo
b) Cociente
c) Relación
d) Operador
e) La fracción en probabilidad

f) La fracción en los puntajes
g) Como número racional
h) Punto de una recta orientada
i) Medida
j) Indicador de cantidad
k) Porcentaje

Algunas de las interpretaciones que Fandiño (2009) presenta parece que carecen de un sustento teórico para ser considerados como una interpretación de las fracciones, pues se limita a ofrecer ejemplos de contextos en los que se utilizan las fracciones y no aporta una interpretación como tal. Por ejemplo, al definir la fracción en probabilidad menciona

> Buscamos evaluar la probabilidad según la cual, lanzando dos dados, se obtiene un múltiplo de 4. Los casos posibles son 36, los eventos favorables son 9 (que salga 4, que se presenta en 3 casos; 8 que se presenta en 5 casos; 12 que se presenta en un caso). Entonces la probabilidad de ese evento se puede expresar con la escritura $\frac{9}{36}$, es decir el número de casos favorables al evento, con respecto al números de casos posibles (Fandiño, 2009, p. 114).

En realidad, esta definición se acerca más a la interpretación de *Parte-todo*, en donde el número de casos posibles es el *Todo* (36) del que se consideran solo una *Parte* de ellos: la posibilidad de obtener un múltiplo de 4 (9). Otro ejemplo es la interpretación de fracción como *medida*, en donde solo señala que las fracciones son empleadas para expresar una cantidad: $\frac{3}{4}$ de un litro.

Llinares y Sánchez (1997) analizan las interpretaciones para los números racionales como contenidos de estudio en las matemáticas escolares en educación primaria. Argumentan, al igual que los autores antes presentados, que el número racional $\frac{a}{b}$ tiene diversos subconstructos. Para efectos de análisis de las fracciones que aparecen en los contenidos en la educación primaria estos autores consideran los siguientes:

a) Medida
b) Reparto
c) Operador
d) Razón

A continuación, se hará una descripción de las diferentes formas de entender la "fracción". Para lo anterior, se retoman algunas de las definiciones de los autores señalados en los párrafos anteriores. La intención es ofrecer un panorama de las interpretaciones que, con mayor frecuencia, se localizan en la literatura.

3.2.1 Relación parte-todo

Para Freudenthal (1983) entender las fracciones como *parte-todo* implica reconocer que "un todo ha sido o está siendo rajado, cortado, rebanado, roto, coloreado, en partes iguales, o si se experimenta, imagina, piensa como si lo fuera" (p. 9). Este subconstructo puede identificarse mediante la relación que se establece entre "una parte" y un "todo" (sea este continuo o discreto). Es importante que el "todo" esté dividido en partes congruentes; es decir, en partes equivalentes en superficie o cantidad (Llinares y Sánchez, 1997). En otras palabras, el número $\frac{p}{q}$ (una fracción) indica que existe un todo "*q*" constituido por partes congruentes del que se toman un número "*p*" de ellas. Tres nociones caracterizan a este subconstructo.

a) *Representaciones continuas (área) y discretas*. En una interpretación continua, la fracción indica las partes que se toman con relación al número de partes en que se ha divido el todo. Un ejemplo de ello son los diagramas circulares o rectangulares son los más recurridos (ver figura 3.4)

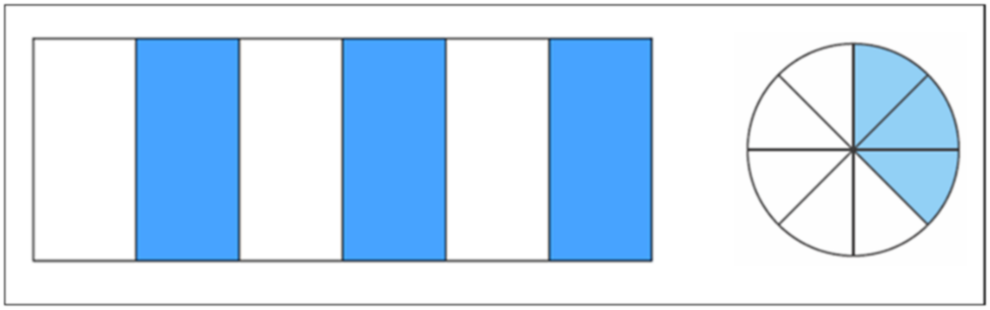


Figura 3.4. Ejemplos de representaciones continuas basadas en área.

En un conjunto discreto el "todo" está representado por un conjunto de objetos del cual se toman algunos de ellos, por ejemplo (figura 3.5):

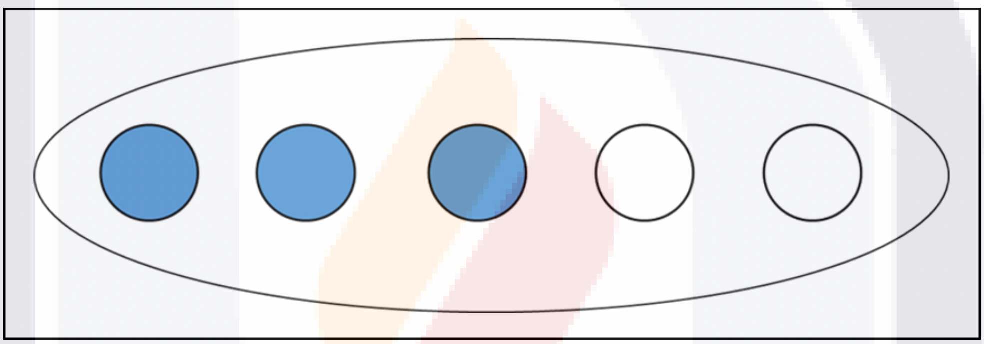


Figura 3.5. Ejemplo de representaciones discretas de una fracción.

Tanto en la interpretación de cantidades continuas como discretas toman importancia los conceptos de "todo" y "partes congruentes", pues de ello depende la comprensión de este subconstructo de los números racionales.

b) *Decimales*. Están relacionados con la interpretación de la relación "parte-todo". Llinares y Sánchez, (1997) señalan que si se toma como base el uso de la representación continua y el uso del rectángulo ─como unidad─ dividido en 10 partes iguales; cada una de las partes representa una décima ($\frac{1}{10}$); si ésta a su vez es dividida en diez partes se obtiene una centésima del todo.

c) *Como puntos sobre la recta numérica*. En una situación como ésta se considera a la fracción $\frac{p}{q}$ con un punto en una recta numérica, en donde un segmento de la recta está dividido en *q* partes congruentes de las cuales se toman *p* número de ellas (véase Figura 3.6)

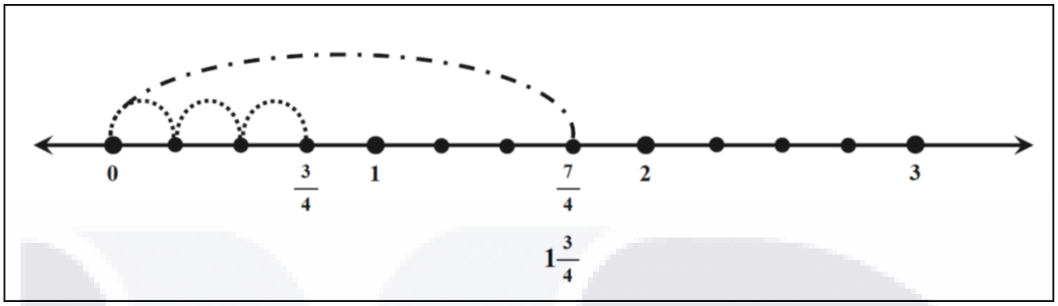


Figura 3.6. Ejemplo de fracciones como puntos sobre una recta.

3.2.2 Medida

Este subconstructo se encuentra relacionado directamente con la interpretación parte-todo. Para Mochón (1995) "en situaciones de medida, se tiene una cantidad medible y una unidad y se quiere determinar cuántas veces cabe la unidad en la cantidad que se va a medir" (p. 11). Se trata de un tipo de comparación entre dos cantidades, en donde una es la unidad de referencia para medir otra (ver figura 3.7).

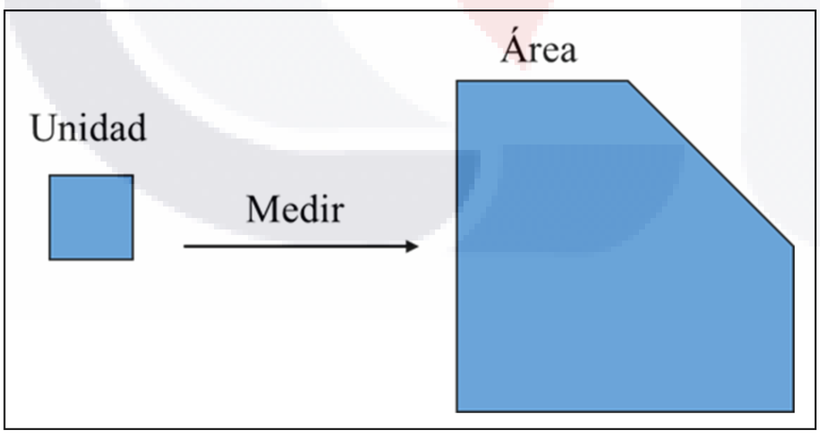


Figura 3.7. Ejemplo de unidad de referencia para medir otra[1].

[1] Ejemplo basado en Mochón (1995).

En ocasiones la unidad de referencia no cabe exactamente en la unidad a medir, es entonces cuando se recurre a la división de ésta última, obteniendo así una serie de partes más pequeñas que la unidad de referencia. Estas divisiones pueden ser mitades, tercios, cuartos o cualquier otra división.

3.2.3 Reparto

Esta interpretación relaciona a la fracción con la operación de dividir un número natural por otro (división indicada $p:q = p/q$). Llinares y Sánchez (1997) sostienen que esta manera de entender a las fracciones es una diferencia importante con respecto a la anterior, pues no se trata de "tomar *p* partes de un todo *q*". Sino de dividir un número entero *p* entre otro *q*. Dos interpretaciones que se derivan de esta:

a) *Como división indicada*: un número racional se puede presentar en situaciones de reparto, en donde se divide una cantidad discreta o continua entre otra. Por ejemplo: *repartir 3 pizzas entre 5 niños* ($\frac{3}{5}$).
b) *Como elemento de una estructura algebraica*: en esta interpretación los números racionales del tipo $\frac{p}{q}$ (en donde p y q son naturales y $q \neq 0$) pueden ser representados como solución a la ecuación: $q \cdot x = p$ (Llinares y Sánchez, 1997).

Respecto a este subconstructo los autores señalan que para los alumnos resulta difícil enfrentarse a ella. Más cuando la relacionan la fracción entendida como reparto con el subconstructo *Parte-todo* y "ven $\frac{3}{5}$ como: de cinco partes hay tres sombreadas" (Llinares y Sánchez, 1997, p. 64).

3.2.4 Operador

En este subconstructo las fracciones son vistas como transformadores, "algo que actúa sobre una situación (estado) y la modifica" (Llinares y Sánchez, 1997, p. 72). Como operador las fracciones son un transformador multiplicativo de un conjunto. Pueden ampliar o reducir dicho conjunto (Mochón, 1995). Se puede decir que bajo esta lógica una fracción es una sucesión de multiplicaciones y divisiones. Un ejemplo que ayuda a comprender esta interpretación se presenta en la figura 3.8:

Consigna: En un grupo conformado por 36 niños ¿Qué cantidad representan $\frac{2}{3}$?

Estado-Unidad (Situación)	Operador	Estado final
36	Dividir por 3, multiplicar por 2	24 niños

Figura 3.8. Ejemplo de fracciones como operador. Figura tomada de : Llinares y Sánchez (1997, p. 72)

3.2.5 Razón

En este subconstructo se emplean a las fracciones como un "índice comparativo entre dos cantidades". Aquí aparece la idea de pares ordenados de números. Llinares y Sánchez (1997) presentan el ejemplo de la figura 3.8 como apoyo a la comprensión de esta interpretación:

"La relación entre los puntos de A y de B es de $\frac{3}{5}$ es decir (3 : 5)" (p. 68)

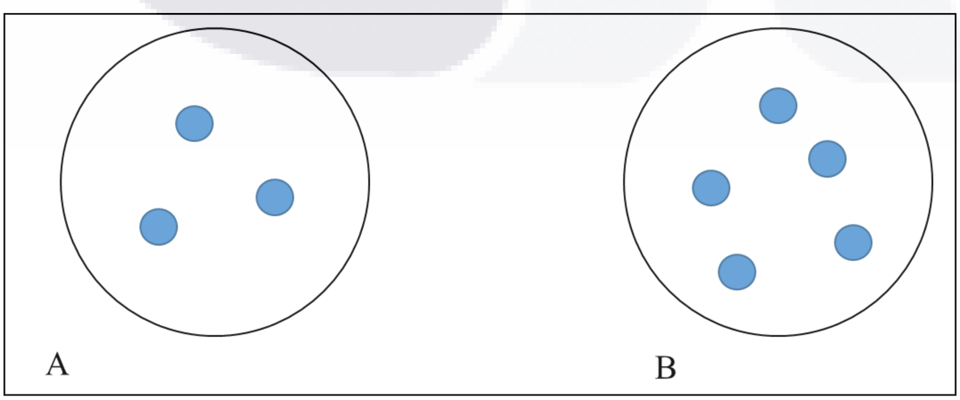


Figura 3.9. Apoyo a la comprensión de las fracciones como razón.

La comparación entre las cantidades describe una relación "conjunto a conjunto" "todo a todo", aunque también se puede expresar "parte a parte". Las siguientes son algunas nociones que Llinares y Sánchez (1997) señalan se pueden asociar a las fracciones como razón:

a) En *probabilidad*. En donde se establece una comparación "todo a todo" entre el conjunto de casos favorables y el conjunto de casos posibles.
b) En *porcentajes*. Es la relación que se establece entre un número y 100. Por ejemplo "determinar el 60% de 35, esto es, cómo actúa la fracción $\frac{60}{100}$ sobre el número 35. (Llinares y Sánchez, 1997 p. 71).

Para Peterson y Hashisaki (1980) las fracciones en su interpretación como *razón* pueden explicarse bajo la lógica de que entre dos números naturales se establece "*una correspondencia muchos a muchos*" (p. 231) esto es, por ejemplo, el número $\frac{3}{10}$ puede interpretase como la correspondencia de 3 a 10 en diversos contextos (por ejemplo: en la muestra investigada, 3 de cada 10 adultos tienen problemas para conciliar el sueño). La interpretación de los números racionales como "razón" también tiene la connotación de porcentaje, es decir, las razones que tienen como denominador el 100. Dichos números se representan con el signo %. Por ejemplo, la expresión 25% puede ser expresada como $\frac{25}{100}$.

3.3 Los números decimales

Los números decimales como subconjunto de los racionales, suponen una ampliación del conjunto de números naturales, pues con ellos es posible resolver problemas que con estos últimos no sería posible (Ávila, 2008).

Kieren (1980) señala que los números decimales son aquellos números racionales que pueden escribirse en forma de fracción decimal. Es decir, fracciones cuyo denominador sea una potencia de 10. Este autor, menciona que poder ser clasificados en:

a) *Limitados o exactos*. Son los que tienen en su representación decimal una cantidad fija de números, por ejemplo: $\frac{1}{4} = 0.25$
b) *Periódicos*. En su representación decimal tienen una cantidad ilimitada de números. Hay de dos tipos:
   - *Puros*. Un número o grupo de números se repite ilimitadamente desde el primer decimal, por ejemplo: 5.2323232323…
   - *Mixtos*. Un número o grupo de números se repite ilimitadamente a partir del segundo o posterior decimal, por ejemplo: 3.27838383…

Ávila y García (2008) mencionan que los números decimales son aquellos que pueden representarse en forma de fracción decimal. En el afán de ofrecer un espacio para la reflexión en la enseñanza y el aprendizaje de los números decimales señalan que éstos pueden definirse como:

a) Un subconjunto de los números racionales.
b) Las fracciones decimales son las que pueden expresarse con un numerador entero y un denominador que es una potencia de diez[2], por ejemplo, $\frac{3}{10}$ y $\frac{1}{1000}$ son fracciones decimales; también son ejemplos de fracciones decimales $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$ ya que se pueden encontrar fracciones equivalentes a un medio y a tres quintos cuyos denominadores sean una potencia de 10.
c) Este tipo de fracciones tienen la particularidad de que pueden representarse de otra manera: utilizando escrituras que llevan punto decimal, dando lugar a las *expresiones decimales finitas* y que en la escuela simplemente reciben el nombre de *decimales*. A las fracciones $\frac{3}{10}$ y $\frac{1}{1000}$ les corresponden, respectivamente, las siguientes escrituras: 0.3 y 0.001.

[2] Las potencias de 10 son, por ejemplo, $10^3 = 1000$, $10^2 = 100$, $10^1 = 10$, $10^0 = 1$, etcétera.

d) Las fracciones que no son decimales (por ejemplo $\frac{1}{3}$) no pueden representarse mediante una expresión decimal finita, este tipo de fracciones da lugar a las expresiones decimales periódicas infinitas ($\frac{1}{3}$ = 0.33333…).

e) Ambas expresiones, decimales finitas y decimales infinitas, [también] forman el conjunto de los racionales (números que pueden escribirse como fracciones), que son los que se estudian en la Educación Primaria y Secundaria. (Ávila y García (2008, p.33)

Para Ávila (2008) la comprensión de los números decimales es difícil para los estudiantes de educación primaria. Concuerda con Brousseau, Brousseau y Warfield, (2007) en que la cercanía de éstos a los números naturales, muchas veces, ocasionan fuertes confusiones, dado que:

- en los decimales no hay ni antecesor ni sucesor y, vinculado con esto,
- entre dos decimales —en lo que constituye otra diferencia con los naturales— siempre es posible incorporar otro decimal (propiedad de densidad, válida para todos los racionales). (Ávila, 2008, p. 7)

Constituye, pues, un reto didáctico hacer comprender a los estudiantes que los decimales son números distintos de los naturales, puesto que funcionan de otra manera y tienen propiedades diferentes a las de aquéllos.

Esto no es simple, ya que, como también señaló Brousseau:

> [Los decimales] por una parte, se parecen tanto a los naturales que es muy fácil emplearlos y aprender muy pronto una cierta manera de usarlos: fueron inventados para eso. Pero, por otra parte, esta primera comprensión se convierte en obstáculo para un uso más refinado y para una buena comprensión de cuestiones fundamentales para el estudio de las matemáticas (Brouseeau, en Centeno, 1997, p. 13).

3.4 Propiedades de las fracciones y los decimales.

Resulta significativo comentar algunas de las propiedades de las fracciones y de los números decimales, pues esto tiene repercusiones tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. Aquí se hace alusión a dos propiedades de especial importancia en la escuela primaria: el orden y la densidad.

En las fracciones y en los decimales el orden presenta una serie de características interesantes. Por ejemplo, "ningún número racional tiene un sucesor inmediato ni un predecesor inmediato" (Di Prisco y Angulo, 2010, p. 29). Es decir, entre dos números racionales, cualesquiera que sean es posible encontrar una cantidad infinita de ellos.

En el caso particular de los números decimales Ávila y García (2008) mencionan que en los números decimales:

> No tiene sentido hablar de sucesor o antecesor porque no podemos asegurar que un número sigue o antecede a otro. Considérese, por ejemplo, 0.5 y reflexiónese lo siguiente: no se puede afirmar que el sucesor de 0.5 sea 0.6 por que 0.5 equivale a 0.50 y en este caso se podría pensar que el sucesor, entonces es, 0.51; pero también 0.5 = 0.500 y entonces el sucesor sería 0.501, y así se podría mostrar que hay un número infinito de sucesores, lo que equivale a decir que el sucesor de un número decimal no está definido. (Ávila y García, 2008, p. 40)

La propiedad de orden se relaciona de manera directa con otra propiedad importante: la densidad. Con el afán de realizar una explicación congruente se retoman las ideas de Peterson y Hashisaki (1980). Estos autores señalan que:

> Dados dos números racionales cualesquiera a y b (suponiendo que $a < b$), siempre es posible encontrar otro número racional c tal que c está "entre" a y b; esto es, dados a y b con $a < b$ podemos encontrar otro número racional c tal que
>
> $$a < c < b.$$
>
> (Peterson y Hashisaki, 1980, p. 238)

Una forma de obtener un número racional (por ejemplo, c) entre otros dos (por ejemplo a y b siendo $a < b$) es calculando la mitad de la suma de estos últimos números ($a + b$). Es decir:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

(Peterson y Hashisaki, 1980)

Una manera de representar la propiedad de densidad geométricamente puede observarse en la figura 3.9. Donde $c = (\frac{a+b}{2})$

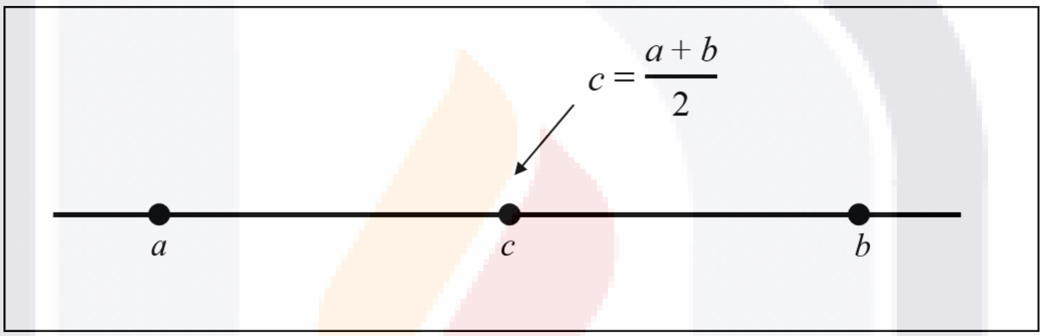


Figura 3.10. Representación geométrica de la propiedad de densidad en los números racionales. Fuente: Peterson y Hashisaki (1980, p. 239)

Al presentar estas dos propiedades, la idea es mostrar la complejidad que implican tanto las fracciones como los decimales desde su compresión matemática hasta convertirse en un objeto de enseñanza y aprendizaje. Como se mencionó a lo largo del apartado, la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones y los decimales involucra una serie de conocimientos referentes a las interpretaciones que se les otorguen, así como a las propiedades que poseen.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA

La investigación cuyos resultados se exponen en esta tesis comprendió dos fases. En la primera, de carácter cuantitativo, se exploró el conocimiento matemático y didáctico de estudiantes para profesor sobre fracciones y decimales mediante la administración de dos instrumentos. En la segunda, se realizaron observaciones en las clases de matemáticas durante las jornadas de práctica de los futuros profesores. En este capítulo se muestra el proceso empleado para la construcción de los instrumentos utilizados para la recolección de datos. También se describe el trabajo de campo y el proceso de análisis de la información que se siguió.

4.1 Exploración del conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones y decimales

Para la exploración del conocimiento matemático y didáctico se diseñaron y aplicaron dos instrumentos: un examen de conocimientos matemáticos y un cuestionario de conocimientos didácticos relacionados con las fracciones y los decimales. Ambos instrumentos se administraron a 275 estudiantes de 5º y 7º semestres de la Licenciatura en Educación Primaria (LEP) de dos Escuelas Normales del estado de Durango, en México. Una de las escuelas de carácter urbano y la otra rural. La muestra se conformó por 96 estudiantes (62 de 5º y 34 de 7º semestre) de la Normal Urbana y 179 (84 de 5º y 95 de 7º semestre) de la Normal Rural. Se eligieron alumnos de 5° y 7° semestres dado que ellos habían tomado todos los cursos de matemáticas del plan de estudios de la LEP.

4.1.1 Examen de conocimientos matemáticos

El examen se elaboró para indagar el conocimiento matemático sobre fracciones y decimales de los futuros profesores. Para la construcción del examen se diseñó un perfil de conocimientos matemáticos sobre fracciones y decimales. Dicho perfil abarca los contenidos que se estudian en la escuela primaria y los que se proponen en los programas de matemáticas de la LEP. Se revisaron los siguientes materiales:

a) El programa del curso *Aritmética, su aprendizaje y enseñanza* de la LEP 2012, pues en dicho curso se estudian los números racionales (las fracciones y los decimales) (SEP, 2013a).
b) El plan y los programas de matemáticas de educación primaria (SEP, 2011b, 2011c, 2011d).
c) Los libros de texto para el alumno de matemáticas de educación primaria (SEP, 2015b, 2015c, 2015c).
d) Los libros para el maestro de matemáticas de educación primaria (SEP, 2013b, 2013c, 2013d).

En la tabla 4.1 se presenta el perfil de conocimientos sobre fracciones y decimales que es esperable que logren los estudiantes para profesores. En palabras de Hill, Ball y Schilling (2008) con este perfil se explora sobre todo el *Conocimiento común del contenido*. Con base en los indicadores del perfil fue que se desarrollaron los reactivos del examen. Algunos reactivos se obtuvieron de pruebas aplicadas a estudiantes de educación primaria y secundaria, por ejemplo:

a) Las pruebas Excale (Exámenes de Calidad y Logro Educativo) 2009 para sexto de primaria y tercero de secundaria (INEE, 2013a)
b) La evaluación del aprovechamiento escolar del Sistema Nacional de Evaluación Educativa (aplicaciones de los ciclos escolares 2000-2001 y 2001-2002) (SEP, 2000, 2001, 2002).
c) Reactivos de Enlace (Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares) 2013 para sexto de primaria, primero y tercero de secundaria (SEP, 2013e, 2013f, 2013g).
d) Propuestas de trabajo de libros de texto de matemáticas para secundaria (Castañeda y González, 2012).

En primera instancia se diseñaron 60 reactivos de opción múltiple (con cuatro opciones de respuesta), con los cuales se conformaron dos versiones del examen a fin de realizar una prueba piloto. Cada una de las versiones se constituyó con 30 reactivos; algunos se colocaron en ambas pruebas con el fin de observar su funcionamiento en conjunto con otros reactivos.

Tabla 4.1

Perfil de conocimientos matemáticos sobre fracciones y decimales.

- Leer y escribir números decimales.
- Leer y escribir fracciones decimales.
- Leer y escribir números decimales empleando expresiones finitas e infinitas.
- Identificar las diferentes representaciones de los números decimales.
- Trasformar números decimales a fracciones decimales o fracciones comunes.
- Compara números decimales.
- Ordenar números decimales.
- Comprender la propiedad de densidad de los números decimales.
- Resolver problemas con números decimales que impliquen:
    - adición
    - sustracción
    - multiplicación
    - división
- Conocer las propiedades de las operaciones con números decimales y las relaciones entre ellas.
- Realizar estimaciones y cálculos mentalmente con números decimales.
- Leer y escribir fracciones comunes.
- Leer y escribir fracciones comunes equivalentes.
- Resolver problemas que impliquen el uso de fracciones equivalentes.
- Simplificar, a su mínima expresión, fracciones comunes o decimales.
- Resolver problemas con fracciones comunes, que implican:
    - adición
    - sustracción
    - multiplicación
    - división
- Leer y escribir fracciones propias.
- Leer y escribir fracciones mixtas.
- Leer y escribir fracciones impropias.
- Ubicar fracciones y decimales en la recta numérica.
- Resolver problemas que implican el cálculo de una fracción de un número natural.

Nota. Construcción propia

La prueba piloto se realizó con dos grupos de estudiantes de 5° y 7° semestres de la LEP de una Escuela Normal pública, de carácter urbano, de la ciudad de Aguascalientes. Para el análisis de las respuestas y la validación de los reactivos se emplearon los supuestos de la Teoría Clásica de los Test (TCT). Una de las ideas que la TCT sostiene es que, para validar una prueba, es necesario calcular el Índice de Confiabilidad y el Error de Medida, además de estimar el Índice de Discriminación y el Índice de Dificultad de cada reactivo. Con base en los resultados de la prueba piloto se diseñó la versión final del examen compuesta por 30 ítems[1].

El Índice de Confiabilidad y el Error de Medida que se obtuvo para la versión final del examen se presenta en la tabla 4.2.

Tabla 4.2

Índice de confiabilidad y error de medida.

Índice de confiabilidad	**Error de medida**
0.808	0.192

El cálculo del Índice de Confiabilidad se realizó mediante el coeficiente del alfa de Cronbach. Este índice se basa en las varianzas de cada reactivo que conforma la prueba y puede variar desde 0 hasta 1. Mientras más se acerca a 1 se puede decir que el instrumento, en su conjunto, presenta una mejor consistencia interna. La fórmula mediante la cual se realizó la estimación es la siguiente:

$$\alpha = \frac{K}{K-1}\left[1 - \frac{\sum Vi}{Vt}\right]$$

Donde:
K = Número de ítems que conforman la prueba
V*i* = Varianza individual
Vt = Varianza total

El error de medida también se calcula con base en el alfa de Cronbach. Puede tener valores de 0 a 1; mientras más se acerca a 0 se dice que el error tiende a minimizarse, por lo que la prueba puede resultar adecuada para los fines que se diseñó (Abad et al., 2004).

Tal y como la TCT supone también se calculó el Índice de Dificultad (*p*) y el de Discriminación (*D*), para cada reactivo. A continuación, se describe la manera en que se obtuvo cada uno de ellos. El Índice de Dificultad mide qué tan complicado resultó un reactivo para el conjunto de sujetos que lo respondieron. Se obtiene mediante el cociente de los sujetos

[1] La tabla de operacionalización del examen se encuentra en el anexo A y el examen en anexo G en la sección correspondiente a los anexos.

que responden correctamente a un reactivo (A_j) y el total de individuos que lo han intentado resolver N_j. La fórmula para su cálculo es:

$$\text{\textit{Índice de Dificultad}}\ (P_j) = \frac{A_j}{N_j}$$

El Índice de Dificultad puede ser expresado en porcentaje. Un porcentaje que se acerca a 0 refleja que el reactivo es demasiado difícil; por su parte uno que se acerca a 100 es considerado como fácil. Existen diversas ideas acerca del porcentaje que se debe considerar para incluir un reactivo a una prueba, una convencionalidad indica que deben considerarse aquellos reactivos cuyo Índice de Dificultad se encuentre entre 20 y 80% (Abad et al., 2004). En el anexo B, tabla B2 se muestra el Índice de Dificultad para cada uno de los reactivos del examen.

El Índice de Discriminación se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$Di = \frac{GA_{aciertos} - GB_{aciertos}}{N_{grupomayor}}$$

Donde:

Di =	Índice de Discriminación del reactivo *i*
$GA_{aciertos}$ =	Número de aciertos en el reactivo *i* del 27% de personas con las puntuaciones más altas en el test
$GA_{aciertos}$ =	Número de aciertos en el reactivo *i* del 27% de personas con las puntuaciones más bajas en el test.
$N_{grupomayor}$ =	Número de personas en el grupo más numeroso (*GA* o *GB*).

Este índice puede tener valores entre -1 y +1. Si un reactivo presenta un índice cercano a cero significa que puede estar midiendo un fenómeno distinto al que se pretende con la prueba en su conjunto. Si por el contrario se acerca a +1 el reactivo presenta consistencia con los demás reactivos y puede ser incluido en la prueba. Cuando un reactivo presenta un índice cercano a -1 debe revisarse la manera en la que fue cuantificado (codificado para su captura, pues cabe la posibilidad de haberlo tomado como directo siendo inverso). En el Anexo C se presenta el Índice de Discriminación para cada uno de los reactivos que conformaron el examen.

Backhoff, Larrazolo y Rosas (2000) retoman los valores que aparecen en la tabla 4.3 para determinar la calidad de los reactivos teniendo en cuenta el Índice de Discriminación de cada uno.

Tabla 4.3

Valores del Índice de Discriminación.

Valor Índice Discriminación	Calidad	Observaciones
> 0.39	Excelente	Conservar
0.30 - 0.39	Buena	Posibilidades de mejorar
0.20 - 0.29	Regular	Necesidad de revisar
0.00 - 0.20	Pobre	Descartar o revisar a profundidad
< -0.01	Pésima	Descartar definitivamente

Con base en esta propuesta se seleccionaron los reactivos que conformaron en el examen de conocimientos sobre fracciones y decimales. En el anexo E se encuentra versión que se administró a los 275 estudiantes para profesor.

4.1.2 Cuestionario sobre conocimientos didácticos

Para indagar el conocimiento didáctico se definió previamente un perfil de este conocimiento. Este perfil se conformó con base en las consideraciones didácticas, de acuerdo al enfoque de la asignatura de matemáticas, la planificación y la organización de los ambientes de aprendizaje, que se ofrecen a los profesores en el programa de matemáticas de la escuela primaria (SEP, 2011c). En la tabla 4.4 se muestran los indicadores de este perfil.

Tabla 4.4

Perfil de conocimientos didácticos sobre fracciones y decimales.

- Identificar los problemas en el aprendizaje de los números decimales*.
- Conocer la propuesta para el tratamiento didáctico de los algoritmos convencionales (suma, resta, multiplicación y división) con números decimales y fracciones comunes*.
- Conocer las diferentes interpretaciones de las fracciones*.
  - Parte-todo
  - Medida
  - Como cociente
  - Como razón
  - Como operador
- Conocer algunas las dificultades que presentan los alumnos de educación primaria en el aprendizaje de las fracciones*.
- Identificar los significados de las fracciones que se presentan en las lecciones de los libros de texto de educación primaria.
- Conocer diferentes recursos tecnológicos para resolver problemas que involucran fracciones comunes.
- Diseñar secuencias para la enseñanza de fracciones y números decimales. Diseñar secuencias de enseñanza en donde se emplean recursos tecnológicos para operar con fracciones y decimales.

Nota. Construcción propia

Conviene señalar que con el cuestionario no se exploraron todos los indicadores del perfil solo aquellos que en la tabla 4.4 se señalan con un asterisco (*). Para el estudio de los demás conocimientos se recurrió a la observación y al análisis de la práctica de enseñanza en matemáticas que realizaron algunos estudiantes. La mayoría de las preguntas que conforman el cuestionario se retomaron del *Cuestionario sobre el conocimiento de números racionales* desarrollado por Depaepe et al. (2015). Se trata de un cuestionario diseñado para indagar el conocimiento matemático y didáctico de futuros profesores. Es necesario señalar que solo se retomaron aquellos que exploran el conocimiento didáctico del contenido, en específico con el *Conocimiento del contenido y los estudiantes* y el *Conocimiento del contenido y la enseñanza*, además se intentó que las preguntas se relacionaran con el perfil antes señalado. El anexo G se encuentra una copia del instrumento.

4.2 La observación del conocimiento matemático y didáctico

Con base en los resultados tanto del examen de conocimientos matemáticos como del cuestionario de conocimientos didácticos sobre fracciones y decimales que se enseñan en la escuela primaria se seleccionaron algunos estudiantes para profesores con la intención de observar su práctica de enseñanza. En total se eligieron cuatro estudiantes, dos por cada Escuela Normal. Los criterios para seleccionarlos fueron los siguientes:

- Alumnos de séptimo semestre, pues se consideró que estos alumnos contaban con más experiencia al frente de un grupo de alumnos de primaria, dado que habían realizado mayor cantidad de jornadas de práctica.
- Dos estudiantes (uno por cada normal) cuyos resultados fueron altos, es decir, alumnos que respondieron de manera correcta a la mayoría de los reactivos y preguntas de ambos instrumentos.
- Dos estudiantes (uno por cada normal) cuyos resultados se consideraron como bajos, esto es, aquellos quienes obtuvieron el menor número de respuestas correctas en los dos instrumentos.

La intención de elegir alumnos con resultados contrastantes obedece a la idea de que un profesor, para enseñar matemáticas, requiere ambos tipos de conocimiento: matemático y didáctico. Por lo que se partió del supuesto de que aquellos estudiantes con resultados altos realizarían una práctica distinta a quienes obtuvieron resultados bajos. En otras palabras, con un alumno cuyos resultados fueron altos en los dos instrumentos sería esperable que enfrentara menos dificultades al atender un grupo de primaria, mientras estudian temas de fracciones o decimales, y que pudiera orientar de mejor manera a sus alumnos al resolver problemas que incluyeran estos números, dado que posee el conocimiento matemático para resolverlo. Por otro lado, un estudiante de resultados bajos cometería errores matemáticos mientras enseña fracciones o decimales y le costaría más trabajo el diseño de estrategias de enseñanza acordes con las propuestas didácticas del programa de estudios.

Los estudiantes seleccionados y los resultados que obtuvieron en los instrumentos aplicados y el grado escolar en el que practicaban se describen en la tabla 4.5.

***Tabla 4.5**.*

Alumnos observados y los resultados que obtuvieron en los instrumentos administrados.

Alumno*	Escuela Normal	Aciertos Conocimientos Matemáticos**	Aciertos Conocimientos Didácticos***	Grado de práctica
Arely	Urbana	19	13	5º
Evelyn	Urbana	30	17	4º
Héctor	Rural	17	9	5°
Gabriel	Rural	29	14	4º

* Los nombres de los alumnos se cambiaron para guardar la confidencialidad
** El total de aciertos posibles fue 30
*** El total de aciertos posibles fue 17

Una vez seleccionados los estudiantes, se realizaron observaciones durante las clases de matemáticas que ellos realizaban en sus jornadas de práctica. El propósito fue analizar cómo ponían en práctica su conocimiento matemático y didáctico, durante la enseñanza de las fracciones y los decimales. Para ello se siguió el planteamiento de un estudio observacional desde la perspectiva que Vogt, Gardner y Haeffele (2012). Según estos autores un estudio observacional es un diseño de investigación con el que se intenta estudiar un fenómeno (eventos, situaciones, prácticas, entre otros) a medida que ocurren. Por excelencia se emplean técnicas de recolección de datos que implican al investigador situarse dentro del contexto que estudia. Las grabaciones en audio o video son herramientas muy adecuadas para la recolección de información en un estudio observacional pues mediante su análisis es posible lograr una "descripción detallada" de lo que ocurrió durante la observación.

Se efectuaron cinco observaciones del mismo número de sesiones para cada uno de los estudiantes seleccionados. Las fechas de observación se acordaron con cada uno de ellos. Para cual se solicitó el permiso de los profesores titulares de cada grupo, del director de la escuela primaria y de los profesores de las Escuelas Normales que coordinaban las prácticas profesionales de los alumnos. Con tres de los estudiantes fue posible videograbar las sesiones de clase, con una alumna solo se permitió la grabación en audio.

Una vez realizadas las observaciones se trascribió cada una de ellas, procurando hacerlo lo más detallado posible. Para el tratamiento y análisis de las transcripciones se empleó el software para análisis de datos cualitativos Atlas.ti en su versión 7.

4.3 Plan de análisis de los datos: descripción de las categorías e indicadores

Para cada una de las fases se diseñaron planes de análisis de la información que se obtuvo. En seguida se describen cada uno de ellos.

4.3.1 Plan para el análisis cuantitativo

El análisis de la información proveniente de la aplicación del examen de conocimientos sobre fracciones y decimales se realizó de la manera que se describe en la figura 4.1

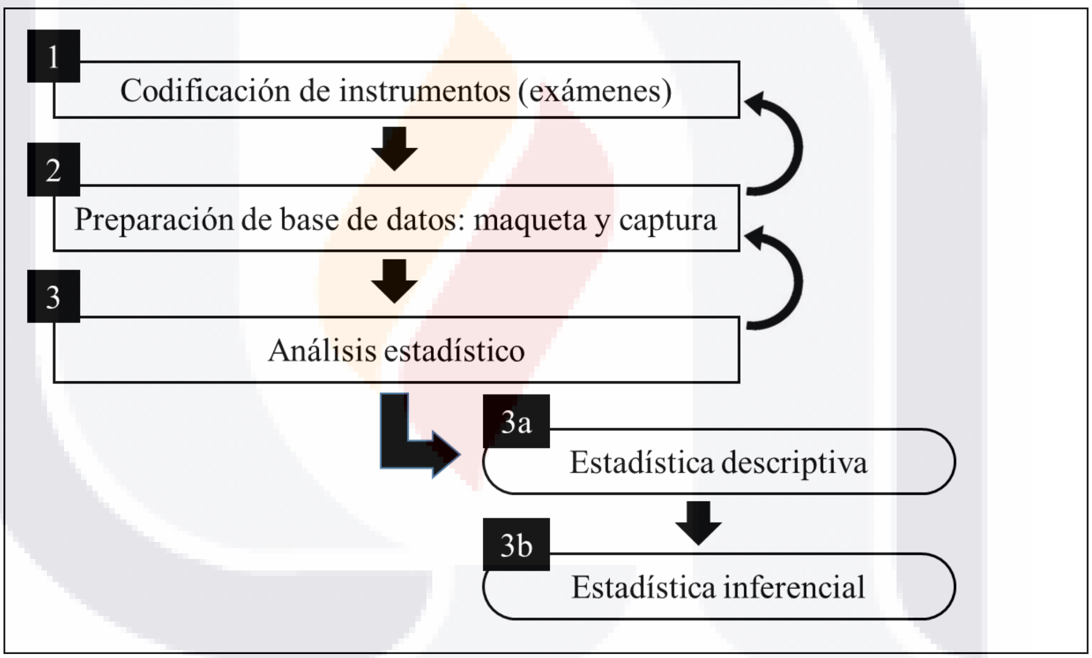


Figura 4.1. Plan de análisis de la información cuantitativa.

El tratamiento de la información proveniente del examen de conocimientos sobre fracciones y decimales se realizó de acuerdo con siguiente plan primero se codificaron las respuestas de cada estudiante (paso 1 en la figura 4.1), este proceso de describe con mayor detalle en el capítulo de análisis de datos. Después se elaboró una base de datos que concentró las respuestas de los estudiantes a cada pregunta (paso 2). En seguida se realizó el análisis de las respuestas (paso 3) considerando, en primer lugar, el cálculo de algunos descriptivos como promedio de aciertos para el total de estudiantes (275), el puntaje mínimo y máximo, así como la desviación estándar. Lo anterior con el propósito de tener un referente acerca la cantidad de reactivos que los estudiantes para profesor ─en su conjunto─ respondieron de manera correcta.

Luego, se calcularon estos mismos estadísticos para cada Escuela Normal (rural o urbana), semestre (5° o 7°) y grupo al que pertenecían los futuros profesores al momento de la aplicación (paso 3a). También se incluyó el porcentaje de respuesta correcta por opción de respuesta en cada reactivo. Con base en el cálculo de los descriptivos, en específico del promedio de aciertos, se realizaron pruebas para estimar si la diferencia encontrada en los promedios resultaba estadísticamente significativa (paso 3b).

4.3.2 Plan para el análisis cualitativo

Para el análisis de la información obtenida por medio de las observaciones se siguieron los pasos que se presentan en la figura 4.2. Las actividades de segmentación, codificación y creación de *memos analíticos*[2] que se presentan en el paso 2, fueron tareas que permitieron la identificación de citas, es decir, de fragmentos de texto o imágenes que se encuentran en las transcripciones, en los cuales se evidenciaron los subdominios del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*.

[2] En el contexto del análisis de datos cualitativos mediante el uso de un software como Atlas.ti se denomina memos analíticos a las reflexiones escritas, preguntas no contestadas, dudas o a las posibles conexiones sobre las interrelaciones entre las categorías que se estudian. En general cualquier apunto que el investigador considere importante sobre el proceso de análisis, de los datos o de los objetivos del estudio (CualSoft Consultores, 2016).

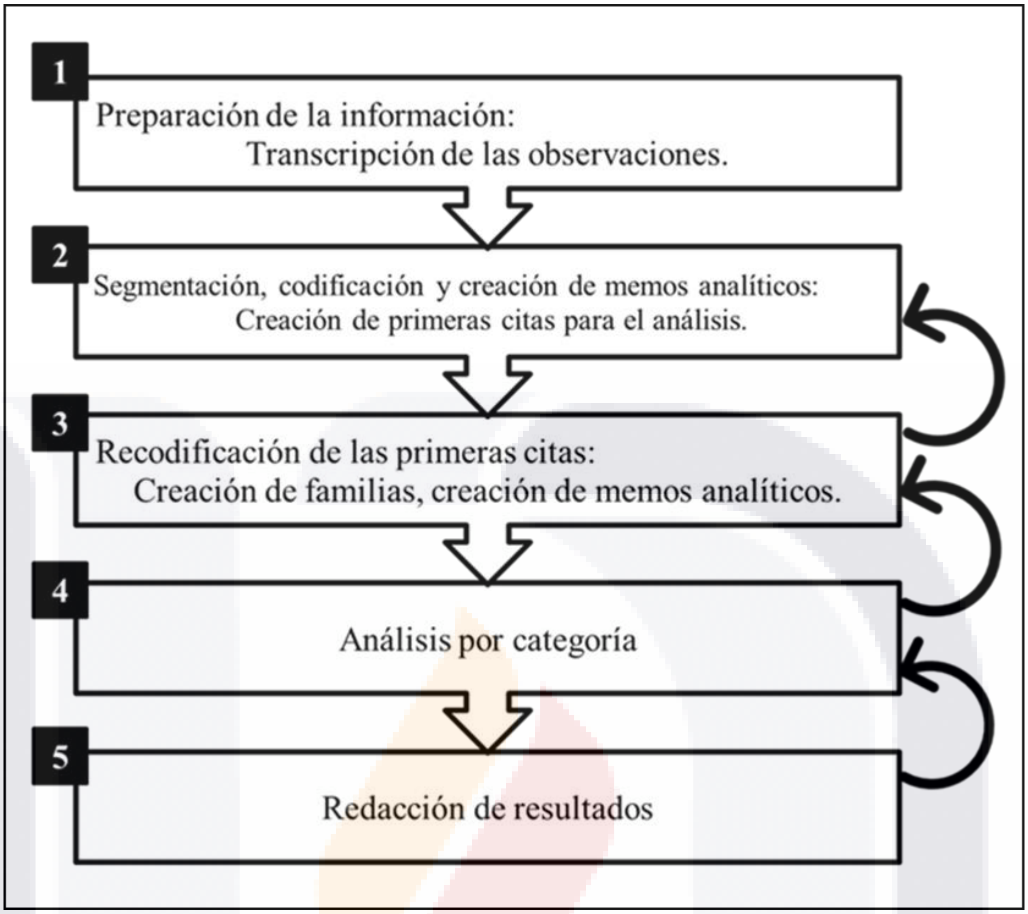


Figura 4.2. Plan de análisis de la información cualitativa.

El plan de análisis permitió trazar una ruta a seguir para el tratamiento de la información que se obtuvo. A continuación, se describe, de manera general, cada uno de los pasos que aparecen en la figura 4.1:

1. Preparación de la información. Se trascribieron las observaciones realizadas. Se intentó que las participaciones tanto de los futuros profesores, de los alumnos como de los profesores titulares de los grupos, fueran escritas de la manera exacta en que sucedieron.
2. Segmentación, codificación y creación de memos analíticos. Con apoyo del software Atlas.ti y teniendo presente las características que definen los subdominios del Modelos del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*, se codificaron segmentos de texto (en las transcripciones). Con ello se logró realizar

un análisis preliminar del conocimiento matemático y didáctico de los estudiantes.

3. Recodificación de las primeras citas. Se realizó un segundo análisis de los textos de las transcripciones, lo que permitió codificar los segmentos seleccionados con otros subdominios. Después se hizo otra revisión de los textos con lo que se recodificaron, de nueva cuenta, otros segmentos.
4. Análisis por categoría. Se ubicaron todas las citas o segmentos de texto por categorías. Cada categoría se correspondió con uno de los subdominios del MKT. Algunos de las citas se situaron en dos o más subdominios, por considerar que pudieran relacionarse con ellos.
5. Redacción de resultados. Con el trabajo descrito en los puntos anteriores se redactó la sección de análisis de datos. En dicha sección se presenta el análisis del conocimiento matemático y didáctico manifestados por cada uno de los estudiantes observados.

Para realizar los pasos 2, 3, 4 y 5 se emplearon las propiedades de los subdominios que conforman el MKT. Para ello, se recurrió a la propuesta de Sosa (2011) con el propósito de complementar la descripción de cada subdominio y su posterior análisis. El aporte de Sosa (2011), que como se dijo, es retomado para el análisis, consiste en una descripción pormenorizada de cada subdominio, pues argumenta que éstos son definidos de una manera muy general, y eso hace que sean difíciles de observar durante la práctica de enseñanza de los profesores. Para compensar esta generalidad propone un conjunto de indicadores con los que, desde su perspectiva, se alcanza una descripción detallada de los conocimientos matemáticos y didácticos. En el Anexo H se encuentra la propuesta de esta autora.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis de la información obtenida. El capítulo se compone de dos apartados. En el primero se analizan los datos recolectados por medio del examen de conocimientos sobre fracciones y decimales y del cuestionario de conocimientos didácticos. Al final de este apartado se realiza una comparación entre las respuestas de los estudiantes a ambos instrumentos.

En un segundo apartado se analizan los datos recogidos durante las observaciones de las clases impartidas por los futuros profesores. El análisis se realizó por separado para cada estudiante seleccionado[1]. Para la descripción del conocimiento matemático y didáctico que los futuros evidenciaron se emplearon los subdominios que conforman el *Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza*.

5.1 Análisis de la información fase cuantitativa

En esta sección se muestran los resultados del examen de conocimientos sobre fracciones y decimales, así como del cuestionario de conocimientos didácticos. El análisis de la información obtenida por medio de estos instrumentos contribuye a la descripción del conocimiento matemático y didáctico sobre las fracciones y los decimales que tiene los estudiantes para profesor de educación primaria de las dos Escuelas Normales que se consideraron en el estudio.

5.1.1 Resultados del examen de conocimientos matemáticos

La información que se presenta está organizada como sigue. En primer lugar, se muestran los resultados del total de la muestra, es decir, de los 275 estudiantes de las dos Escuelas Normales. Luego se realizan comparaciones entre los promedios de respuesta correcta entre cada una de las escuelas y los semestres que cursaban los estudiantes al

[1] Recuérdese que se seleccionaron dos estudiantes por Escuela Normal

momento de la aplicación del examen. En seguida se muestran los resultados a mayor detalle, esto es, los resultados de acuerdo con el propósito de cada reactivo, allí se destacan algunos reactivos que, de acuerdo con su porcentaje de respuesta, resultaron interesantes.

Para el análisis de las respuestas se codificaron de la siguiente manera: 0 (cero) para una respuesta incorrecta y 1 para una respuesta correcta. Dado que el total de reactivos fue de 30, el puntaje para quien respondió correctamente todos los ítems fue de 30 aciertos; para quien respondió de forma incorrecta todo el examen, su puntaje sería 0 (cero).

El puntaje promedio para toda la muestra fue 24.1 aciertos (s = 4.2[2]); la mayor cantidad de aciertos fue de 30 y la menor de 10. El promedio sugiere que, en general, los estudiantes respondieron correctamente casi todos los reactivos del instrumento. Sin embargo, diez de ellos obtuvieron 15 o menos respuestas correctas. Lo anterior llama la atención, pues el examen se construyó considerando contenidos matemáticos que se estudian en la escuela primaria. Más aún, cuatro de estos 10 estudiantes cursaban el 7° semestre de la Licenciatura y en breve serían profesores en servicio con un grupo de alumnos de primaria a su cargo.

Aun cuando la diferencia en los promedios (por escuela, por semestre y por grupo) fue en algunos casos de menos de un punto, se consideró pertinente analizar si resultaba estadísticamente significativa. Dado que los datos no presentaron una distribución normal[3], se empleó la prueba U de Mann-Whitney[4], mediante la cual se encontró que entre los resultados globales de ambas normales no existen diferencias estadísticamente significativas (esto es, sin hacer distinción entre semestres y grupos).

Con el fin de ofrecer un panorama del conocimiento matemático acerca de fracciones y decimales de los futuros profesores se presentan las diferencias entre los

[2] El valor s corresponde a la desviación estándar o desviación típica. Un estadístico como la desviación estándar ofrece información acerca de cómo los datos se distribuyen respecto de la media aritmética.
[3] Para probar la normalidad de los datos se empleó la prueba de Komogorov-Smirnov. Esta prueba es un estadístico denominado “de bondad y ajuste” que permite comparar la distribución de un conjunto de datos de acuerdo con una distribución teórica específica (normal).
[4] La prueba U de Mann- Whitney es una prueba no paramétrica que se basa en la comparación de las medianas, su empleo se sugiere cuando la distribución de los datos que se comparan no presenta una distribución normal.

promedios en el porcentaje de aciertos por escuela y semestre que cursaban. Se realiza esta comparación dado que se considera que resulta útil distinguir los conocimientos entre alumnos de diferentes semestres. Lo anterior con base en el supuesto de que los conocimientos de los alumnos de 7° serían distintos a los de 5°, no solo por los dos semestres de diferencia sino por la experiencia al frente de un grupo de alumnos de primaria que proporcionan las jornadas de práctica intensiva que realizan los estudiantes de 7°. Además de que este análisis contribuye a una descripción más detallada de los conocimientos matemáticos de los futuros profesores. En la figura 5.1 se hace una comparación entre el promedio de aciertos de cada semestre para ambas escuelas.

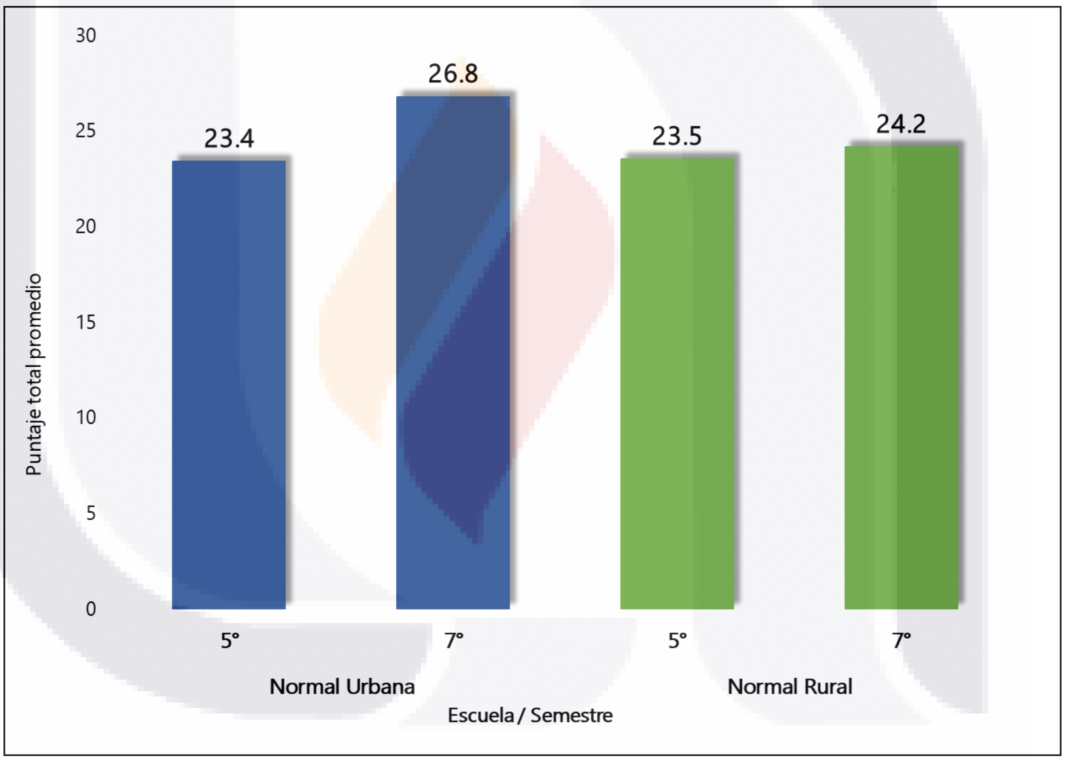


Figura 5.4 Puntajes promedio del examen de conocimientos sobre fracciones y decimales por semestre en cada Escuela Normal.

Considerando que todos los alumnos ya cursaron las asignaturas de la licenciatura que tienen que ver con la enseñanza de las matemáticas, sería esperable resultados similares en todos los semestres. Sin embargo, las diferencias nos plantean situaciones interesantes.

La diferencia más grande de los promedios entre semestres es cercana a los 3.5 puntos y medio (de 5° a 7° semestres de la Normal Urbana). Llama la atención el hecho de que la diferencia entre los semestres de la Normal Rural no sea ni de un dígito. Con el fin de observar si las diferencias eran estadísticamente significativas se realizaron pruebas de contraste de hipótesis. En la tabla 5.2 se muestra un resumen de los datos contrastados, la prueba empleada y el resultado de ésta. Resalta que en las comparaciones ─diferencias─ donde intervienen los resultados de los alumnos de 7° semestre de la Normal Urbana resultan estadísticamente significativas. Parece entonces que dichas diferencias no se deben al azar sino al hecho de cursar el 7° semestre en la Normal Urbana (y lo que esto pudiera implicar).

Estos resultados sugieren diversas explicaciones, por ejemplo, pueden deberse a los conocimientos que los estudiantes de 7° semestre de la Normal Urbana hubieran adquirido durante su paso por la educación básica y media superior (por tener mejores profesores o mejores condiciones de aprendizaje). Otra posible explicación es que las diferencias en realidad se deben a los conocimientos que desarrollaron durante los cursos de matemáticas que estudiaron como parte de su formación docente. En donde quizás lograron consolidar los conocimientos acerca de las fracciones y decimales que se consideraron en el examen (debido tal vez, también a mejores profesores y estrategias de enseñanza que tuvieron durante dichos cursos).

Tabla 5.1

Comparación de diferencias entre los puntajes del examen de conocimientos matemáticos por escuela y semestre.

Relación	Prueba estadística empleada[5]	Conclusión
5° - 7° Normal Urbana	U de Mann-Whitney	Diferencia estadísticamente significativa (3.4 puntos).
5° - 7° Normal Rural	U de Mann-Whitney	No existe diferencia estadísticamente significativa.
5° Urbana - 5° Rural	U de Mann-Whitney	No existe diferencia estadísticamente significativa.
7° Urbana - 7° Rural	U de Mann-Whitney	Diferencia estadísticamente significativa (2.6 puntos).

Se calculó el promedio de aciertos por grupo en cada uno de los semestres de ambas Escuelas Normales. La tabla 5.2 contiene el promedio de aciertos para cada grupo. Aparecen resaltados con doble asterisco (**) los promedios de aciertos más bajos y señalados con un asterisco (*) los más altos. Lo anterior para hacer notar algunas diferencias entre los grupos de un mismo semestre. Por ejemplo, en la Normal Rural la diferencia entre los grupos B y D de 7° es de 5 aciertos. Con la información de la tabla 5.2 se advierte, por ejemplo, que los resultados del grupo B de 7° semestre de la Normal Rural son similares a los obtenidos por el grupo de 7° de la Normal Urbana.

[5] Se empleó la prueba U de Mann-Whitney dado que la distribución de los datos no presentó normalidad. Las pruebas de normalidad se realizaron por medio de los estadísticos de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk.

Tabla 5.2

Puntaje promedio por grupo.

Escuela	Semestre	Grupo	Puntaje promedio	Desviación estándar	Puntaje mínimo	Puntaje máximo
Normal Urbana	5º	A	24.4	2.7	19	28
		B	22.2**	4.9	14	29
	7º	U	26.8	2.8	19	30
Normal Rural	5º	A	23.5	5.8	10	30
		B	22.4**	4.7	10	29
		C	22.4**	4.2	14	29
		D	25.6*	2.1*	21	28
	7º	A	24.2	3.4	15	29
		B	26.7*	3.6*	16	30
		C	23.6	3.9	14	29
		D	21.7**	4.1	14	29

De la información que se muestra en la tabla 5.2 también sobresale que, aunque en conjunto existe una diferencia estadísticamente significativa entre el promedio de aciertos de los alumnos del 7° semestre de la Normal Urbana y los de la Rural, al analizar el promedio de aciertos por grupo el de 7° B de la Normal Rural es muy similar al 7° U de la Normal Urbana. Tal vez la poca diferencia radica en los conocimientos adquiridos en la Escuela Normal en el curso de matemáticas donde se estudian las fracciones y los decimales.

Resalta también que todos los grupos de 5° semestre de la Normal Rural obtuvieron un promedio de aciertos por encima del 5° B de la Normal Urbana, e incluso el grupo de 5° D de la Normal Rural obtuvo el puntaje más alto de todos los grupos de 5° considerado ambas escuelas. Estas notorias diferencias entre grupos, independientemente del tipo de escuela e incluso el semestre, hacen suponer, como posible explicación, que las diferencias se deben al o los profesores que les impartieron los cursos de matemáticas, o al menos el de Aritmética: su aprendizaje y enseñanza.

Se realizó un proceso de análisis más detallado al examinar el porcentaje de respuesta correcta para cada reactivo. Con lo anterior se pretendió ir configurando y afinando una respuesta a la pregunta de investigación acerca de cuál es el conocimiento matemático de los futuros profesores sobre fracciones y decimales. El porcentaje de respuesta correcta para cada reactivo, así como la especificación de cada uno de ellos, es decir, el conocimiento que pretendía medir con cada uno se muestra en la tabla 5.3. Como se observa, los porcentajes de respuesta correcta más altos corresponden a los reactivos que involucraron números decimales, mientras que los más bajos fueron aquellos que implicaron el uso de fracciones.

Tabla 5.3

Porcentaje de respuesta correcta por reactivo en el examen sobre fracciones y decimales.

Reactivo	Especificación	% de respuesta correcta
6	Comparar números decimales.	98.9
21	Resolver problemas que implican transformar números decimales a fracciones comunes.	93.3
15	Resolver problemas que implican multiplicación de números decimales.	92.6
19	Resolver problemas que implican ubicar números decimales en la recta numérica.	92.2
3	Resolver problemas que implican la propiedad de densidad de los números decimales.	90.0
17	Resolver problemas que implican variación proporcional directa.	89.6
1	Resolver sumas con números decimales.	89.2
12	Resolver problemas que implican la noción de fracción como cociente de dos números.	88.5
4	Resolver problemas que implican división de números decimales.	87.7
5	Resolver problemas que implican transformar números decimales a fracciones decimales.	86.6
10	Resolver problemas que implican el cálculo de porcentajes.	86.2
14	Resolver problemas que implican división de fracciones entre números enteros.	86.2
11	Resolver problemas que implican el cálculo de razón entre dos cantidades.	85.9
16	Resolver problemas que implican el cálculo de razón entre dos cantidades.	85.9
24	Resolver problemas que implican ordenar números fraccionarios.	85.5
2	Resolver problemas que implican resta de números decimales.	84.0
28	Resolver problemas que implican el concepto de razones.	83.3
20	Resolver problemas que implican dividir fracciones (mixta entre propia).	82.9
13	Resolver problemas que implican restar dos fracciones (una propia y otra impropia).	82.5
27	Resolver problemas que implican el cálculo de porcentajes.	82.2
29	Resolver problemas que implican sumar dos fracciones mixtas.	80.3
18	Resolver problemas que implican dividir un número entero entre una fracción mixta.	74.7
7	Resolver problemas que implican el uso de fracciones equivalentes.	72.9
8	Resolver problemas que implican ubicar fracciones en la recta numérica.	72.9
26	Resolver problemas que implican sumar tres fracciones propias.	71.4
9	Resolver problemas que implican la propiedad de densidad de los números fraccionarios.	68.8
30	Resolver problemas que implicar multiplicar y restar fracciones (una propia y otra impropia).	61.0
23	Resolver problemas que implican dividir dos fracciones (impropia entre propia).	58.4
22	Resolver problemas que implican sumar y restar fracciones propias.	55.8
25	Resolver problemas que implican multiplicar y dividir fracciones propias.	44.6

Para analizar con mayor detalle las respuestas de los estudiantes se organizaron los reactivos en grupos de acuerdo con el conocimiento que implicaron para su solución. Se formaron cinco conjuntos:

1. Reactivos que implicaron la realización de operaciones básicas (suma, resta multiplicación y división) con números decimales.

2. Reactivos que implicaron el manejo de algunas propiedades (densidad) de los números decimales.
3. Reactivos que implicaron el uso operaciones básicas (suma, resta multiplicación y división) con fracciones[6].
4. Reactivos que implicaron el manejo de algunas propiedades (equivalencia, densidad, entre otros) de las fracciones.
5. Reactivos que implican operaciones básicas con números decimales y fracciones.

En la tabla 5.4 se presentan los porcentajes de respuesta correcta para los reactivos que involucraron el uso de operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) con números decimales. Se incluyeron tres reactivos (2, 4 y 15), dos se presentaron en forma de problemas y uno implicó la resolución de un algoritmo de suma (1).

Tabla 5.4

Reactivos que implican operaciones básicas con números decimales.

Reactivo	Especificación	% de respuesta correcta
1	Resolver sumas con números decimales.	89.2
2	Resolver problemas que implican resta de números decimales.	84.0
4	Resolver problemas que implican división de números decimales.	87.7
15	Resolver problemas que implican multiplicación de números decimales.	92.6

Al analizar las respuestas proporcionadas por los estudiantes se observó que quienes contestaron de manera incorrecta alguno de los reactivos, por lo general, cometieron el mismo error. Por ejemplo, en la figura 5.2 se muestra la manera en que uno de los estudiantes resolvió el problema que se presentó en el reactivo 1.

[6] Este conjunto de reactivos se dividió a su vez en dos grupos: aquellos reactivos en los que implicaba solo el uso de una operación y aquellos que involucraron dos o más operaciones.

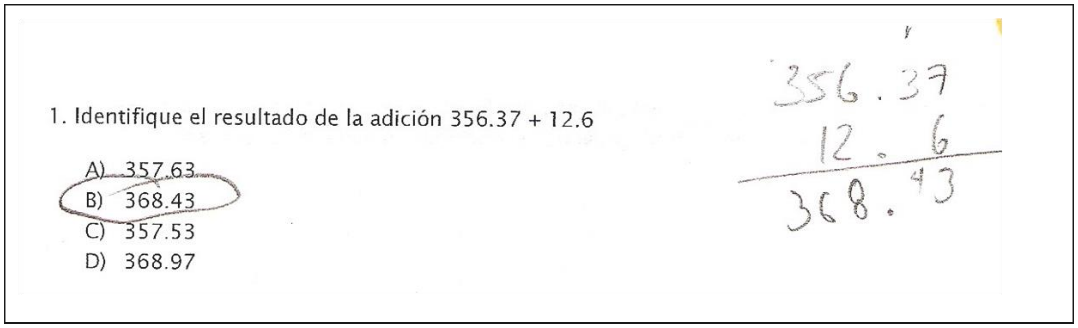


Figura 5.2 Procedimiento de solución de un estudiante al reactivo1.

Como se aprecia, el acomodo de los sumandos que hace el estudiante es incorrecto. El estudiante escribe la suma de manera vertical, coloca como primer sumando el número 356.37; debajo escribe la otra cantidad ─12.6─ pero coloca las décimas (.6) debajo de las centésimas, lo que hace que obtenga una respuesta incorrecta. Otro dato que resulta interesante es que el porcentaje de alumnos que respondieron de manera errónea este reactivo (10.8%) representa 29 estudiantes, la mayoría de ellos (20) de la Normal Rural.

En la tabla 5.5 se presenta el porcentaje de aciertos para el grupo de reactivos que implicaron el manejo de alguna propiedad de los números decimales. El reactivo con menor porcentaje de respuesta correcta fue el número 5. En dicho reactivo se solicitó a los estudiantes transformar el número *8.05* a una fracción decimal (figura 5.3).

Tabla. 5. 5

Reactivos que implican el manejo de propiedades de los números decimales.

Reactivo	Especificación	% de respuesta correcta
3	Resolver problemas que implican la propiedad de densidad de los números decimales.	90.0
5	Resolver problemas que implican transformar números decimales a fracciones decimales.	86.6
6	Comparar números decimales.	98.9
19	Resolver problemas que implican ubicar números decimales en la recta numérica.	92.2
21	Resolver problemas que implican transformar números decimales a fracciones comunes.	93.3

Aunque casi todos los estudiantes respondieron el reactivo 5 de manera correcta, un 13.6% (36 estudiantes), lo hizo de manera incorrecta. Estos alumnos, en su mayoría, seleccionaron la opción D como correcta. En la figura 5.3 se presenta la manera en que un estudiante respondió a este reactivo.

5. En la clase de matemáticas el docente le solicita a Sofía que escriba en el pizarrón la fracción decimal equivalente al número 8.05 ¿Cuál de las opciones muestra la fracción solicitada por el docente?

A) $\frac{1000}{805}$

B) $\frac{805}{100}$

C) $\frac{100}{805}$

D) $\frac{805}{1000}$

Figura 5.3 Respuesta de un estudiante al reactivo 5.

La solución dada, hace suponer que al trasformar el número a fracción el estudiante consideró el número de cifras (3) que componía al número decimal presentado para, con base en ello, seleccionar el denominador. Además, se observa la confusión del estudiante respecto a la posición del numerador y del denominador, tal y como se muestra en la figura 5.3. Un dato para señalar es que (como se observa en la tabla 5.3) los porcentajes de respuesta correcta más bajos se registraron en aquellos reactivos que requirieron el empleo de fracciones.

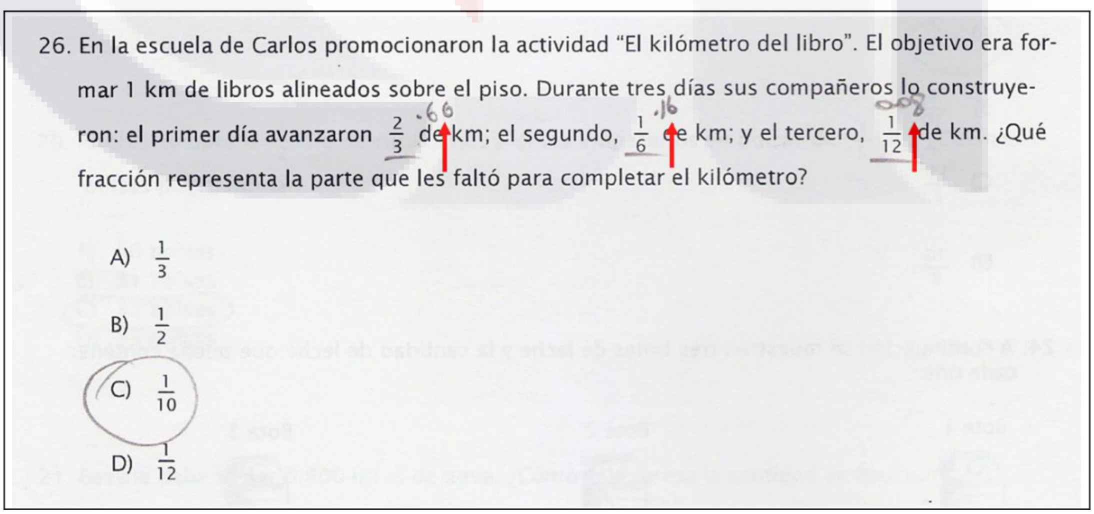
En la tabla 5.6 aparecen los porcentajes de respuesta correcta que el total de la muestra obtuvo en los reactivos que involucraron la resolución de alguna de las operaciones básicas con fracciones.

Tabla 5.6

Reactivos que implican operaciones básicas con fracciones.

Reactivo	Especificación	% de respuesta correcta
13	Resolver problemas que implican restar dos fracciones (una propia y otra impropia).	82.5
20	Resolver problemas que implican dividir fracciones (mixta entre propia)	82.9
23	Resolver problemas que implican dividir dos fracciones (impropia entre propia).	82.9
26	Resolver problemas que implican sumar fracciones propias (tres sumandos).	71.4
29	Resolver problemas que implican sumar dos fracciones mixtas.	80.3

En el reactivo 26 se esperaba que los futuros profesores resolvieran un problema empleando una suma de tres fracciones propias. Cerca de una tercera parte de los futuros profesores (28%, que representan 77 alumnos) no fue capaz de hacerlo. Resulta interesante que la mayoría de estos estudiantes eran alumnos de la Normal Rural (32 de 5° semestre y 31 de 7°). Al analizar las respuestas de los estudiantes que respondieron incorrectamente se encontró que una cantidad importante de estudiantes 12.3% (es decir 33 estudiantes) siguió un procedimiento de resolución similar, este se presenta en la figura 5.4.


26. En la escuela de Carlos promocionaron la actividad “El kilómetro del libro”. El objetivo era formar 1 km de libros alineados sobre el piso. Durante tres días sus compañeros lo construyeron: el primer día avanzaron $\frac{2}{3}$ (.66) de km; el segundo, $\frac{1}{6}$ (.16) de km; y el tercero, $\frac{1}{12}$ (.08) de km. ¿Qué fracción representa la parte que les faltó para completar el kilómetro?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{10}$

D) $\frac{1}{12}$

Figura 5.4 Procedimiento de solución de un estudiante al reactivo 26.

Para resolver el problema del reactivo 26, el estudiante del ejemplo que se muestra en la figura 5.4 transforma las fracciones que se presentan en números decimales. Divide el numerador entre el denominador (como se señalan las flechas) de cada fracción. Con las cantidades que obtiene (0.66 + 0.16 + 0.08) realiza una suma, cuyo resultado es 0.90 con base en tal cantidad calcula que, para alcanzar un entero falta 0.10, el se obtiene del cociente 1 ÷ 10 = 0.1 cuyo equivalente es $\frac{1}{10}$, por lo que selecciona la opción C.

Quizá el hecho que transformar las fracciones a decimales sea porque le resulta de mayor facilidad el manejo de estos números, pues los algoritmos que se realizan con ellos son similares a los que se emplean en los números naturales. Sin embargo, con este procedimiento no es posible encontrar la respuesta correcta (opción D) pues el cociente de la división en la fracción $\frac{2}{3}$ corresponde a una expresión decimal periódica ($0.6666666\overline{6}$) y el estudiante solo considera dos cifras decimales (0.66). Lo anterior llama la atención pues se trata de un problema que puede ser resuelto obteniendo fracciones equivalentes. Esto es, calcular para $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{12}$ fracciones equivalentes que tengan denominador común.

En el examen se incluyeron problemas en los que era necesario usar dos algoritmos (suma, resta, multiplicación o división) que involucraron fracciones para resolverlos. El porcentaje de respuesta correcta para estos reactivos aparece en la tabla 5.7. Fue en este conjunto de preguntas donde se registró el porcentaje de respuesta correcta más bajo. De los datos que se muestran resalta el reactivo 25, donde se planteó encontrar el área de un triángulo rectángulo lo que implicaba, en primer lugar, realizar una multiplicación y luego una división.

Tabla 5.7

Reactivos que implican el uso de dos operaciones básicas con fracciones.

Reactivo	Especificación	% de respuesta correcta
22	Resolver problemas que implican sumar y restar fracciones propias.	55.8
25	Resolver problemas que implican multiplicar y dividir fracciones propias.	44.6
30	Resolver problemas que implican multiplicar y restar fracciones (una propia y otra impropia).	61.0

En el reactivo 25 se esperaba que los estudiantes realizaran la multiplicación entre las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{5}$; después una división del producto obtenido ($\frac{4}{10}$) entre 2 para, con ello, obtener la respuesta correcta (opción C). Sin embargo, cerca del 40% de los futuros profesores eligieron la opción B; esta respuesta se obtiene al omitir la división (ver figura 5.5). La proporción mayor de los futuros profesores que respondieron de manera incorrecta a este problema fueron alumnos, tanto de 5° como 7° semestres de la Normal Rural (86) aunque una buena parte (63) estudiaban en la Normal Urbana. El error que los estudiantes cometen puede no deberse a su conocimiento acerca de cómo resolver algoritmos con fracciones, sino más bien a la omisión de uno de los pasos (la división entre dos) al emplear de manera inadecuada la fórmula (área=$\frac{(\text{base})(\text{altura})}{2}$) para calcular el área de un triángulo.

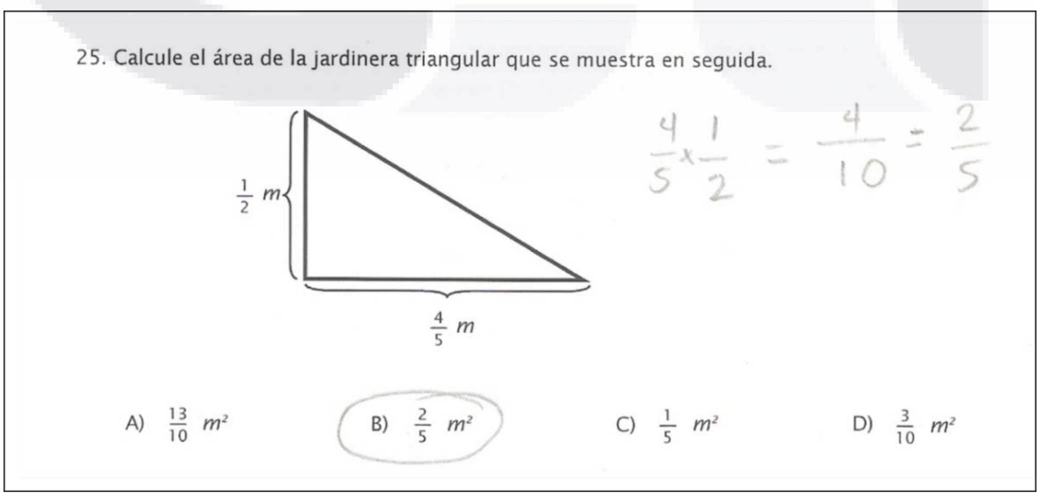


Figura 5.5 Procedimiento de solución de un estudiante al reactivo 25.

El reactivo 22 es otro de los que llama la atención por el bajo porcentaje de respuesta correcta que registró. En él se pretendía que los futuros profesores realizaran una suma de fracciones que incluía tres sumandos, para luego restar el resultado a un total no explícito (ver figura 5.6).

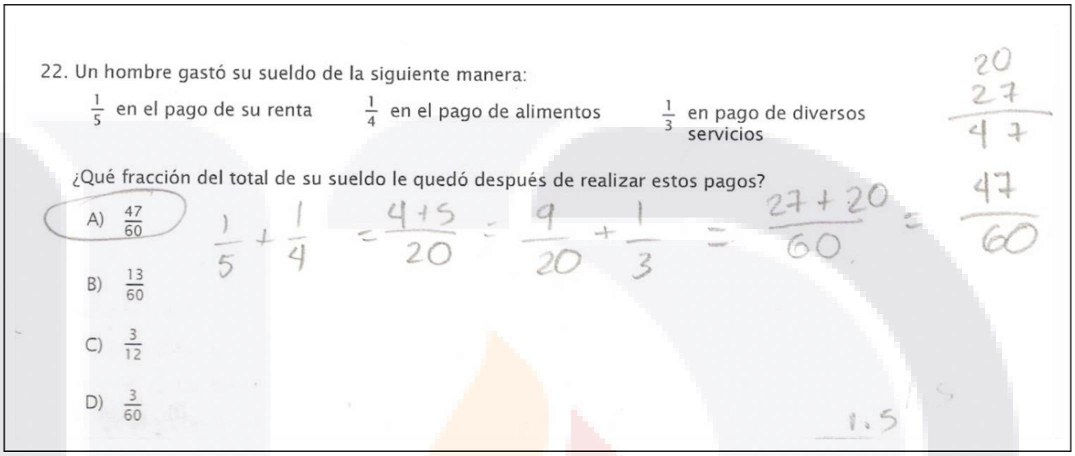


Figura 5.6 Procedimiento de solución de un estudiante al reactivo 22.

El proceso de solución que se observa en la figura 5.6 muestra la manera en que cerca de una cuarta parte de los estudiantes (23%) resolvió el problema que se planteó. El estudiante, suma, en primer lugar, dos de las fracciones que conforman el planteamiento del problema $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$; al resultado ($\frac{9}{20}$) suma la otra fracción ($\frac{1}{3}$). Con ello demuestra que tiene el conocimiento para resolver sumas de fracciones propias. Sin embargo, el resultado que obtiene ($\frac{47}{60}$) no responde correctamente el problema, pues es necesario restar esta cantidad a la unidad, es decir, el sueldo del sujeto que se menciona en el problema. En el proceso de solución de la figura 5.6 parece que el estudiante olvidó este último paso y no que no cuente con el conocimiento que le permitan resolver una resta de fracciones propias.

En el examen también se exploraron conocimientos acerca del manejo de algunas propiedades de las fracciones tales como la equivalencia o la densidad. En la tabla 5.8 se ofrece el porcentaje de aciertos para estos reactivos. En el conjunto de reactivos se incluyeron otras preguntas relacionadas con ubicar fracciones en la recta numérica o el orden de estos números.

Tabla 5.8

Reactivos que implican el manejo de propiedades de las fracciones.

Reactivo	Especificación	% de respuesta correcta
7	Resolver problemas que implican el uso de fracciones equivalentes.	72.9
8	Resolver problemas que implican ubicar fracciones en la recta numérica.	72.9
9	Resolver problemas que implican la propiedad de densidad de los números fraccionarios.	68.8
24	Resuelve problemas que implican ordenar números fraccionarios.	85.5

Con el reactivo 9, que registró el porcentaje más bajo en este grupo, se intentó explorar el conocimiento de los futuros profesores para encontrar una fracción contenida entre otras dos distintas, es decir, se exploró su conocimiento sobre la propiedad de densidad de las fracciones. La propiedad de densidad de una fracción significa que entre cualesquiera dos fracciones distintas puede siempre encontrarse otra fracción (Peterson y Hashisaki, 1980). En la figura 5.7 se muestra el reactivo 9. Al analizar las respuestas de los estudiantes, resalta que 45 estudiantes eligieron la opción A como correcta, aunque no lo fuera. Esta opción ($\frac{2}{3}$) parecer ser la que responda al problema que se planteó pues tanto el numerador como el denominador, si se toman como números naturales, se encuentran entre el numerador y denominador de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$. De nueva cuenta la mayor cantidad de estudiantes (50) que respondieron de forma incorrecta el reactivo se presentó en la Normal Rural.

También se encontraron respuestas como la que presenta en la figura 5.7. Para encontrar la respuesta correcta el alumno del ejemplo emplea la representación gráfica ─mediante segmentos de rectas─ de las fracciones que aparecen en el planteamiento del problema ($\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$). Marca en cada segmento la representación de las fracciones. Luego, dibuja segmentos de recta para representar las opciones de respuesta A y C (descarta la opción B pues la fracción es mayor a la unidad y por lo tanto es descartada como correcta). Al comparar los segmentos de recta de las opciones de respuesta con las fracciones del planteamiento, es claro que ninguna de ellas se encuentra entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$; por lo que, la opción correcta es la letra D.

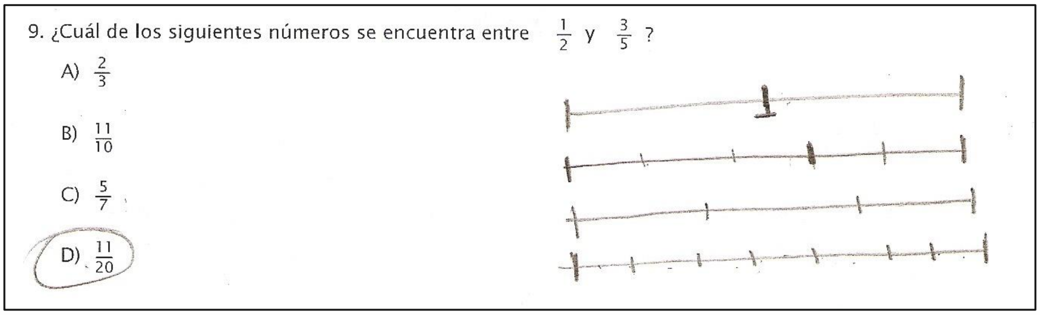


Figura 5.7 Respuesta de un alumno al reactivo 9 del examen de conocimientos sobre fracciones y decimales.

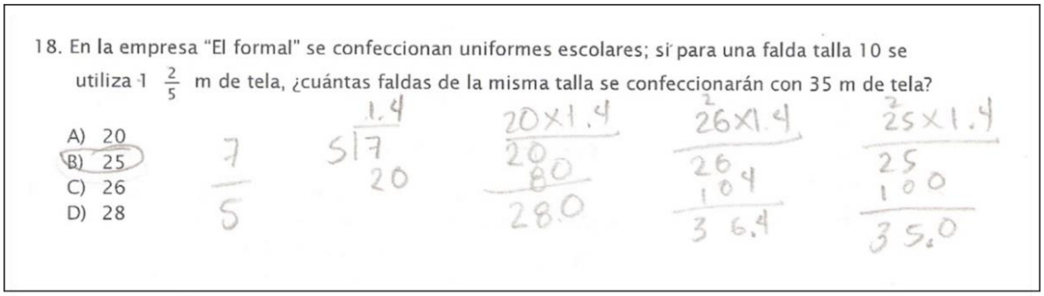
En la tabla 5.9 se presentan los porcentajes de respuesta correcta para dos preguntas que involucraron la realización de operaciones básicas con números decimales y fracciones. El porcentaje más bajo se registró en el reactivo 18, en el que se esperaba que los estudiantes emplearan una división (entero entre fracción mixta) para resolverlo.

Tabla 5.9

Reactivos que implican operaciones básicas con números decimales y fracciones.

Reactivo	Especificación	% de respuesta correcta
14	Resolver problemas que implican división de fracciones entre números enteros.	86.2
18	Resolver problemas que implican dividir un número entero entre una fracción mixta	74.7

Al analizar las respuestas ofrecidas por los alumnos se observó que hubo quienes recurrieron a transformar la fracción a números decimales para hacer más fácil el manejo (véase figura 5.8) y a un procedimiento de tanteos que, en este ejemplo, sólo los acercó a una de las opciones de respuesta. Con ello se confirma que les resulta más sencillo el manejo de este tipo de números, pues como se mencionó con anterioridad, se observó que emplearon esta estrategia para resolver otros reactivos. Fueron 51 estudiantes de la Normal Rural quienes registraron el menor porcentaje de aciertos, en comparación de los 17 alumnos de la Normal Urbana que respondieron incorrectamente este reactivo.


18. En la empresa "El formal" se confeccionan uniformes escolares; si para una falda talla 10 se utiliza $1\frac{2}{5}$ m de tela, ¿cuántas faldas de la misma talla se confeccionarán con 35 m de tela?

A) 20
B) 25
C) 26
D) 28

Figura 5.8 Proceso de solución de un estudiante al reactivo 18.

Los resultados del examen proporcionan un panorama del conocimiento matemático que tienen los futuros profesores en torno a las fracciones y los decimales de los futuros profesores. Por ejemplo, el porcentaje de respuesta correcta es más bajo en los reactivos que involucraron el uso de fracciones que aquellos que implicaron números decimales.

En el análisis de las formas de solución que los estudiantes emplearon, un elemento recurrente es que, para resolver los problemas que involucraron fracciones, optan por transformarlas a números decimales, de tal manera que les resulte más fácil operar con ellas. A este respecto Ávila y García (2008) señalan que una ventaja de los números decimales sobre las fracciones comunes es que resulta más fácil operar con ellos, pues los algoritmos son los mismos que se emplean en los números naturales, solo que existe la dificultad al elegir (el lugar) en dónde se debe colocar el punto decimal en el resultado. Sin embargo, como se mostró en los ejemplos anteriores, esto no necesariamente conduce al resultado correcto como el ejemplo que se presenta en la figura 5.4.

Conviene señalar que se detectaron errores de procedimientos que son elementales en el manejo de fracciones o decimales. Por ejemplo, hubo alumnos que, al resolver un problema que implicó suma de decimales, colocaron de forma incorrecta las cantidades (véase figura 5.2). También se encontraron procedimientos de solución en los que se omitió "un paso" para obtener la respuesta correcta (véase figura 5.6). Más todavía, algunos alumnos resolvieron los problemas descartando opciones de respuesta (véase figuras 5.7 y 5.8). Lo anterior resulta preocupante, pues se trató de estudiantes que en un corto plazo serían profesores de educación primaria en servicio.

5.1.2 Resultados del cuestionario de conocimientos didácticos

El cuestionario de conocimientos didácticos se conformó de 17 reactivos. En algunos se solicitó a los estudiantes que ofrecieran una breve explicación de su respuesta. Dado el carácter abierto de las explicaciones que se obtuvieron, las respuestas se codificaron de la siguiente manera: 0 para una respuesta considerada como incorrecta, 0.5 para una respuesta considerada como incompleta o parcial y 1 respuesta correcta. Esta codificación se basa en la propuesta de Depaepe et al. (2015), autores del instrumento que sirvió como fundamento para el diseño del examen. De tal manera que un estudiante que obtuviera todas las respuestas incorrectas su puntaje sería de 0 (cero), mientras que un alumno que respondiera correctamente todos los reactivos obtendría un puntaje de 17. Los conocimientos didácticos que se exploraron con el cuestionario se centraron en:

a) los conocimientos de los futuros profesores para identificar dificultades que enfrentan los alumnos de primaria al emplear fracciones o números decimales, y; un elemento del subdominio *Conocimiento del contenido y los estudiantes*
b) el conocimiento de estrategias de enseñanza para el estudio de las fracciones y decimales, parte importante del subdominio *Conocimiento del contenido y la enseñanza*.

Las respuestas de los estudiantes sugieren que, en general, son capaces de reconocer algunas dificultades de los alumnos de primaria al utilizar fracciones o decimales. También que pueden identificar los procesos de resolución que siguen los alumnos de primaria al resolver problemas de reparto. Las dificultades que reconocen con mayor facilidad se relacionan con el orden de números decimales, la resolución de sumas y restas de fracciones y decimales. En la tabla 5.10 se presentan los porcentajes de respuesta correcta en cada una de las preguntas. Resalta que las preguntas con menor porcentaje de respuesta correcta son aquellas en las que se examinó el conocimiento sobre algunas estrategias de enseñanza. Aunque como se aprecia, también figuran preguntas acerca de la identificación de procesos de solución que siguen los alumnos de primaria al resolver problemas con fracciones.

Tabla 5.10

Porcentaje de respuesta correcta por pregunta (Cuestionario de conocimientos didácticos).

Pregunta	Especificación	% de respuesta correcta
3	Reconocer dificultades de los alumnos en el reconocimiento de esquemas.	95.2
8	Identificar dificultades de los alumnos en el ordenamiento de números decimales.	93.7
11	Reconocer procesos de resolución de problemas de reparto que siguen los alumnos.	86.6
4	Reconocer dificultades que presentan los alumnos al resolver suma de fracciones propias.	81.8
9	Reconocer dificultades que presentan los alumnos al resolver restas de fracciones propias.	80.3
15	Identificar dificultades en los alumnos al resolver multiplicaciones con números decimales.	79.6
6	Reconocer dificultades de los alumnos al resolver sumas de números decimales.	77.7
1	Conocer diversas estrategias para la gestión de la equivalencia de fracciones.	77.0
2	Reconocer dificultades de los alumnos para el ordenamiento de fracciones propias.	76.6
16	Identificar dificultades en los alumnos al resolver restas de números decimales.	73.2
13	Reconocer dificultades en los alumnos para continuar una sucesión de números decimales.	72.9
14	Reconocer dificultades en los alumnos al resolver problemas que implican división de fracciones.	66.9
10	Reconocer dificultades de los alumnos al resolver divisiones con números decimales.	44.6
17	Identificar procesos solución que siguen los alumnos al resolver problemas que involucran resta de fracciones.	41.3
5	Conocer diversas estrategias de enseñanza en las que se emplee representaciones gráficas (figuras geométricas planas: círculos, cuadrados, rectángulos, entre otras) en la suma de fracciones.	33.1
7	Conocer estrategias de enseñanza sobre la propiedad de densidad de los números decimales.	30.1
12	Conocer estrategias de enseñanza de división de fracciones empleando la recta numérica.	18.6

A continuación, se muestran las respuestas de los futuros profesores a algunas preguntas que registraron tanto el porcentaje de respuesta correcta más bajo como el más alto. La intención de analizarlas es contribuir a la descripción detallada del conocimiento didáctico de los estudiantes encuestados.

Como se aprecia en la tabla 5.10 la pregunta 12 registró el porcentaje de respuesta correcta más bajo. Con esta pregunta se indagó el conocimiento de los futuros profesores sobre algunas estrategias para la enseñanza de la división de fracciones empleando la recta numérica. La gran mayoría (63%, lo que representan a 169 estudiantes) obtuvieron un resultado incorrecto, algunos, 18% (es decir, 49 alumnos) presentaron únicamente la resolución correcta de la división, pero no presentaron ninguna explicación o instrucción que darían a un alumno de primaria, y solo el resto (18%) ofrecieron respuestas que pueden ser consideras como correctas.

En la figura 5.9 se observan dos ejemplos de solución a la pregunta 12. Con ellos se pretende dar muestra de algunas de las respuestas que los futuros profesores ofrecieron.

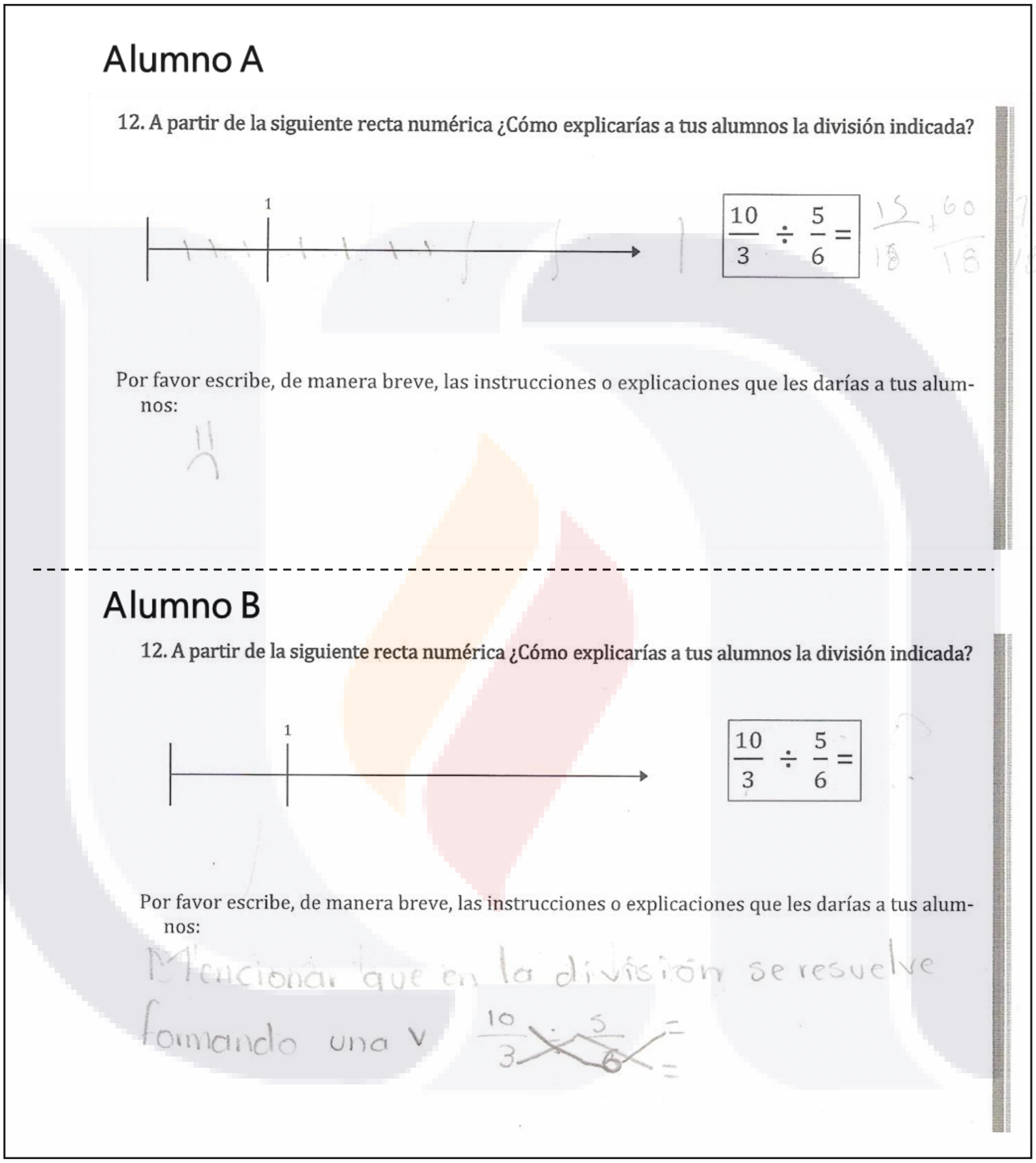


Figura 5.9. Ejemplos de procesos de solución de dos estudiantes a la pregunta 12. Cuestionario de conocimientos didácticos.

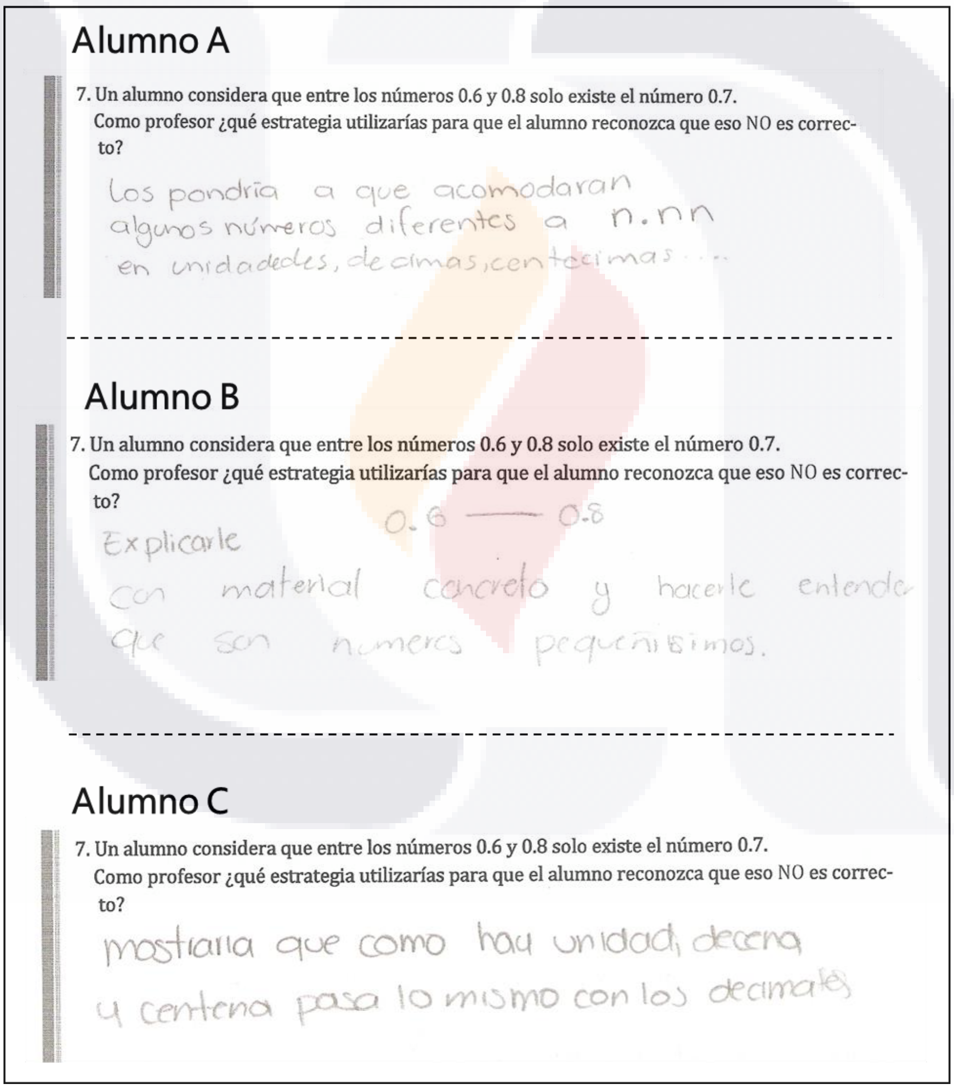
Se observa que el Alumno A no puede resolver la división que se presenta y ni tampoco proporcionar una instrucción o explicación. En su lugar realiza una suma de las fracciones. En primer lugar, multiplica los denominadores (3 x 6), luego multiplica el numerador de una fracción por el denominador de la otra; para con ello obtener como resultado dos fracciones que sumadas dan $\frac{75}{18}$. Se infiere que este estudiante no tiene un conocimiento básico sobre la división de fracciones, lo que genera dificultades al grado de no poder dar un argumento de cómo representar esa división o el cociente de ésta en la recta numérica. Además, esto se agrava cuando el estudiante muestra una falta de conocimiento didáctico de cómo explicar al alumno entre estas dos representaciones

Por su parte el Alumno B ofrece como explicación una manera de resolver una división de fracciones (multiplicando el numerador de una fracción por denominador de la otra). Aunque con el procedimiento que proporciona se obtiene una respuesta correcta a la división de las fracciones no ofrece la respuesta a la pregunta del cuestionario, pues expresa cómo emplearía la recta numérica para enseñar la división de fracciones.

Al analizar qué alumnos respondieron de manera incorrecta a la pregunta 12 se encontró que 109 estudiaban en la Normal Rural (63 en 5° semestre y 46 en 7°). Si se considera el total de los estudiantes encuestados los datos ofrecen una visión más detallada. De los estudiantes encuestados, 84 cursaban el 5° semestre, de ellos 63 respondieron de forma incorrecta la pregunta 12 (estos alumnos representan el 75% de los alumnos de 5° semestre). En otras palabras: 3 de cada 4 alumnos de 5° semestre de la normal rural respondió incorrectamente el reactivo. Esto mismo sucedió con los estudiantes de 5° semestre de la Normal Urbana, pues de los 62 alumnos encuestados 44 responden de forma equivocada la pregunta 12, es decir, el 70% de los alumnos.

Por su parte cerca de la mitad de los alumnos de 7° de las dos Escuelas Normales (el 48% de la Normal Rural y el 47% en la Urbana) respondieron de manera incorrecta a la pregunta 12. Lo anterior sugiere que los alumnos de 7° han adquirido más conocimientos relativos a la enseñanza que les permiten "idear" formas para el estudio de contenidos como el que implica la pregunta 12, si los comparamos con los que cursaban el 5° semestre. Quizás se debe a la experiencia que los estudiantes de 7° habían adquirido durante las jornadas de práctica intensiva o tal vez a los dos semestres más que cursaron durante su formación, aunque, de cualquier forma, sigue siendo considerable el porcentaje que obtuvo una respuesta errónea (casi la mitad).

Otra pregunta que registró un porcentaje de respuesta correcta bajo fue la identificada con el número 7; con ella se intentó indagar el conocimiento de los futuros profesores sobre estrategias de enseñanza acerca de la propiedad de densidad de los números decimales. Las respuestas de los futuros profesores fueron, en su mayoría, parcialmente correctas pues se observó que ellos poseen un conocimiento común sobre la densidad de los decimales, pero no fueron capaces de compartir alguna estrategia de enseñanza al respecto. En la figura 5.10 se muestran las respuestas proporcionadas por tres estudiantes.


Alumno A

7. Un alumno considera que entre los números 0.6 y 0.8 solo existe el número 0.7. Como profesor ¿qué estrategia utilizarías para que el alumno reconozca que eso NO es correcto?

Los pondría a que acomodaran algunos números diferentes a n.nn en unidadedes, decimas, centecimas....

Alumno B

7. Un alumno considera que entre los números 0.6 y 0.8 solo existe el número 0.7. Como profesor ¿qué estrategia utilizarías para que el alumno reconozca que eso NO es correcto?

0.6 —— 0.8

Explicarle con material concreto y hacerle entender que son numeros pequeñisimos.

Alumno C

7. Un alumno considera que entre los números 0.6 y 0.8 solo existe el número 0.7. Como profesor ¿qué estrategia utilizarías para que el alumno reconozca que eso NO es correcto?

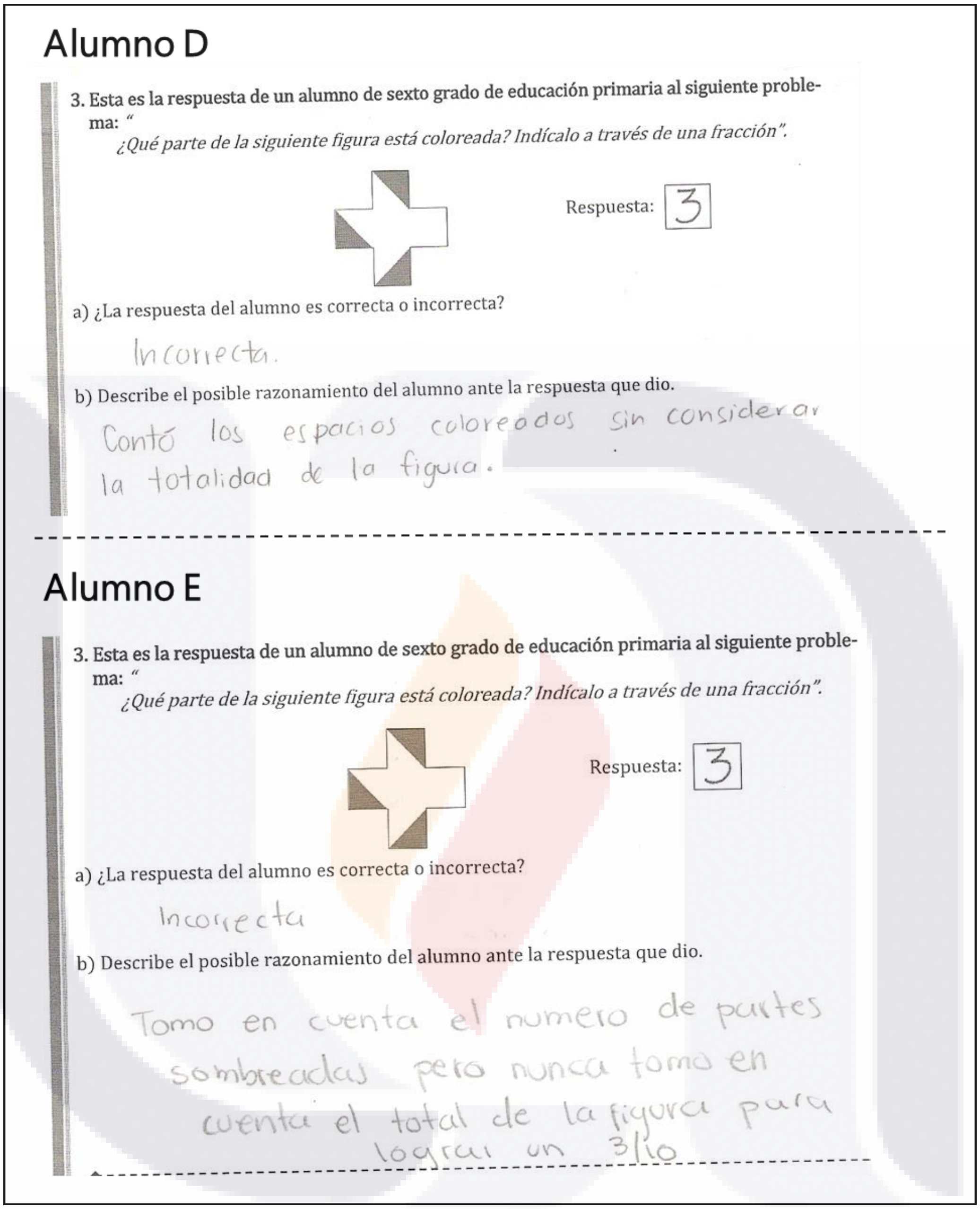
mostraria que como hay unidad, decena y centena pasa lo mismo con los decimales

Figura 5.10. Respuestas de tres estudiantes a la pregunta 7. Cuestionario de conocimientos didácticos.

La solución que proporcionan los estudiantes permite identificar ideas acerca de cómo interpretan la enseñanza de la propiedad de densidad de los números decimales. Por ejemplo, los alumnos A y C indican que una de las estrategias que emplearían consistiría en hacer énfasis en la posición de los décimos, centésimos y tal vez milésimos. Sin embargo esto no indica que, por ese solo hecho, se comprendan los valores que representan cada posición (Ávila y García, 2008). Además, con dicha estrategia no se acercan a la explicación de la propiedad de densidad de los números decimales. Por su parte el alumno B es quien proporciona un acercamiento a esta compleja propiedad al plantear que "con material concreto se puede hacer entender a los alumnos que existen números pequeñísimos entre 0.6 y 0.8", aunque no hace explícita la manera en que lo empleará. Pues la comprensión de la propiedad de densidad de los números decimales implica un razonamiento abstracto, pues como se comentó en el capítulo 3, entre dos números decimales diferentes hay un número infinito de ellos (Peterson y Hashisaki, 1980). Las respuestas que se muestran en la figura 5.10 sugieren que el conocimiento de los futuros profesores, sobre la densidad de los números decimales no está del todo consolidado (sobre todo la respuesta que ofrece el alumno C).

En la figura 5.11 se muestran las respuestas de dos estudiantes a la pregunta 3, que tuvo el porcentaje mayor de aciertos. Con esta pregunta se intentó explorar el conocimiento de los futuros profesores sobre las dificultades que los alumnos de primaria enfrentan al resolver problemas que involucran el reconocimiento de esquemas.

El reconocimiento de esquemas implica la interpretación *parte-todo* de las fracciones, esto es, de un *todo* sea continuo o discreto se "toma" solo una *parte*. En la situación que se presenta en la pregunta 3 del cuestionario de conocimientos didácticos, el *todo* es representado por la figura en forma de cruz. La *parte* que se "toma" se representa por las áreas sombreadas en forma de triángulos.



Alumno D

3. Esta es la respuesta de un alumno de sexto grado de educación primaria al siguiente problema: "
¿Qué parte de la siguiente figura está coloreada? Indícalo a través de una fracción".

Respuesta: 3

a) ¿La respuesta del alumno es correcta o incorrecta?

Incorrecta.

b) Describe el posible razonamiento del alumno ante la respuesta que dio.

Contó los espacios coloreados sin considerar la totalidad de la figura.

Alumno E

3. Esta es la respuesta de un alumno de sexto grado de educación primaria al siguiente problema: "
¿Qué parte de la siguiente figura está coloreada? Indícalo a través de una fracción".

Respuesta: 3

a) ¿La respuesta del alumno es correcta o incorrecta?

Incorrecta

b) Describe el posible razonamiento del alumno ante la respuesta que dio.

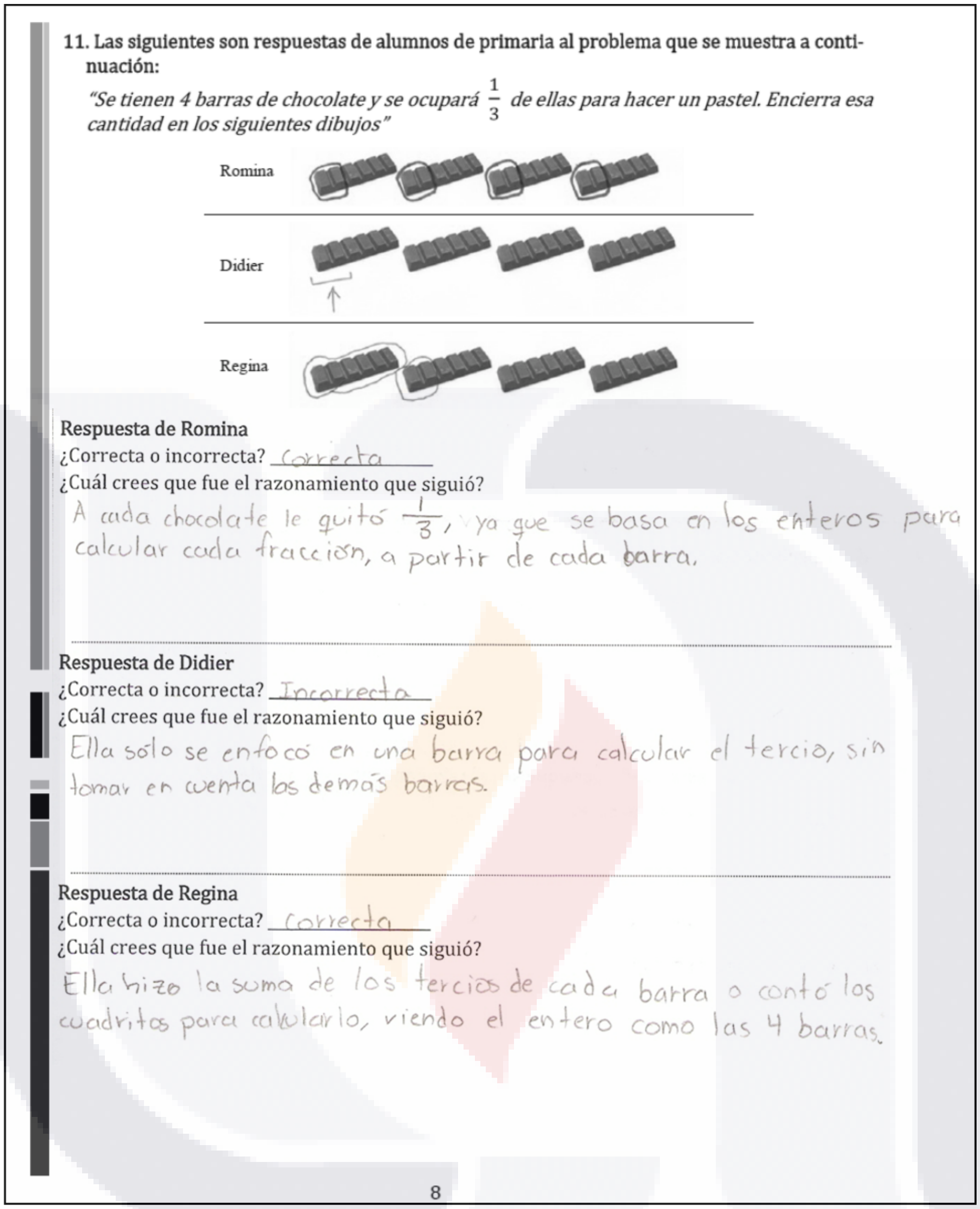
Tomo en cuenta el numero de partes sombreadas pero nunca tomo en cuenta el total de la figura para lograr un 3/10

Figura 5.11. Respuestas de dos estudiantes a la pregunta 3. Cuestionario de conocimientos didácticos.

Las respuestas que aparecen en la figura 5.11 se consideraron como correctas. Ambos estudiantes (D y E) refieren que el error que se comente es: no tener presente el *todo*, es decir, la figura completa en forma de cruz al momento de responder, que en el contexto del problema se compone por 10 triángulos. Al respecto Fandiño (2009) menciona que este tipo de errores se presentan porque el alumno no sabe cuál es la unidad a la que se hace referencia. Dado el porcentaje de respuesta correcta para esta pregunta se puede decir que los futuros profesores, en su mayoría, son capaces de resolver este tipo de problemas y reconocer además este tipo de dificultades en los alumnos de educación primaria.

Con lo dicho hasta este momento, producto del análisis de las respuestas al cuestionario, se observa que, en general, los futuros profesores son capaces de reconocer los posibles errores que comenten los alumnos. Sin embargo, tal hecho no es un indicador que pueda definir una estrategia didáctica para ayudarlos a superar dichos errores. Sin duda, plantear una propuesta didáctica para atender una problemática particular implica un mayor nivel de dificultad para los futuros profesores, demanda, por parte de los profesores en formación, el conocimiento de elementos como materiales, recursos o formas de proceder en el aula.

Otra de las preguntas que registró un porcentaje de respuesta correcta alto fue la identificada con el número 11. En ella se plantea la manera en que tres alumnos de primaria resuelven un problema de reparto. Con la pregunta se intentó que los futuros profesores reconocieran los procesos de resolución que siguieron los alumnos. En la figura 5.12 se muestra la respuesta de un alumno a la pregunta 11. Como se observa, el estudiante para profesor es capaz de identificar los procesos de solución de los alumnos de primaria. La pregunta implica la interpretación *parte-todo* de las fracciones, pues tanto las respuestas de Romina y Regina son correctas ya que consideran, aunque de distinta manera "el todo", es decir las 4 barras de chocolate de donde obtienen la tercera parte; mientras que la respuesta que proporciona Didier es incorrecta debido la confusión que presenta con relación al "todo".



11. Las siguientes son respuestas de alumnos de primaria al problema que se muestra a continuación:

"Se tienen 4 barras de chocolate y se ocupará $\frac{1}{3}$ de ellas para hacer un pastel. Encierra esa cantidad en los siguientes dibujos"

Romina

Didier

Regina

Respuesta de Romina

¿Correcta o incorrecta? Correcta

¿Cuál crees que fue el razonamiento que siguió?

A cada chocolate le quitó $\frac{1}{3}$, ya que se basa en los enteros para calcular cada fracción, a partir de cada barra.

Respuesta de Didier

¿Correcta o incorrecta? Incorrecta

¿Cuál crees que fue el razonamiento que siguió?

Ella sólo se enfocó en una barra para calcular el tercio, sin tomar en cuenta los demás barras.

Respuesta de Regina

¿Correcta o incorrecta? Correcta

¿Cuál crees que fue el razonamiento que siguió?

Ella hizo la suma de los tercios de cada barra o contó los cuadritos para calcularlo, viendo el entero como las 4 barras.

8

Figura 5.12. Respuesta de un estudiante a la pregunta 11. Cuestionario de conocimientos didácticos.

Las respuestas que proporciona el futuro profesor sobre los procesos de resolución que siguieron los alumnos, sugieren un conocimiento didáctico relacionado con el MKT en el subdominio *Conocimiento del contenido y los estudiantes*. Una de las características de este subdominio es que los profesores deben poseer la capacidad para comprender el pensamiento de los alumnos. Sería esperable que durante el desarrollo de la enseñanza pusieran en práctica este conocimiento para reorientar el proceso de aprendizaje matemático de los alumnos de primaria.

Con los ejemplos de algunas de las respuestas que dieron los futuros profesores dieron, se intenta ofrecer información que contribuya a la descripción del conocimiento didáctico con que cuentan. Con ello dar respuesta a una de las preguntas de investigación planteadas en el primer capítulo de este texto.

Como se mencionó al inicio de esta sección, los estudiantes tienen dificultades para responder preguntas con las que se examinó el conocimiento sobre algunas estrategias de enseñanza, en específico, donde se involucran fracciones. Por ejemplo, en la pregunta 12 donde la mayoría no fueron capaces de ofrecer alguna estrategia de enseñanza para la división de fracciones empleando la recta numérica y en su lugar, realizaron una suma de fracciones o presentaron una forma convencional[7] de resolver la división (ver figura 5.9). Conviene hacer notar que en el examen de conocimientos sobre fracciones y decimales los reactivos en los que era necesario emplear la división de fracciones registraron los porcentajes de respuesta correcta más bajos. Lo anterior confirma lo que desde el MKT se sostiene: un profesor necesita dos tipos de conocimiento para la enseñanza de las matemáticas: un conocimiento del contenido matemático que se enseña y un conocimiento didáctico del mismo; y estos tipos de conocimiento deben estar amalgamados entre sí.

Se analizó el promedio de respuestas correctas por Escuela Normal, semestre y grupo al que pertenecían, con el propósito de contribuir a la descripción del conocimiento didáctico de los estudiantes para profesores.

El puntaje promedio de toda la muestra fue de 12.6 aciertos (s = 2.4[8]) (recordemos que el valor teórico más alto era de 17 el más bajo de 0). Un dato que llama la atención es que alrededor de 10 estudiantes obtuvieron la mitad o menos respuestas correctas, pues esto sugiere que futuros profesores, muy próximos a incorporarse al servicio docente tienen dificultades para identificar problemas de aprendizaje en alumnos de primaria,

[7] Por “forma convencional” de resolución se entiende una manera directa de obtener el resultado. Esto es obtener productos cruzados.

[8] El valor *s* corresponde a la desviación estándar o desviación típica. Un estadístico como la desviación estándar ofrece información acerca de cómo los datos se distribuyen respecto de la media aritmética.

mencionar algunas estrategias para el tratamiento didáctico de contenidos relacionados con fracciones y decimales.

El puntaje promedio de aciertos para cada una de las Escuelas fue de 13.7 (s = 1.6) en la Normal Urbana y de 12.0 (s = 2.5) en la Normal Rural. La diferencia (1.7 puntos) entre el promedio de aciertos en cada escuela resultó estadísticamente significativa; para ello se empleó la prueba U de Mann Whitney, dado que los datos no presentaron una distribución normal. Una comparación entre los promedios por semestre en cada una de las escuelas se presenta en la figura 5.13.

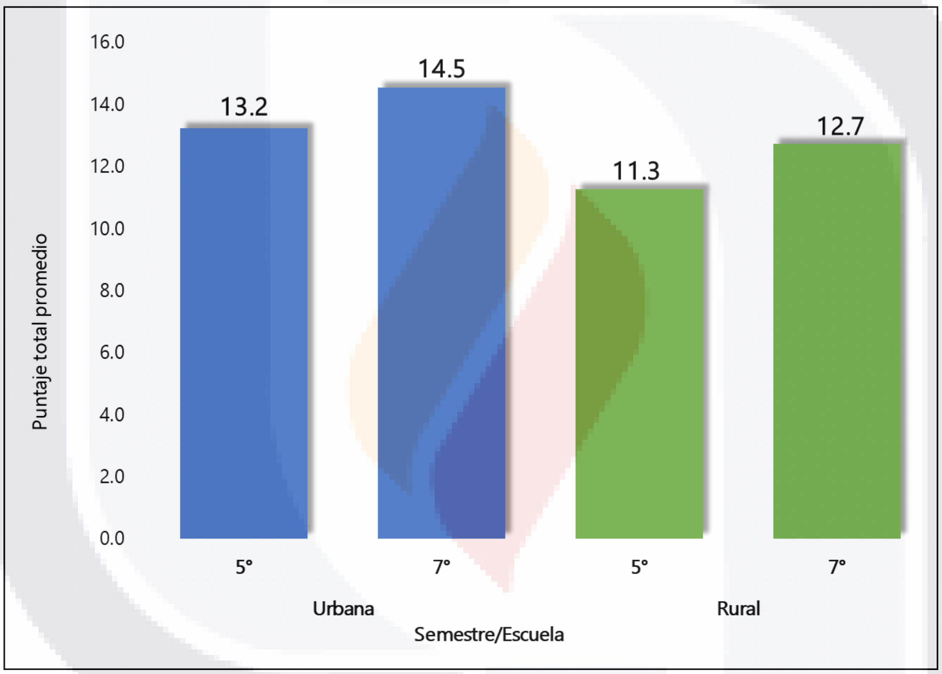


Figura 5.13. Puntajes promedio en el cuestionario de conocimientos didácticos sobre fracciones y decimales por semestre.

Se calculó si las diferencias entre los datos que se presentan en la figura 5.13 resultaban estadísticamente significativas. Es decir, si la diferencia en los promedios se debía al azar o al grupo y la escuela de pertenencia. Después de realizar pruebas de hipótesis se concluye que, aunque visualmente sí existen diferencias, no son estadísticamente significativas[9].

Se comparó el promedio de aciertos a las preguntas del cuestionario por semestre y escuela. En la figura 5.14 se realiza una comparación de ellos. Se trata de un diagrama de caja y brazos.

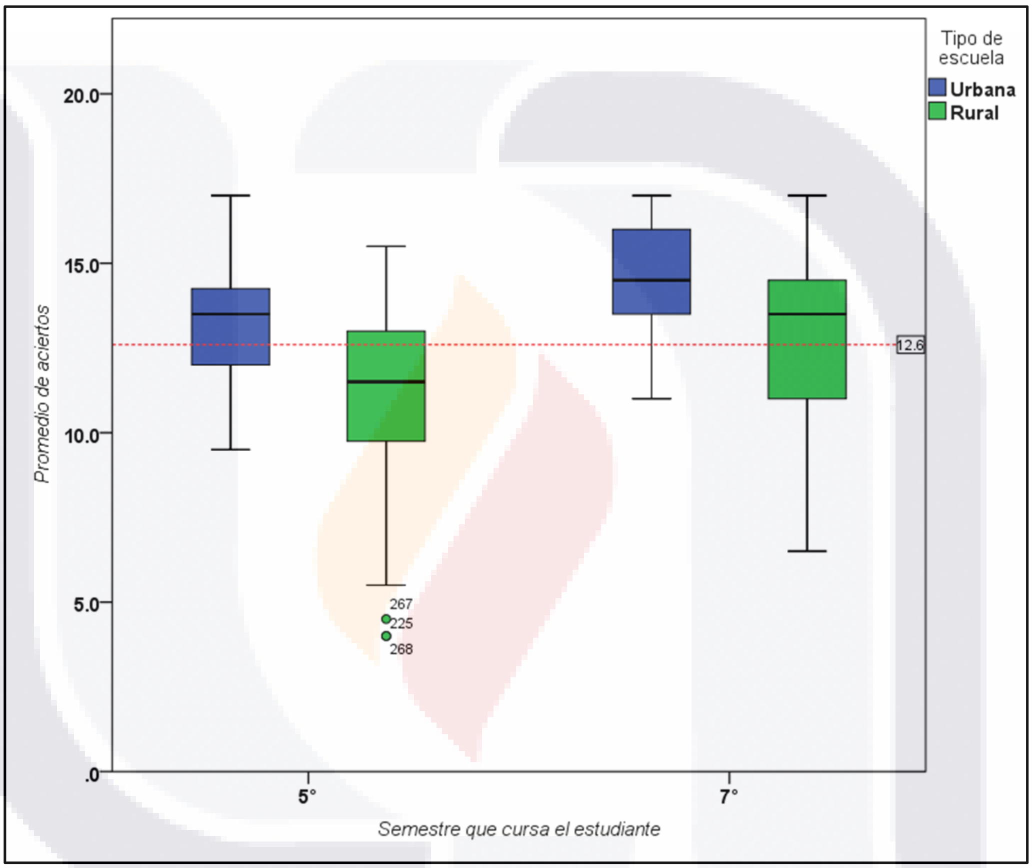


Figura 5.14 Comparación de promedio de aciertos por escuela y semestre. Cuestionario de conocimientos didácticos

En la figura 5.14 se colocó una línea que la atraviesa de forma horizontal, esta línea representa el promedio de aciertos para el total de la muestra. Por encima de esta línea se ubican las medianas de 5° y 7° semestre de la Normal Urbana, así como del 7°

[9] Se empleó la prueba U de Mann-Whitney dado que la distribución de los datos no presentó normalidad. Las pruebas de normalidad se realizaron por medio de los estadísticos de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk.

semestre de la Normal Rural. Otro dato que resalta en la figura es que si se fija la atención en la dispersión en los resultados de los alumnos de 7° de la Normal Rural se puede observar que algunos alumnos (poco menos del 25%) obtuvieron un promedio de aciertos menor a la de alumnos de 5° semestre de la Normal Urbana.

La dispersión en los datos es mayor en 5° y 7° de la Escuela Norma Rural, lo que quizá tenga una explicación debido a que a ella asisten estudiantes cuyas características son más heterogéneas. Esto es, asisten alumnos que provienen de una diversidad de entornos económicos, sociales y culturales, y por tanto resulta más complicado homologar sus conocimientos y habilidades, así como su cultura matemática y escolar en general. Aunado a ello, para muchos de los alumnos estudiar en la Normal Rural, es la única opción y ésta no siempre es la deseada.

En la figura 5.14 también resalta que, en los grupos de la Normal Urbana, se observa menor dispersión, sobre todo en el grupo de 7° semestre. Si se analizan las cajas de cada uno de los semestres se observa que cerca del 75% de los alumnos de 5° semestre de la Normal Rural obtuvieron resultados por debajo de la mediana de la muestra (representado por la línea punteada).

Con los resultados que se aprecian en la figura 5.14 como referente, se calculó el promedio de aciertos para cada grupo en las dos Escuelas Normales. En la tabla 5.11 se muestra dicha información, de ella se pueden comentar diversos datos que resultan interesantes.

Tabla 5.11.

Promedio de aciertos por escuela y semestre.

Tipo de escuela	Semestre	Grupo	Promedio de aciertos	Desviación estándar	Puntaje mínimo	Puntaje máximo
Urbana	5°	A	13.5	1.6	9.5	17.0
		B	12.9	1.5	10.5	16.0
	7°	U	14.5	1.5	11.0	17.0
Rural	5°	A	11.6	1.4	9.0	13.5
		B	**11.1**	**2.7**	**4.0**	**15.5**
		C	**11.5**	**3.0**	**4.5**	**15.5**
		D	**10.9**	**2.3**	**4.0**	**14.5**
	7°	A	13.5	2.3	9.5	17.0
		B	13.4	2.1	6.5	15.5
		C	12.0	2.3	8.0	16.5
		D	11.8	2.8	6.5	16.5

Si se analiza el promedio de aciertos en cada grupo se puede observar que, en general, los alumnos de la Normal Urbana obtienen mejor promedio que los grupos de la Normal Rural. Por ejemplo, el promedio de aciertos del 7° U de la Normal Urbana junto con el valor de la desviación estándar y los puntajes mínimos y máximos difieren con los grupos de 7° de la Normal Rural. Algo similar ocurre si se comparan los promedios, la desviación estándar y los puntajes mínimos y máximos en los grupos de 5° semestre de ambas Escuelas Normales.

En los grupos B, C y D de 5° semestre de la Normal Rural se registró el promedio de aciertos más bajo, en términos generales los alumnos de estos grupos responden en promedio 11 preguntas de manera correcta. En el grupo U de 7° semestre de la Normal Urbana se encontró el promedio más alto (en promedio 14 preguntas correctas). La diferencia (cerca de tres aciertos) cobra un sentido diferente si se observan los puntajes mínimos y máximos entre los grupos señalados. Mientras en el 7° U el puntaje mínimo fue de 11 en los grupos B, C y D de 5° semestre de la Normal Rural fue mucho menor. Además, en los grupos de 5° semestre de la Normal Rural ningún alumno logró responder de forma correcta todas las preguntas.

Resalta que en el cuestionario de conocimientos didácticos el grupo de 5° D de la Normal Rural obtuvo el promedio más bajo, por el contrario, este grupo obtuvo uno de los promedios más alto en el examen de conocimientos matemáticos. Esto marca una diferencia que parece contradecir la tendencia general ─aquellos alumnos con puntajes bajos en el examen obtienen puntajes bajos en el cuestionario─ que muestra una correlación positiva entre ambos tipos de saberes. Esto se discute con mayor detalle en el apartado siguiente.

5.1.3 Comparación de los resultados del examen sobre fracciones y decimales y el cuestionario de conocimientos didácticos.

En los trabajos de investigadores que se interesan por el estudio del conocimiento matemático de los profesores (Ball, 2003; Carrillo, et al., 2012; Godino, Batanero y Font, 2007; por mencionar algunos) se aprecia la importancia de dos tipos de conocimiento indispensables para la enseñanza: del contenido matemático y el conocimiento didáctico del mismo. Se percibe que ambos funcionan en conjunto, tan es así que la mayoría de las propuestas que existen al respecto presentan modelos que los relacionan. Además en investigaciones como la que reportan Depaepe et al. (2015) se menciona que en cuanto a la relación entre el conocimiento matemático y didáctico hay una correlación positiva. Aunque advierten que, aunque un conocimiento matemático sólido apoya en gran medida un conocimiento didáctico, en ocasiones, éste último no es suficiente.

Bajo ese supuesto se realizó un ejercicio que consistió en buscar una relación entre el conocimiento matemático y el didáctico de los estudiantes para profesor encuestados. Para ello se utilizaron los resultados tanto del examen de conocimientos como del cuestionario de conocimientos didácticos sobre fracciones y decimales. Se realizaron pruebas de correlación entre los puntajes de ambos instrumentos. Dado que el número de preguntas es diferente (recuérdese que el examen de conocimiento se integró con 30 reactivos codificados de manera distinta que el cuestionario de conocimientos didácticos, el cual constó de 17 reactivos) se transformó el promedio de aciertos de las respuestas que obtuvo cada estudiante en unidades de desviaciones estándar (puntajes *z*), de tal forma que se pudieran comparar empleando una misma unidad de medida. La figura 5.9 muestra la distribución de los resultados en ambos exámenes en un ejercicio de correlación de los resultados en ambos conocimientos.

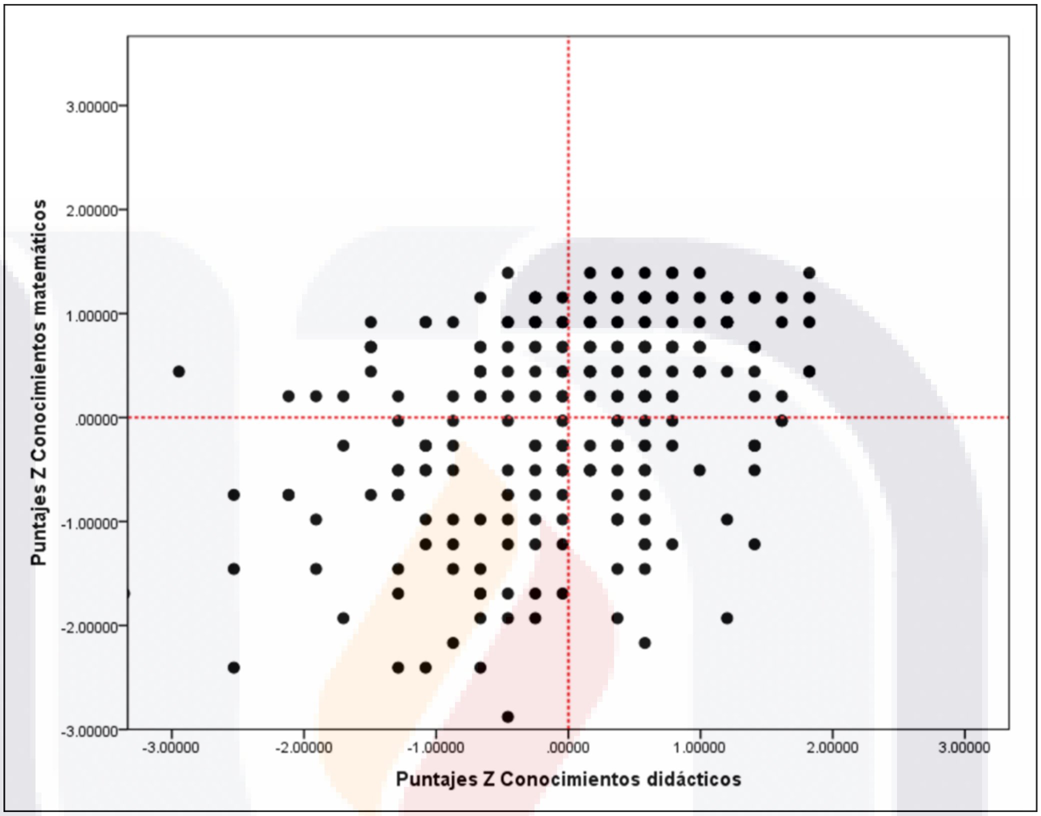


Figura 5.15 Diagrama de dispersión de los conocimientos matemáticos y los conocimientos didácticos sobre fracciones y decimales.

Aun cuando el diagrama sugiere una correlación baja, se calculó el coeficiente *r* de Pearson para conocer el valor de esta. El resultado de la prueba fue de 0.41, si se considera que el índice de correlación *r* puede tomar valores que van desde -1 (una relación fuerte negativa) hasta +1 (una relación fuerte positiva) se puede decir que la correlación entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico sobre las fracciones y los decimales que poseen los estudiantes que se encuestaron, es una correlación positiva y moderada. Lo anterior de alguna forma confirma lo que desde el Modelo del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* se postula, que ambos tipos de conocimiento están relacionados.

A manera de resumen del presente apartado, en el que, básicamente se analizaron los datos recogidos por el examen sobre fracciones y decimales y del cuestionario de conocimientos didácticos sobre este conjunto de números. A continuación, se exponen algunas impresiones, con las cuales se describe, en parte, el conocimiento de los estudiantes para profesores que participaron en la investigación.

En primer lugar, si se contrasta los conocimientos (matemático y didáctico) que demanda el programa de matemáticas de la primaria, se puede decir que, en general, es una ventaja que los estudiantes hayan tenido buenos resultados en la prueba de conocimientos, pues eso pudiera garantizar que al menos conocen lo que van a enseñar (los contenidos de educación primaria). Aunque hubo algunos que demostraron carencias. Por ejemplo, los estudiantes presentaron las siguientes dificultades:

1. Con respecto al *Conocimiento común del contenido* a los futuros profesores se les dificultó resolver problemas que implican el uso de dos algoritmos, tal como:

    a) sumar y restar fracciones propias.
    b) multiplicar y dividir fracciones propias.
    c) multiplicar y restar fracciones (una propia y otra impropia) (véase tablas 5.3 y 5.10).

2. Problemas que involucraron la propiedad de densidad de las fracciones.
3. Resolver problemas que implicaron división de fracciones.

En segundo lugar, con relación al conocimiento didáctico para trabajar fracciones y decimales, también se encontraron resultados alentadores, aunque también se encontraron debilidades. Por ejemplo, con referencia al *Conocimiento del contenido y los estudiantes* se encontró que es necesario cuidar más lo relativo al reconocimiento de las dificultades que pueden presentar los alumnos al estudiar fracciones y decimales, así como el diseño y la implementación de estrategias de enseñanza.

En tercer lugar, con referencia al *Conocimiento del contenido y la enseñanza*, a los estudiantes les resultó complicado describir algunas estrategias de enseñanza. Como muestra se puede mencionar que, un porcentaje alto, presentó dificultades para describir estrategias de enseñanza en torno a la propiedad de densidad de los números decimales (que se relaciona con el orden de éstos) así con el empleo de figuras geométricas para estudiar la suma de fracciones propias.

En cuarto lugar, y desde otro punto de análisis, tanto en el cuestionario de conocimientos didácticos como en el examen de conocimientos matemáticos son claras las diferencias entre los puntajes de los alumnos de la dos Escuelas Normales. En general, los alumnos de la Normal Rural obtuvieron resultados más bajos que los de la Normal Urbana. Incluso en el examen de conocimientos los alumnos de 7° semestre de la Normal Rural alcanzaron promedios de aciertos muy similares a los de los alumnos de 5° semestre de la Normal Urbana. En el caso de las respuestas al cuestionario de conocimientos didácticos fueron los alumnos de 5° semestre de la Normal Rural quienes en su mayoría obtuvieron los puntajes más bajos. Se pudiera decir que son estos alumnos los que en menor medida han logrado consolidar el conocimiento indispensable para la enseñanza de las fracciones y los decimales en la escuela primaria.

Finalmente, es conveniente ampliar los análisis anteriores con la inclusión de otros factores que intervienen en la formación matemática de los estudiantes que asisten a las escuelas Normales Rurales. Este tipo de escuelas (como todas las escuelas rurales y urbano marginales de todos los niveles de país) reciben alumnos con mayores carencias educativas y culturales, que proceden de entornos sociales y económicos con menores oportunidades que les permitan apropiarse de la cultura escolar, tienen menor acceso a libros y a actividades formativas complementarias y extraescolares, padres con menor escolaridad, y en general menores recursos de todo tipo; casi siempre provienen de escuelas que a su vez tienen menos recursos y condiciones de operación más precarias.

No obstante que los resultados del examen y del cuestionario fueron alentadores, estos datos no muestran cómo dichos conocimientos pueden relacionarse al momento de que los futuros profesores se enfrenten a una actividad docente con un grupo de niños de primaria.

Con base en los resultados de los estudiantes se seleccionaron algunos de ellos para observar sus prácticas docentes. En dichas observaciones se analizan sus conocimientos con base en las características de cada subdominio que conforma el MKT.

Se analizan las fortalezas y limitaciones además de las relaciones que se establecen entre el conocimiento matemático y el didáctico de los estudiantes para profesores. Esto se analizará en el apartado siguiente.

5.2. Análisis de la información fase cualitativa

Con el propósito de profundizar en la comprensión del conocimiento matemático y didáctico de los futuros profesores sobre las fracciones y los decimales, en este apartado se presenta el análisis de las sesiones de clase observadas en una muestra de cuatro estudiantes de dos Escuelas Normales. Los futuros profesores que se observaron se seleccionaron con base en los resultados de los dos instrumentos aplicados en la primera fase de la investigación.

Como se mencionó en el apartado 4.3 para el análisis de las observaciones se consideraron los indicadores propuestos por Sosa (2011) (ver Anexo H). Con ellos, se intenta ahondar en la descripción de los subdominios que conforman el Modelo del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT), propuesta que sirvió como marco teórico para este estudio. La intención es describir cada uno de estos de conocimientos a mayor detalle, y de manera especial, sus posibles interacciones. A su vez, se pretende apreciar las fortalezas y las debilidades que los futuros profesores tienen en cuanto al conocimiento y manejo didáctico de las fracciones y los decimales como parte de un conjunto de números que históricamente han representado una dificultad en el aprendizaje.

A continuación se presenta el análisis derivado de la reflexión sobre las sesiones que se observaron de los estudiantes seleccionados (Evelyn, Gabriel, Arely y Héctor). Es necesario recordar que de cada uno de los cuatro futuros profesores se observaron cinco sesiones de clase en las que estudiaron temas relacionados con fracciones y decimales.

5.2.1 Caso 1: Evelyn

Al momento de realizar las observaciones, Evelyn cursaba el 8° semestre de la Licenciatura en Educación Primaria (LEP) en una Normal Urbana. El plan de estudios de la LEP establece que en los dos últimos semestres (séptimo y octavo), los futuros docentes deben realizar jornadas de práctica profesional intensivas, lo cual implica que pasen una estancia prolongada en las escuelas primarias (SEP, 2012a). Evelyn realizaba las prácticas profesionales en un grupo de 4° grado en una escuela primaria ubicada en el centro de la ciudad de Durango; lugar donde se encuentra la Escuela Normal a la que asistía.

Se observaron y audio-grabaron cinco sesiones de la clase de matemáticas que impartió Evelyn. Las observaciones se realizaron la semana comprendida entre los días 27 de febrero hasta el 3 de marzo de 2017. En todas las sesiones que se observaron la profesora titular del grupo estuvo presente, se podría decir que siempre pendiente del desarrollo de la clase y en varias ocasiones apoyando a Evelyn atendiendo dudas de los alumnos o sugiriendo cambios en las actividades y ejercicios que Evelyn programó. Durante esa semana Evelyn propuso el estudio de contenidos relacionados con fracciones. Los temas fueron los siguientes:

Sesiones 1, 2 y 4: Uso de las fracciones para expresar partes de una colección.

Sesión 3: Cálculo del total conociendo una parte.

Sesión 5: Resumen de los contenidos estudiados durante la semana.[10]

A continuación, se describen los rasgos del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* que Evelyn puso en práctica durante las clases que impartió. Con el propósito de complementar la descripción y hacer una valoración global del conocimiento matemático y didáctico, se presentan resultados de los instrumentos aplicados en la primera fase del proyecto de investigación.

[10] Como se observa Evelyn estudió con sus alumnos contenidos relacionados con las fracciones, no así con los números decimales.

Durante las sesiones observadas, Evelyn evidencia rasgos de todos los subdominios que conforman el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008), pero con diferentes niveles de desarrollo y comprensión en cada uno de ellos. Para la descripción y el análisis del conocimiento matemático y didáctico de Evelyn, se presenta cada subdominio por separado, aunque en la práctica esto no suceda así, pues existieron momentos en que entraron en juego dos o más de ellos. Es importante recordar que se retomaron los indicadores que propuestos Sosa (2011) y que se resumen en el Anexo H.

5.2.1.1 Conocimiento común del contenido

De todos los alumnos que respondieron los instrumentos con los que se exploró el conocimiento matemático y didáctico sobre las fracciones y los decimales, administrados en la primera fase de estudio, Evelyn fue la única alumna ─de todos los estudiantes─ que obtuvo todos los reactivos correctos ─30 de 30 en el de conocimientos matemáticos y 17 de 17 en el de conocimientos didácticos─. Se puede decir que, a partir de los resultados obtenidos con estos instrumentos, cuenta con un *Conocimiento común del contenido* que le permite hacer frente a problemas y ejercicios relacionados con fracciones y decimales que se estudian en primaria. En otras palabras, se infiere que Evelyn tiene el conocimiento necesario que le permite trabajar las actividades que se plantean en matemáticas a los alumnos de educación primaria (Ball, Thames y Phelphs, 2008).

Como ejemplo, en el examen de conocimientos matemáticos Evelyn respondió de manera correcta reactivos que involucraron los siguientes conocimientos:

1. Identificar diferentes representaciones de los números decimales.
2. Resolver problemas con números decimales que implican el uso de suma, resta, multiplicación o división.
3. Comparar y ordenar números fraccionarios.
4. Resolver problemas que implican el uso de la propiedad de densidad de los números fraccionarios.
5. Resolver problemas que implican el uso de fracciones equivalentes.

6. Resolver problemas con fracciones comunes que implican el uso de suma, resta, multiplicación o división.
7. Ubicar fracciones y decimales en la recta numérica.
8. Resolver problemas que implican:
    a. El cálculo de una fracción de un número natural.
    b. El concepto de razones.
    c. El cálculo de razón entre dos cantidades.
    d. El cálculo de porcentajes (mayores o menores que 100%).
    e. Variación proporcional directa.

Se espera que un alumno de Educación Primaria adquiera los conocimientos mencionados, pues, estos se obtuvieron de los programas de estudio de matemáticas de primaria. El hecho de que Evelyn muestre la capacidad de responder correctamente reactivos que involucran cada uno de estos conocimientos es evidencia de que posee los conocimientos que demandan los programas de estudio de matemáticas de primaria relacionados con fracciones y decimales.

Como muestra, el reactivo que aparece en la figura 5.16 involucró conocimientos para dividir un número natural en cierto número de partes. Evelyn lo respondió correctamente. La interpretación de fracción como *parte-todo* subyace en el problema: se tiene un “todo” (35 metros de tela) el cual debe ser divido en partes iguales (en partes de $1\frac{2}{5}$ metros, cantidad de tela que se emplea para confeccionar una falda).

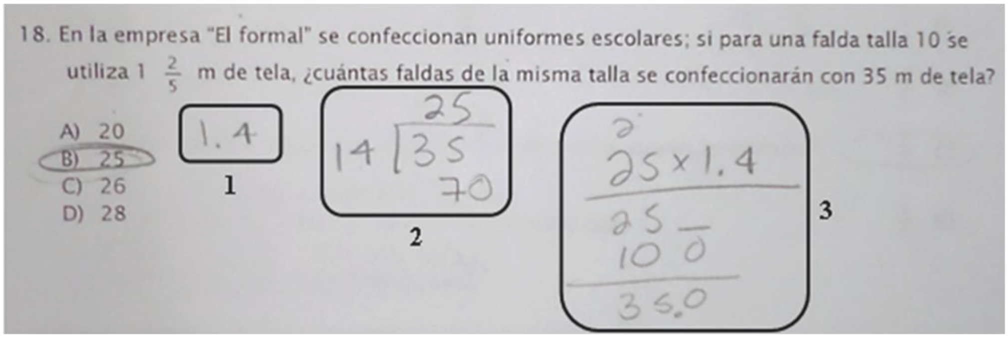


Figura 5.16. Respuesta de Evelyn al reactivo número 18 del examen de conocimientos matemáticos.

Al analizar el procedimiento que dejó escrito en el instrumento se puede observar el proceso de resolución que siguió. Primero, transforma la fracción $1\frac{2}{5}$ a un número decimal (1.4) (recuadro identificado con el número 1). Luego, divide la cantidad total de tela (35 metros) entre 1.4 que son los metros que se usan para confeccionar una falda, con lo que obtiene el resultado correcto (25 uniformes) (recuadro 2). Finalmente, comprueba el resultado que obtuvo multiplicando la cantidad de uniformes (25) por la cantidad de tela que se emplea para confeccionar uno de ellos (1.4 metros) (recuadro 3).

En el procedimiento de resolución de Evelyn resalta la transformación que realiza de la fracción mixta que se plantea ($1\frac{2}{5}$) a un número decimal. Seguramente tiene que ver con lo que desde el capítulo 3 se apuntaba; en donde se comentó que "una de las grandes ventajas de los números decimales sobre las fracciones… es la relativa facilidad con la que se puede operar con ellos; los algoritmos son los mismos que para los números naturales" (Ávila y García, 2008, p. 67-68). Este tipo de procedimientos de resolución deja ver que Evelyn, aunque respondió correctamente todos los reactivos del examen, no siempre resuelve los problemas que involucraron fracciones haciendo uso de ellas. Esta manera de proceder también se pudo observar en otros reactivos, como el que se muestra en la figura 5.17.

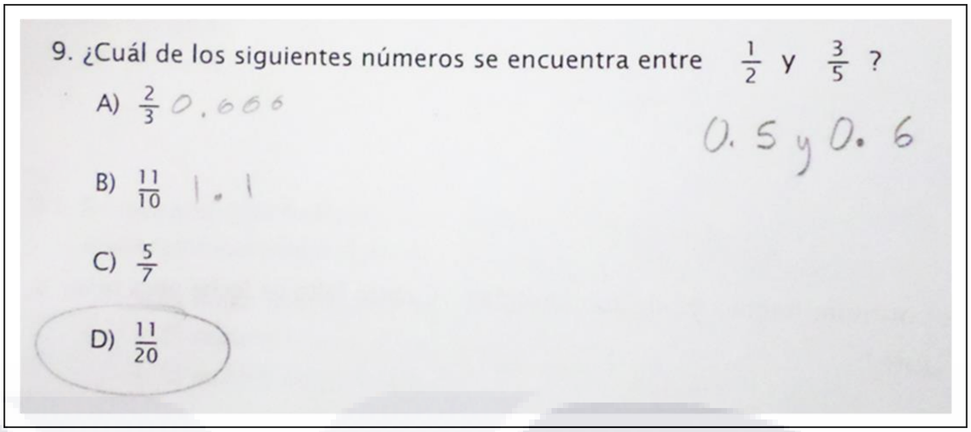
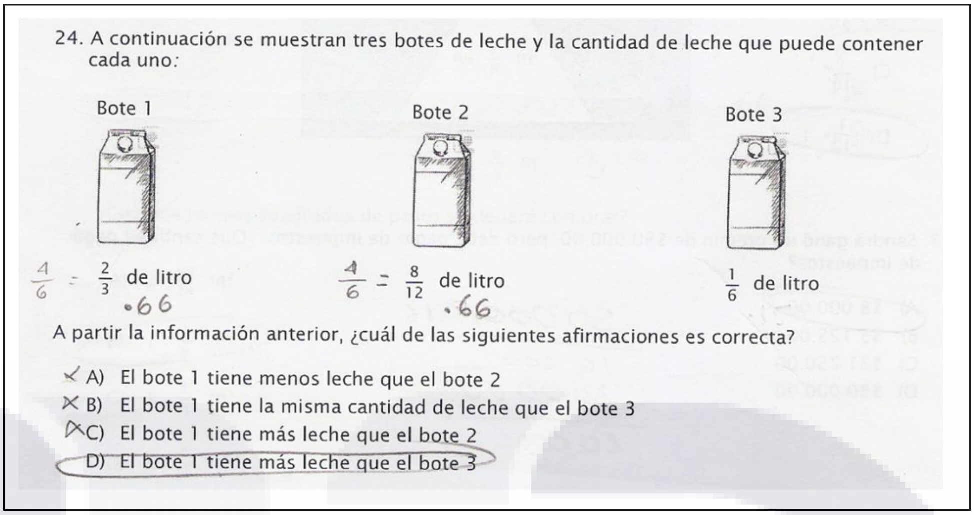


Figura 5.17. Respuesta de Evelyn al reactivo número 9 del examen de conocimientos matemáticos.

En el reactivo 9 de la figura 5.17 se exploró el conocimiento acerca de la propiedad de densidad de las fracciones. Aunque es un tema que se estudia en un grado escolar distinto al que Evelyn practicaba[11], resulta importante su análisis, pues al igual que se muestra en el ejemplo anterior, en primera instancia transforma las fracciones que se presentan en el planteamiento de problema a números decimales. En seguida hace lo mismo con las opciones de respuesta de tal modo que, por discriminación, encuentra la opción correcta en la opción D. Aunque obtiene la respuesta correcta en realidad se acerca a la propiedad de densidad de las fracciones, por medio de los números decimales.

Otro ejemplo que pone en evidencia el *Conocimiento común del contenido* (CCK) que tiene Evelyn es que conoce y utiliza la propiedad de equivalencia de las fracciones. En el reactivo 24 (figura 5.18) transforma la cantidad de leche de cada bote a fracciones con denominadores iguales, es decir, obtiene fracciones equivalentes. Luego mediante discriminación de las opciones de respuesta encuentra el enunciado D como correcto. Sosa (2011) menciona que saber la operatividad, propiedades o aplicación de un concepto matemático es un indicador del CCK. Conviene notar que parece que también empleó la estrategia de transformar las fracciones a números decimales.

[11] Evelyn realizaba sus prácticas profesionales en un grupo de 4° grado y el estudio de la propiedad de densidad se estudia en 5° grado.



24. A continuación se muestran tres botes de leche y la cantidad de leche que puede contener cada uno:

Bote 1 — $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ de litro .66

Bote 2 — $\frac{4}{6} = \frac{8}{12}$ de litro .66

Bote 3 — $\frac{1}{6}$ de litro

A partir la información anterior, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A) El bote 1 tiene menos leche que el bote 2
B) El bote 1 tiene la misma cantidad de leche que el bote 3
C) El bote 1 tiene más leche que el bote 2
D) El bote 1 tiene más leche que el bote 3

Figura 5.18. Respuesta de Evelyn al reactivo número 24 del examen de conocimientos matemáticos.

Los ejemplos anteriores son muestra del *Conocimiento común del contenido* acerca de fracciones y decimales de Evelyn. Como se observa, Evelyn recurre a transformación de fracciones en decimales, para de esta manera proceder a resolver las preguntas que se presentaron. Es muy probable que esa estrategia le permite enfrentar la mayoría de los contenidos relacionados con fracciones y decimales que se estudian en la escuela primaria. Este hallazgo coincide con lo encontrado con Gairín (2004) cuando señala que una de las características del conocimiento de los futuros docentes, que participaron en su estudio, es que "para establecer relaciones entre el orden de las fracciones recurren a técnicas de cálculo, lo que significa que al comprar dos fracciones regularmente las trasforman en decimales para conocer cuál de ellas es mayor o menor" (p. 237)

5.2.1.2 Conocimiento especializado del contenido

Evelyn muestra que conoce cuáles son los aspectos matemáticos importantes para enseñar un contenido matemático (Sosa, 2011). Al inicio de todas las clases hizo hincapié en que los alumnos identificaran el nombre de las partes que conforman una fracción: numerador y denominador, pues consideró importante que los alumnos lo tuvieran presente, ya que les reiteró el nombre de los elementos que conforman una fracción, lo cual se puede observar en el siguiente fragmento:

> ***Evelyn****: a ver necesito a una persona que, desde su lugar, que levante la mano me diga una… fracción, pero piensen no piensen en un cuarto un medio esas siempre las dicen*
> ***Alumno (Diego)****: yo, yo, yo*
> ***Evelyn****: a ver Isis*
> ***Alumna (Isis)****: cinco cuartos*
> ***Evelyn****: ¡Isis! otra una diferente*
> ***Alumna (Isis)****: Cinco octavos*
> ***Evelyn****: ¿cuánto?*
> ***Alumna (Isis)****: Cinco octavos*
> ***Evelyn****: Cinco octavos ¡muy bien!*
>
> [Los alumnos hablan entre sí, y es inaudible lo que comentan]
>
> ***Evelyn****: A ver esto ya lo hemos visto ochocientas cincuenta mil veces ¿cómo se llama el número de arriba Uriel?*
> ***Alumno (Uriel)****: Amm numerador*
> ***Evelyn****: Numerador*
> ***Alumna (Valeria)****: Yo maestra (Levanta la mano)*
> ***Evelyn****: ¿Valeria cómo se llama el de abajo?*
> ***Alumna (Valeria)****: Denominador*
> ***Evelyn****: denominador ¿verdad? (Escribe en el pizarrón)*

$$\begin{array}{l} 5 \longrightarrow \text{Numerador} \\ \overline{8} \longrightarrow \text{Denominador} \end{array}$$

(Evelyn, clase 3, líneas 9-25) [12]

Otra de las características del *Conocimiento especializado del contenido* que se observaron en Evelyn fueron aquellas que se relacionan con el conocimiento de los procedimientos y las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos, en otras palabras, conocer los “pasos ocultos”[13] empleados, por los alumnos, en la solución

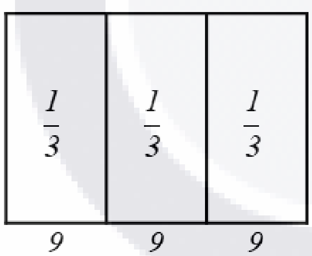
[12] La información entre paréntesis se refiere a la organización que se utilizó para el análisis de la información. Así, aparece el nombre del estudiante para profesor observado, en este caso Evelyn, la clase en la que sucedió el evento que se analiza (tercera clase observada) y el número de las líneas o renglones de la transcripción donde se encuentra la información que se presenta (93-136), esto con el software Atlas.ti que sirvió de apoyo para el análisis de la información.
[13] Por “pasos ocultos” Sosa (2011) se refiere a los pasos que se dan en un procedimiento matemático para resolver un problema sin haber constancia escrita de ellos.

de un problema o ejercicio (Sosa, 2011). Ejemplo de lo anterior se observó al inicio de tercera sesión. El contenido que se estudió fue el cálculo del total conociendo una parte, tema que corresponde a la Unidad IV del programa de matemáticas de 4° grado. Como parte de las actividades de inicio de la sesión Evelyn plantea el siguiente problema a todo el grupo:

Evelyn: *En 1° A me caen bien una tercera parte de los niños, esa tercera parte de niños, que me caen bien, son nueve niños* [Escribe en el pizarrón]

$$\frac{1}{3} = 9 \text{ niños}$$

Evelyn: *Si sólo me caen bien nueve niños porque son los que saben leer y escribir ¿Cuántos niños hay en total en el grupo de 1° A?*
Alumna (Marifer): *¡27!* [Responde casi de inmediato]
Evelyn: *¿Cómo le hiciste, Marifer, para sacar esos 27?*
Alumna (Marifer): *Multipliqué 9 x 3*
Evelyn: *¿Por qué 9 x 3?*
Alumna (Marifer): *Porque solo tomó la tercera parte.*
Evelyn: *¡Muy bien! Marifer.*
Alumno (Arturo): *¿nueve por tres?*
Evelyn: *A ver vamos a suponer que éste es todo el salón de primero* [Dibuja en el pizarrón la siguiente figura]



Alumno (Arturo): *1°A*
Evelyn: *Y yo escogí ¿qué parte de niños escogí?*
Alumno (Arturo): *9 niños*
Evelyn: *Pero ¿qué parte?, ¿qué fracción?*
Alumnos (varios): *¡un tercio!*
Evelyn: *Un tercio ¿verdad? escogí aquí a los que se sientan hasta adelante porque son los más listos o los que no alcanza a ver. Entonces en este tercio que escogí* [Señala una de las partes en las que está dividida la figura que dibujó] *¿Cuántos niños tengo?*
Alumno (Arturo): *¡9!*
Evelyn: *9 ¿verdad?, en este tercio ¿cuántos voy a tener?* [Señala otra de las partes en que está dividida la figura

Alumno (Arturo)*: 9*
Evelyn*: Y en este tercio ¿cuántos voy a tener?* [Señala otra de las partes en que está dividida la figura]
Alumno (Arturo)*: 9*
Evelyn*: Entonces ¿cuántos niños tuve? ¿cuántos niños tienen más bien?*
Alumno (Arturo)*: 27*
Evelyn*: Es la operación que dijo Marifer ¿cuál fue?*
Alumno (Arturo)*: 9 por 3*
Evelyn*: ¿Si quedó claro?*
Alumno (Arturo)*: Si*

(Evelyn, clase 3, líneas 93-136)

Cuando la alumna (Marifer) resuelve el problema correctamente, Evelyn le cuestiona sobre cómo obtuvo la cantidad total de alumnos del grupo de 1°A, ante la respuesta Evelyn asiente, confirmando así el resultado y también un procedimiento matemático que, aunque sencillo, está detrás de la respuesta de la alumna. Es justamente donde Evelyn muestra que infiere el razonamiento que sigue la alumna (Marifer). Es decir, la estrategia de resolución no explícita radica en que para conocer una cantidad total (x=cantidad total de alumnos en un grupo), de la que se conoce el valor de una fracción ($\frac{1}{3}$ = 9 alumnos en el ejemplo) es necesario dividir el valor de la fracción (9) entre el numerador de la fracción (1) y el resultado multiplicarlo por el denominador (3).

Un alumno (Arturo) manifiesta una duda, pues parece no haber comprendido el procedimiento de resolución que compartió su compañera (Marifer). Con el fin de apoyarlo Evelyn decide ofrecer una explicación al respecto. Para lo cual emplea un rectángulo divido en tercios (que representaría el total de clase o el salón como lo llama Evelyn). Apoyándose en dicho rectángulo cuestiona a los estudiantes, en particular a quien mostró la duda, sobre la cantidad de alumnos que representa un tercio, es decir, una de las partes en la que está dividido el rectángulo. Después hace lo mismo con las otras dos partes. Por último, indica que multiplicar tres veces la cantidad de alumnos que representa cada una de las partes (9) del rectángulo es la respuesta que la alumna (Marifer) ofreció desde un inicio (9 x 3).

Otro indicador que Sosa (2011) menciona como característico de este subdominio:

> Consiste en saber la(s) causa(s) matemáticas de los errores de los estudiantes pues es [el profesor] quien debe poseer la información sobre cuáles son los errores matemáticos más comunes cometidos por los estudiantes en determinado contenido. Conocer esas razones matemáticas de los errores de los estudiantes no es asunto propiamente de la matemática en sí, pero sí de la matemática que ocupa el profesor para la enseñanza (p. 422).

En la sesión 3, como parte de las actividades de inicio, y teniendo como antecedente el problema descrito en la viñeta anterior (líneas 93-136) Evelyn plantea el siguiente problema a los estudiantes:

Evelyn: *En 2° C los niños que tienen la letra más bonita son dos quintas partes, y esas dos quintas partes son… ocho niños.* (Evelyn, clase 3, líneas 156-159)

[Rápidamente un alumno responde:]

Alumno (Jordan): *5 x 8 son… cuarenta. ¡Son cuarenta niños en total!* (Evelyn, clase 3, líneas 156-159)

La respuesta que el alumno (Jordan) ofrece es incorrecta. Él sigue parte del procedimiento de resolución que Evelyn explicó para el problema anterior. Es decir, para calcular la cantidad total de alumnos del grupo de 2° C que se plantea en el problema, dado que sabe que $\frac{2}{5}$ es igual a 8 alumnos, tal y como se hizo en el ejercicio anterior, Jordan multiplicó 5 x 8, pero sin calcular previamente el valor correspondiente a 1/5. Evelyn optó por dejar pasar la oportunidad de que Jordan, por sí mismo, pudiera darse cuenta del error. En este caso no evidencia un conocimiento sobre cuál es la causa matemática del error.

Conviene hacer notar lo siguiente: en el Programa de estudio de matemáticas de Educación Primaria (SEP, 2011b) se sugiere que ante circunstancias como las que se presentaron, es decir, respuestas erróneas de los estudiantes, el profesor debe propiciar un ambiente que invite a los estudiantes a expresar y argumentar los resultados que obtienen. Ello les permitirá la construcción de conocimientos matemáticos en torno al contenido que se estudia[14]. En su lugar Evelyn, al darse cuenta del error, procede a realizar una explicación como la que se observa en el siguiente fragmento:

Evelyn: *El salón[15], ¿en cuántas partes está partido?* [Dibuja la siguiente figura en el pizarrón]

Alumno (Uriel): *Cinco*
Evelyn: *En cinco ¿verdad? ¿Cuántos niños hay aquí?* [Señala uno de los cinco espacios en que está dividido el rectángulo]
Alumno (Diego): *Ocho*
Alumno (Uriel): *Cuatro* [Se refiere solo a uno de los espacios]
Evelyn: *Ocho, ¿por qué cuatro Uriel?*
Alumno (Uriel): *Por qué dos quintos son ocho y la mitad son cuatro.*
Evelyn: *Porque aquí digo que dos quintos son ocho y aquí les estoy preguntando por un solo quinto, entonces cuántos hay* [Señala la figura]
Alumno (Uriel): *Cuatro*
Evelyn: *Cuatro y aquí cuántos niños hay* [Señala otro espacio de la figura]
Alumno (Uriel): *4*
Evelyn: *Acuérdense que en cada espacio debe de haber la misma cantidad ¿verdad?*
…
Alumno (Jordan): *Pero son veinte… nos tendría que dar cuarenta*.
…
Evelyn: *A ver otra vez, la suma Jordán, no estés adivinando y piensa la respuesta que dices.* (Evelyn, clase 3, líneas 162-210)

[14] Al analizar los programas de matemáticas de educación primaria, particularmente el enfoque didáctico y las orientaciones didácticas es posible establecer una relación muy estrecha con algunas ideas de Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brosseau. Por esta razón es que en ocasiones se compara el proceder de los futuros profesores observados con ciertas ideas de esta teoría.
[15] En el contexto de las escuelas primarias es común que los profesores y los alumnos al mencionar "salón" también se refieran a un grupo de estudiantes.

Evelyn se percata del error de alumno (Jordan); de lo que no se da cuenta es que en el problema anterior (véase fragmento de la clase Evelyn, clase 3, líneas 93-136) no explicitó que el numerador de la fracción $\frac{1}{3}$ significa el número de partes que se están tomando del total. Evelyn se centró en demostrar que 3x9 es igual 27 mediante la división del rectángulo.

Aunque finalmente Eveyn dio una explicación, esta no aclara del todo el error en el procedimiento de solución dejando que el alumno se quedará con una idea equivocada. Mucho menos presentó una situación que ayudara al alumno (Jordan) a reconocer su error.

5.2.1.3 Conocimiento en el horizonte matemático

El *Conocimiento en el horizonte matemático* involucra conocimiento para poder establecer diversas relaciones entre contenidos matemáticos, que pueden ser verticales u horizontales. Las primeras se refieren a las conexiones entre contenidos matemáticos que se estudian en diferentes niveles educativos. Las segundas, son las relaciones de los contenidos matemáticos dentro un mismo nivel o grado educativo. Como se mencionó en el capítulo 2, se trata de un conocimiento por medio del cual el profesor es consciente de la importancia de las relaciones entre los contenidos matemáticos del currículo.

Evelyn evidenció rasgos que caracterizan este subdominio al intentar establecer una conexión entre contenidos de diferentes unidades de estudio. Durante el desarrollo de sesión 4, donde se estudió el contenido “Uso de las fracciones para expresar partes de una colección” (SEP, 2013b) Evelyn, como parte de las actividades, solicita a los alumnos resolver los ejercicios del libro de texto, en específico el Desafío matemático[16] número 66, titulado “¿Qué fracción es?” que se encuentra en las páginas 122 y 123. Evelyn solicita a uno de los alumnos encuentre una fracción equivalente a la que este estudiante obtuvo.

[16] El libro de texto de matemáticas para la escuela primaria está organizado por lecciones que son denominadas Desafíos matemáticos.

[La mayoría de los alumnos resuelven los ejercicios de la página 123 (figura 5.19) del libro.]

Bloque 4

2. Juan está completando su álbum de animales acuáticos, de felinos y de aves; la siguiente ilustración representa las estampas que tiene repetidas. ¿Qué fracción del total de estampas repetidas corresponde a cada grupo?

3. En la siguiente tabla se registraron los vehículos que pasaron por una caseta de cobro en dos horas distintas de un día. Escriban la fracción que le corresponde a cada tipo de auto, de acuerdo con el total de usuarios en esa hora.

Tipo de vehículo	De las 9:00 a las 10:00 horas	Fracción	De las 15:00 a las 16:00 horas	Fracción
Auto particular	30		20	
Autobús de pasajeros	50		24	
Camión de carga	20		16	

Cuarto grado | 123

Figura 5.19. Desafío No. 66, libro de texto cuarto grado, página 123.

[Los alumnos deben calcular la fracción que representa cada grupo de animales con respecto al total de tarjetas que se presenta (12). La fracción que corresponde a cada grupo de animales es la siguiente: felinos $\frac{5}{12}$, aves $\frac{4}{12}$ y animales acuáticos $\frac{3}{12}$. Una alumna se acerca a Evelyn y le muestra la respuesta que obtuvo en el ejercicio número 2]

Evelyn: *¿De qué otra manera podemos decir esta fracción?* [La fracción es $\frac{4}{12}$ que representan a las aves] *En números más pequeños, acuérdate cómo se hacía.*
Alumna (Valeria)*: Tres…*
Evelyn: *Acuérdate, el de arriba y el de abajo los dividimos.*
Alumna (Valeria)*: ¿Entre qué?*
Evelyn: *Esta facilotototote.*
Alumna (Valeria): *Dos*
Evelyn: *¿Dos qué?*
Alumna (Valeria): *Dos sextos*
Evelyn: *Y todavía se puede hacer más chiquito.*
Alumna (Valeria): $\frac{1}{3}$

(Evelyn, clase 4, líneas 215-225)

Aunque la equivalencia de fracciones no es el tema central de la actividad, ni tampoco está propuesto como parte de las sugerencias a los docentes, Evelyn invita a que los alumnos puedan responder la actividad empleando algunas equivalencias de fracciones. Lo que propone es la obtención de fracciones equivalentes mediante la idea de multiplicar o dividir el numerador y el denominador por un mismo número. El contenido correspondiente a la obtención de fracciones se estudia en el Bloque V de cuarto grado, es decir, una unidad posterior a la del contenido que se aborda en la clase.

5.2.1.4 Conocimiento del contenido y los estudiantes

Uno de los rasgos de este subdominio que más se observó en Evelyn es su conocimiento sobre actividades que resultan interesantes o motivadoras para los alumnos. A lo largo de las sesiones observadas Evelyn planteó actividades, sobre todo para iniciar las sesiones, que atrajeron en gran medida la atención de los alumnos. Algunas consistieron en presentar problemas, que implicaron calcular fracciones de cantidades enteras, cuyo contexto resultara cercano a los alumnos.

Por ejemplo, al inicio de la sesión 2 Evelyn comentó a los estudiantes que en su mochila traía una bolsa con 36 dulces, pero que solo repartirá $\frac{2}{3}$ y después cuestiona sobre qué cantidad repartirá.

[Son los 12:30 de la tarde. El tema de la clase se relaciona con el desafío número 65 libro de texto desafíos matemáticos. El cual tiene la intención de que los alumnos calculen fracciones de cantidades enteras].

Evelyn*: Vamos a trabajar en matemáticas ahora sí, sí. Fíjense, fíjense lo que traigo aquí en mi mochila. Bueno cuando se siente Natalia y Grisel se los voy a enseñar, sino no.*
Alumno*: maestra.*
Evelyn*: no le voy a enseñar lo que traigo en mi mochila y es para ustedes. Ahora si fíjense, traigo en mi mochila.*
Alumno*: ¡un zapato!*
Evelyn*: traigo, en mi mochila… ….*

[Los alumnos comienzan a gritar el nombre de varios objetos con el propósito de acertar a lo Evelyn llevó para la clase en su mochila, se nota su interés por saber qué es lo que hay dentro de la mochila].

Evelyn*: unos caramelos, son, no quiero niños parados, el que este parado automáticamente perdió, ya.*
Alumno*: este está rico miren*
Evelyn*: Esaú si no te sientas ya no participas. Tengo… Ángel, Leonardo. Fíjense Ángel, tengo 36*
Alumno*: dulces*
Evelyn*: tengo 36 dulces, Leonardo, pero como Eli, Leonardo y otros niños no me están poniendo atención no los voy a repartir todos. No, voy a repartir nada más dos terceras partes de los dulces, no los voy a repartir todos, nada más dos terceras partes de los dulces ¿cuántos voy a repartir?*
Alumnos*: dos tercios*
Evelyn*: ¿cuántos niños van a alcanzar dulces?*

(Evelyn, clase 2, líneas 7-23)

Otro ejemplo lo constituye el trabajo que Evelyn programó el último día que se le observó. Como cierre de los temas estudiados, las actividades las basó en una presentación realizada con el software Power point de Microsoft. El siguiente fragmento ejemplifica que Evelyn cuenta con un conocimiento acerca de lo que a los alumnos les resulta interesante o motivador:

Evelyn*: Vamos a jugar* [Lee en la primera diapositiva de la presentación] *"Jeopardy*[17] *de resolución de problemas matemáticas que implican el uso de fracciones y con las que hemos trabajado en la semana y algunos comodines… de la muerte extremo". Este es extremo.*
Al equipo que gane, miren, al equipo que gane, le voy a poner aquí. [Muestra su teléfono celular y se observa el ambiente que caracteriza a una App llamada Classdojo[18]]
Alumno*: 5 puntos*
Evelyn*: No, no me acuerdo cuántos puntos eran dejen veo.*
Alumnos*: 1000 puntos, 10 puntos extra.*
Evelyn*: Al equipo que gane le voy a poner 3 puntos aquí* [levanta su teléfono celular] *y ya el equipo que gane le va a ganar a todos en puntos… y además de los puntos hay otro premio chiquito.* (Evelyn, clase 5, líneas 20-23 y 34-38)

Conviene señalar que esta actividad, aunque es muestra del conocimiento que tiene Evelyn de los estudiantes, carece de naturaleza matemática. Más bien se puede decir que se puede considerar como parte de un conocimiento didáctico general. El nombre de la actividad se acerca mucho al lenguaje común que usan los alumnos. Los puntos otorgados en la App, dado que pueden ser vistos por los padres de familia son un incentivo más para los alumnos.

Otro ejemplo de que Evelyn conoce lo que a los alumnos les parece interesante o motivador es el problema que planteó en la sesión 3 en donde se estudió el tema: cálculo del total conociendo una parte. Evelyn entrega a cada alumno una hoja que contiene un problema como el siguiente, acompañado de una tabla como la que se muestra en la figura 5.20.

[17] Jeopardy es un concurso de televisión creado en Estados Unidos. Se trata de un concurso de conocimientos con preguntas sobre numerosos temas. Consiste en que los concursantes eligen uno de los paneles del tablero de juego, el cual, al ser descubierto, revela una pregunta a la que tienen que dar respuesta. Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Jeopardy!

[18] Es una App, que se descarga a los teléfonos móviles, y que permite la comunicación de lo que sucede en el aula. Con ella es posible la interacción entre profesores, padres y alumnos, se puede compartir fotos, vídeos y mensajes durante la jornada escolar. Más información se encuentra en el sitio web https://www.classdojo.com/es-MX/

Partes de una colección

INSTRUCCIONES

1) Pega esta hoja en tu libreta de Matemáticas.
2) **Lee con atención** el siguiente problema y contesta lo que se te pide.
3) No olvides pegar esta hoja en tu libreta de Matemáticas.

Hace una semana, Germán comenzó a jugar un nuevo videojuego en el que cada día debe completar cierta cantidad de misiones, pero como aún no sabe jugarlo bien, ningún día ha completado el total de misiones. A continuación se presentan las misiones que completó en los días que ha jugado. Ayuda a Germán a descubrir **cuántas misiones debió haber alcanzado cada día.**

Día	Fracción de misiones completadas	Cantidad de misiones completadas	Total de misiones que debió alcanzar en el día	Dibujo
Miércoles	$\frac{1}{4}$	2		
Jueves	$\frac{2}{5}$	8		
Viernes	$\frac{3}{6}$	6		
Sábado	$\frac{1}{2}$	8		
Domingo	$\frac{4}{12}$	4		
Lunes	$\frac{3}{8}$	9		
Martes	$\frac{9}{10}$	18		

Figura 5.20. Actividad propuesta por Evelyn en la sesión 3[19].

El propósito de la actividad radicó en que los alumnos, reunidos en equipos, encontraran una cantidad total conociendo una fracción de esta. La interpretación parte-todo de la fracción está inmersa en la actividad. Por ejemplo, en el problema se plantea que Germán el miércoles completó solo $\frac{1}{4}$ de las "misiones" de un videojuego; $\frac{1}{4}$ representó 2 "misiones" del total que se supone debieran completarse en el día. Los alumnos tendrían que encontrar la cantidad total de misiones. Actividades como la que se describe contribuyen, de manera importante, al aprendizaje matemático. Primero, el problema puede resultar interesante pues se encuentra en el contexto de los videojuegos[20] un ambiente al que la mayoría de los alumnos de cuarto grado de una zona urbana no son ajenos.

Segundo, sí se les permite los alumnos pueden encontrar diferentes formas de llegar a la solución. Por ejemplo, Evelyn les sugiere utilizar dibujos, esto es, para resolver

[19] La actividad fue diseñada por Evelyn.
[20] Existe un personaje llamado Germán que comparte sus logros cuando juega un nuevo videojuego a través de internet.

la primera fila alguien puede dividir un rectángulo en cuartos, luego dibujar dentro de cada uno de los cuartos la cantidad de misiones completadas y al final contar todas las misiones y con ello obtener la respuesta correcta. Tal vez alguien encuentre una regularidad para resolver el problema, esto es, multiplicar la cantidad de misiones completadas en un día por el denominador de la fracción y dividirlo entre el numerador (en el caso de la primera fila multiplicar 2 x 4 = 8, luego dividirlo entre el numerador 8 ÷ 1 = 8, total de misiones a completar en un día). Evelyn les propuso partir de la primera opción, es decir, realizar un dibujo. Se puede decir que Evelyn posee un conocimiento que le permite partir del contexto de videojuegos al estudio de las fracciones.

Este conocimiento, acerca de lo que puede resultar motivador a los alumnos, tiene una estrecha relación con el subdominio *Conocimiento del contenido y la enseñanza*, particularmente con el indicador "saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido" (Sosa, 2011). A partir de una situación que es familiar a los alumnos, como pueden ser los videojuegos, Evelyn propone problemas que le permiten estudiar un contenido del programa de estudio.

El *Conocimiento del contenido y los estudiantes* implica estar al tanto de las dificultades de los estudiantes al resolver problemas o ejercicios, en este caso, relacionados con fracciones y decimales. A este respecto Evelyn, en varias ocasiones, evidencia conocer algunas de estas dificultades, tan es así que recurre a diferentes estrategias o actividades didácticas que le permiten atenderlas.

Una de las estrategias que empleó consistió en reunir a alumnos, que presentaron una misma dificultad, en un pequeño grupo. El hecho surgió en la segunda sesión que se observó, a partir de la resolución de los ejercicios propuestos en la página 120 del libro de texto. El contenido que se estudió en la sesión fue: "uso de las fracciones para expresar partes de una colección" como parte de las actividades Evelyn solicitó a sus alumnos que resuelvan la lección 65 de su libro de texto titulada "¿Qué parte es?" (figura 5.21)

65 ¿Qué parte es?

Consigna

En equipos, resuelvan los problemas.

1. Durante los últimos 4 meses, una fábrica de calzado ha vendido su producción de la siguiente manera:

- $\frac{1}{4}$ parte a un distribuidor de Celaya.
- $\frac{3}{5}$ partes a un distribuidor de Colima.
- El resto de la producción fue vendida al menudeo por la misma fábrica.

Completen la siguiente tabla para determinar la cantidad de la producción que se vendió a cada distribuidor.

Mes	Producción (pares de zapatos)	Venta a Celaya (pares de zapatos)	Venta a Colima (pares de zapatos)	Venta al menudeo (pares de zapatos)
Marzo	7600			
Abril	6100			
Mayo	10500			
Junio	12300			

Figura 5.21. Lección 65. ¿Qué parte es? Primaria. Cuarto Grado.

El objetivo de la lección del libro fue que los alumnos calcularan fracciones de cantidades enteras (SEP, 2013b). La lección número 65 del libro de texto involucró que los estudiantes calcularan la cantidad de zapatos equivalentes a $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{5}$ de diferentes cantidades, por ejemplo 7,600. Justamente esa fue la dificultad de algunos alumnos, pues, aunque con anterioridad realizaron ejercicios similares a los que se presentan en el libro, estos se realizaron con cantidades menores.

La estrategia que siguió Evelyn consistió en reunir en un pequeño grupo a aquellos alumnos que tenían problemas. Luego apoyándose en el material empleado en la sesión anterior. Evelyn procedió a resolver el ejercicio en conjunto con ellos. En el siguiente fragmento se puede observar la estrategia:

[Evelyn pide a los alumnos que para reunirse y resolver el ejercicio juntos utilicen la hoja de trabajo que utilizaron en la sesión anterior. La hoja a la que se refiere contiene una tabla como la aparece abajo[21]].

Cantidad	Fracción que pide	Dividimos la cantidad entre lo que nos piden	Multiplicamos por el numerador	Parte de la cantidad

***Evelyn**: Luz María trae tu hoja. Agarra tu hoja Christian.* [Se refiere a una hoja de trabajo que emplearon en la sesión anterior]. *A ver, en donde dice cantidad total ¿qué vamos a poner? ¿Cuál es la cantidad total de marzo?*
***Alumna (Luz María)**: 7,600.*
***Evelyn**: 7,600 muy bien Luz, entonces aquí* [señala la primera columna] *7,600. Es que escríbanlo luego se les olvida y ahí viene otra vez.*
***Alumno (Christian)**: ¿Aquí vamos a poner el resultado, maestra?* [Señala la primera columna].
***Evelyn**: No, tenemos la cantidad total y la fracción que se pide para Celaya ¿cuál es? ¿Cuál es la fracción que se pide para Celaya?*
***Alumno (Christian)**: Un cuarto*
***Evelyn**: Un cuarto* [Afirmando].
***Alumno (Christian)**: Entonces donde me dice: fracción que pide ¿pongo un cuarto?*
***Evelyn**: Si, un cuarto allí, ¿sí? porque es lo que te pide para Celaya, mira aquí dice* [Señala el libro de texto].
***Alumna (Luz María)**: Listo.*
…
***Evelyn:** Entonces ¿qué hay que hacer con este?* [Señala la cantidad 7,600]
***Alumno (Christian)**: Lo dividimos entre los que nos piden.*
***Evelyn:** ¿Qué es lo que nos piden? La cantidad es el denominador.*
***Alumna (Luz María):** Entonces lo dividimos entre 4.*
***Evelyn:** Muy bien, entre 4. ¿Y luego? ¿Qué sigue?*
***Alumna (Luz María)**: Hay que multiplicarlo* [Se refiere al resultado de la división]
***Evelyn:** ¿Por cuánto lo vamos a multiplicar?*
***Alumna (Luz María)**: Por el numerador, por 1*
***Evelyn:** Muy bien.*

(Evelyn, clase 2, líneas 187-204)

[21] Es un ejercicio que al parecer diseño Evelyn para la sesión 1 donde se estudió el mismo contenido de la sesión 2.

Evelyn ayuda a los alumnos con el siguiente ejercicio. Después, les pide que resuelvan los demás. Al parecer, lo hacen sin problemas. La tabla que Evelyn les proporcionó les ayuda a organizar una manera de resolver los ejercicios que se proponen en la lección. Con todo y ello la tabla no es sino una manera mecánica de obtener el resultado. Aun así, la estrategia de Evelyn tuvo resultados pues apoyó a los alumnos de cerca. Un hallazgo similar es el que Gairín (2004) reporta, pues señala que "la relación que establecen [los futuros docentes]… de las fracciones y los decimales es de carácter algorítmica" (p. 237)

Otro recurso que empleó, para identificar las necesidades y dificultades de los estudiantes, fue solicitar a los alumnos que plantearan sus dudas desde el lugar donde estaban sentados en el salón, con la posibilidad de que un compañero pudiera presentar esa misma inquietud y así poder resolverlas de manera conjunta. Lo anterior es muestra de que Evelyn intenta escuchar e interpretar el pensamiento matemático que expresan los estudiantes, una de las características del *Conocimiento del contenido y los estudiantes*:

[Mientras los alumnos resuelven el ejercicio que se muestra en la tabla de abajo, uno de ellos se levanta y hace un comentario a Evelyn, ella le responde]

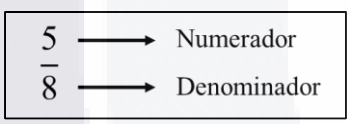
Cantidad	Fracción que pide	Dividimos la cantidad entre lo que nos piden (Denominador)	Multiplicamos por el numerador	Parte de la cantidad
12	$^2/_3$	12 ÷ 3	4 x 2	8
9	$^1/_3$			
36	$^1/_2$			
18	$^2/_4$			
81	$^2/_3$			
27	$^1/_9$			
24	$^3/_3$			

Evelyn: *A ver Esaú, dime desde tu lugar, porque a lo mejor alguien tiene la misma pregunta que tú.*

Alumno (Esaú)*: ¿Siempre vamos a dividir entre el denominador?* [Se refiere a la tercera columna].

Evelyn*: Sí, la cantidad que sea… entre el denominador.* (Evelyn, clase 1, líneas 387-389)

El *Conocimiento del contenido y los estudiantes* también implica saber que a los alumnos se les pueden ocurrir preguntas o respuestas intuitivas, a lo que en muchas ocasiones no se está preparado para hacer frente. El siguiente fragmento de una de las clases resulta interesante porque es un ejemplo de este tipo de preguntas. Más aun, permite reflexionar sobre elementos de otros subdominios no precisamente relacionados con el conocimiento de los estudiantes, como por ejemplo el *Conocimiento especializado del contenido*.

> [Al inicio de la clase Evelyn solicita a una alumna que mencione una fracción, ella dice $\frac{5}{8}$. Evelyn la escribe en el pizarrón]
>
> ***Evelyn****: A ver esto ya lo hemos visto ochocientas cincuenta mil veces ¿cómo se llama el número de arriba Uriel?*
> ***Alumno (Uriel)****: ¡Amm! Numerador*
> ***Evelyn****: Numerador* [Afirmando] Valeria ¿cómo se llama el de abajo?
> ***Alumna (Valeria)****: Denominador*
> ***Evelyn****: Denominador ¿verdad?* [Escribe en el pizarrón]
>
> 
>
>
> ***Alumna (Natalia)****: ¿Cómo se llama la rayita?*
> ***Alumno (Diego)****: Raya*
> ***Evelyn****: ¿La raya?*
> …
> ***Alumno (Diego)****: Se llama división.*
> ***Alumno (Uriel)****: La división entre los dos grupos.*
> ***Evelyn****: La verdad no lo sé. No sé cómo se llama la raya de en medio.*
> ***Alumno (Jordan)****: ¿Isra cómo se llama la raya de en medio?*
> ***Alumno (Israel)****: Raya*
> ***Alumno (Uriel)****: Raya de fracciones*
> ***Evelyn****: A ver lo voy a investigar para mañana, pero ustedes también ¿va?* (Evelyn, clase 1, líneas 23-48)

La pregunta de la alumna acerca de cómo se llama la raya es un ejemplo del tipo de preguntas intuitivas que los estudiantes pueden hacer. Evelyn, en primera instancia no supo cómo reaccionar, se puede decir que hasta se sintió un poco abrumada. Al ver a Evelyn sorprendida por la pregunta de la alumna, la profesora titular se acerca y discretamente le muestra su teléfono móvil. Parece que hizo una búsqueda en la web sobre el nombre de la raya:

> ***Profesora titular**:* [Mostrado su teléfono móvil a Evelyn] *Sí, es una línea, no viene especificado el nombre, pero es una línea que nos indica la división.*
> ***Evelyn**: Nunca preguntan cosas así, es como cuando le ponen una división normal y lo expresa de esa manera, o cuando le ponen la casita esta, no ¿verdad?*
>
> (Evelyn, clase 3, líneas 269-271)

Como se mencionó en este mismo fragmento es posible identificar rasgos de otros subdominios, por ejemplo, del *Conocimiento especializado del contenido*. Evelyn al inicio de las sesiones observadas, regularmente, les pregunta a los alumnos cómo se llaman "las partes de una fracción", a lo que seguido cuestiona a ciertos alumnos en particular "¿cómo se llama el número de arriba?". Lo anterior sugiere que Evelyn identifica las características de las fracciones que es necesario sus alumnos aprendan. Para ella resulta importante el conocimiento de "las partes de una fracción" quizá como un elemento que soportará la adquisición de un futuro aprendizaje.

El *Conocimiento del contenido y los estudiantes* implica al profesor prever que los estudiantes puedan quedarse con una idea equivocada del contenido matemático que se estudia. Evelyn, en ocasiones, no consideró que la forma de resolver un problema no siempre es útil para enfrentar otro. Lo cual se puede observar en el fragmento que se presenta en seguida.

> [Evelyn plantea el siguiente problema a sus alumnos:]
>
> **Evelyn:** *En 2° C los niños que tienen la letra más bonita son dos quintas partes, y esas dos quintas partes son… ocho niños.*
>
> [Rápidamente un alumno responde:]

Alumno (Jordan): *5 x 8 son… cuarenta. ¡Son cuarenta niños en total!*
(Evelyn, clase 3, líneas 156-159)

El alumno (Jordan) multiplica la cantidad que le dan (8) por el denominador (5). Evelyn deja pasar esa respuesta y más adelante cuando, en el pizarrón ella resuelve el problema y el resultado es 20, el alumno reclama:

Alumno (Jordan)*: Pero son veinte… nos tendría que dar cuarenta* (Evelyn, clase 3, líneas 205-207)

El alumno (Jordan) respondió al problema que Evelyn planteó de acuerdo a la estrategia de solución que una alumna empleó en una sesión anterior (véase fragmento Evelyn, clase 3, líneas 93-136). En esa sesión Evelyn pide que calculen lo siguiente: " De un grupo de 27 alumnos, cuántos representan $\frac{1}{3}$". A lo que un alumno responde que es necesario dividir el total (27) entre el denominador (3).

Esta limitante, en el *Conocimiento del contenido y los estudiantes*, también es reportada por Depaepe et al. (2015) pues encuentran que los futuros profesores que encuestaron presentaron complicaciones para identificar y atender dificultades relacionadas con estrategias de resolución de problemas de estos números en los alumnos de educación primaria. Al respecto el programa de estudios de matemáticas también hace referencia a que los profesores, al planificar sus clases, deben anticipar comportamientos (estrategias, habilidades y dificultades) en los alumnos para hacer de eso la base que permita la construcción de aprendizajes (SEP, 2011b).

La confusión del alumno (Jordan) también puede deberse al tipo de problema que se emplea, pues Evelyn propone encontrar un "todo" conociendo una parte. Y, aunque, el procedimiento que el alumno (Jordan) emplea lo puede llevar encontrar la solución, se pudo observar que Evelyn no previó que los alumnos pudieran enfrentar tales errores.

5.2.1.5 Conocimiento del contenido y la enseñanza

Con relación a este subdominio Evelyn evidencia rasgos que lo caracterizan. Por ejemplo, se puede decir que posee un conocimiento que le ayuda a presentar un compendio de actividades que, didácticamente, se relacionan con las propuestas del programa de estudio de matemáticas de la escuela primaria. Durante las observaciones se identificó, en cada clase, una estructura como la siguiente:

1. Para comenzar realiza preguntas a los estudiantes (como por ejemplo ¿Quién me dice un tema de matemáticas que estudiamos durante el bimestre pasado? ¿Alguien recuerda las actividades que realizamos el día de ayer en la clase de matemáticas? Con ellas intenta recuperar los conocimientos previos sobre fracciones como por ejemplo cómo se llaman los elementos que componen una fracción (numerador y denominador). Además, pretende que los alumnos recuerden los elementos importantes estudiados en sesiones anteriores, como por ejemplo el nombre de los elementos que conforman una fracción o la manera de calcular una fracción de un total dado.
2. Luego para el inicio de la clase presenta diversas actividades, antes de la actividad central de la sesión. Por ejemplo, el planteamiento de problemas para que todo el grupo intente resolverlos individualmente o por equipos, empleando, en primer lugar, sus propios conocimientos, compartiendo con los compañeros de equipo e incluso revisando los apuntes que los alumnos tenían registrados en sus cuadernos. En una de las sesiones Evelyn llevó en su mochila una bolsa de dulces, la mostró a los alumnos y les comentó: “Tengo en mi mochila 36 dulces, pero solo pienso repartir $\frac{2}{3}$ entre los compañeros del grupo ¿cuántos dulces repartiré?” Con este tipo de actividades intentó promover lo que Brousseau (2007) en la Teoría de las Situaciones Didácticas denomina como Situaciones de Acción. Al respecto, el programa de matemáticas menciona que, con el fin de involucrar a los alumnos en la construcción del conocimiento matemático, que el profesor “debe permitir al estudiante encarar un desafío con sus propios medios, es decir, movilizar

conocimientos previamente adquiridos SEP, 2011b). Se puede decir que Evelyn, con los problemas y las actividades que programó para realizar con los alumnos, trató de considerar estas sugerencias.

3. En seguida propone actividades de desarrollo como realización de ejercicios en hojas de trabajo o páginas del libro de texto, con las que pretendió que los estudiantes alcanzaran los propósitos de cada sesión. Durante el desarrollo de las actividades procura proporcionar diversas ayudas a los estudiantes, sea mediante preguntas o sugerencias.
4. Finalmente procedía a realizar el cierre de la sesión. Se pudo observar que, por lo general, el cierre de las sesiones carecía de actividades en las que Evelyn realizara una síntesis o resumen del contenido estudiado. En su lugar, limitó a mencionar que dado que la mayoría de los alumnos ya había terminado de resolver los ejercicios o problemas era tiempo de pasar a estudiar otra asignatura.

En seguida se describen los rasgos del *Conocimiento del contenido y la enseñanza* que Evelyn evidenció durante las sesiones observadas. En todas las clases que se observaron Evelyn cuestionó a los alumnos acerca del nombre de las “partes” que conforman una fracción, esto es, numerador y denominador. Este hecho, permite inferir que para Evelyn ese dato es importante para las actividades que se desarrollaron.

Uno de los indicadores que ayudan a profundizar en el análisis de este subdominio es que el profesor debe saber usar ejemplos con datos concretos en lugar de pretender desarrollar propiedades o conceptos matemáticos de forma general. Se puede decir que Evelyn pose este conocimiento pues al inicio de las sesiones que se observaron recurrió a ejemplos que se correspondían con el contexto próximo a los alumnos:

***Evelyn**: Tengo en mi mochila 36 dulces, pero como Eli, Leonardo y otros niños no me están poniendo atención, no los voy a repartir todos. No, voy a repartir nada más dos terceras partes de los dulces, no los voy a repartir todos, nada más dos terceras partes de los dulces ¿cuántos voy a repartir?*

(Evelyn, clase 2, línea 21)

Se trata de un problema en el que está implícita la noción de fracción como *parte-todo*. Sin embargo, no se pudo obtener evidencia que muestre que Evelyn contaba con el conocimiento que le permitieran saber lo anterior. Lo que se puede comentar es que con actividades como las que propone Evelyn intenta seguir el enfoque de enseñanza de las matemáticas propuesto en los programas de estudio. Pues como se comentó al inicio de este apartado, se espera que el profesor plantee la solución de "problemas prácticos, comúnmente llamados de la vida real" (SEP, 2011d).

El *Conocimiento del contenido y la enseñanza* exige que los profesores contar con un repertorio de estrategias para proporcionar ayudas a los alumnos. Particularmente cuando los alumnos tengan confusión o dificultad al resolver un problema o ejercicio. Evelyn dio muestra de algunas estrategias que ella conoce, por ejemplo:

a) Recordar a los alumnos algún paso que olvidaron para resolver un ejercicio o problema.
b) Agrupar a los estudiantes que tienen dudas similares para apoyaros juntos. Como se observó en el subdominio *Conocimiento del contenido y los estudiantes* los reúne para, junto con ellos, intentar resolver las dudas y dificultades. Aunque, conviene mencionar que, la estrategia que usa se basa principalmente en el cuestionamiento directo a los alumnos a quienes apoya.
c) Solicitar a ciertos alumnos, regularmente a quienes terminaron primero las actividades, que ayuden a otros.

Las ayudas que proporcionó Evelyn, no siempre se correspondieron con la propuesta didáctica que se describe en el programa actual de matemáticas en educación primaria en donde se sugiere "utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados" (SEP, 2011b p. 347). Por ejemplo, en ocasiones Evelyn recurrió a la exposición sobre cómo resolver los ejercicios propuestos en la actividad dejando de lado que los alumnos buscaran una solución o intercambiaran ideas con sus compañeros:

[En la sesión 1 se estudió el contenido: "uso de las fracciones para expresar partes de una colección". Al comenzar la clase Evelyn entregó a los alumnos una hoja con las actividades a realizar].

Evelyn*: Miren, les voy a dar… una hojita a cada uno, y vamos a hacer un ejercicio primero todos juntos, y luego ya lo van a hacer cada quien. Entonces ahorita van a ir viendo y lo vamos a ir haciendo.*

[La hoja contiene una tabla como la que se muestra]

Cantidad	Fracción que pide	Dividimos la cantidad entre lo que nos piden (Denominador)	Multiplicamos por el numerador	Parte de la cantidad
12	$^2/_3$	12 ÷ 3	4 x 2	8
9	$^1/_3$			
36	$^1/_2$			
18	$^2/_4$			
81	$^2/_3$			
27	$^1/_9$			
24	$^3/_3$			

Alumno (Jared): *¿Es en equipo?*
Evelyn: *Mientras reparto las demás vayan pegándola en su libreta. Voy a explicar cómo la vamos a resolver.*

(Evelyn, clase 1, línea 185)

Evelyn decidió explicar la manera de completar la tabla, Aunque bien pudo solicitar a los alumnos que, con base en el ejemplo del primer renglón, intentaran resolver los demás.

Otro indicador que contribuye a profundizar en el análisis de este subdominio es el conocimiento, por parte del profesor, acerca de cómo gestionar la participación de los alumnos durante el estudio de un contenido matemático. La gestión de la participación involucra saber cuáles preguntas formular sobre el contenido matemático que se estudia para involucrar a ciertos estudiantes (por ejemplo los más inquietos o los más pasivos). Una muestra de las acciones a las que Evelyn recurre para gestionar la participación de los alumnos es el cuestionamiento directo, en ocasiones solicita la intervención de alumnos que platican o juegan con el fin de llamar su atención.

[En la sesión 1 donde se estudió el contenido "uso de las fracciones para expresar partes de una colección" como parte de las actividades de inicio Evelyn, junto con los alumnos resuelven el "Tienen 12 fichas, si les pido $\frac{2}{3}$ de ellas ¿Cuántas fichas me deben entregar?". Para ello emplean material concreto (12 fichas cada alumno). Evelyn observa que tres estudiantes conversan entre sí, al parecer no están realizado el ejercicio].

***Evelyn**: A ver, vamos a hacer otro, pero aquí me van a ayudar Natalia, Leonardo y Alejandra.*
***Evelyn**: Leonardo, dime la cantidad.*

[Por cantidad se refiere a un número de fichas, es decir a un "todo" (en este caso un todo continuo) del que obtendrán una parte, una fracción]

***Evelyn**: Una cantidad, la que tú quieras*
…
***Alumno (Leonardo)**: ¡9!*
***Evelyn**: ¡Alejandra! ¿Qué fracción vas a querer de 9? ¿Cuál?*
***Alumna (Alejandra)**: ¡Un tercio!*
***Evelyn**: Y luego Natalia ¿qué sigue?*
***Alumna (Natalia)**: Dividir 3 entre 9.*
***Evelyn**: ¿3 entre 9? No, al revés. Adentro ponemos la cantidad* [el todo] *y lo dividimos entre las partes que nos dice la fracción ¿qué partes nos dice?*

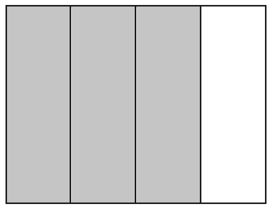
(Evelyn, clase 1 líneas 337-346)

Otro rasgo que caracteriza a subdominio es el conocimiento del potencial de los esquemas gráficos que ayudan al profesor a presentar un contenido matemático a los estudiantes. En el fragmento que sigue se muestra la importancia que le concede a los esquemas particularmente a los dibujos de figuras geométricas (rectángulos, cuadrados o círculos) con los que representan un entero. La situación que se describe corresponde al estudio del contenido "uso de las fracciones para expresar partes de una colección" abordado en la sesión 1:

[Como actividad de inicio Evelyn escribe en el pizarrón la fracción $\frac{3}{4}$]

***Evelyn**: A ver, ahora levantando la mano ¿qué representa el de arriba? Eh, Alejandro ¿qué representa?...* [El alumno responde algo inaudible] *Pero ¿qué representa el de arriba? ¿qué nos quiere decir?*

[Varios alumnos gritan y no se entienden las respuestas que ofrecieron. Evelyn dibuja en el pizarrón la siguiente figura y colorea tres de las cuatro partes]



Evelyn*: Las partes que se seleccionan, a veces las coloreamos, a veces las agarramos ¿verdad? Entonces el número de abajo es la parte que se divide entonces aquí tengo el entero ¿En cuántos lo dividí?*

Alumnos (Varios)*: En cuatro*

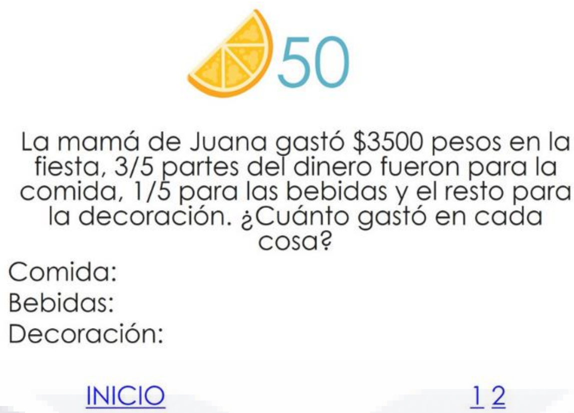
Evelyn*: En cuatro ¿verdad? ¿Y cuántas partes agarré o coloré? Tres ¿verdad? Entonces agarre 3 de 4 verdad, quiere decir que es tres cuartos.*

Alumno (Jordan)*: Pintamos 3 y nos queda una.* (Evelyn, clase 1, líneas 37-41)

Como se observa, Evelyn, aunque recurre a esquemas gráficos (figuras geométricas), emplea un enfoque muy directivo en la enseñanza. No espera a que los estudiantes respondan, por el contrario, es ella quien lo hace; por ejemplo, en el fragmento de la clase muestra cómo Evelyn concluye que la parte sombreada son los tres partes de las cuatro que conforman el rectángulo. Es evidente que la profesora intenta que los estudiantes comprendan el significado de la fracción como parte-todo (3 de 4), pero su clase se reduce a una exposición, sin una mayor participación de los alumnos que solo escuchar y responder preguntas guiadas sin una reflexión.

Un profesor, como parte su *Conocimiento del contenido y la enseñanza*, debe saber cómo evocar algún contenido o procedimiento estudiado con anterioridad. En la quinta sesión que se observó de Evelyn, ella propuso un repaso de los contenidos estudiados en las cuatro clases anterior. Para ello diseñó una presentación en el software Power Point que contendía diferentes problemas. Organizó al grupo en equipos y solicitó que cada equipo seleccionara un problema a resolver. La manera en que Evelyn evoca un procedimiento ya empleado se muestra en el siguiente fragmento:

[Un equipo de alumnos intenta resolver el siguiente problema.]



[Una de las alumnas del equipo llama a Evelyn para que los apoye]

Alumna (Iris)*: Maestra ¿* $\frac{3}{5}$ *son 700?*

Evelyn*: ¿* $\frac{3}{5}$ *son 700? No, acuérdate, son los mismos problemas del libro* [se refiere a las actividades de la página 120 del libro de texto que se muestra en la figura 5.21] *donde te equivocabas porque multiplicabas por 1 cuando te pedían 3 o 2, ¿te acuerdas?*

Alumna (Iris)*: Sí*

Evelyn*: Este es de 1* [se refiere a un tercio y señala el número 700] *y te piden ¿cuántos?*

Alumno*: ¿3500?*

Evelyn*: Esto es de* $\frac{1}{5}$ [se refiere a la cantidad 700] *uno solo* [recalca]. *Y te piden* $\frac{3}{5}$ *para la comida, entonces ¿qué haces con este?* [Con el número 700]

Alumna (Iris)*: Lo… multiplico*

Evelyn*: ¿En total esto* [se refiere a la fracción $\frac{1}{5}$] *son 3,500 pesos?*

Alumno*: ¡Ah! entonces este lo multiplico por 3*

(Evelyn, clase 5, líneas 193-202)

Evelyn, para evocar un procedimiento recuerda una actividad que se realizó en otra clase y que era similar al problema que los alumnos resolvían. Además, recuerda a los alumnos los problemas que enfrentaron para resolver las actividades anteriores. Lo que ayuda a los alumnos resolver el problema que se les plantea. Es de notar que, aunque evoca actividades realizadas en el libro, no promueve que los alumnos intenten resolver los problemas empleando sus propios recursos. La actividad que Evelyn propuso, tuvo la finalidad de recapitular los contenidos matemáticos estudiados durante las cuatro sesiones anteriores. Buscó que los alumnos, de alguna manera, emplearan los aprendizajes que adquirieron. En el fragmento anterior apoya a la alumna (Marifer) a recordar "un paso" que no recuerda para resolver el problema. Es un intento por lograr uno de las propuestas del actual enfoque de enseñanza de las matemáticas en educación primaria que concibe al profesor como un actor que cuestiona los procedimientos de resolución que siguen los estudiantes, las dudas, evoca situaciones anteriores y sobre todo que conoce los procedimientos y argumentos que los estudiantes hacen al enfrentarse a un problema (SEP, 2011d).

5.2.1.6 Conocimiento del currículo

El *Conocimiento del currículo* involucra que los profesores conozcan los contenidos que aparecen en el libro de texto que se emplea, además de cómo están organizados. También implica el conocimiento de cómo está organizado el programa de la asignatura o curso que imparte.

Un ejemplo de que Evelyn conoce los contenidos que aparecen en el libro de texto, se infiere a partir de las actividades que propuso al de inicio de las sesiones de clase que se observaron. Un ejemplo de ello se muestra en el siguiente fragmento de la clase cuatro, en donde se estudió el contenido "uso de las fracciones para expresar partes de una colección":

> [Como actividad de inicio Evelyn solicita a un alumno pegue, en el pizarrón, once dibujos que representan figuras de animales. Luego pregunta a todo el grupo:]
>
> ***Evelyn****: De estos animales, de los 11 ¿cuáles comúnmente se puede tener de mascota?*
> ***Alumnos****:* [Gritando] *Yo, yo, yo, el perro, el gato, el conejo…*
> ***Alumna (María Fernanda)****: El gato, el perro…*
> ***Evelyn****:* [Encierra en un círculo a los animales que nombra la alumna] *¿Cuál más?*
>
> [Algunos alumnos nombran otros animales. Evelyn continúa encerrando dentro de un círculo los animales que nombran los alumnos]
>
> ***Evelyn****: A ver ¿cuántos animales de los que puse ahí se pueden tener de mascota?*
> ***Alumnos****: Seis.*

Evelyn: *Seis ¿verdad? Seis de mascota.* [Escribe en el pizarrón 6 de 11] *Entonces, escuchen y levanten la mano el que quiera decir la respuesta, ¿qué fracción de estos animales se puede tener de mascota? ¿Cuál fracción Jared?*
Alumno (Jared): *6/11, porque son 11 animales y los que agarramos 6.*

[Evelyn continúa la clase preguntando a los alumnos:]

Evelyn: *De estos animales (11) ¿qué fracción son ovíparos? ¿qué más de animales son grandes que una persona adulta?*

[Después les solicita que resuelvan las actividades de las páginas 122 y 123 de su libro de texto, les comenta]

Evelyn: *A ver en su libro van a resolver la página 122 y 123… que es un ejercicio como este, pero con otros animales ¿sí*?

(Evelyn, clase 4, líneas 57-76)

Las páginas 122 y 123 corresponden a la lección "Desafío 66 ¿Qué fracción es?" en donde se espera que los alumnos realicen actividades en las que determinen qué fracción representa una parte de una cantidad dada. En estas páginas se plantea la resolución de problemas similares a los que Evelyn propuso a los alumnos al inicio de la sesión. En la figura 5.21 se presenta la imagen de las actividades que se proponen en la página 123 del libro de texto de los alumnos. Como se mencionó, con lo anterior se infiere que Evelyn conoce los contenidos y las actividades que aparecen en el libro de texto.

En relación con el conocimiento de la organización del programa de la asignatura de matemáticas de cuarto grado, se puede decir que Evelyn, con las actividades que desarrolló durante las sesiones, intentó seguir la metodología didáctica propuesta en el programa de la asignatura de matemáticas:

> El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el estudio de las matemáticas consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. Al mismo tiempo, las situaciones planteadas deberán

implicar justamente los conocimientos y habilidades que se quieren desarrollar (SEP, 2011b, p. 347).

Así Evelyn en cada una las clases intenta partir de una situación o problema que plantea a los alumnos. Por ejemplo, en la sesión 1 organiza al grupo en equipos y les entrega una bolsa 12 fichas de colores. Luego les solicita que de la bolsa saquen $\frac{1}{2}$ del total de fichas que contiene la bolsa. Evelyn otorgó un espacio de tiempo para que los alumnos discutieran y pudieran dar una respuesta. Después continuó pidiéndoles que obtuvieran otras fracciones como por ejemplo $\frac{2}{3}$ del total. De igual modo, en la sesión 2, como inicio de la actividad, planteó repartir entre los alumnos del grupo dos terceras partes de una bolsa que contenía 36 dulces. Para ello cuestionó a los alumnos acerca de la cantidad a repartir, para ello organizó al grupo en equipos y les permitió que discutieran y después que comentaron al grupo sus resultados.

Evelyn evidenció un *Conocimiento del currículo* cercano tanto al programa y como al libro de texto, pues las actividades que propuso en cada sesión se correspondieron con los contenidos que se describen allí. Además, intentó poner en práctica los principales fundamentos de la metodología didáctica que se propone en el propio programa.

5.2.1.7 Valoración del conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones y decimales de Evelyn

Con base en la información que de describió en cada uno de los subdominios que conforman el MKT, Evelyn evidencia que cuenta con varios rasgos de un Conocimiento Matemático para la Enseñanza de las fracciones y los decimales cercano a la propuesta de enseñanza sugerida en los programas de estudio. Trata de partir de situaciones problemáticas cercanas al contexto de los alumnos (videojuegos, animales, juegos de competición). Aunque, es necesario comentar que en ocasiones no promueve que sean los alumnos quienes con sus propios recursos (conocimientos, estrategias, habilidades) resuelvan los problemas que les plantea. Este hecho puede tener variadas explicaciones, entre ellas puede ser que la falta de experiencia en la carrera docente propicie que Evelyn termine realizando una práctica basada en las explicaciones. Tal vez el tiempo programado para la clase de matemáticas sea menor al que los alumnos requieren para construir un aprendizaje tal y como se sugiere en el programa de asignatura.

Lo anterior hace pensar que Evelyn intenta hacer frente a uno de los retos que el programa de matemáticas de cuarto grado de educación primaria menciona al trabajar con una metodología basada en el diseño de situaciones problemáticas:

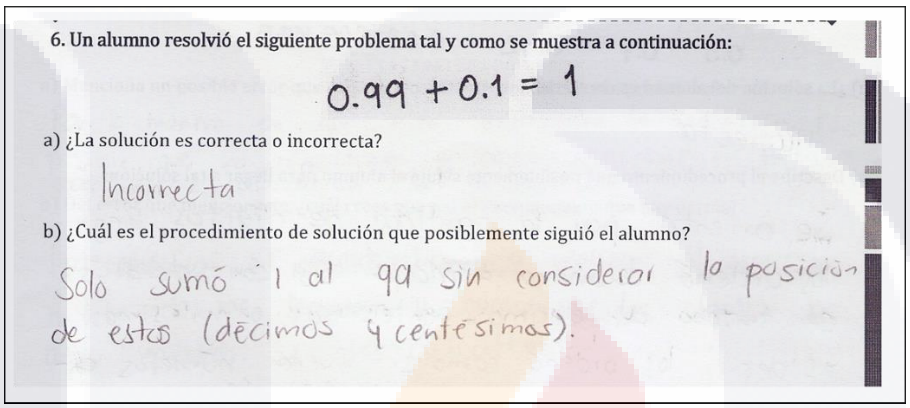
> Que los alumnos se acostumbren a buscar por su cuenta la manera de resolver los problemas que se plantean mientras el maestro observa y cuestiona entre los equipos de trabajo, tanto para conocer los procedimientos y argumentos que se ponen en juego, como para aclarar ciertas dudas, destrabar procesos y lograr que los alumnos puedan avanzar (SEP, 2011b, p. 348).

Algunos conocimientos para enseñar fracciones y decimales que Evelyn manifestó en el cuestionario de conocimientos didácticos que se le administró se observaron durante las sesiones de clase. Por ejemplo, de acuerdo con su discurso se pudo advertir que Evelyn identifica errores que comenten los alumnos al resolver problemas que implicaron el uso de la interpretación “Parte-todo” de las fracciones. También empleó recursos como figuras geométricas para acercar a los alumnos a esta misma interpretación de las fracciones.

Con relación a cada uno de los subdominios del MKT se puede decir que Evelyn cuenta con un *Conocimiento común del contenido* matemático suficiente, que le permite resolver problemas y ejercicios que involucran contenidos (de fracciones y decimales) que se estudian en la educación primaria.

Respecto al *Conocimiento especializado del contenido* con base en la información se puede decir que Evelyn posee conocimientos con los que le permiten reconocer cómo funcionan los procedimientos matemáticos para resolver problemas en los que implican el uso de las fracciones para expresar partes de una colección y el cálculo de un *total* conociendo una *parte* (una fracción). Conocimientos que le ayudan a identificar aspectos importantes de un contenido para la enseñanza de las matemáticas (como por ejemplo los elementos de una fracción: numerador y denominador). También a identificar errores que comenten los alumnos al estudiar contenidos matemáticos de fracciones y decimales.

En el cuestionario de conocimientos didácticos, se pudo observar que Evelyn identificó errores de procedimiento y la causa de los mismos al resolver problemas con decimales. Por ejemplo, en situaciones hipotéticas como la que se muestra en la figura 5.22.


6. Un alumno resolvió el siguiente problema tal y como se muestra a continuación:

$0.99 + 0.1 = 1$

a) ¿La solución es correcta o incorrecta?

Incorrecta

b) ¿Cuál es el procedimiento de solución que posiblemente siguió el alumno?

Solo sumó 1 al 99 sin considerar la posición de estos (décimos y centésimos).

Figura 5.22. Respuesta de Evelyn a la pregunta 6 del cuestionario de conocimiento didácticos.

La observación de las sesiones se concentró en el análisis del conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones y decimales. Como parte del *Conocimiento especializado del contenido* sería esperable que un profesor conociera las diversas interpretaciones de las fracciones. Destaca que no se encontró evidencia que permita sostener que Evelyn conoce estas interpretaciones. Aun cuando en la escuela normal se determina su estudio.

Con relación al *Conocimiento en el horizonte matemático* que se pudo observar en las clases de Evelyn, solo se puede decir que es capaz de relacionar un contenido matemático que se estudia en una unidad con otro que aparece más adelante en el programa de estudios.

Los indicadores del *Conocimiento del contenido y los estudiantes* que se observaron en el trabajo de Evelyn se acercan a la propuesta metodológica planteada en el programa de estudios. Procura que los problemas y actividades que les propone pertenezcan a un contexto cercano a la realidad de los alumnos (como los videojuegos) con lo que también busca que sean interesantes para ellos. Se esfuerza en delegar la responsabilidad de resolver los problemas o ejercicios a los estudiantes. Con todo y esto en ocasiones no considera las respuestas equivocadas que ofrecen los alumnos como un momento para la reflexión y la argumentación de las mismas y con ello contribuir a la construcción del conocimiento matemático.

El *Conocimiento del contenido y la enseñanza* que revela la práctica de Evelyn hace suponer, como ya se dijo, que intenta llevar a cabo las sugerencias del enfoque didáctico, aunque no siempre lo consigue, pues a veces termina realizando una explicación del tema. Durante las observaciones realizadas se percibió que Evelyn posee un conocimiento que le permite presentar un compendio de actividades para el estudio de un contenido matemático. Para ello trata de usar ejemplos con datos concretos cercanos a los alumnos. Las estrategias que emplea Evelyn para gestionar la participación de los alumnos son el cuestionamiento directo, y en ocasiones solicita la intervención de alumnos que platican o juegan con el fin de llamar su atención.

Se infiere que Evelyn revisó materiales como el libro de texto y el programa de la asignatura pues las actividades que llevó a cabo con sus alumnos al inicio de cada sesión, aparte de seguir las orientaciones didácticas, son similares a las que se proponen en ellos. Lo anterior como parte de su *Conocimiento del currículo*.

5.2.2 Caso 2: Gabriel

Durante las observaciones, Gabriel cursaba el 7° semestre de la Licenciatura en Educación Primaria en una Normal Rural del estado de Durango. La Escuela Normal a la que asistía se encuentra ubicada a poco más 50 kilómetros de la ciudad de Durango. Realizaba sus prácticas profesionales en un grupo de 4° grado de una escuela primaria cercana al centro de la ciudad de Durango.

Se observaron y video-grabaron cinco sesiones de la clase de matemáticas que Gabriel llevó a cabo con los alumnos de la primaria. En las clases que se observaron se analizaron temas relacionados con los siguientes contenidos:

Sesión 1: (16 de noviembre de 2016) Uso de fracciones para expresar oralmente y por escrito medidas diversas.

Sesión 2: (22 de noviembre de 2016) Uso de las fracciones para expresar partes de una colección.

Sesión 3 y 4: (23 y 24 de noviembre de 2016) Representación de fracciones de magnitudes continuas (longitudes, superficies de figuras).

Sesión 5: (28 de noviembre de 2016) Resolución, con procedimientos informales, de sumas o restas de fracciones con diferente denominador en casos sencillos (medios, cuartos, tercios, etcétera)[22].

Gabriel también propuso actividades que no se relacionaban con relacionadas con un contenido en particular, pero que incluyeron fracciones como la lectura y escritura de fracciones comunes, la identificación de fracciones propias e impropias y la transformación de fracciones impropias en mixtas. Durante la mayoría de las sesiones la profesora titular del grupo no estuvo presente, las ocasiones en que lo hizo apoyó a Gabriel con el control de la disciplina del grupo. Además, se centró en revisar trabajos pendientes de los alumnos.

[22] Gabriel trabajó con contenidos relacionados con fracciones no así con números decimales.

En seguida, se describen los rasgos del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT) que Gabriel demostró poseer durante las clases observadas. Para complementar el análisis se presentan algunos resultados que Gabriel obtuvo tanto en el examen de conocimientos sobre la fracciones y decimales como en el cuestionario de conocimientos didácticos.

Gabriel evidencia contar solo con algunos conocimientos que se relacionan con los subdominios del Modelo del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT) y con diferentes niveles de desarrollo y comprensión. Un apunte interesante en el caso de Gabriel es que el conocimiento que demostró poseer parece no relacionarse con las propuestas didácticas que se hacen en el programa de estudios de matemáticas de la escuela primaria.

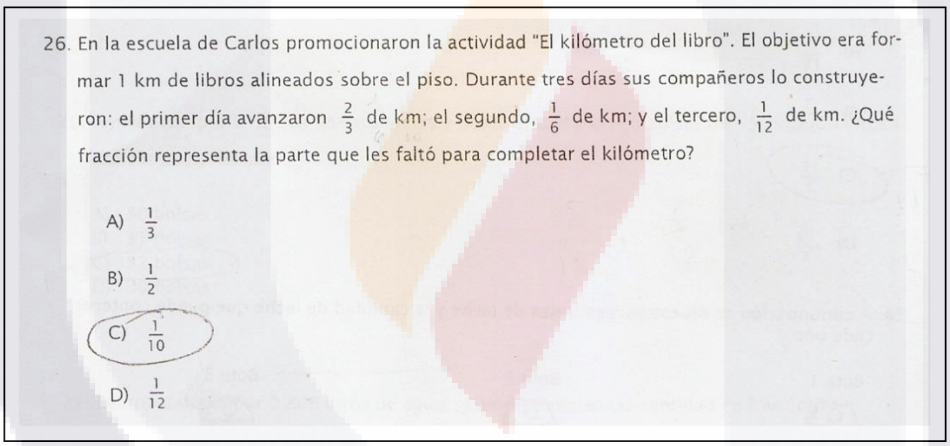
5.2.2.1 Conocimiento común del contenido

Gabriel obtuvo 29 aciertos de 30 reactivos propuestos en el examen de conocimientos matemáticos sobre fracciones y decimales. Se puede decir que cuenta con los conocimientos para hacer frente a distintos problemas que se plantean en la escuela primaria que implican este tipo de números, es decir, posee el *Conocimiento común del contenido* suficiente acerca de fracciones y decimales que se espera desarrollen los alumnos de primaria. El puntaje de esta prueba indica que Gabriel podría resolver problemas que involucran los siguientes conocimientos:

1. Resolver problemas que implican sumas, restas, multiplicaciones o divisiones con números decimales.
2. Comparar y ordenar números decimales.
3. Resolver problemas que implican la propiedad de densidad de los números decimales.
4. Resolver problemas que implican transformar números decimales a fracciones decimales.
5. Resolver problemas que implican el uso de fracciones equivalentes.

6. Resolver problemas que implican ubicar fracciones y decimales en la recta numérica.
7. Resolver problemas que implican la propiedad de densidad de los números fraccionarios.
8. Resolver problemas que implican sumar, restar, multiplicación o división de fracciones comunes.

El único reactivo que tuvo incorrecto fue el número 26, el cual implicó realizar una suma de tres fracciones propias. En la figura 5.23 se presenta el reactivo y la respuesta de Gabriel. El problema que plantea el reactivo involucra la suma de tres fracciones cuyos denominadores son múltiplos uno de otro.



26. En la escuela de Carlos promocionaron la actividad "El kilómetro del libro". El objetivo era formar 1 km de libros alineados sobre el piso. Durante tres días sus compañeros lo construyeron: el primer día avanzaron $\frac{2}{3}$ de km; el segundo, $\frac{1}{6}$ de km; y el tercero, $\frac{1}{12}$ de km. ¿Qué fracción representa la parte que les faltó para completar el kilómetro?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{10}$

D) $\frac{1}{12}$

Figura 5.23. Respuesta de Gabriel al reactivo 26 en el examen de conocimientos sobre fracciones y decimales.

La respuesta correcta es la opción D, sin embargo, Gabriel selecciona la C. Dado que Gabriel no dejó ningún registro acerca de cómo resolvió el problema, se puede suponer, de entre las múltiples lo siguiente:

1. Pudo haber convertido las fracciones en números decimales ($\frac{2}{3} = 66\overline{6}$); $\frac{1}{6} = 0.166\overline{6}$; $\frac{1}{12} = 0.0834$).
2. Luego sumar las cantidades decimales que obtuvo: $0.\ 66\overline{6} + 0.166\overline{6} + 0.0834 = 0.9168$).

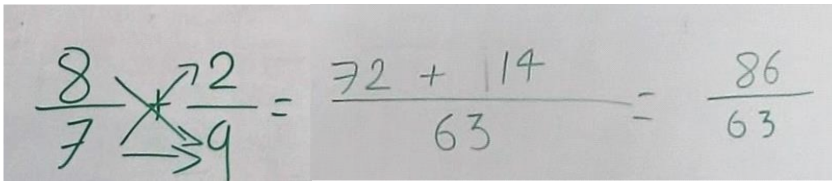
3. Luego convertir el resultado en una fracción decimal ($\frac{9}{10}$).
4. Por último deducir que el faltante ─que es la interrogante que se plantea en el problema─ es $\frac{1}{10}$, pues con ello se completa la unidad, por lo que selecciona la opción C como la correcta.

En la sesión 5, Gabriel abordó el contenido de "Resolución, con procedimientos informales, de sumas o restas de fracciones con diferente denominador en casos sencillos (medios, cuartos, tercios, etcétera)" (SEP, 2011b, p. 76). Para el desarrollo de la clase propuso, de inicio, la resolución de un algoritmo de suma que contenía dos sumandos[23]. Por la forma en que lo explica se puede confirmar que posee el conocimiento para resolver un algoritmo como éste.

> [Se trata del inicio de la sesión de observación número 5, Gabriel solicita a los alumnos que tengan listas sus libretas de matemáticas, pues es tiempo de comenzar la clase. Les solicita silencio, luego toma un marcador y se dirige a los niños comentando:]
>
> ***Gabriel:*** *A ver* [se dirige hacia los alumnos, camina hacia el pizarrón y escribe: $\frac{8}{7}+\frac{2}{9}$]. *Voy a explicarlo primero: si quiero sumar* $\frac{8}{7}+\frac{2}{9}$ *¿cómo le haríamos?*
> ***Alumna (Mireya):*** *Tenemos que multiplicarlo.*
> ***Gabriel:*** *¿Cómo?*
> ***Alumna (Mireya):*** *El número de arriba y el otro vamos a multiplicar…* [Inaudible]
> ***Gabriel:*** *¿Sale? Primero multiplicamos este* [señala el número 7] *¿7 x 9? Grábense el orden. ¿7 x 9?* [Se refiere a los denominadores de las fracciones a sumar]
> ***Alumna [Mireya]:*** *63*
>
> [El profesor voltea hacia el pizarrón y escribe *"Suma"* como título]
>
> ***Gabriel:*** *7 x 9, 63 ¿verdad?*
> ***Alumno:*** *Si*
> ***Gabriel:*** *8 x 9*
> ***Alumno [Ricardo]:*** *8 x 9…*
> ***Alumna [Mireya]:*** *72*
> ***Alumnos [Varios]:*** *72, 72…*

[23] Al margen del análisis de los conocimientos didácticos que Gabriel manifiesta, así como de la secuencia didáctica que emplea, el ejemplo se presenta con la intención de hacer explícito el *Conocimiento Común del Contenido* acerca de la suma de fracciones que Gabriel posee.

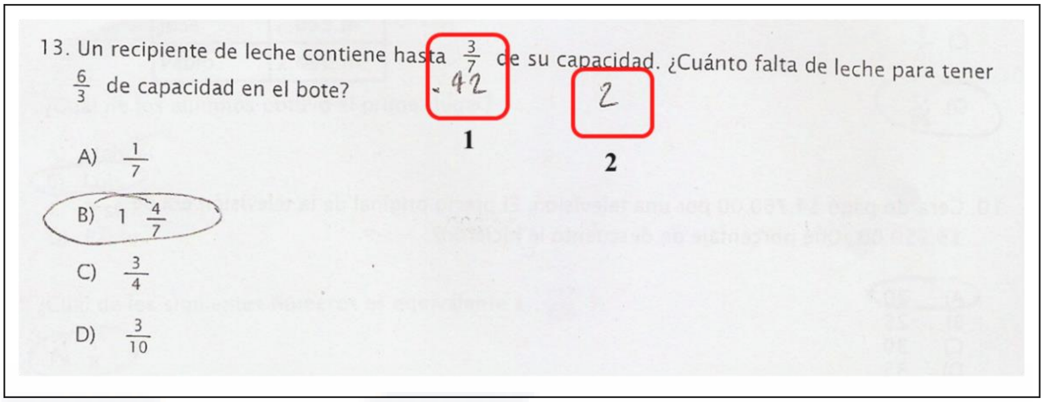
Gabriel: *72 ¿verdad? Fíjense, 7 x 9… 63 y luego 8 x 9. Lo crucé ¿verdad? 72. Y luego ¿qué es lo que estamos haciendo?*



Alumno [Ricardo]*: suma*
Gabriel*:* [Escribe el signo +] *Y luego 7 x 2*
Alumno [Ricardo]*: 14*
Gabriel: *14. Ahora, primero fíjense, vamos a pasar esto ¿qué nos da? 63* [Se refiere al resultado de multiplicar los denominadores]. *Y ¿72 + 14?*
Alumno [Manuel]: *86, yo siempre lo adivino.*
Gabriel: *¿Sale? Entonces éste* [señala la fracción $\frac{86}{63}$] *es el resultado de* $\frac{7}{8}+\frac{2}{9}$. (Gabriel, clase 5, líneas 30-55)

Al analizar este fragmento es posible observar que Gabriel es capaz de usar términos y notación matemática para resolver una suma de dos fracciones propias, es decir, conoce el método de productos cruzados que lo lleva a encontrar la solución. EL procedimiento está centrado implica multiplicar denominadores y numeradores: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ab+bc}{bd}$, tal que b,d $\in \mathbb{N} \neq 0$.

Una de las herramientas que Gabriel más emplea, y que se puede decir, forma parte de su *Conocimiento común del contenido* es la conversión de fracciones a números decimales incluso a enteros. La figura 5.24 presenta la respuesta que ofreció al reactivo 13. Se aprecia que transforma las fracciones que conforman el planteamiento del problema, es decir, $\frac{3}{7}$ y $\frac{6}{3}$ los cuales se resaltan en los recuadros marcados con los números 1 y 2, a números decimales y enteros de manera respectiva. Seguramente con ello es que obtiene la respuesta correcta.


13. Un recipiente de leche contiene hasta $\frac{3}{7}$ de su capacidad. ¿Cuánto falta de leche para tener $\frac{6}{3}$ de capacidad en el bote?

.42

2

1 2

A) $\frac{1}{7}$

B) $1\frac{4}{7}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{3}{10}$

Figura 5.24. Respuesta de Gabriel al reactivo no. 13. Examen sobre fracciones y decimales.

En las estrategias de solución que emplea en los reactivos que involucraron fracciones no realiza cálculos con ellas si no con números decimales, o al menos eso se infiere dada la información que dejó plasmada en el examen. Se puede decir, que al realizar operaciones con decimales Gabriel es capaz de resolverlos algunos problemas con fracciones (véase figura 5.24). También demostró que tiene el conocimiento para resolver al menos algoritmos de suma y resta de fracciones mediante procedimientos formales, como los productos cruzados.

La estrategia de conversión de las fracciones a números decimales para resolver problemas o algoritmos en los que se usa fracciones es una de las más recurrentes por parte de los futuros profesores observados. Konic (2013) encontró un resultado similar, pues cerca de la mitad de los futuros profesores que encuestó resolvieron correctamente los problemas con números decimales que les planteó. Gairín (2004) también reporta un hallazgo muy parecido al indicar que los futuros profesores que participaron en su estudio, para comparar dos fracciones, regularmente, las trasformaron en decimales.

5.2.2.2 Conocimiento especializado del contenido

El *Conocimiento especializado del contenido* implica habilidades para que un profesor desarrolle el trabajo de enseñar matemáticas. Se trata de un conocimiento mediante el cual las características de un contenido en particular se hagan visibles y accesibles para los estudiantes. Este conocimiento se evidencia a partir de que un profesor:

a) Sabe el significado de los conceptos.
b) Reconoce la procedencia y las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos de solución.
c) Sabe qué conceptos, propiedades o reglas están tras una respuesta, pregunta o solución no estándar, inusual o inesperada de los estudiantes, lo que le permite saber si su razonamiento matemático funciona en general o no, así como justificar el pensamiento matemático que utiliza el estudiante, o describir matemáticamente el procedimiento que el estudiante está usando.
d) Reconoce la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes.
e) Conoce los aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático (Sosa, 2011, p. 455)

Con relación a este subdominio Gabriel evidencia, particularmente, dos de los rasgos anteriores. Primero, es capaz de identificar algún concepto, propiedad o reglas que está tras una respuesta de los estudiantes, lo que le permite justificar el pensamiento matemático que utiliza uno de sus alumnos, por ejemplo, en una de las sesiones Gabriel identifica la propiedad de equivalencia de las fracciones:

> [En la tercera sesión Gabriel propone a los alumnos jugar al dominó de fracciones. Los reúne en equipos y les facilita un paquete de fichas. Cada ficha se compone, en un extremo, de una fracción escrita y en el otro, de una figura geométrica dividida en partes iguales que representan una fracción. Gabriel participa en el juego de uno de los equipos, con el propósito de apoyar a los alumnos.]
>
> ***Gabriel:*** *Dale.* $\frac{2}{6}$ *o* $\frac{1}{2}$. [Se dirige a uno de los alumnos (Abraham)] *¿No? ¿Pasas?*

[Abraham coloca en el extremo donde está $\frac{1}{2}$ una ficha que contiene la fracción $\frac{3}{6}$]

Gabriel: *Esos son…* [afirmando] *ándale, exacto.*
Alumno (Carlos): *¡Achis! ¿Por qué?*
Gabriel: *Porque son $\frac{3}{6}$, y $\frac{3}{6}$ es igual a $\frac{1}{2}$.*

[El alumno comenta algo, pero es inaudible]

Gabriel: *Pero si está correcta, está correcta.* (Gabriel, clase 3, líneas 311-316)

Gabriel identifica el pensamiento que sigue el alumno para colocar una fracción equivalente a la que se solicita. En términos matemáticos Gabriel identifica que la propiedad de equivalencia de dos fracciones, la cual es definida de la siguiente manera: se dice que dos fracciones son equivalentes cuando: $\frac{m}{n} \doteq \frac{p}{q}$ si y solamente si $mq = np$.

Sin embargo, la explicación que proporciona a Carlos, el alumno que pregunta, no es la más clara, tal vez pudo aprovechar para hacer una pequeña explicación al grupo sobre las fracciones equivalentes ($\frac{2}{4}$ por ejemplo) y con ello ampliar las posibilidades para colocar otras fracciones en cada turno de los alumnos durante el juego.

Segundo, se percibió que Gabriel reconoce los aspectos matemáticos que son importantes para la enseñanza, por ejemplo, hacer notar la importancia de un dato específico que es necesario para estudiar un tema en particular. Como muestra, durante la observación de la primera sesión, en la que estudió el uso de fracciones para expresar oralmente y por escrito medidas diversas, Gabriel es insistente con sus alumnos en la manera correcta de leer las fracciones. Ejemplo de ello se observa en el fragmento siguiente:

Gabriel: *Vamos a leer las fracciones ¿sale?* [Escribe $\frac{1}{2}$ en el pizarrón]. *¿Cómo se lee?*
Alumnos [varios]: *Un medio*
Gabriel: *Un medio, entonces si la fracción está divida en dos ¿cómo se lee? Medio, ¿si está en tres?*
Alumnos [varios]: *Tres medios*
Gabriel: *No, si está dividido en tres.*
Alumno [Said]: *Tercios*
Gabriel: *Tercios ¿verdad? Tercios. ¿Si está en cuatro?*

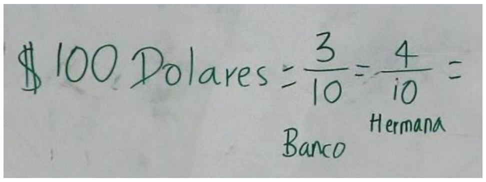
***Alumnos**: Cuartos*
***Gabriel**: Cuartos. En qui… ¿en cinco?*
***Alumnos [varios]**: Quintos*
***Gabriel**: En 6, sextos, ¿en 7? séptimos, octavos, novenos, décimos y llegando al 11 ¿cómo diríamos?*
***Alumna [Victoria]**: ¿Onceavos?*
***Gabriel**: A partir del 11 se lee el número tal cual está, por ejemplo, el 11, el 12, el 13, el 14, a ver, 11. A partir del 11 a cada número se le agrega la palabra "avo", entonces sería ¿once? Onceavo ¿12?*
***Alumnos**: Doceavo*
***Gabriel**: Doceavo [afirmando]*
***Alumna [Fátima]**: ¿Lo copiamos?*
***Gabriel**: Si. Treceavos ¿Sale? A partir del 11 todos se leen… quinceavo. Si tenemos 25 ¿cómo se leerían?*
***Alumno**: Veinticincoavos* (Gabriel, clase 1, líneas 44-57)

Gabriel identifica que la lectura de fracciones con denominadores mayores a 10 es una dificultad de los alumnos, por lo que les facilita una regla que se sustenta en una regularidad, es decir, agregar la terminación "avo" que les ayuda a leerlos. Este hecho, aunque demuestra que Gabriel identifica la importancia de un dato en específico. Visto con otra óptica pone de manifiesto el poco conocimiento que posee acerca de las ideas didácticas que subyacen a la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria donde se prioriza el empleo de secuencias de situaciones problemáticas que inviten a reflexionar y a encontrar diferentes formas de solución así como algunas regularidades al resolver problemas (SEP, 2011b).

Un rasgo que caracteriza a este subdominio y que parece Gabriel no había desarrollado aun, es el conocimiento de los procedimientos y cálculos que están tras algunas respuestas de los estudiantes. Durante el estudio del contenido: "uso de las fracciones para expresar partes de una colección" les propone el siguiente problema:

[Supongamos que tengo 100 dólares. Y voy a pagar $\frac{3}{10}$ de esos 100 dólares al banco. Además, voy a pagar otros $\frac{4}{10}$ a mi hermana que me prestó. ¿Cuánto dinero me queda a mí?]

***Gabriel**: A ver* [el profesor anota $\frac{3}{10}$ y $\frac{4}{10}$ en el pizarrón] *¿ya resolviste cuántos dólares le vamos a pagar al banco? y ¿cuántos a…?*



Una alumna, Mariana, se acerca a la resolución de problema habiendo realizado los cálculos mentalmente, le externa su resultado a Gabriel y él solo le pregunta cómo logró llegar hasta allí. La alumna se confunde y no puede explicarlo. Gabriel no le pone más atención ni retoma la aproximación de Mariana, tal como se puede observar en el siguiente fragmento.

Gabriel*: ... Si tengo $100 y le tengo que pagar* $\frac{3}{10}$ *al banco ¿Cuántos dólares le vamos a pagar al banco? Primero ¿cómo le hacemos?*
Alumna [Mariana]*: 100 le vamos a pagar de los 100, 30.*
Gabriel*: ¿$30? ¿cómo le hiciste?*
Alumna [Mariana]*: Porque ahorita le puse un cero y otro 0*

La respuesta de Mariana implicó, como ella menciona, agregar a la fracción 3/10 un cero tanto al numerador como al denominador y con ello deduce que son 30 dólares de 100, lo que pagarán al banco. Se puede decir que recurrió a fracciones equivalentes (3/10 = 30/100). También se puede interpretar que la respuesta de Mariana se corresponde con la interpretación de las fracciones como razón, particularmente, en su uso como porcentajes, donde se establece una relación entre un número y 100. Por ejemplo "determinar el 60% de 35, esto es, cómo actúa la fracción $\frac{60}{100}$ sobre el número 35(Llinares y Sánchez, 1997 p. 71).. En el ejemplo Mariana pudo inferir que 100 dólares representaban el 100%.

Desde la Teoría de la Situaciones Didácticas, una de las situaciones que un profesor debiera promover es ofrecer un espacio para la argumentación. Brousseau las denomina Situaciones de Formulación donde los alumnos sientan la necesidad de comunicar a otros las conjeturas que han hecho sobre las acciones para resolver un problema (Brousseau, 2007). Sin embargo, Gabriel no fue capaz de identificar la lógica de resolución de Mariana, que, aunque sea una aproximación es un resultado a considerar para el logro del aprendizaje. En lugar de retomar la participación, la ignora.

5.2.2.3 Conocimiento en el horizonte matemático

Este subdominio fue difícil de observar en el caso de Gabriel. Se puede decir que no demostró contar con el *Conocimiento en el horizonte matemático*, o al menos dejó pasar una oportunidad importante para relacionar un tema del grado escolar con el que practicaba y uno anterior, es decir, 3° de primaria, que es donde se estudia la equivalencia de fracciones. Lo cual puede ser revisado en el fragmento que se ofrece como primer ejemplo en el subdominio del *Conocimiento especializado del contenido* (Gabriel, clase 3, líneas 311-316, que se encuentra en la página 173).

5.2.2.4 Conocimiento del contenido y los estudiantes

De acuerdo a las sugerencias didácticas que se ofrecen en los programas de estudio de matemáticas para educación primaria (SEP, 2011b, 2001c, 2011d). Se puede decir que el *Conocimiento del contenido y los estudiantes* de Gabriel es limitado. Se pudo observar, con base en la manera en que realiza las actividades de inicio en cada clase, la siguiente estructura de las clases que impartió:

1. Presentación del tema por parte del profesor,
2. Realización de tareas o ejercicios por parte de los alumnos y
3. Revisión y corrección del trabajo de los alumnos por parte del profesor.

Durante las actividades los alumnos desempeñaron un papel pasivo. Es decir, se centraron en resolver ejercicios que Gabriel les propuso. La idea de un alumno pasivo que solo recibe información por parte del docente rompe con la propuesta didáctica que se sugiere en el programa de la asignatura, en donde como ya se dijo, se deja claro que se apuesta al diseño de secuencias de situaciones problemáticas en las que se ponga especial atención a la producción autónoma de los alumnos mientras son enfrentados a ellas. Las sugerencias didácticas que se mencionan en el programa radican en que las situaciones que se diseñen deben despertar el interés de los estudiantes, invitarlos a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver problemas y sobre todo a formular argumentos mediante los cuales validen sus resultados (SEP, 2011b). Con todo y ello conviene comentar que en los programas de estudio de la educación primaria se carece de elementos que hagan explícito el enfoque didáctico sugerido. Además, esta idea del alumno pasivo es difícil de erradicar pues por muchos años ha estado presente en la enseñanza.

Para ejemplificar lo anterior se muestra el fragmento del inicio de la clase donde Gabriel estudio el contenido: "uso de las fracciones para expresar partes de una colección". Él comienza la sesión pidiendo a los alumnos que escriban en sus libretas el siguiente enunciado como título: "Calcular la fracción de un número", después continua la clase de la siguiente manera:

[Gabriel toma una hoja y comienza a leer]

Gabriel: *"Para calcular la fracción de un número dividimos la cantidad entre el denominador y el resultado se multiplica por el numerador, ¿le entendieron?, por ejemplo:*

Alumnos [varios]: *No* [en coro]

Gabriel: [Escribe en el pizarrón] *Tenemos* $\frac{2}{5}$*. Por ejemplo, si tenemos 50 manzanas ¿sale? y sólo voy a tomar* $\frac{2}{5}$ *¿Cómo se le va a hacer? Dividimos la cantidad entre el denominador y se multiplica por el denominador ¿Cuánto es?*

Alumnos [varios]: *¿25? ¿10? ¿2?*

Gabriel: *A ver 50 entre ¿cuánto?*

Alumnos (varios): *Entre dos, dos quintos, dos quintos*

Gabriel: *¿Porque 2?* [Haciendo una mueca de fastidio] *¡Entre dos no!*

Alumna [Lupita]: *35 manzanas*

Gabriel: *No* [enojado], *me van a copiar estas definiciones.*

Alumno [Antonio]: *5 medios*

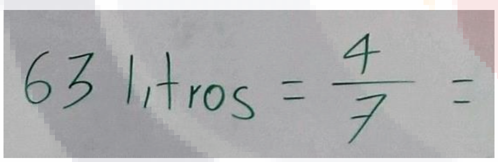
Gabriel: *Entre más batallen más les voy a poner. Escriban en su cuaderno:* [Les comienza a dictar] *"Para calcular la fracción, de un número dividimos la cantidad entre el denominador y su resultado se multiplica por el numerador". Ahora sí.* (Gabriel, clase 2, líneas 27-35).

En esta manera de iniciar la clase se evidencia que Gabriel no demuestra rasgos que caracterizan el subdominio del conocimiento de los estudiantes, pues no da muestra de conocer las dificultades de los alumnos acerca del contenido matemático que pretende estudiar. Además de que no parece haber previsto o anticipado que los alumnos no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática. Por el contrario, se percibe que no intenta hacer comprensible el contenido matemático mediante ejemplos concretos o que no hay interés por motivar a los estudiantes hacia el tema. Este ejemplo deja a la vista la carencia del conocimiento de los estudiantes por parte de Gabriel, así como de las sugerencias didácticas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Konic (2013) reporta un hallazgo muy parecido al señalar el conocimiento de los futuros docentes hacer de cómo los alumnos de primaria aprenden matemáticas es difuso.

En la misma sesión, se pudo observar que Gabriel no apuesta porque los alumnos superen las dificultades o necesidades que les representa la comprensión de una definición que, para ellos, carece de significado. El siguiente fragmento es muestra de ello:

[Gabriel escribe el siguiente problema en el pizarrón]

Gabriel: *Sí tengo 63 litros de gasolina y sólo quiero* $\frac{4}{7}$..

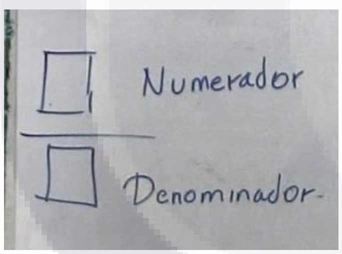


Alumna [Paola]: *43 litros*
Gabriel: *¿Por qué 43?*
Alumna [Paola]: *¿7 entre 63? ¿4 entre 63?*
Gabriel: *No. ¿Cómo vamos a dividir 4 entre 63?*
Alumna [Paola]: *¿63 entre 4?*
Gabriel: *Lo vamos a dividir entre el denominador* [Señala el número 7 de la fracción que está escrita en el pizarrón] *¿Cuál es el denominador? El 7, entonces dividimos 63 entre 7 ¿cuánto da? la tabla del 7 ¿por qué tenemos que multiplicar el 7 para que nos dé?*
Alumna [Paola]: *7 por 9*
Gabriel: *Está bien. 7 por 9 ¿cuánto da?*
Alumna [Paola]: *63*
Gabriel: *¿Sale? tenemos 9 y si tengo* $\frac{4}{7}$. *¿por cuánto voy a multiplicar el nueve?*

Alumna [Paola]: *por 0*
Gabriel: *El resultado ¿por qué se multiplica?*
Alumna [Paola]: *Por 60 y 32, no, por 9 por 9 por 9 por 9*
Gabriel: *No, el resultado es 9*
Alumno [Jared]: *Por los 7, por los séptimos, por los séptimos*
Gabriel: *Lee la oración que escribiste* [Le insiste a Paola]
Alumna [Paola]: [Lee en voz alta] *Para calcular la fracción de un número dividimos la cantidad entre el denominador ¡denominador!* [grita]
Gabriel: *Ajá*
Alumna [Paola]: *Y su resultado se multiplica por el numerador*
Gabriel: *Y su resultado ¿qué?*
Alumna [Paola]: *Se multiplica ¿por cuál?*
Gabriel. *¿Cuál es el numerador?*
Alumna [Paola]: *El 4*
Gabriel: *Entonces ¿por cuánto se multiplica?*
Alumna [Paola]: *4 por 9*
Gabriel: *¿Cuánto es 4 por 9?*
Alumna [Paola]: *30 y 31, 30 y 36, 36, 36*
Gabriel: *Muy bien, entonces, ¿a cuánto equivale* $\frac{4}{7}$ *de 63 litros?*
Alumna [Paola]: *36 litros.*
Gabriel: *Están batallando mucho con eso ¡eh!* (Gabriel, clase 2, líneas 101-132)

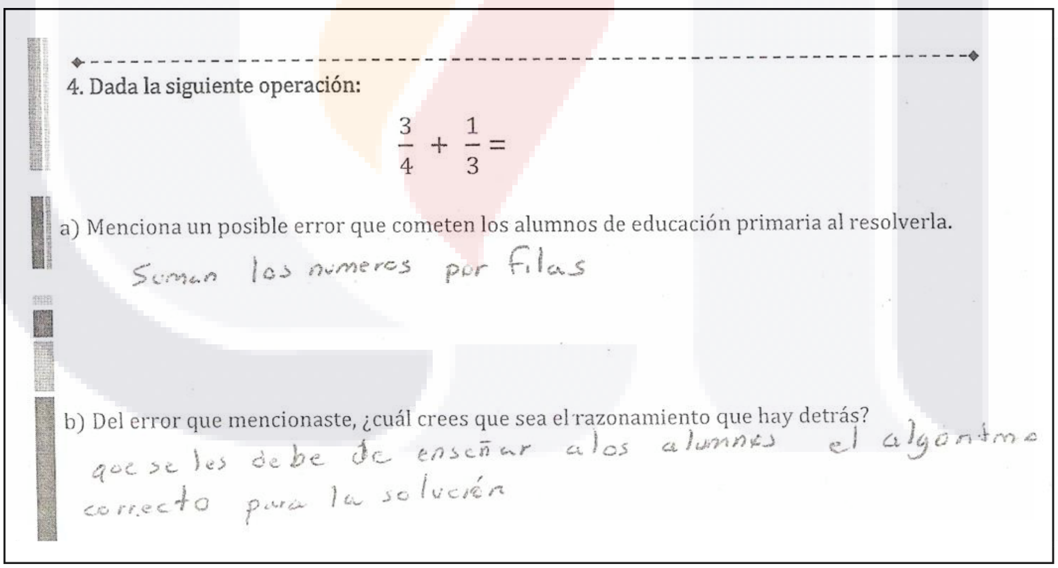
En el fragmento de la clase anterior se observa como la alumna (Paola) comprende que se trata de seguir una secuencia de operaciones para obtener el resultado, pero no tiene ninguna idea de por qué debe de hacerse así. Como estrategia para ayudar a la alumna Gabriel solo se limita a solicitarle que lea la definición que acaban de escribir. Tal pareciera que el aprendizaje matemático se pudiera lograr solo mediante la ejecución de un procedimiento o la comprensión de las definiciones. Al final se observó que Paola entendió la secuencia del algoritmo, pues pudo resolver los ejercicios propuestos por Gabriel. Aunque tal vez siguió sin entender la lógica subyacente. Este proceder se halla lejos de la idea de que el docente debe ser capaz de elegir estratégicamente cuándo y de qué manera intervenir para comunicar, cuestionar u ofrecer información (Brousseau, 2007).

Durante la realización de otras actividades se infiere que Gabriel considera a sus alumnos como sujetos que no pueden razonar por sí solos al resolver problemas matemáticos. Puesto que les insiste en que deben de lograr la comprensión de una definición que les proporcionó con anterioridad, además de que deben tener la capacidad para su aplicación. El fragmento que se proporciona en seguida es ejemplo de lo anterior:

> [En la sesión 4, donde se estudiaron las características de las fracciones propias e impropias, Gabriel les solicita a sus alumnos que en sus libretas copien la siguiente definición: “Fracción propia, es aquella en la que el numerador es mayor que el denominador y entonces la fracción es mayor que la unidad”. Por ejemplo $\frac{5}{3}$ Un alumno se acerca y le cuestiona al profesor sobre el enunciado que está escrito en el pizarrón]
>
> ***Alumno [Diego]****: Y esta ¿Cómo se hace?*
> **Gabriel***: ¿Que dice ahí? Que el denominador es mayor al numerador ¿verdad? entonces ¿cómo sería?*
> ***Alumno [Diego]****: No se puede.*
> **Gabriel***: Si se puede. ¿Qué dice ahí la impropia?*
> ***Alumno****: Aquella en la que el número…*
> **Gabriel***:* [Interrumpiendo al alumno] *En la que el numerador es mayor que el denominador*
> ***Alumno [Diego]****: ¿Qué es eso profe? No entiendo*
>
> [El profesor se acerca al pizarrón y dibuja la siguiente figura. El alumno lo observa]
>
> 
>
>
> **Gabriel***:* [Dirigiéndose al alumno] *¿Qué número pondríamos para que sea más grande el numerador que el denominador? ¿Qué número pondríamos arriba, que esté más grande?*
> ***Alumno [Diego]****: ¡Ah sí! Ya entendí*
>
> (Gabriel, clase 4, líneas 255-267)

La manera en que Gabriel dirige la clase, es decir, partir de definiciones, luego solicitar que los alumnos realicen ejercicios o resuelvan problemas evidencia una falta de conocimiento de los estudiantes. Para los alumnos es más comprensible un tema si este se aborda con un ejemplo concreto o mediante un problema con el cual los alumnos estén familiarizados. Puede ser mediante una situación problemática que los lleva a movilizar conocimientos previamente adquiridos (situación de acción), a la construcción de un discurso para el intercambio de ideas (situación de formulación) mismas que les permitan justificar los procedimientos (situación de validación) (Brousseau, 2007) que emplean para la solución.

Un hallazgo similar ─que Gabriel no haya considerado las dificultades de los alumnos al resolver problemas─ se pudo observar en las respuestas que plasmó en el cuestionario de conocimientos didácticos. La figura 5.25 contiene la respuesta de Gabriel a la pregunta 4 de dicho instrumento. Con la pregunta se intentó identificar el conocimiento de los futuros profesores para reconocer dificultades que presentan los alumnos de primaria al resolver una suma de fracciones propias. La respuesta de Gabriel al inciso a) es adecuada; la que ofrece en el inciso b) sugiere que, desde su punto de vista, él comenzaría a estudiar el contenido de suma de fracciones por "enseñar" a los alumnos el "algoritmo correcto".



4. Dada la siguiente operación:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} =$$

a) Menciona un posible error que cometen los alumnos de educación primaria al resolverla.

Suman los numeros por filas

b) Del error que mencionaste, ¿cuál crees que sea el razonamiento que hay detrás?

que se les debe de enseñar a los alumnos el algoritmo correcto para la solución

Figura 5.25. Respuesta de Gabriel a la pregunta 4. Cuestionario de conocimientos didácticos.

Como se ya se dijo, el *Conocimiento del contenido y los estudiantes* que manifiesta Gabriel, se aleja de la propuesta didáctica del programa de matemáticas, que sugiere:

> La elección de una situación de aprendizaje y la organización necesaria para su ejecución requieren de la planificación y la anticipación de los comportamientos (estrategias, habilidades y dificultades, entre otras) en las y los estudiantes para hacer de la experiencia la base propicia para el desarrollo de competencias (SEP, 2011b, p. 337).

Por el contrario, Gabriel parte de definiciones y manifiesta una metodología de enseñanza contraria a lo que se menciona.

5.2.2.5 Conocimiento del contenido y la enseñanza

Este subdominio involucra el conocimiento de diversas formas para acercar un contenido matemático a los alumnos, lo que significa que un profesor debe saber las ventajas educativas de utilizar cierta estrategia de enseñanza. Implica valorar y decidir con qué ejemplos empezar una clase, que ejercicios proponer para el desarrollo de la sesión, cuales aportaciones de los estudiantes destacar o cuales ignorar. El *Conocimiento del contenido y la enseñanza* que manifestó Gabriel se centró, casi exclusivamente, en:

1. Explicación de los temas a estudiar, que incluye la manera en que se deben resolver algunos algoritmos o incluso el dictado de definiciones.
2. La realización de ejercicios por parte de los alumnos.
3. El empleo de algunos esquemas gráficos (dibujos) a los cuales los alumnos pueden recurrir para la resolución de ejercicios que él les propone.
4. Revisión, en términos de correcto e incorrecto, de los ejercicios que los alumnos realizan.

Gabriel regularmente comienza las sesiones con la explicación del contenido a estudiar, así como de la manera en que se deben resolver los ejercicios que luego solicitará a los alumnos. El ejemplo que a continuación se presenta corresponde al inicio de la sesión 5 en la que se abordó el contenido "Resolución, con procedimientos informales, de sumas o restas de fracciones con diferente denominador en casos sencillos (medios, cuartos, tercios, etcétera)". En él se puede observar, de manera explícita, como Gabriel señala que será él quien explique, pues después de ello solicitará que resuelvan ejercicios. Se trata del mismo ejemplo que se expuso líneas atrás, en las páginas 158-159 (Gabriel, clase 5, líneas 30-55)

> [Se trata del inicio de la sesión de observación número 5, Gabriel solicita a los alumnos que tengan listas sus libretas de matemáticas, pues es tiempo de comenzar la clase. Les solicita silencio, luego toma un marcador y se dirige a los niños comentando:]
>
> ***Gabriel:*** *Voy a explicar esto, porque voy a poner ejercicios.*
>
> [Luego llama la atención a varios alumnos que platican en el fondo del salón]
>
> ***Gabriel:*** *A ver* [se dirige hacia los alumnos, camina hacia el pizarrón y escribe: $\frac{8}{7} + \frac{2}{9}$].
> *Voy a explicarlo primero: si quiero sumar* $\frac{8}{7} + \frac{2}{9}$ *¿cómo le haríamos?*
> ***Alumna [Mireya]:*** *Tenemos que multiplicarlo.*
> ***Gabriel:*** *¿Cómo?*
> ***Alumna [Mireya]:*** *El número de arriba y el otro vamos a multiplicar…* [Inaudible]
> ***Gabriel:*** *¿Sale? Primero multiplicamos este* [señala el número 7] *¿7 x 9? Grábense el orden. ¿7 x 9?* [Se refiere a los denominadores de las fracciones a sumar]
>
> (Gabriel, clase 5, líneas 30-35)

El fragmento proporciona además información acerca de la manera en que Gabriel concibe el aprendizaje matemático de los alumnos. Es decir, como una serie de procedimientos que es necesario memorizar para luego poder emplear en diversas situaciones o en la solución de ejercicios. Lo anterior se aprecia justo cuando comenta a los alumnos que es necesario que se "graben el orden" en que se multiplican los numeradores y los denominadores.

El mismo ejemplo, si se amplía, proporciona información acerca del conocimiento que Gabriel tiene sobre una característica de este subdominio: el conocimiento acerca de los ejemplos o ejercicios con los cuales comenzar una clase. Aunque el aprendizaje matemático menciona que la memorización, en ocasiones es necesaria, no significa que la mayoría de las actividades se basen exclusivamente en ello, por el contrario, se debe priorizar el uso de situaciones problemáticas que impliquen el razonamiento matemático de los alumnos (SEP, 2011d). Además, la explicación que hace Gabriel de la suma $\frac{8}{7} + \frac{2}{9}$ produce como resultado una fracción que resulta incomprensible para los alumnos (ver figura 5.26).

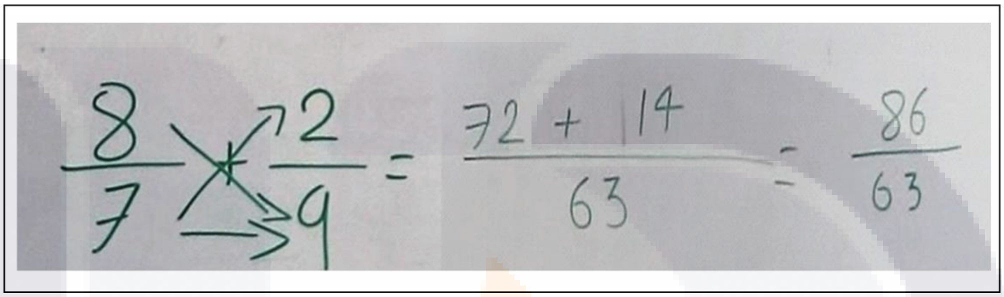


Figura 5.26. Solución al ejemplo con que Gabriel dio inicio a la sesión 5.

La fracción $\frac{83}{60}$ resultado de la suma, además de que ser una fracción impropia difícil de representar, carece de significado pues no existe un contexto o situación que le otorgue sentido. Otro rasgo de este subdominio ausente en Gabriel es el hecho de saber cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes. Después de resolver la suma $\frac{8}{7} + \frac{2}{9}$ que se muestra en la figura 5.26 Gabriel pregunta a los alumnos:

> [Un alumno se acerca a Gabriel, pues tiene dudas sobre el procedimiento para resolver la suma del ejemplo.]
>
> ***Gabriel:*** *¿Resolviste la suma?*
> ***Alumno (Diego):*** *Si*
> ***Gabriel:*** *¿Cómo?*
> ***Alumno (Diego):*** *Sumando 8 + 2 y 7 + 9*
> ***Gabriel:*** *¿Cómo que 8+2?*
> ***Alumno (Diego):*** *Es que no le entiendo.*
>
> [Gabriel deja de atender al alumno y decide volver a explicar la manera de resolver la suma de fracciones empleado otras dos fracciones distintas]
>
> (Gabriel, clase 5, líneas 67-72)

Claramente el alumno comente uno de los errores más frecuentes en el aprendizaje de la suma de fracciones: sumar numeradores y luego denominadores. Fandiño (2009) identifica este como uno de los errores más frecuentes al realizar operaciones con fracciones. Menciona que los alumnos realizan sumas o restas de fracciones de igual manera que harían con números naturales. En ese mismo sentido, Gairín (2004) encuentra que los estudiantes "trasladan su conocimiento sobre números naturales a los racionales [fracciones y decimales], cuestión que obstaculiza la conceptualización de estos últimos" (p.327).

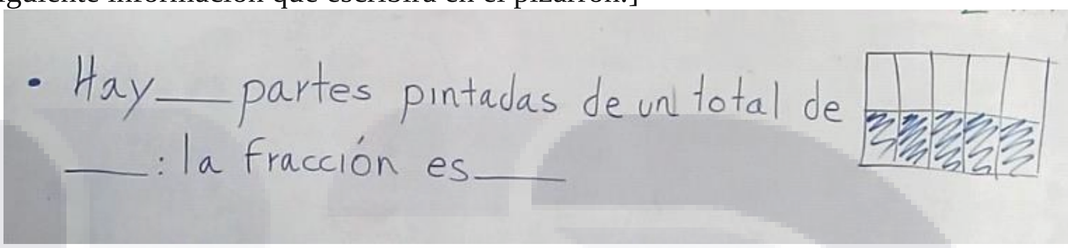
Ante este hecho, Gabriel deja pasar esa respuesta, la cual le pudo haber proporcionado elementos para prevenir posibles confusiones en los demás alumnos. Es esperable que un profesor pueda aprovechar las respuestas incorrectas o lo que desde el programa de estudios se conoce como el uso de un fracaso para potenciar el aprendizaje, aunque también debe ser capaz de explotar una respuesta correcta o una cercana a la solución.

En este subdominio es imprescindible que los profesores cuenten con un conocimiento para presentar un compendio de actividades, específicamente, la capacidad de poder representar de distintas formas un tema (Sosa, 2011). Más aun, estas actividades deben estar acordes con los enfoques didácticos que subyacen a los programas de estudio. En el caso de Gabriel, la manera en que organiza las actividades parece que no se relacionan con la metodología didáctica propuesta en el programa de matemáticas. El fragmento ya usado en el análisis del subdominio *Conocimiento del contenido y los estudiantes* (véase página 178, Gabriel, clase 2, líneas 27-35) sirve de ejemplo.

El compendio de actividades que programa Gabriel se relaciona con una enseñanza directiva, en la que el docente con un rol activo y central es quien proporciona la información a los alumnos. Por su parte, éstos sólo se ejercitan y mediante eso se supone que lograrán adquirir el aprendizaje matemático.

El *Conocimiento del contenido y la enseñanza* exige también conocer la potencialidad de los esquemas gráficos (por ejemplo, figuras geométricas) para representar un contenido. Para el estudio de las fracciones en la escuela primaria lo anterior se vuelve un elemento importante, pues es mediante las diversas representaciones de una fracción que se favorece el aprendizaje de los alumnos. Gabriel intenta emplear algunos dibujos durante el estudio del contenido “Uso de las fracciones para expresar partes de una colección”. Aunque, como se observa en el fragmento siguiente, estos son parte de un estilo de enseñanza centrado más en la realización de ejercicios:

[Gabriel solicita a los alumnos que en sus libretas de matemáticas copien la siguiente información que escribirá en el pizarrón.]

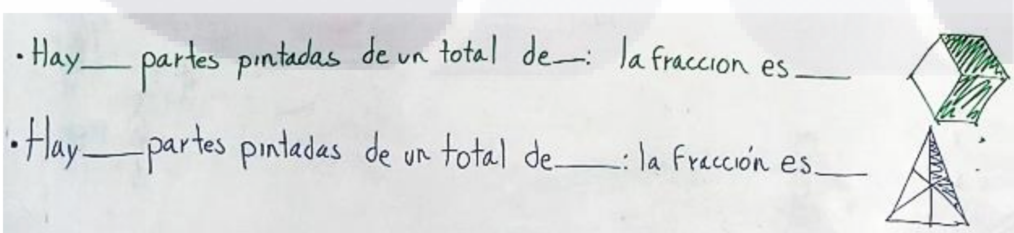


Gabriel: *A ver copian esa para escribir… otra ahorita contestamos todas, ¿sale? También copian la imagen, el dibujo.*
Alumno [Mario]: [Dirigiéndose a Gabriel] *De ese son cinco décimos*
Gabriel: *Muy bien*

(Gabriel, clase 4, líneas 44-53)

El enunciado que Gabriel propone requiere del apoyo de la figura para ser respondido de manera correcta. Es un ejercicio que resulta relativamente fácil para los alumnos de cuarto grado de primaria. Por ello, es que quizá Gabriel decidió incluir otros ejercicios más, en los cuales se incrementara la dificultad, esto con base en el tipo de figuras que emplea.

[Después de que varios alumnos se acercan para mostrar las respuestas al ejercicio anterior, Gabriel escribe en el pizarrón los siguientes enunciados]



Alumna [Leyla]: *Profe ¿verdad que la fracción es lo que está coloreado? Por ejemplo* $\frac{5}{10}$.
Gabriel: *Exacto.*

(Gabriel, clase 4, líneas 96-99)

La intención de Gabriel es que por medio de las figuras los alumnos logren completar dos enunciados que, desde su perspectiva, no implica más que contar el número de partes en que están divididas las figuras (para determinar el denominador de la fracción) y luego contar cuántas de esas partes están coloreadas (para así obtener el numerador) y con ello completar los enunciados. Sin embargo, en este ejercicio, aparentemente fácil para los alumnos, Gabriel revela su falta de conocimiento sobre la representación de fracciones por medio de figuras planas. Primero, porque las figuras parecieran representar más bien sólidos. Segundo, porque aun si se consideran como figuras planas, no están divididas en partes iguales, a esta situación Fandiño (2009) la categoriza como uno de los erros más frecuentes en el aprendizaje de fracciones bajo la etiqueta de "problemas en el reconocimiento de esquemas". Un problema en el reconocimiento de esquemas ocurre cuando se intenta fraccionar una figura en determinado número de partes y estas no resultan iguales en área. Por lo que se habla de una figura dividida en *tantas partes* y no de una figura *dividida en tercios, cuartos, quintos, etc.*

5.2.2.6 Conocimiento del currículo

El *Conocimiento del currículo* de un profesor radica en el conocimiento de los contenidos que lo conforman, la manera en que están organizados y cómo se presentan en el libro de texto. Gabriel parece no establecer una relación entre las actividades que propone y las lecciones del libro que solicita a los alumnos resuelvan. En la sesión de observación 1, donde se estudió el tema "uso de fracciones para expresar oralmente y por escrito medidas diversas", Gabriel pide a los alumnos que copien en sus libretas los enunciados que aparecen en la figura 5.27, para que los resuelvan individualmente.

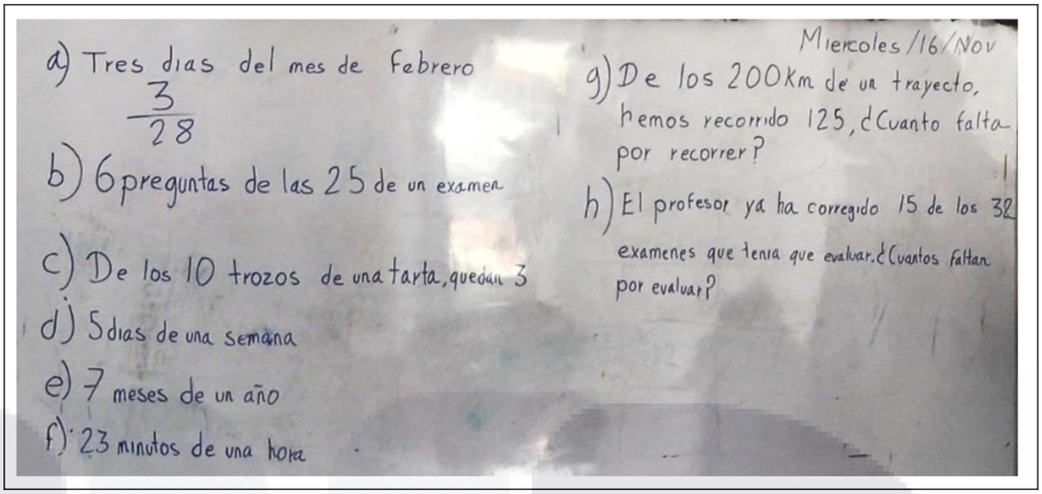
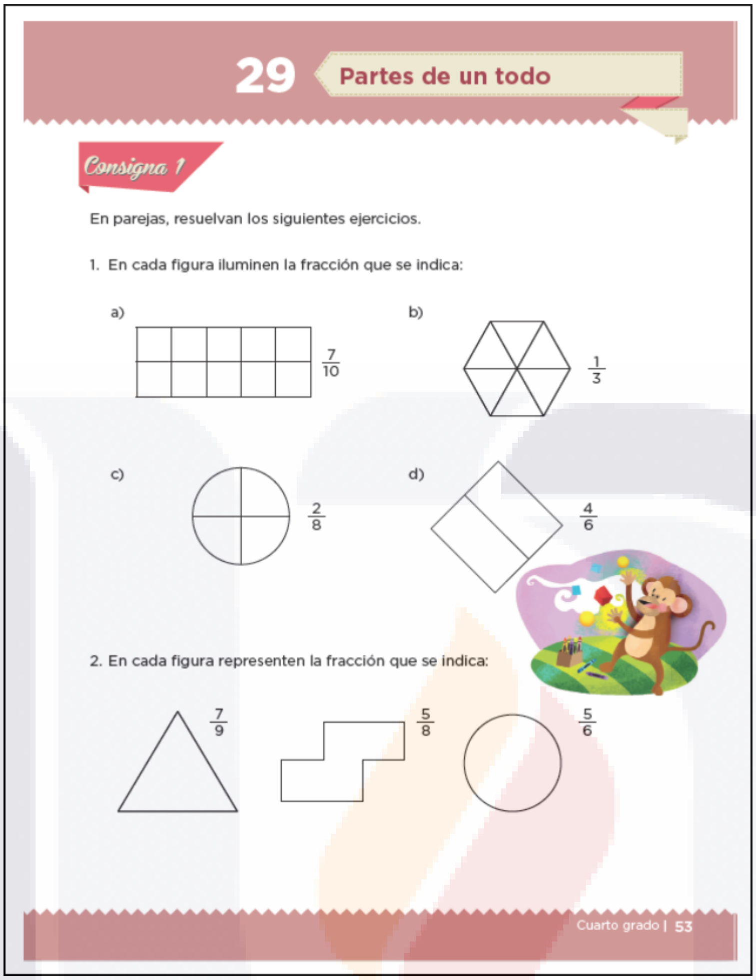


Figura 5.27. Ejercicios que Gabriel propuso durante la sesión de observación 1

La intención fue que los alumnos escribieran la fracción que se forma dado un total (en ocasiones no explícito) y las partes que se "toman" de él. Cuando varios alumnos terminan el ejercicio Gabriel les solicita que realicen las actividades que se proponen en la lección 29 (figura 5.28) del libro de matemáticas. En dicha lección, aunque se abordan fracciones, se centran más en la representación gráfica que en la escritura de estas. Lo cual da la idea de que existe una confusión en el conocimiento de los temas que se proponen en los libros o que Gabriel no logró establecer la conexión entre ambas actividades.


29 Partes de un todo

Consigna 1

En parejas, resuelvan los siguientes ejercicios.

1. En cada figura iluminen la fracción que se indica:

a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{8}$ d) $\frac{4}{6}$

2. En cada figura representen la fracción que se indica:

$\frac{7}{9}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{6}$

Cuarto grado | 53

Figura 5.28. Desafío 29, Partes de un todo. Primaria. Cuarto grado.

Además, el propósito de la lección se centra en que los alumnos usen la noción de equivalencia de fracciones al tener que representarlas gráficamente en figuras planas. Dicha noción, aunque corresponde a otro bloque, no había sido mencionada ni empleada en actividades anteriores.

5.2.2.7 Valoración del conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones y decimales de Gabriel

En el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* que evidencia Gabriel se relaciona más con el conocimiento del contenido matemático que hacia el conocimiento didáctico. En particular con el *Conocimiento común del contenido* de las fracciones y los decimales. Se puede decir que cuenta con un *Conocimiento común del contenido* suficiente, que le permiten resolver problemas y ejercicios en los que están implicadas las fracciones y los decimales.

Con relación al *Conocimiento especializado del contenido*, Gabriel mostró serias deficiencias, pues, aunque logró identificar la manera en que razona un alumno al colocar una fracción equivalente a la que se le solicitó, no fue capaz de aprovechar tal situación para ampliar la información a los demás alumnos del grupo como si no fuera capaz de demostrar un conocimiento más amplio de este conocimiento matemático, en otras palabras de conocer aspectos matemáticos que son importantes para la enseñanza de un tema en particular. Lo anterior también se puede relacionar con el *Conocimiento en el horizonte matemático*, pues un profesor debe contar con los conocimientos necesarios para vincular el contenido que se estudia con otros sean correspondientes al grado escolar donde trabaja o incluso con los de otro nivel educativo.

Las deficiencias más graves se observaron en los subdominios relacionados con la enseñanza y el conocimiento de los estudiantes. Pues es muy notable que Gabriel casi nunca considera los razonamientos e intereses de los alumnos. Por el contrario, se limita a ofrecer explicaciones y solicitar a los alumnos que copien y realicen ejercicios que él escribe en el pizarrón.

Además, los ejercicios que propone no están cercanos al contexto de los alumnos, sino que muchas de las veces los ejemplos que emplea en sus explicaciones son difíciles de comprender y sobre todo de representar. Por ejemplo, cuando en el tema de suma de fracciones propuso, como ejemplo de inicio, un algoritmo cuyo resultado fue $\frac{86}{63}$. Si esto se compara con el *Conocimiento común del contenido* que posee, queda claro que no basta con el conocimiento matemático para enseñar matemáticas, sino que éste debe estar ligado a uno didáctico que permita el diseño de estrategias de enseñanza para favorecer el aprendizaje de los alumnos.

Se observa una diferencia, muy marcada, entre los conocimientos manifestados por Gabriel en los instrumentos aplicados en la primera fase de este estudio (examen y el cuestionario de conocimientos matemáticos y didácticos) y los observados durante el desarrollo de su práctica de enseñanza. A la luz de las competencias que se pretenden desarrollar con el estudio de los temas que conforman el curso de *Aritmética: su aprendizaje y enseñanza*, es claro que el conocimiento de Gabriel está lejos de lo que allí se propone pues se aspira a que los futuros docentes distingan “las características de las propuestas teóricas metodológicas para la enseñanza de la aritmética en la escuela primaria con la finalidad de aplicarlas críticamente en su práctica profesional” (p. 6) y es claro que las actividades que Gabriel plantea a los alumnos están lejos de propuesta la didáctica contenida en los programas de estudio de la educación primaria.

El hallazgo coincide con una de las conclusiones que Mochón y Flores (2010) refieren. Estos autores encontraron que el conocimiento matemático de los profesores, en su mayoría, se limita una enseñanza de tipo instrumental, esto es, una enseñanza que se funda casi exclusivamente en procedimientos mecánicos que involucran técnicas de solución aprendidos de memoria.

Con base en el Modelo del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT), en el caso de Gabriel se nota una disociación entre los subdominios que lo conforman. Pues, aunque, por un lado, muestra un *Conocimiento del Común del Contenido* también revela deficiencias en otros subdominios de carácter didáctico.

Con relación al *Conocimiento del currículo* en Gabriel se observó un conocimiento muy deficiente pues se observó que no logra establecer una relación entre las actividades que propone y las actividades del libro que solicita a los alumnos realicen. Si esto se compara con el curso de Aritmética: su aprendizaje y enseñanza al respecto del *Conocimiento del currículo* de educación primaria, se percibe una muy marcada discrepancia. Una de las competencias a desarrollar en los futuros docentes es que “relacionen los saberes aritméticos formales con los contenidos del eje sentido numérico y pensamiento algebraico del plan y programas de estudio de educación primaria para diseñar ambientes de aprendizaje” (p. 6) es muy claro que Gabriel aun no desarrolla tal competencia.

5.2.3 Caso 3: Arely

Durante la observación de las clases de matemáticas, Arely cursaba el 7° semestre de la Licenciatura en Educación Primaria (LEP) en una Normal Urbana del Estado de Durango. Realizaba sus prácticas profesionales en un grupo de 5° grado de una escuela primaria cercana a la Escuela Normal en la que estudiaba. Como en los cuatro casos anteriores se observaron y video-grabaron cinco sesiones de la clase de matemáticas que Arely impartió. En todas ellas se estudiaron temas relacionados con fracciones y decimales. Las fechas de observación y los contenidos que se estudiaron en cada una de ellas fueron los siguientes:

Sesión 1 (22 de noviembre de 2016): Conocimiento de diversas representaciones de un número fraccionario: con cifras, mediante la recta numérica, con superficies, etc.

Sesiones 2 (23 de noviembre de 2016) y 3 (24 de noviembre de 2016): Análisis de las relaciones entre la fracción y el todo.

Sesiones 4 (29 de noviembre de 2016) y 5 (13 de diciembre de 2016): Análisis del significado de la parte decimal en medidas de uso común; por ejemplo, 2.3 metros, 2.3 horas.

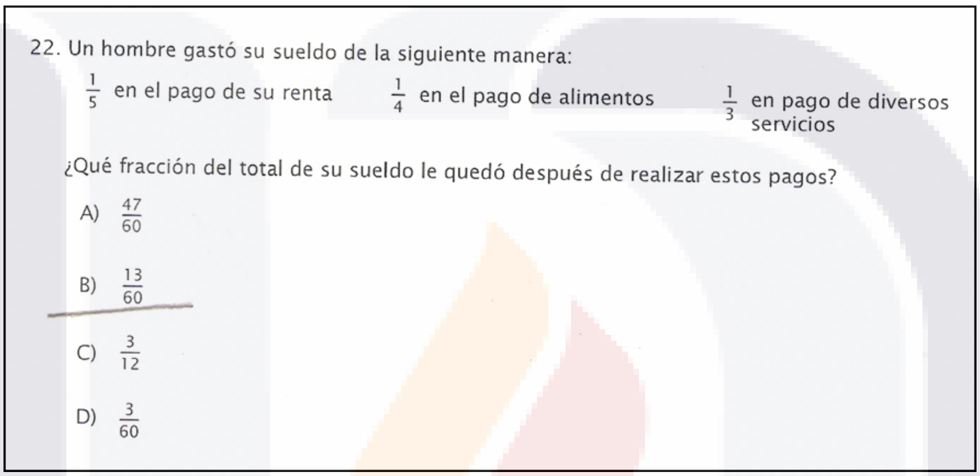
En las siguientes páginas se describe el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* que evidenció Arely. Con el fin de complementar el análisis se muestran algunos resultados de examen sobre fracciones y decimales y del cuestionario de conocimientos didácticas administrados en la primera etapa de la investigación. Con el afán de hacer más descriptivo el análisis se recuerda que se emplearon los indicadores que Sosa (2011) propone.

5.2.3.1 Conocimiento común del contenido

El *Conocimiento común del contenido* es un conocimiento matemático que permite resolver los problemas y ejercicios que se proponen en el nivel educativo donde el profesor se desempeña. Se trata de una serie de conocimientos que son empleados no solo en la enseñanza de las matemáticas sino en una variedad de entornos (Hill, Ball y Schilling, 2008), es decir, un conocimiento matemático que pueden tener otras personas que no son profesores y que no se decidan a enseñar. En el examen de conocimientos matemáticos sobre fracciones y decimales ─que se centró en indagar el *Conocimiento común del contenido*─ Arely fue una de las alumnas de la Normal Urbana que obtuvo uno de los promedios de aciertos más bajos. Alcanzó 19 aciertos de 30 preguntas que conformaron en examen. Respondió preguntas que implicaron, entre otros conocimientos:

1. Resolver problemas con números decimales que implicaron:
   a) Suma
   b) Resta
   c) Multiplicación
   d) División
2. Comparar números decimales.
3. Transformar números decimales:
   a) Fracciones comunes.
   b) Fracciones decimales
4. Ubicar números decimales en la recta numérica.
5. Resolver problemas con fracciones que implicaron:
   a) Suma (fracciones propias)
   b) Resta
6. Uso de fracciones equivalentes.
7. Ordenar números fraccionarios.
8. Ubicar fracciones en la recta numérica.

Como muestra se presenta la respuesta de Arely al reactivo 22 (figura 5.29), con el que se intentó conocer el conocimiento de los futuros profesores para resolver problemas que involucraran el uso de dos algoritmos (suma y resta). El problema se resuelve con la suma de las tres fracciones que se ofrecen en el planteamiento y la resta del resultado a la unidad. Aunque Arely no dejó registró del procedimiento que utilizó para obtener la solución correcta, pudo resolver el problema que se planteó.



22. Un hombre gastó su sueldo de la siguiente manera:

$\frac{1}{5}$ en el pago de su renta $\frac{1}{4}$ en el pago de alimentos $\frac{1}{3}$ en pago de diversos servicios

¿Qué fracción del total de su sueldo le quedó después de realizar estos pagos?

A) $\frac{47}{60}$

B) $\frac{13}{60}$

C) $\frac{3}{12}$

D) $\frac{3}{60}$

Figura 5. 29. Respuesta de Arely al reactivo 22. Examen sobre fracciones y decimales.

En la práctica Arely también evidenció conocimientos matemáticos que pueden ser considerados como parte del *Conocimiento común del contenido*. Por ejemplo, comentó a sus alumnos que una manera de obtener fracciones equivalentes puede ser multiplicar o dividir numerador y denominador por un mismo número:

[Es la primera sesión, Arely, en las actividades de inicio recuerda temas estudiados en otras clases. Por ejemplo, como obtener fracciones equivalentes]

Arely*: Entonces yo estaba explicando que cuando hacemos la conversión de fracciones hay que fijarnos muy bien en los denominadores. En el ejercicio que habíamos visto en su libro, les manejaba esa manera de hacer la conversión; pero también habíamos visto que una conversión de fracciones se podría hacer con el factor común. ¿Se acuerdan? Que encontraba un numerito que multiplicara las dos* [se refiere al numerador y al denominador]*… y ya lo convertían.*

[Arely pega en el pizarrón una cartulina con la siguiente fracción $\frac{17}{5}$]

Arely*: Por ejemplo, en esta fracción* [señala $\frac{17}{5}$] *¿por qué podría multiplicar los dos?* [señala numerador y denominador de la fracción $\frac{17}{5}$], *¿cuál número utilizaría para convertir la fracción equivalente?*
Alumno (Martín)*: ¿Por dos?*
Arely*: El más fácil, el dos. Ahí tendría que multiplicar 17 × 2 y 5 x 2* (Arely, clase 1, líneas 9-16)[24]

Por otro lado, los reactivos que Arely respondió de manera incorrecta se corresponden, entre otros, con conocimientos para:

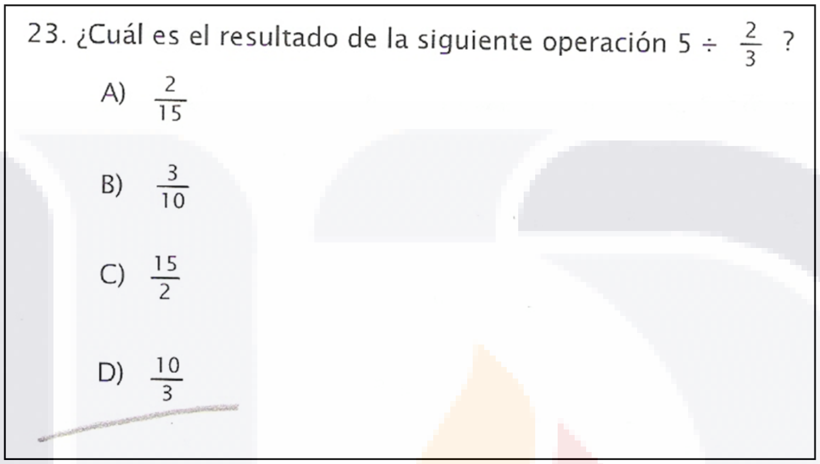
a) Resolver problemas con fracciones comunes que implican:
   - Multiplicación
   - División
b) Comprender la propiedad de densidad de los números fraccionarios.
c) Resolver problemas que implican la noción de fracción como un cociente de dos números naturales.
d) Resolver problemas que implican el cálculo de una fracción de un número natural
e) Comprender la propiedad de densidad de los números decimales.

Un ejemplo de lo anterior se puede observar en la figura 5.30. Se trata de un reactivo que Arely respondió incorrectamente, con el cual se pretendió indagar el conocimiento para dividir dos fracciones (impropia entre propia). Con base en la respuesta que ofreció Arely se infiere que resolvió el reactivo multiplicando ambos números en lugar de dividirlos. Para dividir una fracción entre otra ─5 puede ser

[24] La información entre paréntesis se refiere a la organización que se utilizó para el análisis de la información. Así, aparece el nombre del alumno observado, en este caso Arely, la clase en la que sucedió el evento que se analiza (primera clase observada) y el número de las líneas o renglones de la transcripción donde se encuentra la información que se presenta (9-16), esto con el software Atlas.ti que sirvió de apoyo para el análisis de la información.

considerado como un número racional $\frac{a}{b}$, esto es $\frac{5}{1}$ — es necesario multiplicar el dividendo por el recíproco del divisor, en este caso:

$$\frac{2}{3} \text{ x } \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$


23. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación $5 \div \frac{2}{3}$?

A) $\frac{2}{15}$

B) $\frac{3}{10}$

C) $\frac{15}{2}$

D) $\frac{10}{3}$

Figura 5.30. Respuesta de Arely al reactivo 23. Examen de fracciones y decimales

Otro ejemplo en el *Conocimiento del Contenido* de Arely se muestra en la figura 5.31. Se trata de la respuesta al reactivo 9, el cual exploró el conocimiento de los futuros profesores acerca de la propiedad de densidad en las fracciones. La opción de respuesta correcta es la D. Arely seleccionó la A, con ello se infiere que para ella la fracción $\frac{2}{3}$ se encuentra entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$, pues el numerador (2) está entre 1 y 3; mientras que el denominador (3) se encuentras entre 2 y 5.

9. ¿Cuál de los siguientes números se encuentra entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$?

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{11}{10}$

C) $\frac{5}{7}$

D) $\frac{11}{20}$

Figura 5.31. Respuesta de Arely al reactivo 9. Examen de fracciones y decimales

Los ejemplos anteriores son solo una muestra del *Conocimiento común del contenido* observado en Arely. Se puede decir que ella requiere, aun, consolidar algunos conocimientos sobre fracciones y decimales tales como aquellos donde se ve involucrada la propiedad de densidad de las fracciones o la división de éstas.

5.2.3.2 Conocimiento especializado del contenido

El *Conocimiento especializado del contenido* puede ser definido como aquel conocimiento y habilidades que son indispensables para enseñar matemáticas. Este tipo de conocimiento implica que los profesores sepan las razones matemáticas por las que se sigue determinado procedimiento en la solución de un problema. En el análisis de las clases que impartió Arely fue posible identificar que ella carece de algunos rasgos que caracterizan a este subdominio. Por ejemplo, este conocimiento implica que el profesor identifique la importancia de un aspecto matemático para enseñar un contenido en específico.

Muestra de lo anterior se observó en las actividades que Arely propuso en la sesión 1 donde se estudió en contenido “Conocimiento de diversas representaciones de un número fraccionario: con cifras, mediante la recta numérica, con superficies, etc.”. Arely planteó una actividad que resultó interesante y potencialmente didáctica. Fue una tabla en la que los alumnos debían representar, de diversas maneras, una fracción (ver figura 5.32).

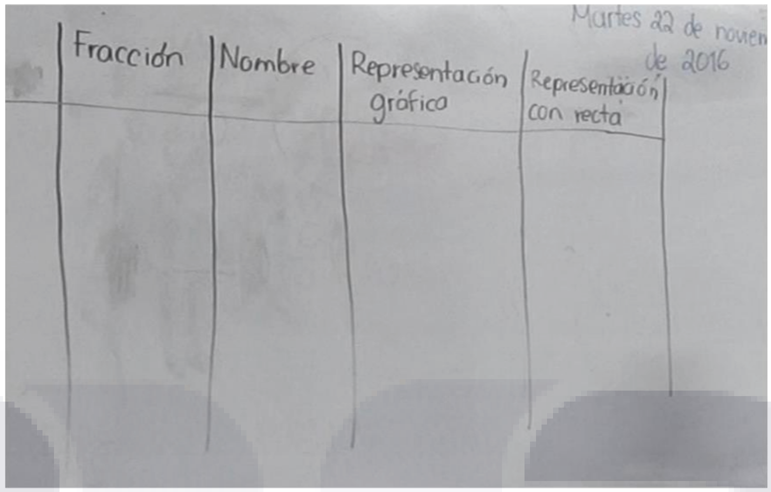
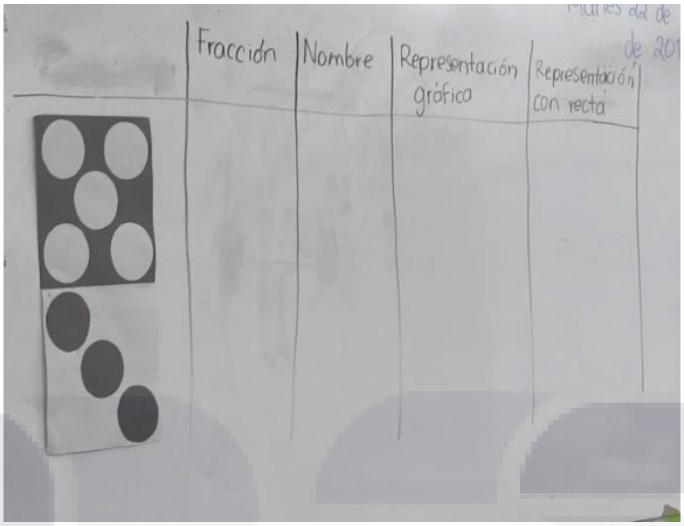


Figura 5.32. Ejercicio distintas formas de representación de fracciones, presentado por Arely.

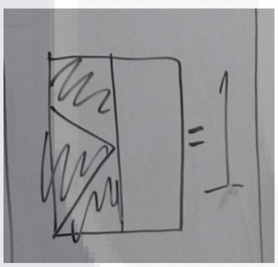
Para que los alumnos completaran la tabla, Arely proporcionó la fracción en forma de una ficha de dominó. Después de que los alumnos completaron la tabla los alumnos se acercaron a ella con motivo de que les revisara el trabajo. Arely se dio cuenta de que la mayoría de ellos cometieron el mismo error; por lo que decidió ofrecer una explicación al grupo. Durante dicha explicación Arely comete uno de los errores que Fandiño (2009) llama como típicos en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, denominado "dificultad en la gestión del adjetivo “iguales” al representar una fracción geométricamente”, o como Arely lo llamó “representación gráfica de una fracción”. Lo cual puede observarse en el siguiente fragmento:

[Arely les presenta la figura de dominó de la fracción $\frac{5}{3}$]

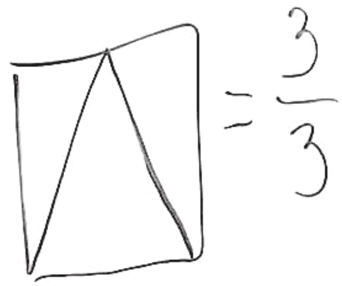


Arely: *¿Con qué estábamos trabajando, en cuanto a representación gráfica? A ver, fíjense bien, dijimos que cuando el numerador era mayor que el denominador se estaba utilizando ¿qué? más de un entero ¿verdad? Entonces, ¿por qué en sus representaciones gráficas nada más me pusieron un entero.*

[Dibuja en el pizarrón la siguiente figura]



Arely*: Así lo dejaban* [Se refiere a la figura]. *Fíjense bien, este cuadro para para mí representa un entero* [señala el cuadrado completo]. *Y la verdad yo no sé en qué lo están dividiendo por que la mitad está dividida en tercios y ¿la otra mitad? Esto está mal. Si estoy trabajando con tercios ¿en qué debo dividir mi entero?*
Alumnos (Varios)*: en 3*
Arely*: En 3 ¿verdad? A ver ¿cuántos tercios tiene un entero?*
Alumnos (Varios)*: 3*
Arely*: 3 ¿verdad?, pero aquí me están pidiendo ¿cuántos?* [Dibuja la siguiente figura]



(Arely, clase 1, líneas 143-152)

El cuadrado que dibujó Arely está divido en tres partes, pero no en tercios. Los fragmentos no son congruentes en área, por tanto, no es una representación adecuada de 3/3. Es indispensable, al trabajar con la representación de fracciones que, al dividir una figura en partes, éstas sean equivalentes en área. Fandiño (2009) expresa que esta dificultad radica en el hecho reiterado de usar figuras "simples" (círculos, cuadrados, rectángulos) para ser divididas en partes más oportunas (medios, cuartos, octavos) y no en otras como quintos, tercios, etc. Este error se considera como indicador de una carencia en el *Conocimiento especializado del contenido* de Arely, pues ella no fue capaz de otorgarle importancia a la división en tercios que hizo del triángulo o tal vez ni siquiera dio importancia a la figura que eligió como ejemplo.

Otro error se relaciona con este subdominio es la falta de conocimiento que tiene Arely para identificar los procedimientos que llevan a la solución de un problema. Durante el desarrollo de las actividades de la sesión cuatro donde se estudió el contenido “Análisis del significado de la parte decimal en medidas de uso común; por ejemplo, 2.3 metros, 2.3 horas” Arely solicita a sus alumnos completar un problema. Mediante la resolución del problema se espera que los alumnos interpreten y expliquen la diferencia entre las unidades de medida del sistema decimal y el sexagesimal. El problema aparece en el siguiente fragmento:

> [Arely junto con sus alumnos resuelven ejercicios de conversión de números decimales a fracciones decimales. Luego, ella les solicita que, de manera individual, analicen y resuelvan el problema que se presenta en seguida:]

3.- Una hora es la veinticuatroava parte de un día. Cada hora equivale a 60 minutos. En base a lo anterior completa las siguientes equivalencias:

0.5 horas = __________ minutos $\frac{1}{2}$ hora = __________ minutos

0.25 horas = __________ minutos $\frac{1}{4}$ hora = __________ minutos

0.1 horas = __________ minutos $\frac{1}{10}$ de hora = __________ minutos

0.9 horas = __________ minutos $\frac{9}{10}$ de hora = __________ minutos

0.2 horas = __________ minutos $\frac{2}{10}$ de hora = __________ minutos

[Varios alumnos comienzan a acercase a ella pues tienen dificultades para resolver el ejercicio. Dos alumnas se acercan a solicitar ayuda y ella comienza una explicación.]

Arely: *Son .5 Fíjense bien, cuánto trabajamos con decimales se cuenta del 0 al 10, siempre o al 100 si son centésimos, pero aquí estoy trabajando con decimos. Entonces una hora es igual ¿a cuánto?*
Alumna (Samantha): *60 minutos*
Arely: *A 60 minutos. Ahora, fíjense bien, dice en el primero .5 horas, .5 horas. Eso ─.5 horas─ lo está tomando de todo esto de la hora total. Punto 5 entonces dice aquí que ¿Cuánto es en conversión a minutos? Una hora sería equivalente al 10. Una hora es igual a* $\frac{10}{10}$ *¿cierto? Que sería igual a una unidad… a un entero.*
Alumna (Victoria): *Entonces…*
Arely: *Ahora, fíjense bien, pero de eso nada más está tomando 5,* $\frac{5}{10}$*¿Cuánto es* $\frac{5}{10}$ *a comparación de la fracción total que es una hora?*
Alumnas: *Esteeeee*
Arely: *Si me esté pidiendo nada más* $\frac{5}{10}$ *¿qué me representa en comparación a la totalidad? ¿La que…?*

[Una alumna comenta algo, pero es inaudible]

Arely: *A ver esto* [señala la fracción $\frac{5}{10}$] *en comparación a esto* [señala la fracción $\frac{10}{10}$] *¿qué es?*
Alumna (Victoria): *Es…*
Arely: $\frac{5}{10}$ *¿qué fracción me representa de…? No ¿qué parte me representa de* $\frac{5}{10}$*? A ver díganme.*
Alumna (Victoria): *¿Un medio?*
Arely: *Sería la mitad ¿no?*
Alumna (Victoria): *Si*
Arely: *Porque la mitad de 10 ¿cuánto es?*
Alumnas: *5*

Arely: *Y aquí ¿cuántos tengo?*
Alumnas: *5*
Arely: *Me está pidiendo .5, .5 ¿qué? Décimos ¿sí? esto, $\frac{5}{10}$ me está pidiendo. Entonces si yo estoy tomando 5/10 de una hora que yo ya sé que es la mitad ¿Cuántos minutos serían?*
Alumnas: *Serían…*
Arely: *Serían 30 minutos. Ahora, en el siguiente dice .25, $\frac{25}{10}$,. $\frac{25}{10}$. ¿Si son 25?*
Alumnas: *Si*
Arely: *Punto 25. Ahora fíjense bien, .25 ¡Ahh! es que esto no les ando mintiendo. Es que sí está bien, pero si está mal planteado esto. Serían, ahí está, así, es que así se entiende mejor, llegaremos hasta centésimas. 25 de 100 es la ¿qué parte de 100?*
Alumna (Victoria): *¿La cuarta?*
Arely: *La cuarta parte ¿verdad? Entonces si son 60 minutos en total, la cuarta parte de 60 ¿cuánto es?*
Alumna (Victoria): *25*
Arely: *No.*
Alumnas: *15*
Arely: *15.*
Arely*: En la siguiente .1, la de 100 dijimos que íbamos a trabajar con 100. Serían 10. Bien, ahora en este… 10/100 ¿qué fracción representa 10… 10 de 100, qué parte?*
Alumna (Victoria): [Comenta algo, pero es inaudible] *10 minutos*
Arely: *¿10 minutos? A ver, fíjense bien aquí tome el 25.* [Se refiere al ejercicio anterior] *Está la dividí, los 60, entre 25 ¿verdad? Ahora, 60 entre 10*
Alumna (Victoria): *6*
Arely: *¿Sí? A ver la siguiente. Esa era 0.9 serían 9 centésimos. Igual ¿en cuántas partes tengo que dividir a mis 60 minutos?*
Alumna (Victoria): *en 9*
Arely: *60 entre 9 ¿Cuánto les daría? Y así se van haciendo. Ya la siguiente está muy fácil…*

En el fragmento anterior se percibió que Arely tuvo dificultades para compartir con las alumnas una explicación que le ayudara a la comprensión del problema. Lo anterior pudo radicar en que el problema implica el conocimiento acerca de las diferencias entre dos sistemas, uno decimal y otro sexagesimal. Así para saber cuántos minutos de una hora corresponden a 0.1 horas, por ejemplo, es necesario dividir 60 min (1 h) entre 10 para saber a qué cantidad corresponde un décimo de hora. Con ello es posible responder las demás preguntas (SEP, 2013b).

Puede ser que los errores de Arely en lo que respecta a este subdominio se originan por ciertos conocimientos matemáticos que aún no consolida. Por ejemplo, el hecho de dividir una figura geométrica en tres partes y aseverar que se trata de tercios o cuando no identifica las diferencias entre dos sistemas: sexagesimal y decimal. Es esperable que conforme obtenga mayor experiencia docente se apropiará de mayores elementos que le permitan identificar los procesos de resolución que siguen los estudiantes.

5.2.3.3 Conocimiento en el horizonte matemático

Este subdominio exige saber cómo un contenido está relacionado con contenidos que se estudian en unidades posteriores o con temas de cursos avanzados. Shulman (1987) denomina a este conocimiento como la capacidad de establecer relaciones verticales y horizontales entre los contenidos que se estudian.

Al parecer la novatez de Arely provoca que no retome participaciones de los alumnos para introducir temas que se estudian en otros cursos. En la sesión 4, como parte de las actividades de inicio propone una actividad en la que los alumnos deben repartir el día (24 horas) en diferentes actividades. Para ello es necesario tomar el día como un todo y las actividades en las fracciones o partes del todo (ver figura 5.33).

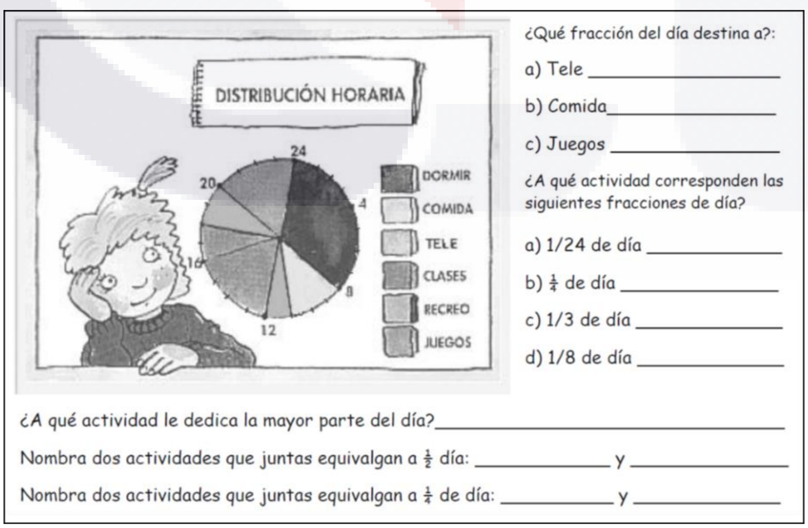


Figura 5.33. Actividad sobre relación entre una fracción y el todo de referencia.

Como se observa, una de las preguntas incluida en la actividad, implica determinar dos actividades que juntas equivalgan a $\frac{1}{2}$ día, otra identificar dos actividades que equivalgan a $\frac{1}{4}$ de día.

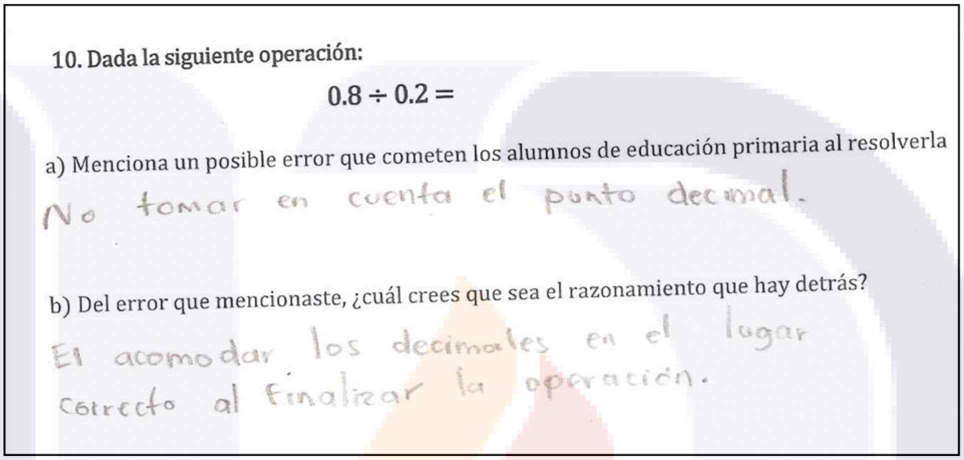
[Arely solicita a una alumna (Alín) que lea las preguntas que se plantean en el problema]

Alumna (Alín): *Nombra dos actividades qué juntas equivalgan a un* $\frac{1}{2}$ *del día*
Arely: *¿Cuánto es un medio día Alín?*
Alumna (Alín): *Serían…12 horas*
…
Arely: *¿Qué actividades le dedica 12 horas, juntas?*
…
Alumna (Alín): *Juegos y dormir.*
Arely: *Juegos ¿Cuánto es?*
Alumnos (varios)*: Son… 4 horas*
Arely: *Y ¿dormir?*
Alumnos (varios)*: 8*
Arely: *¿Y juntas?*
Alumnos*:12*
Alumno (Santiago)*: Pero puede ser de tres: dormir, comer y … a no… comer no*
Alumna*: No pero ya pasamos*
Arely: *También se puede se puede… ajá exactamente… se puede con otras, pero ya abarcaría 3 y aquí nada más nos están pidiendo 2* (Arely, clase 4 líneas 331-356)

La idea del alumno de sumar tres actividades para obtener medio día pudo ser aprovechada por Arely para la preparación de un contenido: suma de fracciones con tres sumandos, que es un tema que está previsto a futuro.

5.2.3.4 Conocimiento del contenido y los estudiantes

Con relación a este subdominio Arely evidenció algunas confusiones para identificar dificultades que los alumnos de primaria pueden enfrentar al estudiar fracciones y decimales, las cuales se pudieron observar en lo ambiguo de las respuestas que ofreció en el cuestionario de conocimientos didácticos. Por ejemplo, en la pregunta 10 de dicho instrumento se intentó identificar su conocimiento para distinguir dificultades en los alumnos de primaria al resolver divisiones con números decimales. En la figura 5.34 se muestra que la respuesta no es del todo clara; al contrario, sugiere que Arely también tiene confusión sobre la división que aparece, más porque comenta que un razonamiento sería “acomodar los decimales al finalizar la operación” cuando el resultado es un número entero.



10. Dada la siguiente operación:

$0.8 \div 0.2 =$

a) Menciona un posible error que cometen los alumnos de educación primaria al resolverla

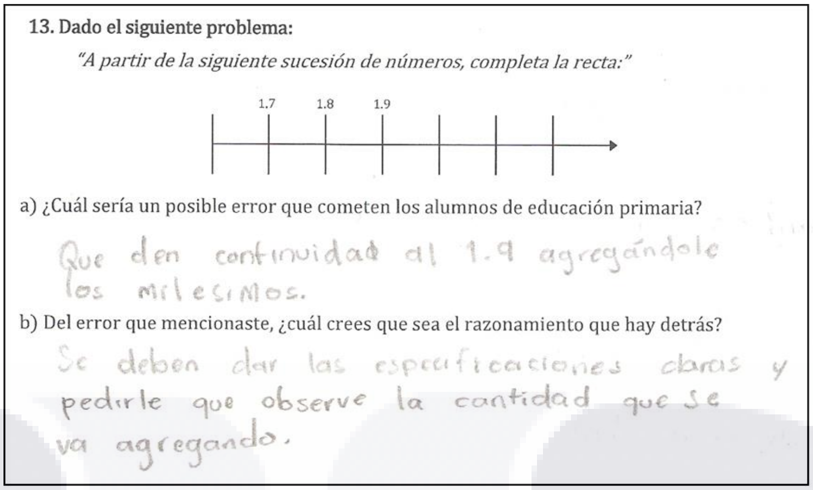
No tomar en cuenta el punto decimal.

b) Del error que mencionaste, ¿cuál crees que sea el razonamiento que hay detrás?

El acomodar los decimales en el lugar correcto al finalizar la operación.

Figura 5.34. Respuesta de Arely a la pregunta 10. Cuestionario conocimientos didácticos

Otra muestra es la respuesta a la pregunta 13 (ver figura 5.35) con la que se pretendió identificar el conocimiento de los futuros profesores para reconocer dificultades en los alumnos para continuar una sucesión de números decimales. Arely manifestó que se deben dar indicaciones de manera clara y su respuesta no refiere a algún error que los alumnos pudieran cometer los alumnos, como por ejemplo continuar la secuencia con el número 1.10.



13. Dado el siguiente problema:

"A partir de la siguiente sucesión de números, completa la recta:"

1.7 1.8 1.9

a) ¿Cuál sería un posible error que cometen los alumnos de educación primaria?

Que den continuidad al 1.9 agregándole los milesimos.

b) Del error que mencionaste, ¿cuál crees que sea el razonamiento que hay detrás?

Se deben dar las especificaciones claras y pedirle que observe la cantidad que se va agregando.

Figura 5.35. Respuesta de Arely a la pregunta 13. Cuestionario de conocimientos didácticos.

Una característica de este subdominio es que los profesores sean capaces de identificar cuáles son los contenidos o actividades que pueden representan mayor dificultad a los estudiantes. Durante la observación de la práctica de Arely, en particular, en la sesión 4 donde estudió el contenido "análisis del significado de la parte decimal en medidas de uso común; por ejemplo, 2.3 metros, 2.3 horas", los alumnos tuvieron dificultades para resolver las actividades que les propuso a las cuales Arely no puede hacer frente. Como se observa en el siguiente fragmento, ella comenta a sus alumnos ideas erróneas como "0.5 es la mitad de 10 por eso son decimales". Además, señala sin un argumento que ayude a la comprensión por parte de los alumnos que el número .25 es más pequeño que .5

> [Las actividades que se realizan son: identificar a cuántos minutos equivalen fracciones como $\frac{1}{10}$ o $\frac{9}{10}$ como se muestra en la figura. Algunos alumnos se acercan a preguntar y a mostrar su trabajo]

0.5 horas = __________ minutos

0.25 horas = _________ minutos

0.1 horas = __________ minutos

0.9 horas = __________ minutos

0.2 horas = __________ minutos

Arely: *No. No, aquí ya están hablando de decimales… acuérdense que los decimales van desde el 0 hasta el 10. Ajá ".5" es la mitad de 10 de una hora. De una hora entonces serían .5 Exactamente una hora es el total.*
Alumna (Camila): *¿Y la que está en seguida?*
Arely: *.25 de 1 hora aquí la dividí éste a la mitad ¿verdad? Porque .5 es la mitad. Entonces…*

[La alumna comenta que .25 es más grande que .5]

Arely: *No .25 es más chiquito… No, no son horas porque una hora sería después del punto… Aquí la hora la están dividiendo*
Alumna (Camila): *¿en 25?*
Arely: *No. De una hora está tomando 25 ¿qué?*

[La alumna comenta algo, pero es inaudible]

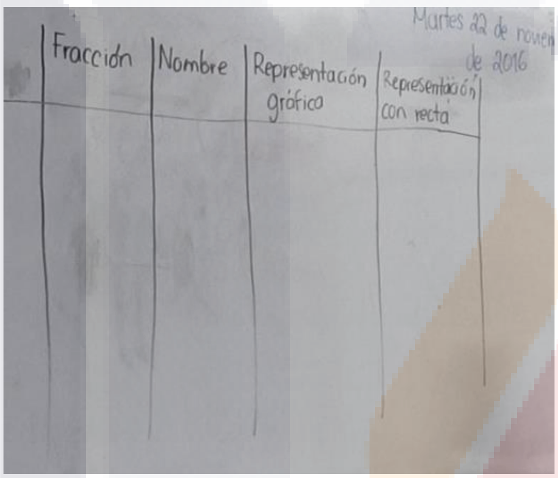
Arely: *Ajá 25 + 25…*
Alumna (Camila)*: 50*
Arely: *Entonces si .5 es la mitad, .25 ¿cuánto sería? 1/4 de hora ¿cuánto es un cuarto de hora? Y así…* (Arely, clase 4, líneas 780-800)

Arely no identificó, desde la planificación de las actividades, que uno de los errores frecuentes en los alumnos al ordenar y comparar decimales es considerar que entre más cifras tenga un número después del punto este es más grande. Cuando en realidad esto no es relevante. Ávila y García (2008) señalan que "una manera de facilitar la comparación es igualar el número de cifras decimales de las cantidades" (p. 47).

Para Sosa (2011) el *Conocimiento del contenido y los estudiantes* también implica a los profesores saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto. Arely intenta hacer esto cuando, con sus alumnos, estudió distintas formas de representar una fracción. Para ello, propuso una actividad, que resultó interesante didácticamente. Fue una tabla en la cual los alumnos debería de colocar algunas representaciones de las fracciones. En el siguiente fragmento se puede observar lo que sucedió:

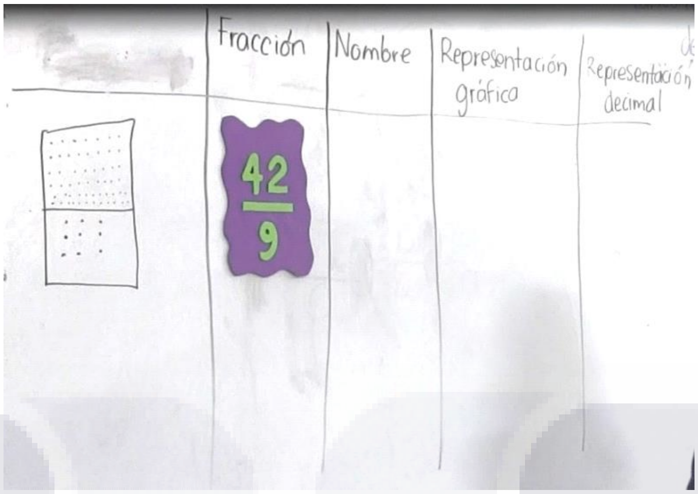
Arely: *Bien, fíjense bien, la siguiente actividad en la que muchos estuvimos batallando fue con la representación de las fracciones ¿Recuerdan?*

[Dibuja una tabla como la siguiente en el pizarrón. Pide a los alumnos que la copien en sus cuadernos]



Arely: *¿Listo? Fíjense bien, pero hoy lo vamos a hacer un poquito más difícil. Porque se supone que ya lo deben de saber. Porque yo les encargué que lo estudiaran. Entonces, ahora ¿cómo lo vamos a hacer? le vamos a intercalar entre las fichas de dominó y estás* [refiere a las fracciones hechas con foami], *pero estás las vamos a colocar aquí* [pega la fracción 42/9 en el pizarrón] *¿cómo la representarían en ficha de dominó? Imagínense ¿cómo lo tendría que poner?*

[Arely dibuja una ficha de domino en el pizarrón en la parte de arriba dibuja 42 puntitos y en la de abajo 9]



***Arely**: Bien, entonces de igual manera, por ejemplo, si coloco aquí la ficha dominó ya ustedes la desarrollan. Y ustedes ya deben saber cómo se hace.* (Arely, clase 1, líneas 78-81)

Aunque Arely intenta partir de un ejemplo en el que emplea el dominó. La fracción que presenta esta fuera de contexto, pues en la vida real no existen fichas de dominó con la cantidad de puntos que ella utilizó. Lo cual puede considerarse como un error al no considerar el tipo de ejemplo a emplear. Además, la sugerencia del programa es que el estudio de las fracciones se comience con las fracciones propias para luego pasar a las impropias y posteriormente a las mixtas.

En la práctica se observó que Arely intentó partir de situaciones problemáticas al comenzar el estudio de los contenidos. Sin embargo, su proceder se centró más en la explicación de las formas de solución. También fue claro que carece de conocimientos para identificar las posibles dificultades que enfrentan los alumnos al estudiar temas de fracciones y decimales. El conocimiento de estas dificultades se comienza a desarrollar en la escuela Normal cuando, desde la literatura, deben discutirse y analizarse.

5.2.3.5 Conocimiento del contenido y la enseñanza

Este subdominio implica que los profesores cuenten con una serie de conocimientos que les permitan saber presentar un compendio de actividades con las cuales promover el aprendizaje matemático de los alumnos. Estas actividades deben corresponderse con el enfoque didáctico propuesto en los programas de estudio. La planificación de actividades implica que los docentes sepan con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuáles utilizar para enfatizar un concepto o procedimiento. En la clase en donde se estudió el contenido "análisis de las relaciones entre la fracción y el todo" Arely evidencia que las actividades que propone no se corresponden de forma directa con las sugerencias didácticas del programa de matemáticas.

> [Es el inicio de la sesión, Arely les solicita a los alumnos que en una hoja en blanco escriban como título "Problemas con fracciones". Luego les comenta:]
>
> ***Arely**: Bien, fíjense bien, les voy a dictar un problema, referente a las fracciones… quiero que pongan las operaciones y el resultado. No quiero que lo hagan rápidamente, quiero que lo analicen bien… hacen las operaciones y me lo traen. Bien, este problema se los voy a revisar a todos, entonces quiero que se den prisa para terminarlo pero que lo hagan bien ¿listos? ¿Lista Alyn?... Bien ahí va, dice:*
>
> *"En la dirección de una escuela se han dado 80 dulces para los alumnos de un solo grupo, pero de ellos ¼ se quedarán en la dirección, el resto se entregará a los alumnos (24) ¿Cuántos dulces le tocaran a cada alumno?* (Arely, clase 3, líneas 14-16)

El fragmento anterior puede ser analizado desde dos planos. Por un lado, Arely cuando les plantea el problema hace énfasis en las operaciones y los resultados, más que en los procedimientos y razonamientos que los alumnos pudieran emplear. Lo cual refleja una visión muy tradicional de la enseñanza de las matemáticas, distante de la propuesta didáctica actual. Por otro lado, se puede decir que, si no hubiese puesto el énfasis en las operaciones y en el resultado, pudiera haber partido de una situación problema; lo que si se hubiera relacionado con el enfoque de enseña propuesto en los programas.

Visto de esta última forma, el hecho de que el problema se relacionara con el número de alumnos que conformaban el grupo y que Arely tuviera una bolsa de dulces que repartió entre los alumnos, es indicador del intento por emplear ejemplos ─con datos concretos─ cercanos a los alumnos.

[Cuando la mayoría de los alumnos terminaron de resolver el problema Arely les comentó:]

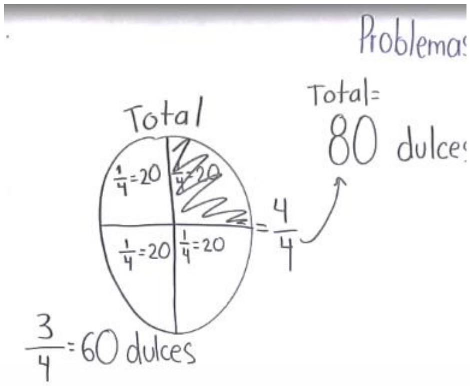
Arely*: Bien, entonces a los que supieron hacerlo correctamente* [se refiere al problema] *por eso les di los dos dulces, porque si se fijan este el problema era relacionado con 24 alumnos que somos los que somos nosotros. Bien, ahora el siguiente problema, póngale número 2* (Arely, clase 3, línea 325)

Este subdominio también involucra que los docentes conozcan la potencialidad de los esquemas gráficos para auxiliar a los estudiantes en la solución de un problema o ejercicio. Al respecto Arely evidencia confusiones con relación a qué esquemas emplear. Una vez que la mayoría de los alumnos terminó de resolver el problema: *"En la dirección de una escuela se han dado 80 dulces para los alumnos de un solo grupo, pero de ellos* $\frac{1}{4}$ *se quedarán en la dirección, el resto se entregará a los alumnos (24) ¿Cuántos dulces le tocaran a cada alumno?* Arely, con el propósito de realizar un cierre, realiza una explicación empleando un círculo para representar la bolsa de dulces. En el fragmento siguiente se muestra la explicación:

Arely*: Bien, a ver, silencio. A ver niños pongan atención. Fíjense bien. Vamos a hacerlo entre todos porque hubo todavía ahí, quien no comprendió. A ver ¿Cuántos dulces tenía?*
Alumnos*: 80*

[Escribe 80 en el pizarrón]

Arely*: Dulces, este era mi total ¿Cierto?*
Alumnos*: Si*
Arely*: Pero en el problema dice que* $\frac{1}{4}$ *de estos dulces se quedó en la dirección ¿Cuánto es* $\frac{1}{4}$ *de 80?*
Alumnos*: 20*
Arely*: Fíjense bien, 80 es mi total hagan de cuenta esto es una bolsita* [dibuja un círculo] *¿verdad? Donde están todos los dulces, pero se divide ¿en cuánto?*



***Alumnos (en coro)**: en 4*
***Arely**: Porque estoy trabajando con cuartos. Entonces se divide entre 4, bien todo esto son 80. 80 dividido entre 4 ¿Cuánto me da?*
***Alumnos (en coro)**: 20*
***Arely**: ¼ es igual a 20 dulces, aquí es otro cuarto y son otros 20, otro cuarto y son otros 20 y otro cuarto y son otros 20, y en total son 4/4, es decir 80 dulces ¿sí? Bien entonces, ¼. Este cuarto se quedó en la dirección ¿Cuántos me quedaron?*
***Alumnos (en coro)**: 3*
***Arely**: ¾ que es igual a ¿cuánto?*
***Alumnos (en coro)**: 60*
***Arely**: Se quedaron 60 dulces. Bien de esos 60 dulces ¿Qué decía que tenía que hacer? Con esos 60 dulces ¿qué había que hacer?*
***Alumnos (en coro)**: Teníamos que dividirlos entre 24* (Arely, clase 3, líneas 275-294)

El esquema que empleó Arely resulta inadecuado para ejemplificar una bolsa de dulces. Un todo discreto es aquel en donde el "todo" está representado por un conjunto de dulces del cual se toman algunos de ellos. La figura que ella emplea ─el círculo─ se recomienda para ejemplificar un todo continuo. Este hecho también es reflejo de poco conocimiento que posee Arely acerca de las diferentes interpretaciones de las fracciones.

Saber qué ejercicios dejarles de tarea para que los estudiantes practiquen o afiancen su aprendizaje es un rasgo del *Conocimiento del contenido y la enseñanza*. En ocasiones Arely emplea ejercicios de un documento que ella llama "problemario"[25] para asignar

[25] Es un documento que contiene diversos ejercicios de la asignatura de matemáticas elaborado por la profesora Juana González García, maestra de educación primaria en la ciudad de Moroleón en el estado de Guanajuato. No fue publicado por ninguna editorial, ni tampoco tiene un reconocimiento por la SEP del país como material de apoyo para la enseñanza. Se puede conseguir con facilidad en internet en diversas páginas como blogs, foros entre otros. Un sitio donde se encuentra una liga para su descarga es el siguiente:

tareas que los alumnos deben realizar en casa. En este "problemario" se pueden encontrar ejercicios relacionados con los contenidos que se estudian en quinto grado, sin embargo, no se hace ninguna aclaración sobre el enfoque didáctico que se empleó para su elaboración. Al final de la sesión 3 asigna como tarea la resolución de los problemas que se platean en una de las páginas del dicho documento. El hecho de que Arely haya asignado una tarea como la que se describe en el fragmento, se puede interpretar como la realización de ejercicios y refuerzo de un tema estudiado, muy cerca de una visión tradicional de la enseñanza de las matemáticas y no como una oportunidad para que los alumnos confrontes y reestructuras sus saberes.

> ***Arely****:* [Se dirige a todo el grupo] *Tarea: página 26 del problemario.*
> ***Alumna (Abril)****: ¿Pagina 26? ¿Solo esa?*
> ***Arely****: Si solo esa. Página 26…*

https://onedrive.live.com/?authkey=%21AMRBILC22WBg19Ayid=2A8E34DAA151E884%2122557ycid=2A8E34DAA151E884

¿A CUÁNTO CORRESPONDE? (L. Mat. Desafíos pág. 52-53) Ilumina al final

I.- Lee con atención y contesta:

1.- Melchor debe viajar de su ciudad natal a la ciudad donde estudiará. La distancia entre ambas ciudades es de 60 km. Si ha recorrido 2/5 partes del recorrido

a) ¿Qué parte del camino le hace falta recorrer? R.- ____________

b) ¿Cuántos km ha recorrido? R.- ____________________________

2.- Eusebio compró un kilogramo de uvas, se comió $\frac{1}{4}$ en la mañana y por la noche se comió la mitad de las que le habían sobrado ¿Qué parte del kg de uvas se comió en la noche?

R.- Se comió ___________________________

2.- Don Miguel tiene una parcela y este año sembró sólo la mitad de su terreno. De la parte sembrada, 3/4 partes las sembró de maíz y el resto de lenteja ¿Qué parte de su terreno sembró de lenteja? Utiliza el rectángulo para representar los datos del problema.

R.- Sembró ___________________________

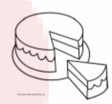
3.- Octavio gana al mes 9 000 pesos, de ese dinero le da a su esposa $\frac{2}{3}$ partes y del dinero que le sobra la mitad lo destina para transporte:

a) ¿Cuánto dinero le da a su esposa? R.- ______________________

b) ¿Cuánto destina a transporte? R.- ________________________

c) ¿Qué parte del total destina a transporte? R.- ______________

4.- Tolomeo compró un pastel y se comió 1/5 parte, del resto le dio a su mamá la mitad ¿Qué parte del pastel entero le dio a su mamá?



R.- A su mamá le dio ___________________________

5.- Agustina tiene en el banco 10 000 pesos, se gastó 1/5 parte en un saco y del resto utilizó la mitad para comprar un celular.

a) ¿Cuánto gastó en el saco? R.- ______________________________

b) ¿Qué parte del total utilizó para el celular? R.- ________________

26

(Arely, clase 3, líneas 528-530)

Este subdominio demanda un conocimiento por parte de los profesores para discriminar qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar (Sosa, 2011). Se observó que Arely evidenció la falta de un conocimiento que le permitiera aceptar la respuesta proporcionada por una alumna (Camila).

[Los alumnos resuelven problemas relacionados con el contenido análisis del significado de la parte decimal en medidas de uso común; por ejemplo, 2.3 metros, 2.3 horas.]

Arely: *En la siguiente 9/10 de una hora. Si un décimo son 6 minutos ¿cuántos serán*

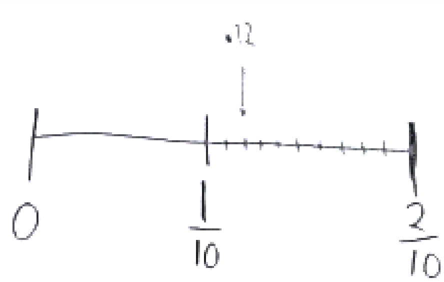
9/10?
Alumna (Camila): *54*
Arely: *¿Por qué 54?*
Alumna (Camila): *Porque al 54 le sumas 6 son 60.*
Alumno (Jared)*: ¿Ah?* [muestra confusión]
Arely: *A ver, si está bien, pero dame una razón más válida.*
Alumna (Camila): *6 por 9 son 54 y 6 por 10, 60, así es que serían 54* (Arely, clase 4, líneas 950-956)

Las respuestas que ofrece Camila muestran una comprensión numérica clara y transparente, puede pensarse que rebasa la comprensión de Arely. Por su parte, Arely solicita una respuesta "más válida" ─lo que no es claro a qué se refiere, quizá a un algoritmo─ en lugar de pedirle a Camila que argumente su solución. En palabras de Brousseau (2007) dejó pasar una oportunidad para pedir a Camila comunicara a sus compañeros su proceder: una situación de formulación.

El *Conocimiento del contenido y la enseñanza* comprende saber que si se emplean determinadas representaciones, es posible que los estudiantes visualicen de mejor manera algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto (Sosa, 2011). Arely, mediante una recta numérica que dibuja en el pizarrón, apoya a sus estudiantes a la solución de uno de los ejercicios relacionados con la representación de números decimales en la recta numérica.

[Arely les solicita a sus alumnos que, en la recta numérica, ubiquen el número 0.12. Se da cuenta de que los alumnos tiene problemas para ello y decide realizar una explicación con el propósito de ayudarles]

Arely: [Dibuja una recta numérica como la que se presenta] *Entonces, aquí marca 1/10 y luego 2/10 y continúa. Entonces, yo aquí lo voy a utilizar.* [señala 1/10] *Bien ¿por qué? ¿Cuántos décimos tengo? ¿Cuántos décimos tengo?*



Alumnos: *Uno*
Arely: *Uno ¿verdad? Entonces, fíjense bien. Hasta aquí llegaría* [Señala en la recta 1/10], *pero me falta ¿2 qué?*
Alumnos: *Centésimos*
Arely: *2 centésimos* [divide el segundo fragmento de la recta en 10 partes y cuenta] *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ¿Si se fijan? ¿En cuántas partes… tengo dividido aquí, mi entero?*
Alumnos: *En 10*
Arely: *¿Y este otro en 10? ¿y este otro en 10? Éste les indica en cuántas partes está dividido cada uno de esas* (Arely, clase 4, líneas 744-750)

Según el enfoque didáctico que se sugiere en los programas de matemáticas de la primaria, lo más adecuado para una actividad como esta es presentarles tareas o preguntas que dirigieran el ejercicio, pero no darles las respuestas tal como Arely lo hizo. Por otro lado, la explicación parece que en lugar de ayudar confunde a los alumnos debido al mezclar tres elementos: fracciones, decimales y la recta numérica. No Se observó que los niños pudieran entender del todo la relación entre fracciones y decimales y entre estos y la recta numérica.

El *Conocimiento del contenido y la enseñanza* que Arely evidencia se ve mermado por una falta de consolidación tanto en el *Conocimiento especializado del contenido* como del *Conocimiento común del contenido*.

5.2.3.6 Conocimiento del currículo

Con las observaciones realizadas fue difícil identificar el *Conocimiento del currículo* de la primaria, en particular de la asignatura de matemáticas que posee Arely. No obstante, con base en las actividades que propone los alumnos y la forma en que atiende las dificultades que éstos enfrentan, se puedo advertir que al menos sí revisó las sugerencias didácticas ─que se hacen en tanto en el programa de la asignatura como en el libro para el maestro─ para el estudio de los contenidos matemáticos.

Por ejemplo, en la sesión cuatro abordó el contenido “análisis del significado de la parte decimal en medidas de uso común; por ejemplo, 2.3 metros, 2.3 horas” Arely les pidió a sus alumnos que realizaran un ejercicio que involucró determinar a cuántos minutos equivalen cantidades como 0.5 horas o 0.25. Era esperable que los alumnos tuvieran dificultades para la comprensión del ejercicio, pues involucraba la comprensión del sistema decimal y del sexagesimal. Esta actividad se relaciona con la lección 23 del libro de matemáticas del libro de matemáticas de 5° grado en donde se espera que los alumnos interpreten y expliquen la diferencia que existe entre una unidad de medida decimal y una sexagesimal, que al respecto señala:

> Una manera de ayudarlos a reconocer el error es preguntarles qué significa 1.5 h, en general los alumnos reconocen que se trata de $1\frac{1}{2}$ horas; es decir, 1 h con 30 min. De aquí se desprende que 1.6 h no puede ser una hora con 6 minutos. Se esperaría que dijeran que se trata de 1 entero y 6 décimos, es decir, una hora completa y 6 décimas partes de una hora, o sea, 36 minutos.
> De lo anterior se puede concluir que para saber a cuántos minutos corresponde la expresión .4, se tienen que dividir 60 min (1 h) entre 10 (para saber a qué cantidad corresponde un décimo de hora) y multiplicar el resultado por 4 para obtener 24 minutos. (SEP, 2013c, p. 84)

Por medio de una explicación Arely no logró que los alumnos comprendieran cómo es posible enfrentar este tipo de ejercicios. Al parecer Arely no revisó las recomendaciones que se hacen al respecto en el libro para el maestro.

Otro ejemplo en el que puede inferirse que Arely no analizó las sugerencias que se hacer en el programa de estudio para el estudio de los números decimales se puede inferir del siguiente fragmento:

> [Durante la solución del ejercicio que involucró calcular la cantidad de minutos en 0.5 y 0.25 horas una alumna (Camila) comenta que .25 es más grande que .5]
>
> ***Arely:*** *No .25 es más chiquito… No, no son horas porque una hora sería después del punto… Aquí la hora la están dividiendo* (Arely, clase 4, líneas 780-794)
> ***Alumna (Camila):*** *¿en 25?*
> ***Arely:*** *No. De una hora está tomando 25 ¿qué?*
>
> [La alumna comenta algo, pero es inaudible]
>
> ***Arely:*** *Ajá 25 + 25…*

***Alumna (Camila)**: 50*
***Arely:** Entonces si .5 es la mitad, .25 ¿cuánto sería? 1/4 de hora ¿cuánto es un cuarto de hora? Y así…* (Arely, clase 4, líneas 785-795)

En este fragmento muestra que Arely no encuentra la manera de explicar a Camila por qué 0.5 es mayor a 0.25, en el programa de estudios de primaria como en las actividades del curso de *Aritmética: su aprendizaje y enseñanza*, se sugiere que se afiancen nociones como: designar a un número decimal por su nombre, por ejemplo: 3.23 < 4.4; 2.06 + 12.4, comprender que entre dos números decimales hay siempre una infinidad de números (SEP, 2011c).

5.2.3.7 Valoración del conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones y decimales de Arely

Arely fue una de las estudiantes que obtuvieron un promedio de aciertos más bajo en el examen sobre fracciones y decimales y en el cuestionario de conocimientos didácticos. En el examen demostró que cuenta con los conocimientos para resolver problemas que incluyen contenidos que se estudian en la escuela primaria como, por ejemplo: resolver problemas de suma, resta, multiplicación y división con números decimales; comparar números decimales o transformar números decimales a fracciones decimales o propias. Aunque presentó dificultades para resolver correctamente reactivos acerca de división de fracciones o aquellos que implicaron la propiedad de densidad en las fracciones.

Respecto a los demás subdominios se puede decir que en el *Conocimiento especializado del contenido* Arely mostró ciertas carencias, las cuales pueden asociarse a la falta de consolidación de su conocimiento matemático y de su conocimiento didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de fracciones y decimales. Tales como: la omisión de que al dividir una figura en segmentos iguales para representar las "partes de un todo" estas deben ser congruentes en tamaño y área.

Con relación al Conocimiento Didáctico Arely evidenció rasgos de una enseñanza tradicional al realizar explicaciones de los contenidos, al solicitar la solución de ejercicios y el énfasis en la realización de algoritmos. Aunque se puede decir que en ocasiones intentó plantear actividades relacionadas con el enfoque didáctico sugerido para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (problema en el que se reparten ¾ de una bolsa de dulces entre los integrantes del grupo).

Al menos en las clases que se observaron, Arely demostró con respecto al Conocimiento de los Estudiantes que en muchas ocasiones no considera las dificultades que sus alumnos pueden enfrentar. Su *Conocimiento del currículo* fue difícil de observar, pero se pudieron hacer algunas inferencias sobre la revisión de documentos que Arely pudo haber omitido como el libro para el docente y el propio programa de estudios.

5.2.4 Caso 4: Héctor

Durante la realización de las observaciones, Héctor estudiaba el 7° semestre de la Licenciatura en Educación Primaria en una Escuela Normal Rural del Estado de Durango. Héctor realizaba sus prácticas profesionales con un grupo de 5° grado en una localidad urbana ubicada a poco más de 15 kilómetros de la Escuela Normal a la que asistía y a aproximadamente a 70 kilómetros de la ciudad de Durango.

Se observaron y videograbaron cinco clases impartidas por Héctor, en ellas se estudiaron contenidos relacionados con números decimales[26]. Las clases observadas se realizaron los días: 1, 7, 8 y 9 de noviembre y el día 13 de diciembre de 2016. Los contenidos abordados en cada una de las clases observadas fueron:

Sesión 1 (1 de noviembre): Resolución de problemas que impliquen una división de números naturales con cociente decimal.

Sesión 2 (7 de noviembre): Conversión de números decimales a fracciones decimales y viceversa.[27]

Sesión 3 (8 de noviembre): Resolución de problemas que impliquen multiplicaciones de números decimales por números naturales.

Sesión 4 (9 de noviembre): Identificación de la regularidad en sucesiones con números (incluyendo números fraccionarios) que tengan progresión aritmética, para encontrar términos faltantes o continuar la sucesión.

Sesión 5 (13 de diciembre): Resolución de problemas que impliquen una división de números decimales.

En seguida se describe el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* que evidenció Héctor durante las clases en que se le observó. Con el fin de complementar el

[26] Cuando se solicitó el acceso para realizar las observaciones, se comentó con los alumnos que el propósito era analizar la manera en que ellos enseñaban matemáticas, en específico contenidos relacionados con fracciones y decimales. Héctor solo implementó actividades con decimales.

[27] Este no es un contenido que pertenezca al programa de 5° año, pero Héctor lo incluyó como parte de las actividades de las sesiones en que se observó.

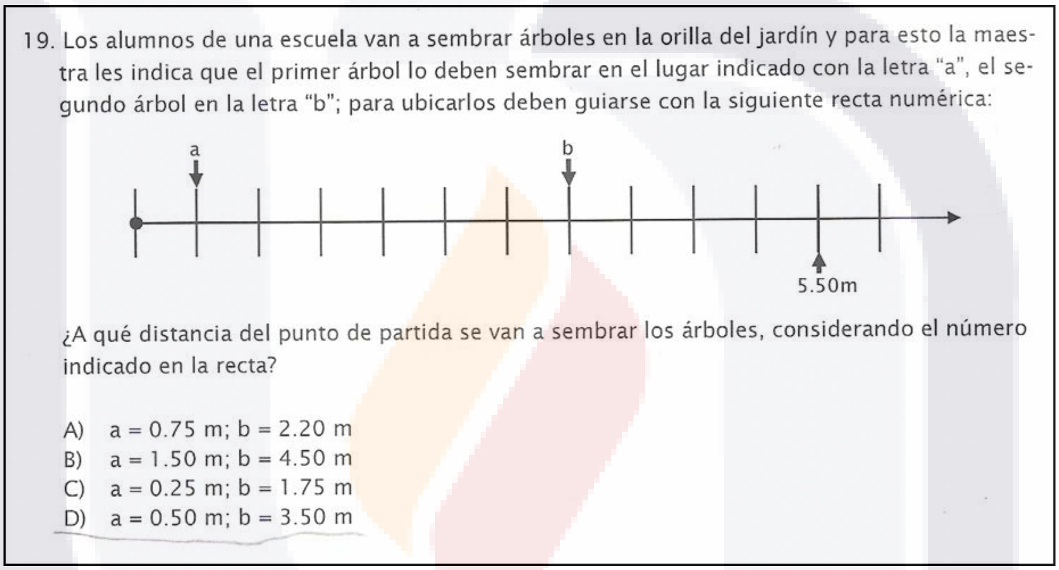
análisis y ofrecer una descripción más detallada, se incluyen los resultados que Héctor obtuvo tanto en el examen de conocimientos matemáticos como en el cuestionario de conocimientos didácticos. Héctor evidencia conocimientos que pueden vincularse con la mayoría de los subdominios del MKT, aunque con diferentes grados de comprensión y desarrollo. Es conveniente recalcar que como en los casos anteriores, se emplearon los indicadores que propone Sosa (2011) para la elaboración del análisis.

5.2.4.1 Conocimiento común del contenido

En el examen de conocimientos sobre fracciones y decimales, Héctor fue uno de los alumnos que menor número de aciertos obtuvo. Respondió correctamente 17 preguntas de 30 posibles. Los reactivos cuya respuesta fue correcta se relacionan con:

1. Resolver problemas con números decimales que implican resta, multiplicación y división.
2. Resolver problemas que involucran:
    a. La propiedad de densidad de los números decimales.
    b. Comparar números decimales.
    c. Transformar números decimales a fracciones decimales.
    d. Transformar decimales a fracciones comunes.
    e. Ubicar decimales en la recta numérica.
    f. Resolver problemas con fracciones (propias, impropias o mixtas) que implican sumar, restar, multiplicar o dividir.
3. Resolver problemas con fracciones que involucran:
    a. El uso de fracciones equivalentes
    b. Ubicar fracciones en la recta numérica.
    c. La propiedad de densidad de los números fraccionarios.
    d. Ordenar de los números fraccionarios.

A manera de ejemplo, Héctor resolvió de manera correcta el reactivo que se muestra en la figura 5.36. Con el cual se intentó identificar su conocimiento matemático para resolver problemas que implican ubicar números decimales en la recta numérica. Ofrecer una respuesta correcta a este tipo de problemas “es algo más que contar las divisiones sobre una recta, implica poner en juego diversos conocimientos sobre el orden, la equivalencia y la representación de los números decimales” (Ávila y García, 2008. p. 53).


19. Los alumnos de una escuela van a sembrar árboles en la orilla del jardín y para esto la maestra les indica que el primer árbol lo deben sembrar en el lugar indicado con la letra “a”, el segundo árbol en la letra “b”; para ubicarlos deben guiarse con la siguiente recta numérica:

¿A qué distancia del punto de partida se van a sembrar los árboles, considerando el número indicado en la recta?

A) a = 0.75 m; b = 2.20 m
B) a = 1.50 m; b = 4.50 m
C) a = 0.25 m; b = 1.75 m
D) a = 0.50 m; b = 3.50 m

Figura 5.36. Respuesta de Héctor al reactivo 19. Examen sobre fracciones y decimales.

Por otra parte, los reactivos cuyas respuestas fueron incorrectas se refieren a conocimientos para:

a) Resolver problemas con fracciones comunes que implican:
   - Adición
   - Sustracción
   - Multiplicación
b) Ubicar fracciones en la recta numérica.
c) Comprender la propiedad de densidad de los números fraccionarios.
d) Resolver problemas que implican el cálculo de una fracción de un número natural.

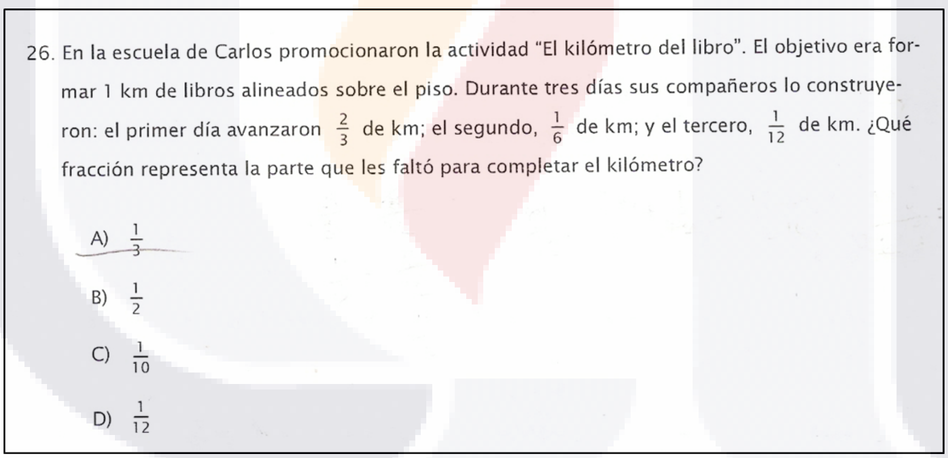
e) Comparar y ordenar números fraccionarios.

f) Trasformar números decimales a fracciones decimales o fracciones comunes.

g) Comprender la propiedad de densidad de los números decimales.

h) Resolver problemas con números decimales que implican adición.

Como se puede apreciar, Héctor presentó más dificultades con aquellos reactivos que implicaron el uso de fracciones que con los decimales. Tal vez por esta razón en las sesiones que se observaron de Héctor solo se estudiaron temas en los que se emplearon números decimales, aun cuando el programa de quinto grado indica el estudio de ambos. En la figura 5.37 se presenta uno de los reactivos que Héctor respondió de manera incorrecta. Se trata del reactivo 26 del examen sobre fracciones y decimales, con el problema que se planteó se evaluó el conocimiento para resolver problemas que implican la suma y resta de fracciones.



26. En la escuela de Carlos promocionaron la actividad "El kilómetro del libro". El objetivo era formar 1 km de libros alineados sobre el piso. Durante tres días sus compañeros lo construyeron: el primer día avanzaron $\frac{2}{3}$ de km; el segundo, $\frac{1}{6}$ de km; y el tercero, $\frac{1}{12}$ de km. ¿Qué fracción representa la parte que les faltó para completar el kilómetro?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{10}$

D) $\frac{1}{12}$

Figura 5.37. Reactivo 26. Examen de conocimientos sobre fracciones y decimales

La respuesta correcta es la opción D. Héctor señaló como respuesta correcta la opción A. Si se analizan las fracciones que se proporcionan en el planteamiento del problema, así como las opciones de respuesta es posible descartar, de entrada, las opciones A y B, pero al parecer, Héctor sólo tomo como referencia el primer valor del problema ($\frac{2}{3}$).

En las clases que se observaron, Héctor evidenció que algunos conocimientos sobre los números decimales con que cuenta son erróneos, los cuales pueden considerarse como parte del *Conocimiento común del contenido*. Por ejemplo, valida un error que los alumnos comenten al ordenar números decimales, en otras palabras, institucionaliza (Brousseau, 2007) un saber incorrecto. En el siguiente fragmento es posible observarlo:

> [Al inicio de la sesión en la que se estudió el tema "Identificación de la regularidad en sucesiones con números (incluyendo números fraccionarios) que tengan progresión aritmética, para encontrar términos faltantes o continuar la sucesión" Héctor solicita a algunos alumnos que pasen y anoten en el pizarrón cuál número consideran es el mayor de la siguiente lista de números 1.63; 1.325; 1.1175. Tres alumnos pasan y mencionan, cada uno, un número diferente como el mayor. De la siguiente manera: Roberto: 1.63; Ashley: 1.325; Kevin: 1.1175]
>
> ***Héctor****: A ver* [Dirigiéndose a todo el grupo] *¿Cuál será el número correcto?*
> ***Alumna (Paola)****: Ese* [señalando el número 1.63]
> ***Héctor****: A ver ¿quién escribió este?*
> ***Alumnos (varios)****: ¡Roberto!*
> ***Héctor****: ¿Por qué escribió este Roberto?*
> ***Alumno (Roberto)****: Porque el número entre más números tiene a la derecha* [del punto] *es menor.*
> ***Héctor****: Bueno.*
>
> [Héctor voltea y pregunta a otra alumna (Ashley)]
>
> ***Héctor****: Usted Ashley, ¿Por qué para usted este es más grande, el mayor?* [Se refiere al número 1.325]
> …
> ***Alumna (Ashley)****: Porque los mayores tienen menos cantidad* [a la derecha del punto]
> ***Héctor****: Menos cantidad.* [afirmando] *Bueno, ¿y quién escribió este número?* [Señalando el último número]
> ***Alumno (Kevin)****: Yo Profe.*
> ***Héctor****: ¿Por qué para usted ese es el más grande? ¿Ese el mayor?* [El alumno comenta algo, pero no se escucha] *más fuerte por favor ¿sí?*
> ***Alumno (Kevin)****: Porque pienso que el 1.1175 es más grande que los demás.*
> ***Héctor****:* [Dirigiéndose a la clase]. *A ver, ¿estará correcto?*
> ***Alumnos****: ¡No!*
> ***Héctor****: ¿Por qué no? ¿Por qué sí? O ¿Por qué no?*
> …
> ***Alumno (Kevin)****: Porque ese es más chico, porque los que menos tienen* [Se refiere a la cantidad de dígitos a la derecha del punto], *son los que más tienen cantidad.*

Héctor: *¿Los que menos tienen qué?*
Alumno (Kevin): *Números.*
Héctor: *¿Menos números? ¿ese es más grande, o más pequeño?* [Se refiere al número 1.1175] *A ver Ashley.*

[Una alumna levanta la mano. Héctor le da la palabra]

Alumna (Camila): *Si tiene más a la derecha* [del punto] *es menor y si tiene más a la izquierda es mayor.*
Héctor: *Ok. ¿Por qué es mayor? Perdón ¿Por qué es menor si tiene más números al lado derecho del punto decimal?* [señalando los números 1.325 y 1.1175*)* *Se va haciendo más pequeño.*
Alumno (Kevin): *Porque son décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas. Y del otro lado son unidades, decenas, centenas.*
Héctor: *Exacto, eso es mayor que esto* [se refiere al número 1.63 como mayor que 1.325] *¿sí? Entonces, entre más números haya a la derecha del punto decimal es cada vez más pequeño ¿sí? Ok vamos a hacer otro ejercicio.* (Héctor, clase 4, líneas 75-105)[28].

Héctor indica a los estudiantes que los argumentos que ellos presentan, acerca de cómo es posible determinar cuándo un número decimal es mayor que otro, son correctos. Esta idea muestra que al igual que los alumnos, Héctor comparte dicho error, pues la cantidad de dígitos a la derecha del punto decimal no determina si es más grande o pequeño que otro. Lo correcto es identificar el valor de cada dígito según la posición que ocupa, es decir, décimos, centésimos, milésimos, etc. Lo anterior es interesante, pues en el examen de conocimientos Héctor responde correctamente el reactivo en el que se solicitó ordenar de mayor a menor cuatro cantidades compuestas por enteros y decimales.

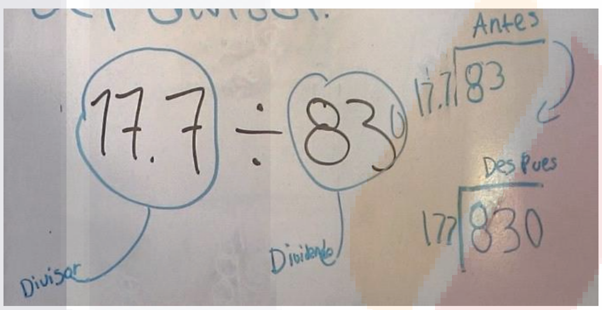
Otra evidencia en la falta de *Conocimiento común del contenido* se observa cuando Héctor plantea la siguiente división a sus alumnos 17.7 ÷ 83 y les solicita que, para resolverla identifiquen el divisor y el dividendo. La división que les plantea es un ejercicio aislado sin el contexto de algún problema. A continuación, se muestra el fragmento de la sesión.

---

[28] La información entre paréntesis se refiere a la organización que se utilizó para el análisis de la información. Así, aparece el nombre del alumno observado, en este caso Héctor, la clase en la que sucedió el evento que se analiza (cuarta clase observada) y el número de las líneas o renglones de la transcripción donde se encuentra la información que se presenta (75-105), esto con el software Atlas.ti que sirvió de apoyo para el análisis de la información.

[Héctor pide a sus alumnos que escriban en su libreta el título “resuelve las siguientes divisiones usando el número decimal en el divisor”. Luego les indica que copien la división 17.7 ÷ 83. Solicita a una alumna que, en el pizarrón, escriba la división en forma de “casita” para identificar el dividendo y el divisor. La alumna pasa y escribe: $17.7\overline{)83}$]

Héctor: *A ver, ¿será correcto? Daniel, ¿qué opina usted de lo que hizo Shelsy? Dice Shelsy que el 17.7 es el divisor y el 83 el dividendo. ¿Es correcto Daniel?*
Alumno (Daniel): *Sí.*
Héctor: *A ver.*
…
Héctor: *A ver, guardamos silencio. ¿Será correcto siguiendo la indicación? ¿Está bien Shelsy?* [Señala la forma en que la alumna escribió la división]



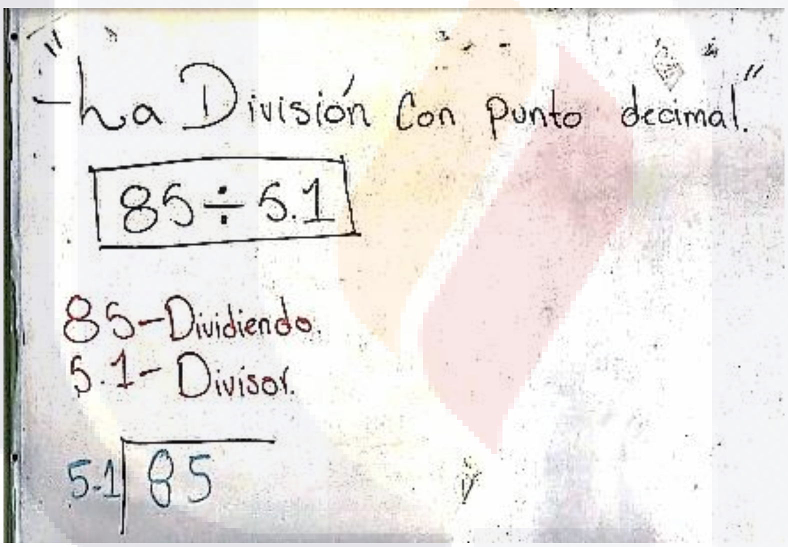
Alumna (Shelsy): *Sí.*
Héctor: *Ok, correcto.* [Borra lo que está escrito en el pizarrón] (Héctor, clase 5, líneas 26-40)

Como se observa en la viñeta anterior los alumnos indican que 17.7 es el divisor y 83 el dividendo. Héctor avala las respuestas, aunque como se advierte la división 17.7÷83 indica lo contrario. El error que Héctor, junto con los alumnos comenten, se debe a que con frecuencia realizan divisiones en las que la cantidad mayor es el dividendo.

5.2.4.2 Conocimiento especializado del contenido

El *Conocimiento especializado del contenido* es propio de los profesores. Les implica, entre otros quehaceres, crear las condiciones para hacer “aprendible” un contenido en particular. Demanda el conocimiento del por qué funcionan los procedimientos matemáticos Al respecto Héctor evidencia una ausencia de este subdominio en los que se refiere al procedimiento que subyace la división con números decimales. Durante el desarrollo de la primera clase en la que Héctor y sus alumnos estudiaron el contenido: "resolución de problemas que impliquen una división de números naturales con cociente decimal". Como parte de las actividades les platea resolver una división con una cantidad cuyo divisor era decimal y el dividendo un número entero.

> [Héctor escribe en el pizarrón 85 ÷ 5.1 y solicita a los alumnos identifiquen el divisor y el dividendo y que además escriban la división empleando la "casita". Luego escribe en el pizarrón lo siguiente:]



Héctor: *Este punto decimal que está aquí* [Se refiere a la cantidad 5.1] *vamos a pasarlo a la derecha ¿de acuerdo? El cual nos quedaría algo así 51. Aquí en el 85 vamos a agregar un cero ¿sí?, vamos a agregar un cero y como pasamos el punto decimal para acá* [señala el divisor 5.1], *también vamos a pasar de este lado, ¿sí?* [se refiere al dividendo] *Que quedaría más o menos así. Ahí ya tenemos la división simplificada.*

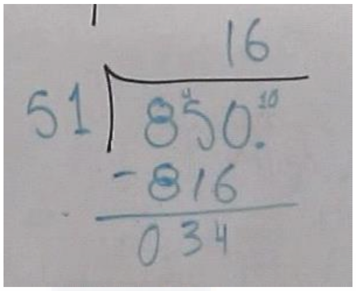
…

Héctor: *Entonces ahora si nos vamos a preguntar ¿cuántas veces cabe el 51 en 850? Son 51 x 16 = 816. Si vamos 51 x 17 = 857. Entonces nos pasamos, entonces bueno le vamos a poner 16. (Le escribe 16) de acuerdo. Entonces hacemos la operación, aquí mismo hacemos la resta 51 x 16 ¿Cuánto es?*

Alumno (Pedro): *816*

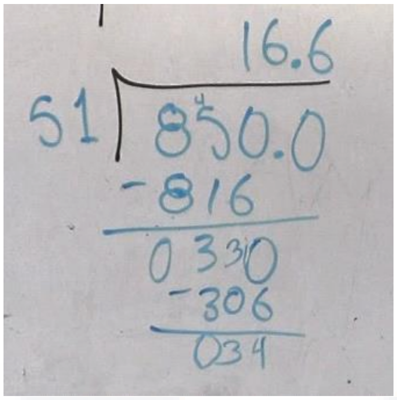
Héctor: *816 ¿Quién quiere pasar a hacer la resta?*

[Una alumna levanta la mano y pasa a realizar la resta en el pizarrón]



***Héctor**: Ok, aquí la podemos terminar, pero vamos a continuar, ¿por qué? Porque estamos en la división con punto decimal ¿verdad? Ok. Entonces fíjense lo que va a pasar eh, de este lado en el 850 después del punto decimal vamos a agregar un cero ¿sí? Vamos a agregar un cero ¿de acuerdo? ¿Si ven este punto?, este lo vamos a subir al cociente* [lo señala] *que va a quedar así. Hasta ahí vamos bien, ¿si se fijaron lo que hicimos?*
***Alumnos**: Sí*
***Héctor**: Agregamos un 0, acá subimos el punto decimal y acá de este lado vamos a bajar este 0 ¿sí? al residuo y va a quedar de esta manera ¿sí? ¿Qué número quedó?*
***Alumnos**: 340*
***Héctor**: Entonces nos vamos a volver a hacer esta pregunta ¿cuántas veces cabe el 51 en el ¿qué?*
***Alumnos**: En el 340*
***Héctor**: ¿Iván?*
***Alumno (Pedro)**: Cabe 6 veces*
***Héctor**: ¿6 veces? ¿Sí o no? ¿Ashley?*
***Alumna (Devanni)**: Si, si cabe 7 se pasa*
***Héctor**: Se pasa verdad. Entonces ¿dónde vamos a poner el 6?*
***Alumnos**: Abajo del cero o a un lado*
***Héctor**: ¿Abajo del 0? En el cociente, ¿sí? Ahí está ¿sí?*
***Héctor**: Hacemos la misma operación, una resta ¿de acuerdo? 306, a ver ¿Quién quiere pasar a realizar la operación? Shelsy.*

[Una alumna pasa al pizarrón a realiza la operación]



Héctor*: A ver ¿Estará correcto o incorrecto?*
Alumnos*: Sí, está correcto*
Héctor*: Ok, podemos continuar o lo podemos dejar hasta ahí. Pero en esta ocasión ahí le dejamos ¿por qué? porque ya tenemos ¿qué?*
Alumnos*: 16.6*
Héctor*: Porque ya tenemos el resultado ok, ¿de acuerdo? ¿Hay alguna duda hasta aquí? o podemos pasar a hacer un ejercicio ahí en el cuaderno. ¿Hacemos uno? ¿Ahí en su cuaderno?* (Héctor, clase 1, líneas 26-89)

El ejercicio que Héctor resuelve con sus alumnos es un proceso mecánico, instrumental. Recurre a lo que se emplea como “recorrer el punto hacia la derecha” y con ello se convierten los números decimales y la división pueden efectuase como se hace con los naturales. El proceder de Héctor parece mostrar que carece del conocimiento acerca de por qué se emplea este procedimiento, lo cual tiene diversas implicaciones. Ávila y García (2008) señalan que para este caso (donde el divisor es un decimal) se necesita que los alumnos:

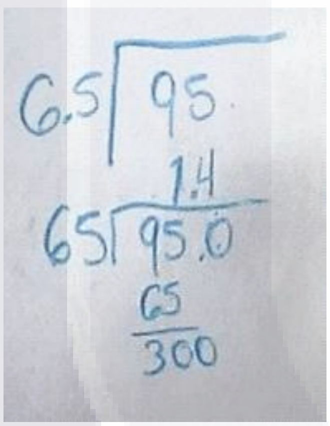
a) Hayan construido el significado de la fracción como cociente, que sepan que las fracciones pueden representarse como divisiones y las divisiones como fracciones.
b) Hayan construido la idea de que si se multiplica numerador y denominador por un mismo número se obtiene una fracción equivalente. Esta propiedad, aplicada a las divisiones, se enuncia de la siguiente manera: si se multiplica dividendo y divisor por un mismo número, el cociente no se altera. (Ávila y García, 2008. p. 79)

Con lo anterior es posible, al resolver una división como la que Héctor planteó: encontrar una división cuyo divisor no sea un número decimal. El procedimiento matemático que está detrás de “recorrer el punto tanto en el divisor como el dividendo” supone la comprensión de que se está multiplicando ─tanto al divisor como al dividendo─ por 10, 100, 1000 etcétera. Y según se percibe en la explicación que Héctor ofrece a sus alumnos se carece de este razonamiento.

Otro ejemplo de lo anterior se puede observar en el siguiente fragmento:

[Héctor plantea a sus alumnos que resuelvan la división 95 ÷ 6.5 Solicita a una alumna que pase al frente al pizarrón y la resuelva]

[La alumna pasa al frente y en el pizarrón anota]



Héctor: [A la alumna] *No simplifico, no le quito el punto, bueno ahorita vemos. El cociente dice usted que es 1.4, por ahí tienen un error en el dividendo… ¿en dónde es el punto?, ¿de qué lado dijimos?* [Le pregunta al resto del grupo]
Alumno (Kevin): *En el lado derecho del 0*
Héctor: *Ajá, por eso les está quedando 1.4, no es correcto ¿Sí? Les hace falta acomodar el punto, mandarlo hasta la derecha ¿sí? Lo demás está bien, solo tienen ese detalle,* (Héctor, clase 1, líneas 182-184)[29]

Cuando Héctor se refiere a la simplificación de la división hace alusión a la conversión de los números decimales en naturales por medio de “recorrer el punto hasta la derecha”; cuando en realidad el proceso matemático es multiplicar ambos elementos de la división por una potencia de diez.

[29] Este fragmento será empleado para ejemplificar el conocimiento de Héctor en otro subdominio.

5.2.4.3 Conocimiento en el horizonte matemático

Con las observaciones realizadas no fue posible identificar evidencias que muestren un *Conocimiento en el horizonte matemático* en Héctor.

5.2.4.4 Conocimiento del contenido y los estudiantes

El *Conocimiento del contenido y los estudiantes* comprende conocer a los estudiantes y lo que saben de matemáticas, en específico del contenido que se estudia. El profesor debe ser capaz de anticipar lo que piensan sus estudiantes cuando ofrecen una respuesta, anticipar lo que pueden encontrar confuso. Además de conocer lo que para los alumnos es interesante y motivador. A este respecto Héctor evidenció que conoce lo que para sus alumnos es motivador e interesante e identifica algunos errores y procedimientos de los alumnos, aunque de manera limitada.

En la sesión cuatro se estudió el contenido “identificación de la regularidad en sucesiones con números (incluyendo números fraccionarios) que tengan progresión aritmética, para encontrar términos faltantes o continuar la sucesión”, Héctor programó una actividad que denominó “El tendedero”. Para ello elaboró tarjetas con diferentes números decimales y las entregó a los estudiantes. La actividad consistió en ordenar dichas tarjetas de mayor a menor y colocarlas en el tendedero (un hilo que colocó de un extremo a otro del salón). Para comunicarles si la posición de una tarjeta era correcta Héctor empló acordes que él tocaba en un teclado electrónico que llevó a la clase. Cuando los alumnos acertaban, tocaba una pequeña melodía, cuando el orden no era correcto tocaba una melodía distinta. Fue notable como los alumnos se interesaron y les resultó divertido:

[Un alumno señala que él tiene el número que sigue, que quiere pasar]

***Héctor**: ¡Permítame! ¡Permítame Kevin! ¡Permítame! Pasan, entonces observen los sonidos, por favor, cuando esté erróneo, cuando está incorrecto va a sonar de esta manera.*

[El profesor procede a tocar acordes en teclado electrónico para señalar que está erróneo]

Héctor*: Así va a sonar ¿de acuerdo? Cuando esté bien, cuando esté correcto va a sonar de esta manera; suenan como moneditas ¿verdad? ¿Entendido, sí o no? ¿entendieron?*

…

[Después de colocar varias tarjetas pasa un alumno a colgar el número 8.5. Héctor toca la melodía que indica que es correcto. Los alumnos celebran al escuchar el sonido]

…

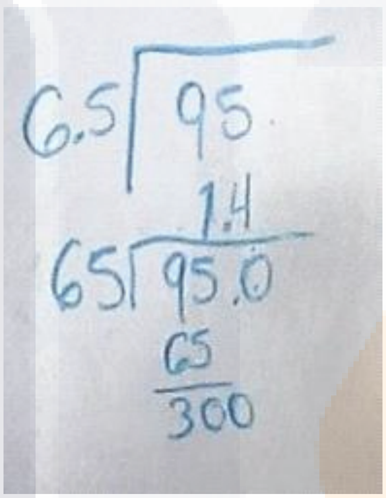
[Los niños discuten, entre ellos, quién es el siguiente]

Alumno (Luis)*: Yo tengo 8.6*
Alumno (Erick)*: ¿Quién tiene el 8.1 o lo que sea?*
Héctor*: ¿Les ayudó?*
Alumno (Erick)*: No profe, déjenos solos*

[Un alumno pasa y coloca una tarjeta con el número 8.03. Héctor, mediante el teclado electrónico le indica que es incorrecto el orden [(Héctor, clase 4, líneas 170-238).

Ejercicios como el anterior, si se toma en cuenta el comentario del alumno (Erick): "*No profe, déjenos solos*", son el camino hacia lo que Brousseau (2007) denomina una situación adidáctica. En términos generales una situación adidáctica se identifica cuando la intención que el docente planteó en una situación didáctica deja de ser percibida por los alumnos como una tarea a realizar. Se intenta que los alumnos, por iniciativa propia, se interesen por hacer frente a los problemas o actividades que forman parte de la situación que el profesor programó. Lo ideal es que el profesor permita que los alumnos, con sus propios recursos, resuelvan la consigna planteada. No se trata de que el profesor no intervenga, al contrario, debe ser cuidadoso de en qué momento hacerlo y qué ayudas proporcionar a los estudiantes. Como en el ejemplo que se presenta, los alumnos, ante la pregunta de Héctor sobre la ayuda que les puede proporcionar reaccionan solicitando que les conceda la posibilidad de resolver la actividad por ellos mismos.

También se pudo observar que Héctor tiene conocimientos que, en algunas ocasiones, le permite identificar errores en los procedimientos que emplean los alumnos al resolver ciertos ejercicios. Por ejemplo, en la sesión 1, en que estudiaron la resolución de divisiones con números decimales, algunos alumnos cometieron errores mientras intentaban resolver ejercicios. Héctor recurrió al cuestionamiento directo con el propósito de aclarar el error:

> [La situación es la solución de la división 95 ÷ 6.5. Héctor pide a una alumna la resuelve en el pizarrón mientras el resto del grupo lo hace en su cuaderno]
>
> 
>
>
> ***Héctor**:* [A la alumna] *No simplifico, no le quito el punto, bueno ahorita vemos. El cociente dice usted que es 1.4, por ahí tienen un error en el dividendo… ¿en dónde es el punto? ¿de qué lado dijimos?* [Le pregunta al resto del grupo]
>
> ***Alumno (Kevin)**: En el lado derecho del 0.*
>
> ***Héctor**: Ajá, por eso les está quedando 1.4, no es correcto ¿Sí? Les hace falta acomodar el punto, mandarlo hasta la derecha ¿sí? Lo demás está bien, solo tienen ese detalle.* (Héctor, clase 1, líneas 182-184)

Lo que Héctor identificó es un error en el procedimiento que sigue la alumna al resolver la división, pues es lo que compartió a sus alumnos antes de resolver el ejercicio. Reconoce que la alumna no recorrió el punto en el dividendo, es decir, no siguió la “receta” que él les enseñó. Pero no distingue que tras ese error está el supuesto de que el resultado de una división no se ve afectado si divisor y dividendo son multiplicados por el mismo número en este caso 10.

Esta situación también se analizó como parte del *Conocimiento especializado del contenido* (SCK). En el sentido de que el SKC involucra el conocimiento acerca del por qué funcionan los procedimientos matemáticos, en este caso recorrer el punto a la derecha al realizar una división de números decimales. Lo que pone de manifiesto que las fronteras entre los subdominios, en la práctica, se vuelven difusos. Este hecho lo adelanta Ball, Thames, y Phelps (2008) cuando señalan "al preguntar sobre las situaciones que surgen en la enseñanza que requieren que los maestros usen matemáticas, encontramos que algunas situaciones pueden ser manejadas usando diferentes tipos de conocimiento" (p. 403).

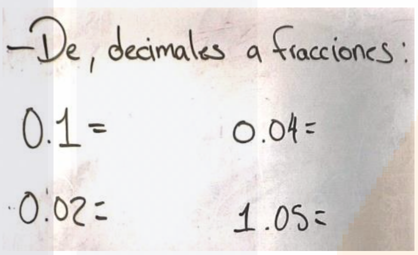
Aun cuando es posible observar que Héctor conoce algunas características de los estudiantes todavía no desarrolla un conocimiento que le permita prever que a los alumnos les puede parecer extraño usar por primera vez un método o regla que emplearon en otra situación. Al enfrentar a los alumnos a una división con números decimales con una cantidad mayor de dígitos, no prevé que les puede parecer extraño emplear la misma estrategia que usaron para resolver ejercicios más sencillos:

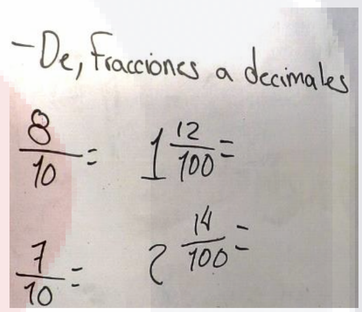
> [Héctor les plantea la siguiente división 83 ÷ 16.5. Antes solo propuso resolver divisiones con divisores conformados por un entero y un decimal. Un alumno (Mario) parece tener dificultades para resolverla y llama a Héctor para que lo oriente].
>
> ***Alumno (Mario)****: ¿De todos modos, se le va a poner el 0 y luego el punto?*
> ***Héctor****: Fíjese como está el divisor aquí 5.1* [Se refiere a un ejercicio anterior] *¿Dónde le está agregando el cero? Aquí le agrega el cero* [Señala el pizarrón] *Aquí está y ¿dónde va a agregar al cero? ¿al dividendo o al divisor?*
> ***Alumno (Mario)****: Al dividendo*
> ***Héctor****: Si, entonces no tiene por qué asustarse cuando vea un número más. Es el mismo procedimiento… ¿De acuerdo?*
> ***Héctor****:* [Dirigiéndose a todo el grupo] *¿Se les hace más complicada está? Esta que pusimos, es el mismo procedimiento si ven una cifra de más no se asusten, es el mismo procedimiento.*
> ***Alumnos (Varios)****: ¡Sí! … ¡No!* (Héctor, clase 1, líneas 272-275)

5.2.4.5 Conocimiento del contenido y la enseñanza

Este subdominio se caracteriza por el conocimiento que tienen los profesores para identificar las ventajas de emplear determinada estrategia de enseñanza. Por tener la capacidad de elegir con qué ejemplo comenzar una clase o qué actividades proponer. En el caso de los profesores de primaria en México es esperable que tanto las estrategias, las actividades y los ejemplos se relacionen con las sugerencias y el enfoque didáctico que se propone, en los programas de estudio, para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Lo observado durante la práctica de Héctor hacen suponer su debilidad con respecto a este subdominio. Por ejemplo, en la sesión dos, donde se estudió el tema “conversión de números decimales a fracciones decimales y viceversa” se puede observar lo siguiente:

> [Es el inicio de la segunda clase que se observó. Héctor escribe en el pizarrón, las siguientes frases: “De decimales a fracciones” y “De fracciones a decimales”, luego escribe los siguientes números y solicita a los alumnos que los copie en sus cuadernos]





> [Una vez que las copian Héctor pide a los alumnos que realicen las conversiones. Solicita a una alumna que, en el pizarrón, resuelva la primera de ellas]

Héctor: *A ver pásele Camila a realizarme la primera, por favor.*
…
[La alumna pasa y resuelve: $0.1 = \frac{1}{10}$]

Héctor: *$\frac{1}{10}$, 0.1, ¿equivale a qué?*
Alumnos: *¡un décimo!*
Héctor: *¿de acuerdo?*
Héctor: *A ver, ¿alguien más quiere pasar a contestar la segunda por favor?*
Alumna (Paola): *A mí me dijo.*
Héctor: *Bueno, ahorita vamos para allá Paola.*
Alumna (Tania): *Yo hago la tercera profe.*
Héctor: *¡Sí está bien!*
Héctor: *¿Dele lectura por favor?*
Alumna (Paola): *0.02 centésimos es igual $\frac{2}{100}$].*
Héctor: *¡Muy bien! ¿Alguien más que quiera pasar?*

Los ejercicios que propone no resultan complicados para los alumnos, pero carecen de un contexto que les dé sentido. No están relacionados con la metodología didáctica que se sugiere en el programa de estudios de primaria. En enfoque de enseñanza y aprendizaje, que se sugiere sean a través de diseño de situaciones de aprendizaje y no en la solución de ejercicios sin un contexto, al respecto el programa deja claro que:

> "no toda actividad representa en sí una situación de aprendizaje; lo será sólo en la medida que permita al estudiante encarar un desafío con sus propios medios… habrá de ser para el alumno una actividad que le permita movilizar sus conocimientos previamente adquiridos, así como la construcción de un discurso para el intercambio que favorezca la acción" (SEP, 2011c, p. 344).

Las actividades de enseñanza que propone Héctor no son una situación de aprendizaje. Sin embargo, es posible identificar, aquellos alumnos que necesitan recibir ayuda para enfrentar una situación de confusión, la cual es una característica del *Conocimiento del contenido y la enseñanza*. Las ayudas que Héctor ofrece son, principalmente, preguntas directas a los alumnos. En otras ocasiones solicita a algún estudiante que resuelva el ejercicio en el pizarrón, para que quienes tuvieran problemas o dudas pudieran darse cuenta de su error. A continuación, se muestra un ejemplo:

[Durante el desarrollo de la sesión cinco en la que se estudió el contenido "resolución de problemas que impliquen una división de números decimales" Héctor se dio cuenta que un alumno tenía dificultades. Pide a una alumna pase al pizarrón a resolver la división 18.5 ÷ 97 y así poder ayudarlo].

Héctor*: Por ahí Kevin tiene algunas dificultades con el procedimiento. Pásele… a ver pásele Camila a realizar esta división. Kevin, observe por favor, ¿sí?*
Alumna (Camila)*: ¿La acomodo y la hago?*
Héctor*: Sí, todo el procedimiento. Simplifíquela, principalmente. ¡Kevin! ponga atención, por favor, eh.*

[La alumna pasa y escribe en el pizarrón lo siguiente[30]:]

[30] Al margen de que la división está mal colocada en la "casita" en este ejemplo se analiza cómo Héctor proporciona ayudas a los alumnos que lo solicitan.

$$18.5 \overline{\smash{)}97}$$

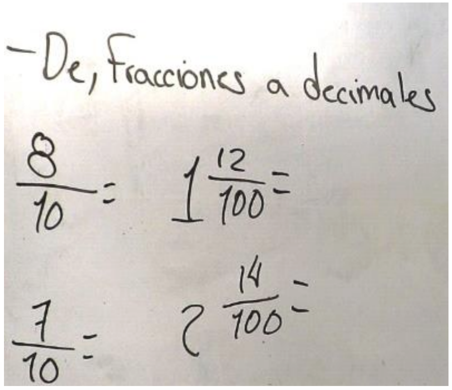
$$185 \overline{\smash{)}970}$$

Héctor: *A ver, permítame hasta allí, para explicarle a Kevin. ¿Si ve? ¿Si se alcanza a ver qué hizo? ¿alcanza a ver Kevin?*
Alumno (Kevin): *Sííííí, así la hice ya.*
Héctor: *¿Ahí va? ¿En cuál? ¿Hasta aquí o acá?*
Alumno (Kevin): *La de arriba:*
Héctor: *Ok, la de arriba ¿Qué sigue de aquí? ¿Qué dijimos que tenemos que hacer después que separamos dividendo y divisor? Teníamos que simplificar. ¿Sí? ¿Qué hacemos al simplificar? ¿A ver, alguien que se acuerde? ¿Alguien que me ayude? ¿Qué hacemos con el punto?* (Héctor, clase 4, líneas 124-131).

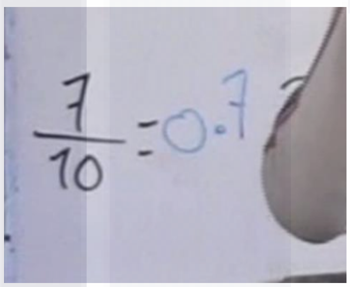
La estrategia que emplea Héctor parece no funcionar, pues el alumno (Kevin) solo observó el procedimiento de solución del algoritmo y nunca interactuó para poder superar la dificultad. Además, mientras realiza la explicación a Kevin, otros alumnos pierden el interés por la actividad, pues ellos han terminado de resolver la división. Se nota que están realizando otras actividades o incluso algunos juegan con sus útiles escolares. Lo anterior sugiere que Héctor necesita adquirir el conocimiento de estrategias para apoyar a los alumnos sin descuidar a los demás estudiantes.

El *Conocimiento del Contenido y Enseñanza* también implica que un profesor sepa qué preguntas formular al momento de presentar o remarcar lo más importante del contenido que está enseñando (Sosa, 2011). Durante el ejercicio donde se estudió la conversión de fracciones decimales a números decimales Héctor realiza algunas preguntas con las que pretende enfatizar lo que considera un aspecto que los estudiantes deben tener en cuenta al realizar este tipo de ejercicios:

[Héctor solicita a los alumnos que en sus cuadernos conviertan las siguientes fracciones decimales, que escribió en el pizarrón, a números decimales. Héctor le solicita a un alumno que pase al frente y resuelva uno de los ejercicios que se muestra en seguida]



[El alumno (Moisés) escribe lo siguiente]



***Héctor**: A ver, ¿estará correcto? Observen por favor.*
***Alumno (Edson)**: ¿Cuál hiciste?*
***Alumno (Moisés)**: Este.* [Señala la fracción 7/10]
***Héctor**: ¿Estará correcto?*
***Alumnos (Varios)**: ¡sí!*
***Héctor**: ¡Sí! ¿Verdad? ¿Por qué pusiste el cero de este lado, a este lado* [izquierdo] *del punto decimal?* [Le pregunta a Moisés] *A ver ¿por qué?*
***Alumno (Moisés)**: Porque no hay enteros.*
***Héctor**: ¡Porque no hay enteros verdad! Y solo 7 ¿qué…? décimas. Ok, gracias…* (Héctor, clase 2, líneas 115-123)

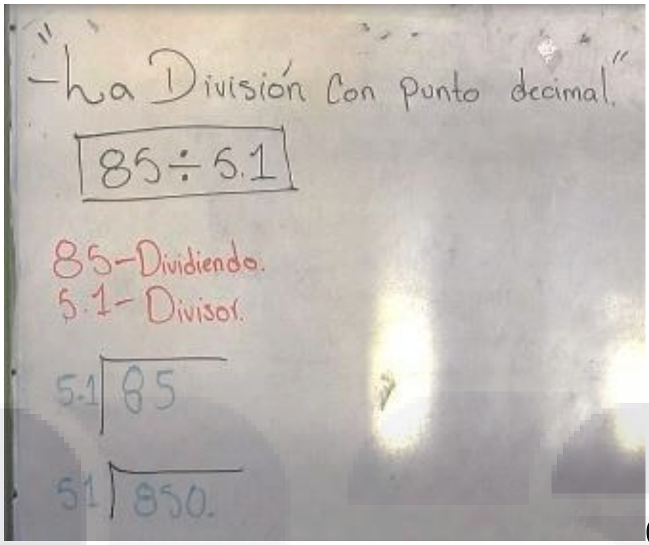
La intervención de Héctor tiene, desde la perspectiva de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), dos funciones: la de validar el procedimiento del alumno y es el comienzo hacia una institucionalización del mismo. Aunque se observó que la estrategia en que los alumnos, uno a uno, pasen al pizarrón a resolver los ejercicios provoca que pierdan el interés por las actividades.

Si bien, la intención de Héctor fue la de propiciar la participación de todos los alumnos esta se aleja de la propuesta didáctica que se hace en el programa, pues no deja de ser directiva y centrada en la solución de ejercicios carentes de un contexto en donde se les permita que los estudiantes tener la experiencia de trabajar de manera autónoma, en pequeños equipos o de manera grupal, con el fin de propiciar la discusión, la reflexión y la argumentación (SEP, 2011c, p.343).

5.2.4.6 Conocimiento del currículo

El *Conocimiento del currículo* implica a los profesores conocer la organización tanto del libro de texto como del programa de la asignatura: los contenidos que lo integran, los temas, el enfoque didáctico que se propone, entre otros elementos. Como ya se dijo, Héctor no considera la propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas propuesta por la SEP para la escuela primaria. Los ejemplos que propone al inicio de las sesiones no tienen un contexto que les dé sentido. Además, el hecho de que en todas las sesiones que se observaron Héctor comenzara con la resolución de ejercicios, se puede asociar a un enfoque didáctico tradicional y mecanicista de la enseñanza de las matemáticas, como se muestra a continuación:

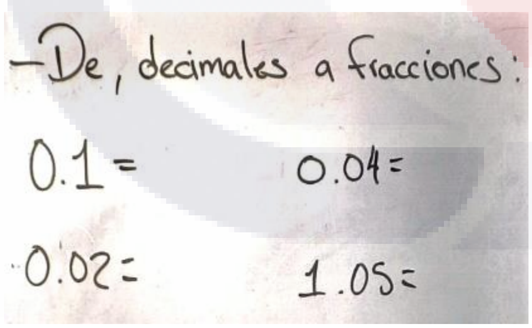
> ***Héctor**: Bueno, vamos a empezar con esta.* [Se refiere a una división 85 ÷ 5.1] *Bueno, en este caso el 85 va a ser el dividendo y el 5.1 va a ser el divisor. A ver ¿alguien quiere pasar a escribirlos en su posición?* [La frase “en su posición” hace referencia a que los elementos de la división, dividendo y divisor, fueran escritos empleando “la casita” de manera correcta]
>
> [Héctor escribe la división que se muestra, el nombre de los elementos de la división y lo que él llama “su posición”]

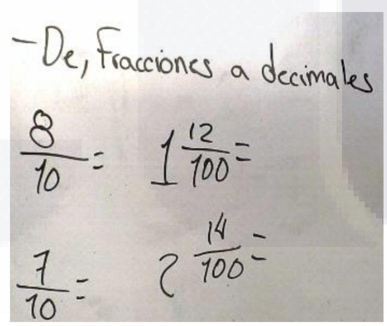


(Héctor, clase 1, líneas 19-27)

Héctor escribió todo lo que se muestra en la figura, con acciones como esta no deja margen para que los niños intenten razonar, reflexionar e incluso proponer posibles soluciones, únicamente les deja hacer la mecanización de la división. Otro ejemplo lo constituye el siguiente inicio en una clase:

> [Héctor escribe en el pizarrón, una especie de subtemas "De decimales a fracciones" y "De fracciones a decimales", luego escribe los siguientes números]





Héctor: *Lo copiamos por favor.*

(Héctor, clase 2, líneas Observación 33-36)

El programa de la asignatura es claro al proponer el diseño de situaciones de aprendizaje que lleven al alumno a poner en ejercicio los conocimientos que ya posee.

Además, en ninguna de las sesiones que se observaron refirió actividades del libro de texto o al menos una relación o comentario al respecto. Este hecho puede tener una explicación, no se debe olvidar que Héctor era un estudiante todavía. Mucho del *Conocimiento del currículo* y de otros subdominios se alcanza con la experiencia, y al parecer, en sus estudios en la Escuela Normal no se ha puesto énfasis en el conocimiento de los planes y programas de Educación Primaria.

5.2.4.7 Valoración del conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones y decimales de Héctor

Héctor evidenció que fue uno de los alumnos que menor número de aciertos obtuvo tanto en el examen sobre fracciones y decimales como en el cuestionario sobre conocimientos didácticos. Estos resultados, de cierta manera, se corresponden con el análisis de la práctica al enseñar contenidos relacionados con este tipo de números. Por ejemplo, en el examen de conocimientos registró mayores problemas con los reactivos que implicaron fracciones que decimales, tal vez eso explica que en las sesiones que se observaron solo estudió contenidos relacionados con los decimales. Como se mencionó antes, quizá esto se deba a que el trabajo con los decimales represente menos dificultad, pues realizar operaciones con ellos es muy cercano a la manera en que se hace con los números naturales. Este hallazgo es similar al que Domoney (2001) presenta, cuando señala que para los futuros profesores una de las complicaciones más comunes es el tratamiento de los números racionales entendidos como fracciones, particularmente en la comprensión de las fracciones como un número en sí mismo.

Durante las sesiones que se observaron Héctor evidenció que parte del *Conocimiento común del contenido* que tiene sobre los números decimales es erróneo. Por ejemplo, valida el error que los alumnos comenten al ordenar números decimales, cuando comenta que “Entre más números haya a la derecha del punto decimal [el número] es cada vez más pequeño ¿sí?”.

Un elemento que tal vez no sea considerado como un error, pero si una falta de *Conocimiento especializado del contenido* que tiene Héctor, se refiere a que identifica las equivocaciones de los alumnos al resolver un algoritmo como la división, pero no demuestra habilidad para tratarlas. Por ejemplo, cuando los alumnos resuelven una división que contiene un número decimal en el divisor y un entero en el dividendo, Héctor, identifica cuando sus alumnos no "recorren el punto" para resolverla, pero no es capaz de explicar por qué se "recorre el punto"; en otras palabras, qué significa eso.

Las actividades de enseñanza que se observaron en la práctica de Héctor no se corresponden con las sugerencias didácticas que se ofrecen en el programa de matemáticas. Pues propone, las más de las veces, la solución de algoritmos carentes de un contexto que los haga aparecer en el marco de una situación problemática.

Depaepe et al. (2015) encuentran resultados similares. Estos autores reportan los estudiantes para profesores que encuestaron, presentaron complicaciones para identificar y atender dificultades relacionadas con estrategias de resolución de problemas de estos números en los alumnos de educación primaria. En específico, mencionan que los futuros profesores tuvieron mayores problemas al enfrentarse a situaciones hipotéticas para poner a prueba su conocimiento didáctico en el uso fracciones más que en aquellas en las que se utilizan decimales.

Sin embargo, Héctor dio muestras de cierto conocimiento que tiene de los alumnos, de sus intereses o de aquello que les puede parecer interesante. Desarrolló una actividad denominada "El tendedero" misma que, a los alumnos, les pareció interesante y en la que solicitaron a Héctor no les proporcionara ayuda. Puede decirse que dicha actividad se acercó a lo que, desde la Teoría de las Situaciones Didácticas, se denomina una situación adidáctica. En donde los alumnos tienen la iniciativa para "hacer propia" la responsabilidad de resolver los ejercicios y situaciones que la propia actividad demandó

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

El análisis del conocimiento tanto matemático como didáctico de los profesores es difícil, debido al número de elementos que los integran, tales como el conocimiento de los estudiantes, de la enseñanza, de los contenidos y del currículo, entre otros. Esta investigación se centró en el análisis del conocimiento matemático y didáctico de los estudiantes para profesor en el marco de un plan de estudios de reciente implementación. Los sujetos considerados en este estudio formaban parte de la primera generación de estudiantes en la Licenciatura en Educación Primaria que cursó la carrera siguiendo el Plan 2012, nombre con el que se conoce el Plan de Estudios para la Formación de Maestros de Primaria 2012, puesto en operación a partir de ese año.

Tres objetivos delinearon el curso de la investigación:

- Describir el conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones y decimales de los estudiantes para profesor de educación primaria.
- Identificar el conocimiento matemático y didáctico que los estudiantes para profesor de educación primaria ponen en práctica al enseñar las fracciones y los números decimales a los alumnos de educación primaria.
- Comparar el conocimiento matemático y didáctico sobre las fracciones y decimales, que tienen los estudiantes para profesor de educación primaria con los contenidos de estudio de los programas de matemáticas en educación primaria.

Para ello se empleó el Modelo del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT) elaborado por Ball y sus colegas (2000). En este modelo se sostiene que para enseñar matemáticas un profesor debe contar con un conocimiento del contenido a enseñar y un conocimiento didáctico acerca de cómo enseñarlo.

Con base en las características del MKT y de la información que se obtuvo utilizándolo, puede decirse que los estudiantes para profesores de educación primaria que participaron en el estudio cuentan con conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones y decimales aún en desarrollo, en algunos casos con un nivel muy básico o limitado. Es esperable que, una vez integrados los estudiantes para profesor al servicio docente, ganen experiencia y su conocimiento se vea modificado.

6.1 Sobre el conocimiento matemático de los estudiantes para profesor

En general los estudiantes resolvieron correctamente los problemas y ejercicios que se incluyeron en el examen sobre fracciones y decimales. Lo cual llamó la atención pues estos resultados discreparon de los obtenidos en otras investigaciones (Depaepe et al., 2015; Domoney, 2001; Durmuş, 2005; Gairín, 2013; Konic, 2013), en las que se concluye que el conocimiento de los futuros profesores sobre fracciones y decimales es limitado.

Quizá el que los estudiantes resolvieran de manera correcta la mayoría de los reactivos del examen se debió al hecho de que les resultó sencillo pues, dicho instrumento, se elaboró considerando los conocimientos que los estudiantes de educación primaria deben adquirir durante su paso por la escuela. Un resultado similar es el que Domoney (2001) reporta. Este autor señala que los estudiantes para profesores pueden resolver de manera correcta problemas que implican el uso de fracciones en su interpretación *Parte-todo*. Esta interpretación es la que, en su mayoría, se estudia durante la escuela primaria. Se puede decir que poseen un *Conocimiento común del contenido* necesario para enfrentar problemas y ejercicios que se estudian en la escuela primaria. Aunque se pudo observar que, al solucionar algunos problemas, los estudiantes carecían de flexibilidad en sus procedimientos.

Aunque en general los futuros profesores de ambas escuelas Normales resolvieron correctamente la mayoría de los reactivos del examen sobre fracciones y decimales. Al analizar las respuestas y procedimientos, que emplearon para solucionar los problemas que se les plantearon, resultaron interesantes algunas particularidades:

a) El porcentaje de respuestas correctas fue más bajo en los reactivos que involucraron el uso de fracciones que aquellos que implicaron números decimales. Al resolver problemas con fracciones, una proporción considerable de los estudiantes optó por transformarlas a números decimales, de tal manera que les resultara más fácil su tratamiento. Quizá porque una ventaja de los números decimales sobre las fracciones es que resulta más fácil operar con ellos, pues los algoritmos son los mismos que se emplean en los números naturales, solo que existe la dificultad al elegir el lugar en dónde se debe colocar el punto decimal en el resultado.

b) La propiedad de densidad de las fracciones fue uno temas que representó mayor dificultad para los estudiantes. Muchos estudiantes, recurrieron a la conversión a números decimales para encontrar una fracción entre otras dos.
c) La resolución de problemas que implicaron el uso de algoritmos como división o multiplicación de fracciones también fue un tema que resultó complicado debido al bajo porcentaje de respuesta correcta en estos reactivos.

Algunas respuestas llamaron la atención, por ejemplo, se detectó un error relacionado con el procedimiento para al resolver un problema de suma con decimales: se encontraron respuestas en las que, al aplicar el algoritmo, los estudiantes colocaron de forma incorrecta las cantidades (décimos con centésimos, por ejemplo). Este proceder resultó demasiado preocupante, pues las respuestas provenían de estudiantes que atendían un grupo de alumnos de primaria debido a que realizaban jornadas de práctica intensiva. Konic en sus resultados advertía que la dificultad de los estudiantes para profesores sobre la solución de problemas con números decimales radica en que no dominan el tipo de números con los que se está operando. El hecho que los estudiantes, al resolver algoritmos con números decimales colocaran de manera incorrecta las cantidades, sugiere una marcada deficiencia en la comprensión del sistema decimal de numeración. El error más común se relacionó, particularmente, con la comprensión de notación posicional en donde cada dígito posee un valor de acuerdo a la posición que ocupa en una cantidad. Los estudiantes que respondieron incorrectamente los reactivos que implicaron el empleo de algoritmos con números decimales omitieron el 0 como un número que también ocupa un lugar en las cantidades.

Respecto a la comparación de los resultados entre alumnos de las dos escuelas Normales donde se recogió la información se encontró que, en general, los alumnos del 7° semestre de la Normal Urbana obtuvieron un porcentaje de aciertos ligeramente mayor que los estudiantes de la Normal Rural del mismo semestre, apenas de un punto. Lo anterior implica reflexionar acerca de la siguiente idea: el hecho de suponer que los futuros profesores, independientemente de la institución de la que egresen cuentan con el conocimiento para enfrentar y solucionar problemas y ejercicios relacionados con fracciones y decimales propios de la educación primaria. Los estudiantes de 5° semestre de ambas escuelas también obtuvieron un porcentaje muy similar, aunque poco menor que los de 7° semestre. La diferencia entre el porcentaje de aciertos de los estudiantes de 5° y 7° semestre sugiere que los dos semestres de distancia hacen que los futuros profesores adquieran conocimientos para resolver problemas sobre fracciones y decimales que se presentan en la escuela primaria.

Al comparar el promedio de aciertos por semestres y grupos, esta tendencia se desdibujó, pues algunos grupos de 5° semestre de la normal Rural obtuvieron porcentajes de respuesta correcta mayores que grupos de alumnos de 7° semestre de la misma escuela; y en ocasiones muy cercanos al porcentaje obtenido por los estudiantes de 7° de la Normal Urbana. Posiblemente las diferencias se deban a los conocimientos desarrollados en los niveles educativos previos, así como tal vez a que tuvieron mejores profesores y estrategias de enseñanza más adecuadas durante los cursos de matemáticas que estudiaron como parte de su formación docente, independientemente de ser estudiantes de una escuela Normal Rural.

6.2 Sobre el conocimiento didáctico de los futuros profesores

Las respuestas de los estudiantes al cuestionario mediante el que se exploraron los conocimientos didácticos mostraron, en su mayoría, que son capaces de reconocer algunas dificultades de los alumnos de primaria al utilizar fracciones o decimales. Entre las dificultades que reconocieron con mayor facilidad se encontraron las referidas al orden de números decimales y la resolución de sumas y restas de fracciones y decimales.

Resalta que las preguntas con menor porcentaje de respuestas correctas fueron aquellas en las que se examinó el conocimiento sobre algunas estrategias de enseñanza. Lo cual concuerda con lo que se observó en las sesiones en que realizaron su práctica de enseñanza, pues se pudieron percibir de manera preponderante rasgos de un enfoque didáctico de corte tradicional, alejado de las sugerencias didácticas que se proponen, en la actualidad, para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela primaria y que están contenidos en los programas de estudio de la asignatura.

En el cuestionario de conocimientos didácticos se encontraron respuestas de futuros profesores donde se evidencia un *Conocimiento del contenido y la enseñanza* distante del enfoque de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela primaria. Por ejemplo, para comenzar una clase en la que se estudié el tema de suma de fracciones comunes con diferente denominador con alumnos de primaria, uno de los futuros profesores sugiere se explique, en primer lugar, cómo se realiza el algoritmo de la suma en lugar de partir de una situación problemática que implique a los niños de primaria a la búsqueda de soluciones.

En el *Conocimiento del contenido y la enseñanza* que los estudiantes para profesores evidenciaron en el cuestionario de conocimientos didácticos, se puede observar que se contempla el empleo de materiales concretos ─aunque no se explicita cuáles─ para la enseñanza de diversos contenidos matemáticos. Por ejemplo, al cuestionarlos sobre qué estrategia emplearían en la enseñanza de un concepto como la densidad de los números decimales únicamente mencionaron que mediante el empleo de materiales concretos. Este hecho sugiere que los estudiantes para profesores consideran como parte importante de la enseñanza el empleo de materiales concretos aun cuando un concepto como la densidad de los números decimales implique un razonamiento abstracto que involucra, además, la comprensión de conceptos como el valor posicional.

También se encontraron respuestas que sugieren que los futuros profesores cuentan con un *Conocimiento del contenido y los estudiantes* que les permite comprender el pensamiento de los alumnos al resolver un problema. Lo anterior se pudo observar en problemas con fracciones que implicaron la interpretación *Parte-todo* de la fracción.

Respecto a la comparación entre escuelas, semestres y grupos, se encontró que el porcentaje de respuesta correcta más bajo lo obtuvieron los alumnos de la Normal Rural tanto de 5° como de 7° semestre, incluso los alumnos de 7° de la Normal Rural con porcentajes más bajos que los alumnos de 5° semestre de la Normal Urbana. El conocimiento didáctico sobre un objeto matemático, como las fracciones y los decimales, se adquiere en la formación inicial docente; tanto con las actividades que se espera los futuros docentes realicen en el curso de *Aritmética, su aprendizaje y enseñanza,* como en las jornadas de práctica que llevan a cabo. En ese sentido, la comparación del porcentaje de respuestas correctas entre una y otra escuela, sugiere una diferencia en el tipo de formación inicial en didáctica de las matemáticas que recibe en ambas escuelas. Sin embargo, estos datos no hay que tomarlos como definitivos, pues las diferencias en el porcentaje de respuestas correctas, aunque notorias, no resultaron estadísticamente significativas.

Lo que llamó fuertemente la atención fue la mayor dispersión en el porcentaje de respuesta correcta de los alumnos de la Normal Rural. Alumnos de 5° semestre de la Normal Rural obtuvieron un porcentaje de respuestas correctas por encima de estudiantes de 7° semestre de la Normal Urbana. Aunque, por el contrario, alumnos de 7° semestre de la Normal Rural obtuvieron porcentajes de respuesta inferiores a los estudiantes de 5° semestre de la Normal Urbana.

Con base en estos resultados no se pretende decir que la Normal Urbana sea mejor que la Rural, los resultados deben leerse a la luz de otros factores: los estudiantes de las Normales Rurales, generalmente, provienen de medios sociales más desfavorecidos y con antecedentes escolares menos favorables. No obstante, estos resultados generales, llama la atención que algunos alumnos de la Normal Rural tengan porcentajes de respuesta similares a algunos de los estudiantes de la Normal Urbana. El problema de la desigualdad no se da únicamente entre la ubicación de las escuelas (rural o urbana), también se aprecia al interior de cada una, debido tal vez a los procesos de selección y conformación de los grupos o a los profesores asignados a cada grupo.

6.3 La observación del conocimiento matemático y didáctico

La observación de las clases que impartieron cuatro alumnos de las dos Escuelas Normales durante sus prácticas profesionales, proporcionó información que ayudó a describir, con mayor detalle, el conocimiento matemático y didáctico de los estudiantes. Los estudiantes que obtuvieron mejores porcentajes de respuesta correcta tanto en el examen como en el cuestionario presentaron desempeños diferentes en el aula.

Por ejemplo, Evelyn que obtuvo el porcentaje de respuesta correcta más alto en los dos instrumentos, realizó una práctica más cercana al enfoque didáctico que se expone en los planes y programas de estudio de la educación primaria. Propuso actividades en las que intentó partir de una situación problemática, además trató de considerar los intereses de los alumnos y de atender todas sus dudas. Su *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* es más desarrollado que el de los otros estudiantes cuya práctica se observó, no obstante, se aprecia su falta de experiencia.

Gabriel también obtuvo un porcentaje de respuesta alto ─respondió de manera correcta la mayoría de los reactivos en el examen sobre fracciones y decimales─, pero realizó una práctica de enseñanza basada en un enfoque didáctico muy apegado a lo tradicional. Él valoró mucho que los alumnos se apropiaran de definiciones, que supieran cómo resolver algoritmos con fracciones o decimales y empleó exclusivamente explicaciones ofrecidas por él para introducir y desarrollar un contenido. Aunque, como pudo advertirse, su conocimiento matemático, en particular su *Conocimiento común del contenido* está más desarrollado que otros subdominios, esto no es suficiente para un desarrollo de la práctica docente cercana a los enfoques didácticos del programa de estudios. Se muestra en este caso que un profesor para enseñar matemáticas necesita un conjunto de conocimientos, por ejemplo: del contenido matemático a enseñar, de diversos procedimientos matemáticos que se pueden emplear así como su funcionamiento, de los estudiantes y sus formas de aprendizaje matemático, de sus motivaciones e intereses, del currículo de la asignatura de matemáticas con el propósito de comprender la relación del contenido matemático que se enseña con temas estudiados con anterioridad así como de temas que se estudiarán posteriormente, y de diversas estrategias de enseñanza basadas, sobre todo, en los enfoques actuales de aprendizaje de las matemáticas como pueden ser la resolución de problemas.

En el caso de Héctor y Arely, alumnos con los promedios más bajos en sus respectivas escuelas en el examen sobre fracciones y decimales, se observaron prácticas en las que combinaban el enfoque didáctico propuesto en los programas y actividades lejanas a él. En ocasiones se observó que sus carencias en el conocimiento matemático ─en el *Conocimiento común del contenido*─ limitaban las explicaciones o ejemplos que proponían, aunque éstas vistas desde el punto didáctico, estuvieran cercanas a las sugerencias didácticas del programa de la asignatura de matemáticas y que con su desarrollo se pudiera ofrecer la oportunidad a los alumnos de aprender por medio de la reflexión y la búsqueda de soluciones. Lo anterior sugiere que existen estudiantes para profesor cuyo conocimiento didáctico ─particularmente el relacionado con el conocimiento de los estudiantes y de la enseñanza─ está más consolidado que un conocimiento matemático como el de fracciones y decimales, pues son capaces de diseñar situaciones de aprendizaje próximas a las características del enfoque que se sugiere en el programa de matemáticas pero les resulta difícil distinguir propiedades como por ejemplo la densidad de las fracciones o la división de una figura geométrica regular en fracciones equivalentes.

Se puede decir que los futuros profesores ponen en juego conocimientos que se asocian a casi todos los subdominios del Modelo del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*, aunque con diversos niveles de apropiación. Durante las sesiones observadas los futuros profesores recurren a sus ideas (la manera en que conciben) la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como de las interpretaciones que tienen de las fracciones y los decimales. Cabe señalar que en el caso de las fracciones la interpretación que comúnmente le otorgan los futuros profesores es como *Parte-todo*; y a los decimales como números con punto cuyo tratamiento es el mismo que se hace con los números enteros.

Durante las observaciones de clase, los estudiantes para profesores evidenciaron no utilizar alguna estrategia que les permitiera verificar el logro del aprendizaje que buscaron favorecer con las actividades que propusieron a los alumnos de primaria. La evaluación y retroalimentación son elementos importantes del subdominio *Conocimiento del contenido y la enseñanza* y tal parece que los futuros profesores todavía no desarrollan este rasgo.

Si se considera a los subdominios que conforman el MKT como parte de un ideal de conocimientos para la enseñanza de las matemáticas, quizá aun en profesores en servicio se podría encontrar una diversidad similar a la de los profesores en formación. Aun cuando los futuros profesores desarrollen su conocimiento matemático y didáctico sobre los números fracciones y decimales conforme ganen en experiencia, quizás nunca alcancen el ideal que el MKT pudiera representar. Lo anterior, considerando que un profesor de educación primaria en México debe de impartir casi todas las asignaturas que se proponen en plan de estudios. Lo que implica que debiera ser experto en el conocimiento disciplinar y didáctico de cada una de ellas.

6.4 Comparación entre el conocimiento matemático y didáctico de los estudiantes y la propuesta didáctica contendida en el programa de estudios.

En este apartado se hace una reflexión relacionada con una de las preguntas que se plantearon en esta investigación, particularmente con aquella en que se propuso comparar los conocimientos que poseen los futuros profesores sobre fracciones y decimales con los conocimientos que, desde el programa de la asignatura de matemáticas de la escuela primaria, son necesarios para la enseñanza de este conjunto de números.

También se consideró importante valorar los conocimientos de los estudiantes para profesores sobre este conjunto de números ─fracciones y decimales─ con los que se enuncian en el programa de formación docente, en específico con los mencionados en el programa de la asignatura de *Aritmética, su aprendizaje y enseñanza*.

Además, se presentan algunas ideas sobre las implicaciones que, para la formación matemática de los futuros profesores, tendrá la puesta en operación de un nuevo modelo educativo.

Al comparar los conocimientos de los estudiantes con los que, de acuerdo con el programa de matemáticas, son necesarios para el desarrollo del aprendizaje de las fracciones y los decimales, se analizó la propuesta didáctica que se sugiere para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En general, la propuesta didáctica del programa tiene las siguientes características:

a) Se espera que el profesor tenga el conocimiento y la capacidad de diseñar secuencias de situaciones didácticas problemáticas.
b) Las situaciones didácticas deben proponer la solución de problemas de la vida real cercanos al contexto de los alumnos.
c) El profesor debe tener la capacidad para plantear problemas que despierten el interés de los alumnos, además de que los inciten a la reflexión de tal manera que, intenten resolver los problemas empleando sus recursos ─conocimientos, habilidades y actitudes─ con que cuentan.
d) Se espera del profesor que pueda anticipar los posibles comportamientos ─estrategias, habilidades y dificultades─ de los alumnos.
e) El profesor debe contar con los conocimientos para el diseño, la implementación y el análisis de instrumentos de evaluación para valorar el aprendizaje de los alumnos de educación primaria.

El análisis los datos recogidos durante la observación de las sesiones de clase de los cuatro estudiantes para profesor permiten valorar el conocimiento de los profesores con relación a las propuestas del programa de estudios.

Evelyn es la estudiante que más se acercó a las propuestas didácticas del programa de estudios. Ella intentó proponer actividades relacionadas con los intereses de los alumnos, diseñó algunas secuencias con las que trató de promover la reflexión y la resolución de problemas con fracciones. Por ejemplo, al iniciar una sesión planteó la repartición de dos tercios de una bolsa de dulces entre los todos alumnos del grupo o cuando organizó al grupo en equipos para resolver problemas de reparto.

Es necesario señalar que Evelyn, en ocasiones no permitió la reflexión de los alumnos, pues les proporcionó los algoritmos de solución de los problemas. Tampoco anticipó posibles preguntas de los niños como cuando uno de ellos la cuestiona acerca de cuál es el nombre de la raya en una fracción. Como se mencionó antes, se espera que un profesor tenga los conocimientos que le permitan anticipar posibles preguntas o dudas por parte de los alumnos.

Arely y Héctor, aunque en el examen de conocimientos sobre fracciones y decimales obtuvieron un porcentaje de respuestas bajo ─en comparación con sus demás compañeros─ desarrollaron una práctica de enseñanza cercana al enfoque propuesto en el programa de la asignatura. Aunque las deficiencias en su conocimiento matemático (mostradas en el examen de conocimientos matemáticos) ocasionaron que su práctica en la enseñanza de los decimales y las fracciones no siempre fuera exitosa.

Por ejemplo, Arely planteó una actividad que implicó una comparación entre fracciones decimales y fracciones en el uso del tiempo (horas, minutos, segundos) que involucran el sistema sexagesimal. Arely evidenció una carencia para diferenciar que la comparación implicaba la comprensión de dos sistemas de numeración con base distinta. Lo anterior ocasionó que, aunque las actividades plantearon un reto interesante y pertinente para los niños, la conducción que hizo Arely no fue la adecuada de acuerdo a la situación de comparar dos sistemas de numeración distintos.

El trabajo en pequeños grupos (equipos) casi no fue empleado por Héctor o por Arely. En general, centraron las actividades en todo el grupo y muchas ocasiones individualizado.

Fueron pocas las situaciones didácticas que representaban un problema cercano al contexto de los alumnos con los que trabajaron.

Gabriel desarrolló la práctica de enseñanza más distante a las propuestas didácticas que se enuncian en el programa de matemáticas. La mayor parte de sus clases las basó en explicaciones acerca de cómo resolver algoritmos o problemas con fracciones. En ocasiones recurrió al dictado de definiciones para que, mediante la memorización de ellas, los alumnos resolvieran ejercicios.

Con relación a estrategias o instrumentos de evaluación, se pudo observar que los futuros profesores emplearon como parte de una evaluación diagnóstica preguntas dirigidas al grupo en general o de manera particular a algún niño. Respecto a la evaluación final, en general, recurrieron a la realización de ejercicios o a la resolución de problemas por parte de los alumnos. Según lo que se pudo observar se considera que, el uso y la implementación de estrategias e instrumentos de evaluación es una de las mayores deficiencias evidenciadas en los cuatro estudiantes observados.

6.5 La formación matemática de los futuros profesores y un nuevo Modelo Educativo

La formación de profesores de primaria ha pasado por una serie de reformas. Antes de la entrada en vigor del plan de estudios 2012, estuvo vigente un plan de estudios puesto en operación en el año 1997. El plan 1997 comenzó a funcionar en las escuelas normales del país después de la reforma realizada en educación básica en el año 1993, misma que tuvo como antecedente el Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica (ANMEB) en 1992. Es decir, primero se reformularon los planes y programas en educación básica y 5 años después los de la formación docente.

En el año 2009 se puso en operación una nueva reforma a la educación básica la denominada Reforma Integral de la Educación Básica. Uno de los propósitos de esta reforma se centró en articular el preescolar, primaria y secundaria. Dicha articulación se alcanzó en 2011 año en que se publica el acuerdo secretarial 592 en el que se establece, de manera oficial, la articulación de la educación básica.

Fue después de implementada dicha reforma, en el año 2012, que se puso en marcha una en la formación de profesores. En ambas reformas se hace énfasis en el desarrollo de competencias para la vida. En el caso de la formación de profesores de educación primaria se habla del desarrollo de competencias profesionales y disciplinares. Las profesionales se refieren a aquellas competencias que todo egresado de la educación superior debe desarrollar como producto de su formación. Las disciplinares son competencias más específicas propias de la formación docente como por ejemplo posibilidad de conocer y poner en práctica las propuestas didácticas para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.

Solo cinco años después de haber entrado en operación el plan de estudios 2012 y únicamente a seis años de distancia de haber alcanzado la llamada Articulación de la Educación Básica, la Secretaría de Educación Pública en México, presentó en 2017 un nuevo Modelo Educativo, en el cual el enfoque de competencias y por consecuencia su desarrollo, prácticamente desaparecen. En su lugar se habla del desarrollo de Aprendizajes Clave y de una Autonomía Curricular para las escuelas. Este nuevo Modelo Educativo se implementará en las escuelas primarias a partir de agosto de 2018.

Aunque en esencia la organización del plan y los programas de estudio no difieren, esta nueva idea tendrá implicaciones importantes en la formación inicial de maestros, pues la formación inicial de profesores de educación primaria también tendrá que ser reformulada. Por lo pronto, habrá un desfase entre los saberes adquiridos por los estudiantes en las Escuelas Normales y lo que marca el nuevo plan de estudios y los nuevos materiales de apoyo (libros de texto, guías, etc.). Los formadores de docentes y los propios estudiantes para profesores tendrán que apropiarse de una nueva organización, un nuevo lenguaje y nuevos materiales (al menos eso se contempla en el nuevo Modelo Educativo). El desarrollo de sus conocimientos, no solo matemáticos, volverán a estar en un lugar importante, serán parte de un cambio ─sustancial o no─ que tendrá que ser explorado.

6.6 Alcances y limitaciones del estudio

Algunas de los alcances del estudio son que los resultados ofrecen un panorama del conocimiento tanto matemático como didáctico de un tema históricamente difícil para su aprendizaje y enseñanza: las fracciones y los decimales. Aunque de las fracciones y los decimales existen una gran cantidad de estudios, aún siguen siendo analizados, pues siguen abiertas muchas interrogantes.

Este estudio muestra cómo los estudiantes para profesores utilizan sus conocimientos en un contexto áulico real, que permite valorar sus fortalezas y debilidades. Con la información que se presentó en posible identificar cuales conocimientos tienen mayormente desarrollados y en cual es necesario fijar la atención para superar deficiencias.

Se cuenta con información de alumnos que asisten a una Normal Rural. Este tipo de escuelas dada su filiación política[1], históricamente han sido renuentes a la participación de los alumnos y de los propios profesores en procesos de investigación en donde ellos sean actores centrales. Para este estudio mostraron apretura y buena disposición para colaborar.

Aporta información para la discusión que permita la mejora de los procesos de formación matemática. Por ejemplo, la valoración crítica que debe realizarse a los programas de matemáticas (aritmética, álgebra, geometría y procesamiento de la información estadística) dado el desfase entre las actividades que se sugieren para el aprendizaje, los materiales a emplear y las formas y criterios de evaluación que se plantean. Esperamos que los resultados aquí reportados, sirvan como elemento de reflexión para superar el superficial análisis que se establece de los materiales de la escuela primaria en los mismos programas de las asignaturas relacionadas con las matemáticas.

Por último, el análisis de la información aporta elementos para el debate en torno a la pertinencia del Modelo del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*. Pues existen diversas posturas como el Modelo del Conocimiento Especializado del profesor de matemáticas (MTSK) o el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) que argumentan limitaciones en el MKT y ofrecen explicaciones y estrategias alternas. Sin embargo, la constitución del MKT, la coherencia de y entre los subdominios, lo parsimonioso de su composición, lo vuelve un modelo mediante el cual es posible analizar detalladamente el conocimiento matemático de los profesores y de los

[1] Las Escuelas Normales Rurales se han caracterizado por una ideología contestataria al régimen político en el gobierno en turno (independientemente del partido político).

futuros profesores. Nos parece un modelo muy útil y pertinente para en análisis de la práctica docente y para guiar procesos de formación y actualización de profesores.

Como parte de las limitaciones de la investigación, se puede mencionar que el número de clases observadas puede resultar reducido para intentar dar cuenta del conocimiento de los estudiantes para profesor de manera íntegra. Será necesario buscar espacios para poder permanecer mayor tiempo en el aula y distinguir a mayor detalle los conocimientos a la luz de los subdominios del MKT.

Es necesario y conveniente señalar que una de las limitaciones del estudio está en cómo se realizó el análisis del conocimiento matemático sobre fracciones y decimales. Pues, para ello, se aislaron todos los subdominios del conocimiento de los estudiantes para profesores. El separar los subdominios genera dificultad para hablar de ellos en conjunto, pues Ball dice que están relacionados y no es fácil establecer en qué momento inicia y término un subdominio para hablar de otro.

La cantidad de sujetos que participaron en ambas etapas del estudio, tanto en la aplicación de los instrumentos como durante las observaciones en el salón de clases puede considerarse como limitada (pocos estudiantes). Con un estudio que contemple una mayor cantidad de sujetos se podrá tener evidencias más robustas.

Y finalmente, el hecho de no tener la oportunidad de dar la voz a los futuros profesores. Es necesario realizar un acercamiento donde ellos justifiquen o aporten información sobre las decisiones que tomaron durante el desarrollo de las clases que impartieron. También acerca del razonamiento que siguieron al resolver los reactivos de los instrumentos aplicados. Con lo anterior tal vez se puedan desencadenar nuevas investigaciones.

La formación matemática y en didáctica de las matemáticas –y de manera particular de las fracciones y los decimales– de los futuros profesores de primaria es un gran reto, y debe enfrentarse desde diferentes frentes: la reflexión desde la didáctica de las matemáticas, el trabajo colegiado, la investigación educativa. Es recomendable y deseable que esta reflexión se comparta ente los docentes de diferentes escuelas Normales y otras instituciones de educación superior y centros de investigación, así como con los docentes de primaria. Solo de esta manera la reforma educativa podrá ser efectiva, y hasta que sea comprendida y se asuma como parte del trabajo cotidiano de los docentes, en todos los niveles.

REFERENCIAS

Abad, F., García, C., Gil, B., Olea, J., Ponsoda, V. y Revuelta, J. (2004). Introducción a la Psicometría. Teoría Clásica de los Test y Teoría de la Respuesta al Ítem. Universidad Autónoma de Madrid. Recuperado de: https://www.uam.es/personal_pdi/psicologia/cadalso/Docencia/Psicometria/Apuntes/tema1TyP_4.pdf

Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales: Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación Matemática*, *20*(2), 5–33.

Ávila, A., Block, D., y Carvajal, A. (2013). Investigaciones sobre educación preescolar y primaria. In *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México. Matemáticas, ciencias naturales, lenguaje y lenguas extranjeras* (Primera edición, pp. 35–56). México, D.F.: Consejo Mexicano de Investigación Educativa.

Ávila, A. y García, S. (2008). *Los decimales más que una escritura.* (Primera edición). México, D.F.: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Backhoff, E. Larrazolo, N., y Rosas, M. (2000). Nivel de dificultad y poder de discriminación del Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA). *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *2*(1). Recuperado de: http://redie.uabc.mx/redie/article/view/15

Ball, D. (2000). Bridging Practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, *51*(3), 241–247.

Ball, D. (2003). What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics. *Secretary's Summit on Mathematics, US Department of Education*. Recuperado de: http://www.erusd.k12.ca.us/projectalphaweb/index_files/MP/BallMathSummitFeb03.pdf

Ball, D., Bass, H., Hill, H., Sleep, L., Phelps, G. y Thames, M. (2006). *Mathematics Teaching and Learning to Teach*. Presented at the Learning Network Conference Teacher Quality, Quantity, and Diversity, Washintong, DC.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. doi.org/10.1177/0022487108324554

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational-Number Concepts. In *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91–125). New York: Academic Press. Recuperado de: http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/83_1.html#top

Bernabeu, C., Torres, E., García, J. y Batanero, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: un estudio exploratorio. *Práxis Educativa (Brasil)*, *10*(1). Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=89438282001

Beswick, K., Callingham, R. y Watson, J. (2011). The nature and development of middle school mathematics teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(2), 131–157. doi.org/10.1007/s10857-011-9177-9

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 2: From rationals to decimals. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 281–300. doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.09.001

Buforn, Á. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 21–41. doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a02

Burge-Carlucci, K. (2014). *A Quantitative Study Analyzing the Relationship between High School Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching and Student Progress using a Value-Added Analysis Model* (Ed.). Ann Arbor, United States. Recuperado de: http://search.proquest.com.dibpxy.uaa.mx/pqdtglobal/docview/1624921938/abstract/E1B97C75A0D74210PQ/1

Campbell, P. y Malkus, N. N. (2013). The mathematical knowledge and beliefs of elementary mathematics specialist-coaches. *ZDM*, *46*(2), 213–225. doi.org/10.1007/s11858-013-0559-6

Carrillo, J., Climent, N., y Muñoz-Catalán, M. (2012). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. *Proceedings of Cerme*. Recuperado de: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/wg17_papers.html

Friz, M., Sanhueza, S. y Figueroa, E. (2011). Concepciones de los estudiantes para profesor de Matemáticas sobre las competencias profesionales implicadas en la enseñanza de la Estadística. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 13(2), 113-131. Recuperado de: http://redie.uabc.mx/vol13no2/contenido-frizsanhueza.html

Castañeda, A. y González, R. (2012). *Retos matemáticos 1* (Primera edición, Vol. 1). México, D.F.: University of Dayton Publishing.

Centeno, J. (1988). Los números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué? Madrid, España: Síntesis.

Ciccioli, V. y Sgreccia, N. (2017). Formación en geometría analitica para futuros profesores. Estudio de caso basado en el MKT. *Educación Matemática*, *29*(1), 141–170. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40550442007.pdf

Copur-Gencturk, Y. y Lubienski, S. (2012). Measuring mathematical knowledge for teaching: a longitudinal study using two measures. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(3), 211–236. doi.org/10.1007/s10857-012-9233-0

Couoh-Noh, R., Cabañas-Sánchez, G., Llinares, S. y Valls González, J. (2015). ¿Qué caracteriza el conocimiento del profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza? Recuperado de: http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/52288

CualSoft Consultores. (2016). *Memoing analítico*. Madrid, España: Autor.

Speer, N., King, K. y Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(2), 105–122. doi.org/10.1007/s10857-014-9277-4

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, *47*, 82–92. doi.org/10.1016/j.tate.2014.12.009

Di Prisco, C., y Angulo, H. (2010). *El orden de los racionales*. Mérida, República Bolivariana de Venezuela: Escuela para la Enseñanza de la Matemática. Recuperado de: http://ciencias.uis.edu.co/conjuntos/doc/Libro-Orden-DiPrisco.pdf

Domoney, B. (2001). Student teachers' understanding of rational numbers. In *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (Vol. 21). United Kingdom: University of Southampton. Recuperado de: http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip21-3/BSRLM-IP-21-3-3.pdf

Durmuş, S. (2005). Identifying Pre-service Elementary School Teachers' Conceptualization Levels of Rational Numbers. *Educational Sciences: Theory y Practice*, *5*(2), 659–665.

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Colombia: Magisterio.

Fernández, F. (1943). *Clasificación de los números.* Buenos Aires, Argentina: Consejo Nacional de Educación. Recuperado de: http://www.bnm.me.gov.ar/catalogo/Record/000147413

Fernández, S. y Figueiras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. En M. M. Moreno, A. C. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), Investigación en Educación Matemática (pp. 291–301). Lleida. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1696/.

Flake, M. (2014). *An investigation of how preservice teachers' ability to professionally notice children's mathematical thinking relates to their own mathematical knowledge for teaching* (Ph.D.). Ann Arbor, United States. Recuperado de: http://search.proquest.com.dibpxy.uaa.mx/pqdtglobal/docview/1545888212/abstract/571ECC4B951A4D03PQ/1

Flores, G., y Díaz, M. (2016). Resultados Nacionales del Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo. TERCE 2013. México: INEE.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* (L. Puig, Trans.). México: CINVESTAV.

Friz, M., Sanhueza, S. y Sánchez, A. (2009). Conocimiento que poseen los estudiantes de pedagogía en Dificultades de Aprendizaje de las Matemáticas (DAM). *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, *35*(1), 47–62.

Gairín, J. (2004). Estudiantes para maestros: reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos. *Contextos Educativos. Revista de Educación*, *0*(6), 235–260. doi.org/10.18172/con.538

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13–31.

Godino, J. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Conferencia presentada en la XIII CIAEM-IACME*. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Manual para el estudiante. Departamento de Didáctica de las Matemáticas Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39 (1-2)*, 127–135.

Godino, J., Batanero, C., Rivas, H., y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *8*(1). doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p46

Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración del la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *XXVII*(2), 221–252.

Godino, J., Rivas, M., Castro, W. F. y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas Developing mathematics teachers' competences for didactical analysis. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 1–21.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York and London: Teachers College Press.

Haroun, R., Ng, D., Abdelfattah, F. y AlSalouli, M. (2016). Gender Difference in Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching in the Context of Single-Sex Classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(2), 383–396. doi.org/10.1007/s10763-015-9631-8

Hatisaru, V. y Erbas, A. (2017). Mathematical Knowledge for Teaching the Function Concept and Student Learning Outcomes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(4), 703–722. doi.org/10.1007/s10763-015-9707-5

Hill, H., Ball, D., y Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teacher's Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372–400.

Hill, H., Rowan, B., y Ball, D. (2005). Effects of Teacher's Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371–406. doi.org/10.3102/00028312042002371

Hill, H., Schilling, S. y Ball, D. (2004). Developing measure of teachers Mathematics Knowledge for Teaching. *The elementary School Journal*, *105*. Recuperado de: https://www.google.com.mx/?gws_rd=ssl#q=Hill%2C+Ball+y+Schilling+(2008)

Hill, H., Umland, K., Litke, E. y Kapitula, L. (2012). Teacher Quality and Quality Teaching: Examining the Relationship of a Teacher Assessment to Practice. *American Journal of Education*, *118*(4), 489–519. doi.org/10.1086/666380

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2013a). El aprendizaje en sexto de primaria en México, informe sobre los resultados Excale 06, aplicación 2009. Español, Matemáticas, Ciencias Naturales y Educación Cívica. Recuperado de: http://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P1/D/310/P1D310.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2013b). *México en PISA 2012*. México: Autor. Recuperado de http://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P1/C/I125/P1CI125.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2015). *Plan Nacional para la Evaluación de los aprendizajes 2015. Resultados Nacionales de Logro.pdf*. Informe de resultados, México. Recuperado de: http://planea.sep.gob.mx/content/ba/docs/2015/estadisticas/Resultados_Nacionales_Logro.pdf

Khakasa, M. y Berger, M. (2015). Status of Teacher's Proficiency in Mathematical Knowledge for Teaching at Secondary School Level in Kenya. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(2), 419–435. doi.org/10.1007/s10763-015-9630-9

Kieren, T. (1980). The rational numbers constructs. Its elements and mechanism. In *Recent Research on Number Learning* (pp. 125–149). Columbus: ERIC/SMEAC. Recuperado de: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED212463.pdf

Kieren, T. (1983). *Partitioning, Equivalence and the Constructionof Rational Numbers Ideas*. Ponencia presented at the Procedings of the Fourth Intenational Congress On Mathematical Education.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In *Number-concepts and operations in the middle grades* (pp. 53–92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Konic, P. (2013). Factores condicionantes del conocimiento para enseñar: el caso de los números decimales. In R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 625–634). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/4095/

Lim-Teo, S., Chua, K., Cheang, W. y Yeo, J. (2006). The Development of Diploma in Education Student Teachers' Mathematics Pedagogical Content Knowledge. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5*(2), 237–261. doi.org/10.1007/s10763-006-9056-5

Llinares, S. (2008). Construir el conocimiento necesario para enseñar matemática: prácticas sociales y tecnología. Recuperado de: http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/10435

Llinares, S., y Sánchez, M. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo.* (Primera, Vols. 1–34). Madrid, España: Síntesis.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. In M. Margarita, F. Gabriel, B. Lorenzo, y P. María Mercedes (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429–438). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1827/

Mochón, S. (1995). Fracciones: algo más que romper un todo. México: CINVESTAV.

Mochón, S. y Flores, M. (2010). En qué consiste el "Conocimiento Matemático para la Enseñanza" de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación Matemática*. Recuperado de: http://www.redalyc.org/resumen.oa?id=40516662005

Montes, M., Contreras L., Liñán, M., Muñoz-Catalán, M., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros: debilidades y fortalezas. Revista Educación, 367, 36–62. doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2015-367-282

Nortes Checa, A. y Martínez-Artero, R. (2013). Formación inicial de maestros: un estudio en el dominio de las matemáticas. Recuperado de: http://digibug.ugr.es/handle/10481/30077.

Olanoff, D., Jane-Jane Lo y Tobias, J. (2014). Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Fractions. *Mathematics Enthusiast*, *11*(2), 267–310. Recuperado de: http://scholarworks.umt.edu/tme.

Padrón, O. (2008). Actitudes hacia la matemática. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, *9*(1), 237–256.

Parra Álvarez, M. y Flores Macías, R. (2008). Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones. *Educación Matemática*, *20*(1), 31–52.

Pérez, R. (2003). XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Tres razones para estudiar matemáticas, Buenos Aires, Argentina: Organización de Estados Iberoamericanos. Recuperado de: http://www.oei.es/oim/xviiioimperezgomez.htm

Peterson, J. y Hashisaki, J. (1980). El sistema de los números racionales. En *Teoría de la aritmética* (pp. 197–245). México: Limusa.

Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, *XXXVI*(1), 87–109.

Post, T. (1981). Fractions: Results and Implications from National Assessment. *The Arithmetic Teacher*, *28*(9), 26–31.

Rivas, M., Godino, J. y Castro, W. F. (2012). Desarrollo de conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(42B), 559–588.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Boletim de Educação Matemática*, *20*(51), 143–166.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255–281. doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Rowland, T. y Ruthven, K. (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching*. Dordrecht: Netherlands. Recuperado de: http://link.springer.com/10.1007/978-90-481-9766-8

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, *5*(4), 129–145.

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (Primera, Vol. 2). Sense publishers. Recuperado de: http://vocserve.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/Schoenfeld_Teaching_Proficiency.pdf

Schulmaister, M. (2009). ¿Por qué estudiar matemáticas en la escuela? *Educación. Suplemento de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México*, *4*. Recuperado de: http://www.jornada.unam.mx/2009/11/07/matematicas.html

Scientific Software Development GmbH. Atlas.ti. (Versión 7) [*Software* de computación] Qualitative Data Analysis. United States of America: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (1988). Acuerdo 134, por el que se establece el plan de estudios para la formación de docentes en educacion primaria a nivel licenciatura. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (1997). *Plan de estudios 1997: Licenciatura en Educación Primaria*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2000). *Evaluación del aprovechamiento escolar. Ciclo escolar 2000-2001*. México: Autor

Secretaría de Educación Pública. (2001). *Evaluación del aprovechamiento escolar. Ciclo escolar 2000-2001*. México: Autor

Secretaría de Educación Pública. (2002). *Evaluación del aprovechamiento escolar. Ciclo escolar 2001-2002*. México: Autor

Secretaría de Educación Pública. (2011a). *Plan de Estudios Educación Básica*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Primaria. Cuarto grado*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2011c). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Primaria. Quinto grado.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2011d). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Primaria. Sexto grado.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2012a). *Acuerdo 649 por el que se establece el Plan de Estudios para la Formación de Maestros de Educación Primaria.* México: Autor. Recuperado de http://www.dgespe.sep.gob.mx/public/normatividad/acuerdos/acuerdo_649.pdf.

Secretaría de Educación Pública. (2012a). *Álgebra: su aprendizaje y enseñanza*. México: Autor. Recuperado a partir de http://www.dgespe.sep.gob.mx/public/rc/programas/lepri/algebra_su_aprendizaje_y_ensenanza_lepri.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2012b). *Procesamiento de información estadística*. México: Autor. Recuperado a partir de http://www.dgespe.sep.gob.mx/public/rc/programas/lepri/procesamiento_de_informacion_estadistica_lepri.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2013a). *Aritmética, su aprendizaje y enseñanza* (Primera edición). México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2013b). *Desafíos matemáticos. Cuarto grado. Docente*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2013c). *Desafíos matemáticos. Quinto grado. Docente*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2013d). *Desafíos matemáticos. Sexto grado. Docente.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2013e). Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares. *Sexto grado.* México: Autor

Secretaría de Educación Pública. (2013f). Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares. *Primero de secundaria.* México: Autor

Secretaría de Educación Pública. (2013g). Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares. *Tercero de secundaria.* México: Auto

Secretaría de Educación Pública. (2013h). *Geometría: su aprendizaje y enseñanza*. (Primera edición). México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2015b). *Desafíos matemáticos. Cuarto grado. Libro para el alumno*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2015c). *Desafíos matemáticos. Quinto grado. Libro para el alumno*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2015d). *Desafíos matemáticos. Sexto grado. Libro para el alumno.* México: Autor.

Sgreccia, N., y Massa, M. (2012). *Conocimiento especializado del contenido* de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas: El caso de los cuerpos geométricos. *Educación matemática*, 24(3), 33-66. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262012000300003&lng=es&tlng=es.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. (1987). Knowlendge and Teaching Fundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *52*(1). Recuperado de: http://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf

Sosa, J. y Astudillo, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática*, *20*(3), 83–100.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos.* (Tesis de Doctorado). Universidad de Huelva, Huelva, España.

Speer, N., King, K. y Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(2), 105–122. doi.org/10.1007/s10857-014-9277-4.

Subramaniam, K. (2014). Prospective secondary mathematics teachers' pedagogical knowledge for teaching the estimation of length measurements. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(2), 177–198. doi.org/10.1007/s10857-013-9255-2

Tavira Fuentes, M. (2014). *El conocimiento matemático para la enseñanza sobre el concepto de fracción: estudio con profesores de educación primaria.* (Tesis de Maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa, México, D.F.

Universidad de Michigan. (2017a). Learning Mathematics for Teaching Project (LMT). Retrieved July 19, 2017, Recuperado de http://www.umich.edu/~lmtweb/

Universidad de Michigan. (2017b). MKT – Mathematics Teaching and Learning to Teach. Retrieved July 19, 2017, Recuperado de http://sites.soe.umich.edu/mkt/

Vogt, W. P., Gardner, D. C., y Haeffele, L. M. (2012). *When to Use What Research Design*. Guilford Press.

Wilkie, K. J. (2016). Learning to teach upper primary school algebra: changes to teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(2), 245–275. doi.org/10.1007/s13394-015-0151-1

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., y Confrey, J. (2013). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(2), 149–175. doi.org/10.1007/s10857-013-9256-1

Youchu, H. (2016). A Qualitative Study on the Development of Pre-service Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching in a History-based Course. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(9), 2599–2616. doi.org/10.12973/eurasia.2016.1259a

ANEXOS

Anexo A

Operacionalización examen exploratorio (reactivos y opciones de respuesta correcta)

Conocimientos Matemáticos	Reactivo	Opción correcta
Identifica diferentes representaciones de los números decimales		
Trasforma números decimales a fracciones decimales o fracciones comunes.	5	B
Compara números decimales.	6	B
Ordena números decimales.		
Comprende la propiedad de densidad de los números decimales.	3	B
Utiliza los algoritmos convencionales de las operaciones con decimales / Resuelve problemas con números decimales que implican:		
adición.	1	D
sustracción.	2	C
multiplicación	15	D
división	4	C
Compara y ordena números fraccionarios	**24**	**D**
Comprende la propiedad de densidad de los números fraccionarios	**9**	**D**
Resuelve problemas que implican el uso de fracciones equivalentes.	**7**	**A**
Simplifica, a su mínima expresión, fracciones comunes o decimales.	21	C
Utiliza los algoritmos convencionales de las operaciones con fracciones comunes / Resuelve problemas con fracciones comunes.		
Que implican Adición.	26	D
	29	A
Que implican Sustracción.	13	B
	22	B
Que implican Multiplicación.	25	C
	30	B
Que implican División.	14	D
	20	C
Que implican la noción de fracción como un cociente de dos números naturales.	12	A

Operacionalización examen exploratorio (reactivos y opciones de respuesta correcta) (Continuación.)

Conocimientos Matemáticos	Reactivo	Opción correcta
Ubica fracciones y decimales en la recta numérica.	8 19	B D
Resuelve problemas que implican el cálculo de una fracción de un número natural.	18 23	B C
Resuelve problemas que implican el concepto de razones.	28	A
Resuelve problemas que impliquen el cálculo de razón entre dos cantidades.	11 16	A B
Resuelve problemas que implican el cálculo de porcentajes (mayores o menores que 100%).	10 27	A A
Resuelve problemas que implican variación proporcional directa.	17	C

Anexo B

Índice de Dificultad por reactivo

Reactivo	Índice de Dificultad (%)
R1	88.9
R2	83.7
R3	89.6
R4	87.4
R5	86.3
R6	98.5
R7	72.6*
R8	72.6*
R9	68.5*
R10	85.9
R11	85.6
R12	88.1
R13	82.2
R14	85.9
R15	92.2
R16	85.6
R17	89.3
R18	74.4*
R19	91.9
R20	82.6
R21	93.0
R22	55.6*
R23	58.1*
R24	85.2
R25	44.4*
R26	71.1*
R27	81.9
R28	83.0
R29	80.0*
R30	60.7*

Nota: Las cantidades marcadas con (*) son aquellas que se encuentran entre 20 y 80% en el Índice de Dificultad

Anexo C

Índice de Discriminación por reactivo

Reactivo	Índice de Discriminación
R1	0.31*
R2	0.24**
R3	0.27**
R4	0.29**
R5	0.29**
R6	0.15***
R7	0.39*
R8	0.51*
R9	0.63*
R10	0.38*
R11	0.27**
R12	0.31*
R13	0.49*
R14	0.36*
R15	0.27**
R16	0.41*
R17	0.28**
R18	0.50*
R19	0.29**
R20	0.38*
R21	0.27**
R22	0.53*
R23	0.65*
R24	0.37*
R25	0.45*
R26	0.48*
R27	0.39*
R28	0.41*
R29	0.39*
R30	0.56*

* Reactivos con calidad buena o excelente
** Reactivos con calidad regular
*** Reactivos con calidad pobre o pésima

Anexo D

Análisis de opciones incorrectas de respuesta Examen Exploratorio

Reactivo	Opción correcta	Frecuencia[1]			
		A	B	C	D
R1	D	0	28	1	**240***
R2	C	33	7	**226***	2
R3	B	3	**242***	16	5
R4	C	4	13	**236***	12
R5	B	4	**233***	10	22
R6	B	1	**266***	0	2
R7	A	**196***	27	39	6
R8	B	16	**196***	33	22
R9	D	45	5	33	**185***
R10	A	**232***	21	11	4
R11	A	**231***	9	26	2
R12	A	**238***	5	8	17
R13	B	18	**222***	23	5
R14	D	0	6	28	**232***
R15	D	3	5	12	**249***
R16	B	12	**231***	15	9
R17	C	5	21	**241***	1
R18	B	10	**201***	16	41
R19	D	4	6	11	**248***
R20	C	13	11	**223***	20
R21	C	10	5	**251***	2
R22	B	63	**150***	40	15
R23	C	47	16	**157***	44
R24	D	10	14	14	**230***
R25	C	29	106	**120***	11
R26	D	32	11	33	**192***
R27	A	**221***	19	4	2
R28	A	**224***	31	4	10
R29	A	**216***	19	17	11
R30	B	30	**164***	24	42

[1] No se incorporan aquellos sujetos que no respondieron el reactivo, es por eso que la suma de las frecuencias puede no coincidir con el total de sujetos que resolvieron el examen.
* Frecuencia de respuesta correcta

Anexo E

Examen de conocimientos matemáticos sobre los números racionales


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES

Conocimientos Matemáticos de los Estudiantes para Profesor de Educación Primaria sobre los Números Racionales

Nombre: ______________________

Fecha: ______________________

Semestre: __________ Grupo: __________

Escuela: ______________________

agosto de 2016

El presente es un examen exploratorio acerca de los conocimientos matemáticos sobre los números racionales que tienen los estudiantes para profesores de Educación Primaria.

Forma parte de una investigación doctoral cuyo interés se centra en el análisis de los conocimientos matemático y didáctico que poseen los futuros profesores sobre este conjunto de números. Los resultados servirán para el desarrollo de propuestas que contribuyan a la formación matemática de los docentes en formación.

Se agradece su colaboración y el tiempo empleado para la respuesta a este instrumento.

INSTRUCCIONES

Por favor encierre o subraye la opción que considere contesta de **manera correcta** el problema que se presenta. El siguiente es un ejemplo de problema:

1. ¿Cuántos metros mide cada lado de un campo de hortalizas de forma cuadrada, que tiene 110.25 metros cuadrados de área?

A) 10.100
B) 10.500
C) 55.125
D) 55.000

NOTA: Si usted necesita realizar algún cálculo para resolver cierto problema puede utilizar los espacios en blanco del cuadernillo, se le sugiere no borrar ninguno de ellos. También puede solicitar una hoja en blanco al aplicador.

1. Identifique el resultado de la adición 356.37 + 12.6

A) 357.63
B) 368.43
C) 357.53
D) 368.97

2. José pesa 89.8 kg y se propuso hacer una dieta balanceada obteniendo los siguientes resultados:

Semana	kilogramos
1	Baja $3\frac{1}{4}$
2	Baja 2.54
3	Sube $1\frac{1}{2}$
4	Sube 1.87

¿Cuántos kilogramos pesa José después de hacer la dieta balanceada?

A) 80.64
B) 84.10
C) 87.38
D) 98.96

3. Un profesor anota los siguientes números en el pizarrón: 0.0426 y 0.0693; y le pide a un alumno que anote un numero decimal que se encuentre en el intervalo entre esos dos números. ¿Cuál de las opciones tiene el número que debe de anotar?

A) 0.55950
B) 0.05595
C) 0.04255
D) 0.42550

4. Jacinto desea colocar losetas adheribles en la sala de su casa (quiere pegarlas una junto a la otra). Cada pieza es cuadrada y mide .335 m de lado. Si la longitud de la sala es de 5.36 m, ¿cuántas losetas necesitará?

A) 10
B) 14
C) 16
D) 18

5. En la clase de matemáticas el docente le solicita a Sofía que escriba en el pizarrón la fracción decimal equivalente al número 8.05 ¿Cuál de las opciones muestra la fracción solicitada por el docente?

A) $\frac{1000}{805}$

B) $\frac{805}{100}$

C) $\frac{100}{805}$

D) $\frac{805}{1000}$

6. En una competencia escolar, estas fueron las mejores marcas en la prueba de salto de longitud:

Manuel	2.050 m
Luis	2.120 m
José	2.055 m
Pablo	2.090 m

¿Cuál de los alumnos obtuvo el primer lugar?

A) Manuel
B) Luis
C) José
D) Pablo

7. ¿Cuál de los siguientes números es equivalente a $\frac{117}{468}$?

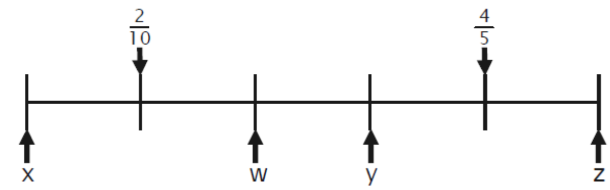
A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{3}{4}$

C) 4

D) $\frac{351}{468}$

8. Se tienen dos puntos de referencia en la siguiente recta numérica:



¿En cuál letra se encuentra la fracción $\frac{6}{15}$?

A) x
B) w
C) y
D) z

9. ¿Cuál de los siguientes números se encuentra entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$?

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{11}{10}$

C) $\frac{5}{7}$

D) $\frac{11}{20}$

10. Gerardo pagó $4,760.00 por una televisión. El precio original de la televisión era de $5,950.00 ¿Qué porcentaje de descuento le hicieron?

A) 20
B) 25
C) 30
D) 35

11. En una escuela primaria, el grupo de 6° "A" tiene 30 alumnos, el grupo de 6° "B" tiene 24 alumnos y el grupo de 6° "C" tiene 24 alumnos. Del grupo "A", 25 aprobaron el examen de matemáticas, del grupo "B" aprobaron 16, y del grupo "C" 18. ¿Qué grupo tuvo mejor aprovechamiento en matemáticas?

A) 6° "A"
B) 6° "B"
C) 6° "C"
D) Es igual en los tres grupos

12. Analiza la siguiente tabla:

Robot	Avanza estas unidades	Al dar este número de pasos	Fracción que avanza al dar un paso
Alfa 3	1	5	
Beta 5	4	10	
Gamma 7	5	2	
Delta 11	3	3	

Tomando en cuenta los datos de la tabla ¿qué fracción avanza, al dar un paso, el robot Gamma 7?

A) $\frac{5}{2}$

B) 1

C) $\frac{7}{2}$

D) $\frac{3}{2}$

13. Un recipiente de leche contiene hasta $\frac{3}{7}$ de su capacidad. ¿Cuánto falta de leche para tener $\frac{6}{3}$ de capacidad en el bote?

A) $\frac{1}{7}$

B) $1 \frac{4}{7}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{3}{10}$

14. Si $\frac{3}{4}$ de kilo de azúcar cuestan \$3.50, ¿cuánto costarán 6 kilos?

A) \$7.25
B) \$12.66
C) \$21.00
D) \$28.00

15. El túnel ferroviario más largo del mundo es el de Seikan, en Japón; mide 33.42 millas. ¿Cuál es su longitud en kilómetros si cada milla equivale a 1.609 km?

A) 31.791 km
B) 33.029 km
C) 51.262 km
D) 53.772 km

16. Manuel realizó la fiesta del grupo, en la cual participaron 16 hombres y 20 mujeres. En porcentaje, ¿cuál es la razón entre los hombres y el total de participantes?

A) 20.22 %
B) 44.44 %
C) 56.44 %
D) 80.22 %

17. En un equipo de futbol los tres mejores goleadores se repartirán un premio de $18 000.00 de manera proporcional al número de goles que cada quien anotó en la temporada.

- El mejor goleador anotó 12 goles.
- El segundo mejor anotó 8 goles.
- El tercero anotó 4 goles.

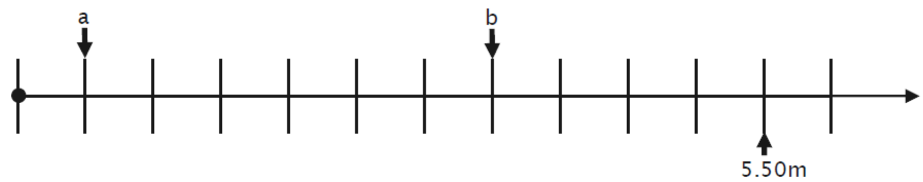
¿Cuánto le toca a cada jugador?

A) $12 000 al mejor, $8 000 al segundo y $4 000 al tercero
B) $10 000 al mejor, $5 000 al segundo y $3 000 al tercero
C) $9 000 al mejor, $6 000 al segundo y $3 000 al tercero
D) $11 000 al mejor, $7 000 al segundo y $1 000 al tercero

18. En la empresa "El formal" se confeccionan uniformes escolares; si para una falda talla 10 se utiliza $1\frac{2}{5}$ m de tela, ¿cuántas faldas de la misma talla se confeccionarán con 35 m de tela?

A) 20
B) 25
C) 26
D) 28

19. Los alumnos de una escuela van a sembrar árboles en la orilla del jardín y para esto la maestra les indica que el primer árbol lo deben sembrar en el lugar indicado con la letra "a", el segundo árbol en la letra "b"; para ubicarlos deben guiarse con la siguiente recta numérica:



¿A qué distancia del punto de partida se van a sembrar los árboles, considerando el número indicado en la recta?

A) a = 0.75 m; b = 2.20 m
B) a = 1.50 m; b = 4.50 m
C) a = 0.25 m; b = 1.75 m
D) a = 0.50 m; b = 3.50 m

20. Andrés compró 6 $\frac{1}{2}$ kg de cacahuates y desea empacarlos en bolsas de $\frac{1}{5}$ kg. ¿Cuántas bolsas podrá formar?

A) 30 bolsas
B) 31 bolsas
C) 32 bolsas
D) 33 bolsas

21. Beatriz debe tomar 0.800 litros de agua. ¿Cómo se expresa la cantidad en fracción?

A) $\frac{3}{5}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{4}{3}$

22. Un hombre gastó su sueldo de la siguiente manera:

$\frac{1}{5}$ en el pago de su renta $\frac{1}{4}$ en el pago de alimentos $\frac{1}{3}$ en pago de diversos servicios

¿Qué fracción del total de su sueldo le quedó después de realizar estos pagos?

A) $\frac{47}{60}$

B) $\frac{13}{60}$

C) $\frac{3}{12}$

D) $\frac{3}{60}$

23. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación $5 \div \frac{2}{3}$?

A) $\frac{2}{15}$

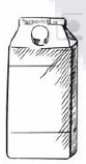
B) $\frac{3}{10}$

C) $\frac{15}{2}$

D) $\frac{10}{3}$

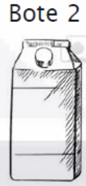
24. A continuación se muestran tres botes de leche y la cantidad de leche que puede contener cada uno:

Bote 1



$\frac{2}{3}$ de litro

Bote 2



$\frac{8}{12}$ de litro

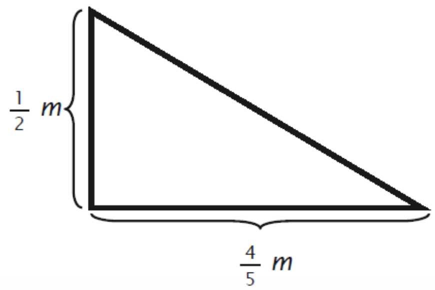
Bote 3

$\frac{1}{6}$ de litro

A partir la información anterior, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A) El bote 1 tiene menos leche que el bote 2
B) El bote 1 tiene la misma cantidad de leche que el bote 3
C) El bote 1 tiene más leche que el bote 2
D) El bote 1 tiene más leche que el bote 3

25. Calcule el área de la jardinera triangular que se muestra en seguida.



A) $\frac{13}{10}$ m^2 B) $\frac{2}{5}$ m^2 C) $\frac{1}{5}$ m^2 D) $\frac{3}{10}$ m^2

26. En la escuela de Carlos promocionaron la actividad "El kilómetro del libro". El objetivo era formar 1 km de libros alineados sobre el piso. Durante tres días sus compañeros lo construyeron: el primer día avanzaron $\frac{2}{3}$ de km; el segundo, $\frac{1}{6}$ de km; y el tercero, $\frac{1}{12}$ de km. ¿Qué fracción representa la parte que les faltó para completar el kilómetro?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{10}$

D) $\frac{1}{12}$

27. Sandra ganó un premio de $50 000.00, pero debe pagar de impuestos. ¿Qué cantidad pagó de impuestos?

A) $8 000.00
B) $3 125.00
C) $31 250.00
D) $80 000.00

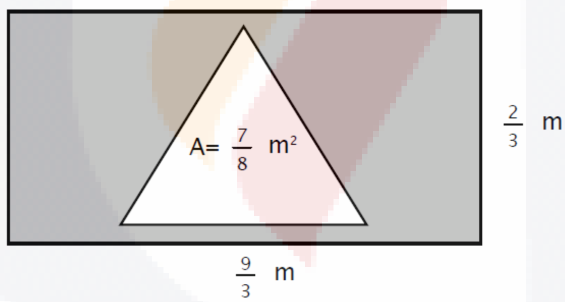
28. Los resultados de una encuesta indican que 4 de cada 10 personas reciclan basura. Si la cantidad de personas encuestadas es de 8 450. ¿Cuál es la cantidad de personas que reciclan basura?

A)3 380
B)2 112
C)1 408
D)845

29. Ernesto trabaja como jefe de mantenimiento en una escuela y le encargaron perforar una pared para pasar un cable. Esta tiene un grosor de $10\ \frac{1}{2}$ cm de concreto, $3\ \frac{1}{4}$ cm de aislante y $4\ \frac{4}{5}$ cm de cubierta de madera. Las brocas que venden en la ferretería son de diversa longitud en centímetros. ¿Cuánto deberá medir la broca que utilizará para perforar la pared?

A) 20 cm.
B) 16 cm.
C) 14 cm.
D) 11 cm.

30. El siguiente esquema representa un jardín con un triángulo de cemento en el centro. Si solo se quiere pasto para la parte sombreada.



¿Cuántos metros cuadrados de pasto se deberá comprar?

A) $2\ \frac{19}{24}$ m²

B) $1\ \frac{1}{8}$ m²

C) $1\ \frac{1}{4}$ m²

D) $2\ \frac{9}{24}$ m²

———————¡Muchas Gracias!————————

Datos de contacto:

Juan Francisco González Retana

Correo electrónico:

bebe_jf@hotmail.com

juanfranciscogonzalezretana@gmail.com

Tel. Móvil:

(618) 168 82 24

Anexo F

Operacionalización cuestionario "Conocimientos didácticos sobre los números racionales"[1]

Conocimientos didácticos sobre los números racionales	Reactivo (P)
Identificar los problemas en el aprendizaje de los números decimales.	
- Resolución de algoritmos (**suma**) que implican el uso de números decimales.	6
- Reconocimiento de la propiedad de densidad.	7
- Ordenamiento de números decimales.	8 y 13
- Resolución de algoritmos (**división**) que implican el uso de números decimales.	10
- Resolución de algoritmos (**multiplicación**) que implican el uso de números decimales.	15
- Resolución de algoritmos (**resta**) que implican el uso de números decimales.	16
Conocer la propuesta para el tratamiento didáctico de los algoritmos convencionales (suma, resta, multiplicación y división) con números decimales.	12
Conocer las diferentes interpretaciones de las fracciones.	
- Parte-todo y Medida	11
- Como cociente	
- Como razón	
- Como operador	
Conocer algunas las dificultades que presentan los alumnos de educación primaria en el aprendizaje de las fracciones.	
- Gestión de equivalencia de fracciones.	1
- Ordenamiento de fracciones.	2
- Reconocimiento de esquemas.	3
- Resolución de problemas que implican la realización de **suma** de fracciones.	4 y 5
- Resolución de problemas que implican la realización de **resta** de fracciones.	9 y 17
- Resolución de problemas que implican la realización de **división** de fracciones.	14

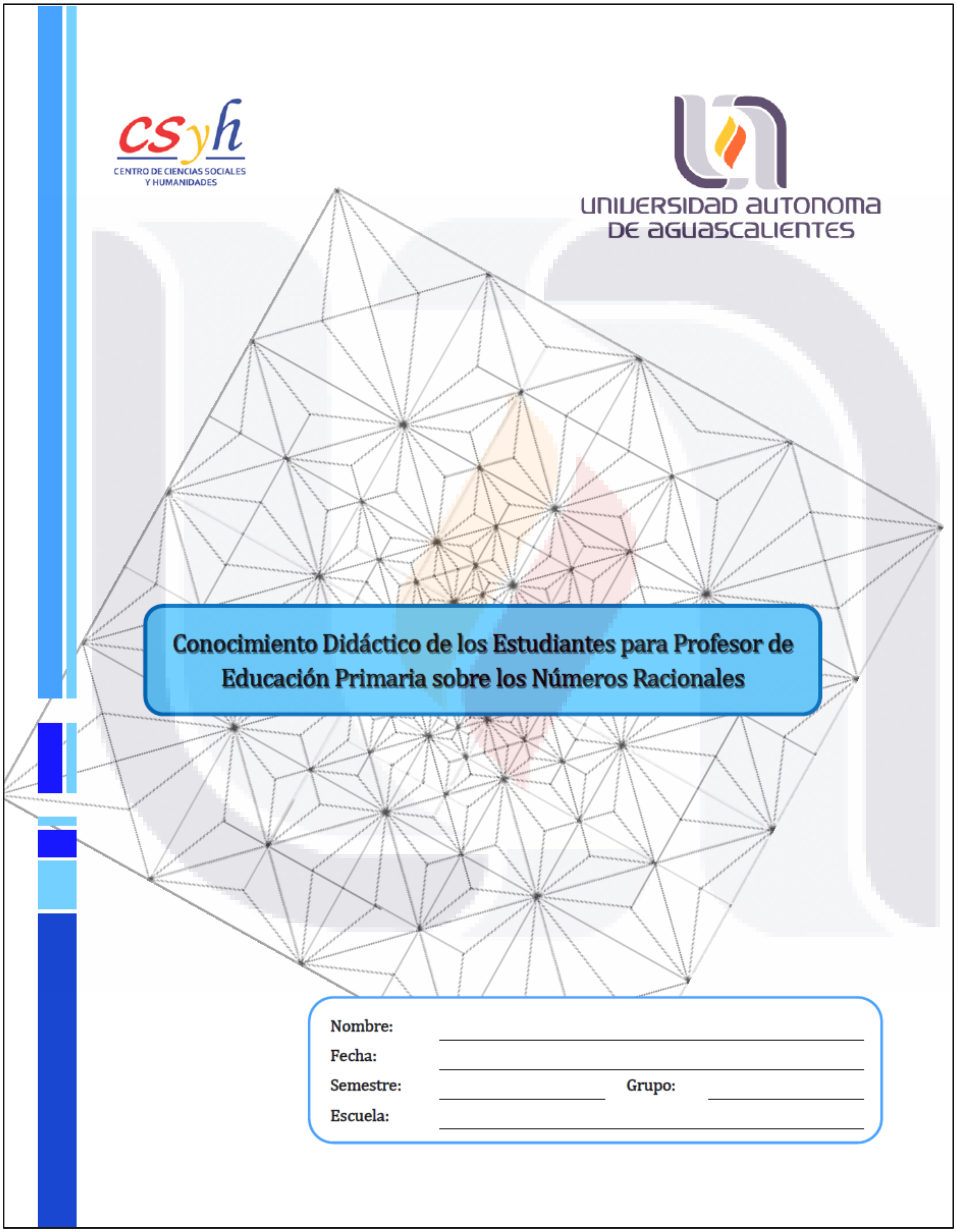
[1] Con el examen exploratorio no se pretende evaluar todos los rasgos que aparecen en la tabla. Algunos se observarán mientras los estudiantes para profesores realizan sus jornadas de práctica. De cualquier manera se presentan esos indicadores.

Operacionalización cuestionario "Conocimientos didácticos sobre los números racionales" (Continuación)

Conocimientos didácticos sobre los números racionales	Reactivo (P)
Conocer la propuesta para el tratamiento didáctico de los algoritmos convencionales (suma, resta, multiplicación y división) con fracciones comunes.	
Identificar los significados de las fracciones que se presentan en las lecciones de los libros de texto de educación primaria.	
Conocer diferentes recursos tecnológicos para resolver problemas que involucran fracciones comunes, por ejemplo: - Geogebra - Geoplano virtual	
Diseñar secuencias de enseñanza en donde se emplean recursos tecnológicos para operar con fracciones comunes.	
Diseñar secuencias para la enseñanza de fracciones y números decimales.	

Anexo G

Examen de conocimientos didácticos sobre los números racionales



CSyH
CENTRO DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES

Conocimiento Didáctico de los Estudiantes para Profesor de Educación Primaria sobre los Números Racionales

Nombre: ______________________________

Fecha: ______________________________

Semestre: ______________ **Grupo:** ______________

Escuela: ______________________________

El presente instrumento forma parte de una investigación doctoral en la que se analizan los conocimientos matemáticos y didácticos sobre los números racionales de los estudiantes para profesores de educación primaria. Los reactivos que lo conforman pretenden obtener información de algunos aspectos del conocimiento didáctico de los futuros profesores; por ejemplo, la identificación de posibles errores de los alumnos.

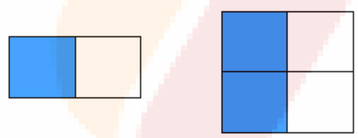
La información que se obtenga será tratada confidencialmente. Los resultados no tendrán ninguna influencia en tus calificaciones, por el contrario servirán para el desarrollo de propuestas que contribuyan a la formación matemática y didáctica de los futuros docentes.

De antemano se agradece tu colaboración y el tiempo dedicado.

INSTRUCCIONES

Es importante primero leer cuidadosamente cada una de las cuestiones que se platean y luego formular una respuesta. Si tienes alguna duda o comentario hazlo saber al aplicador con el propósito de aclararla. Se te solicita, por favor, no utilizar calculadora. Si requieres una espacio extra para la realización de operaciones pide una hoja en blanco.

1. En una lección del libro de texto relativa a la equivalencia de fracciones, el profesor Luis utiliza las siguientes representaciones para comparar $\frac{1}{2}$ con $\frac{2}{4}$.



Escribe un argumento por el que el profesor **NO** debería usar estas figuras para mostrar a los estudiantes que $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son equivalentes.

2. Una maestra de quinto grado pidió a sus alumnos ordenar los siguientes tres números de menor a mayor:

$\boxed{\frac{3}{8}}$ $\boxed{\frac{1}{4}}$ $\boxed{\frac{2}{3}}$

Lolita, Roberto y Sandra los colocaron en el orden que sigue:

Lolita	Roberto	Sandra
$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{8}$	$\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{2}{3}$

a) ¿Cuál estrategia consideras que utilizó cada uno de los alumnos?

Lolita:

Roberto:

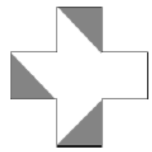
Sandra:

b) ¿Qué pregunta le realizarías **Lolita** para averiguar si su razonamiento es correcto?

c) ¿De que manera ayudarías a **Roberto** para que se diera cuenta de que el orden que propuso es incorrecto?

3. Esta es la respuesta de un alumno de sexto grado de educación primaria al siguiente problema: "

¿Qué parte de la siguiente figura está coloreada? Indícalo a través de una fracción".



Respuesta: 3

a) ¿La respuesta del alumno es correcta o incorrecta?

b) Describe el posible razonamiento del alumno ante la respuesta que dio.

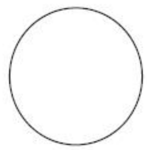
4. Dada la siguiente operación:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} =$$

a) Menciona un posible error que cometen los alumnos de educación primaria al resolverla.

b) Del error que mencionaste, ¿cuál crees que sea el razonamiento que hay detrás?

5. Para resolver la siguiente operación $\frac{4}{7} + \frac{5}{7}$ una profesora planea utilizar el círculo que se muestra abajo.



Escribe dos razones por las que **NO** debería de utilizarse dicha representación para enseñar la suma de dichas fracciones

a)

b)

6. Un alumno resolvió el siguiente problema tal y como se muestra a continuación:

$$0.99 + 0.1 = 1$$

a) ¿La solución es correcta o incorrecta?

b) ¿Cuál es el procedimiento de solución que posiblemente siguió el alumno?

7. Un alumno considera que entre los números 0.6 y 0.8 solo existe el número 0.7.
Como profesor ¿qué estrategia utilizarías para que el alumno reconozca que eso NO es correcto?

8. A un alumno se le planteó el siguiente problema:

"Ordena los siguientes números de menor a mayor"				
0.53	*0.7*	*0.475*	*0.12*	*0.3*

Lo resolvió de la siguiente manera:

0.3 0.7 0.12 0.53 0.475

a) ¿La solución del alumno es correcta o incorrecta?

b) Describe el procedimiento que posiblemente siguió el alumno para llegar a tal solución:

9. Dada la siguiente operación:

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{3} =$$

a) Menciona un posible error que cometen los alumnos de educación primaria al resolverla

b) Del error que mencionaste, ¿cuál crees que sea el razonamiento que hay detrás?

10. Dada la siguiente operación:

$$0.8 \div 0.2 =$$

a) Menciona un posible error que cometen los alumnos de educación primaria al resolverla

b) Del error que mencionaste, ¿cuál crees que sea el razonamiento que hay detrás?

11. Las siguientes son respuestas de alumnos de primaria al problema que se muestra a continuación:

"Se tienen 5 barras de chocolate y se ocupará $\frac{1}{3}$ de ellas para hacer un pastel. Encierra esa cantidad en los siguientes dibujos"

Romina

Didier

Regina

Escribe si la respuesta de cada alumno es correcta o incorrecta y describe el posible razonamiento que cada uno siguió .

Respuesta de Romina

¿Correcta o incorrecta? _________________

¿Cuál crees que fue el razonamiento que siguió?

Respuesta de Didier

¿Correcta o incorrecta? _________________

¿Cuál crees que fue el razonamiento que siguió?

Respuesta de Regina

¿Correcta o incorrecta? _________________

¿Cuál crees que fue el razonamiento que siguió?

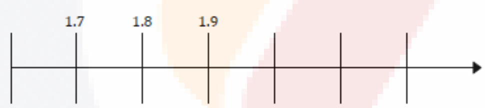
12. A partir de la siguiente recta numérica ¿Cómo explicarías a tus alumnos la división indicada?

$$\boxed{\frac{10}{3} \div \frac{5}{6} =}$$

Por favor escribe, de manera breve, las instrucciones o explicaciones que les darías a tus alumnos:

13. Dado el siguiente problema:

"A partir de la siguiente sucesión de números, completa la recta:"



a) ¿Cuál sería un posible error que cometen los alumnos de educación primaria?

b) Del error que mencionaste, ¿cuál crees que sea el razonamiento que hay detrás?

14. En una clase de matemáticas la profesora Lucía planteó el siguiente problema a sus alumnos:

"Compramos una bolsa de granos mixtos de $\frac{3}{4}$ kg para nuestros dos conejos . Cada día los conejos se comen $\frac{1}{10}$ de kg de los granos. ¿Cuántos días durará la bolsa de granos mixtos?"

A continuación se presentan algunos ejemplos de las diferentes operaciones que algunos estudiantes utilizaron para resolver el problema.

Sara	Pedro	Elías
$\frac{3}{4} \times \frac{1}{10} =$	$\frac{3}{4} \div \frac{1}{10} =$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{10} =$

Para cada alumno determina si la respuesta es correcta o incorrecta y describe el posible razonamiento que siguió cada uno de los alumnos.

Respuesta de Sara
¿Correcta o incorrecta? ________________
¿Cuál crees que fue el razonamiento que siguió?

Respuesta de Pedro
¿Correcta o incorrecta? ________________
¿Cuál crees que fue el razonamiento que siguió?

Respuesta de Elías
¿Correcta o incorrecta? ________________
¿Cuál crees que fue el razonamiento que siguió?

10

15. A continuación se muestra la solución que tres alumnos de educación primaria dieron a una misma multiplicación:

Andrés	Alberto	Luisa
$0.5 \times 2.2 = 11$	$0.5 \times 2.2 = 1.1$	$0.5 \times 2.2 = 4.4$

Para cada alumno determina si la respuesta es correcta o incorrecta y describe el posible razonamiento que siguió cada uno de los alumnos.

Respuesta de Andrés
¿Correcta o incorrecta? ________________
¿Cuál crees que fue el razonamiento que siguió?

Respuesta de Alberto
¿Correcta o incorrecta? ________________
¿Cuál crees que fue el razonamiento que siguió?

Respuesta de Luisa
¿Correcta o incorrecta? ________________
¿Cuál crees que fue el razonamiento que siguió?

16. Dada la siguiente operación:

$$0.725 - 0.25 =$$

a) Menciona un posible error que cometen los alumnos de educación primaria al resolverla

b) Del error que mencionaste, ¿cuál crees que sea el razonamiento que hay detrás?

17. Un profesor plantea a sus alumnos el siguiente problema:

"Jesús compró $\frac{3}{4}$ kg de carne. De eso, usó $\frac{1}{3}$ para hacer albóndigas, el resto lo empleó para cocinar un espagueti. ¿Cuánta carne usó para hacer las albóndigas?"

Un alumno resolvió el problema con la siguiente operación:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} =$$

¿Con la operación que planea utilizar el alumno obtendrá la respuesta correcta?.

¿Cuál crees que es el razonamiento que hay detrás de lo que plantea el alumno?

Anexo H

Descriptores del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Sosa, 2011)

Subdominio	Indicador
***Conocimiento común del contenido* (CCK)**	**CCK 1**.- Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta.
	CCK 2.- Saber usar términos matemáticos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales).
	CCK 3.- Saber que la notación es muy importante en matemáticas.
	CCK 4.- Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación (en cuanto a mecanismo o proceso) de un concepto.
	CCK 5.- Saber hacer la demostración de un teorema o de una regla.

Subdominio	Indicador
***Conocimiento especializado del contenido* (SCK)**	**SCK 1**.- Saber el significado de los conceptos.
	SCK 2.- Saber los “pasos ocultos”: conocer la procedencia y las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos.
	SCK 3.- Saber qué conceptos, propiedades, reglas, etc., están tras una respuesta, pregunta o solución no estándar, inusual o inesperada de los estudiantes, lo que le permite saber si su razonamiento matemático funciona en general o no, así como justificar el pensamiento matemático que utiliza el estudiante, o describir matemáticamente el procedimiento que el estudiante está usando.
	SCK 4.- Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes.
	SCK 5.- Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático.

Subdominio	Indicador
***Conocimiento en el horizonte matemático* (KH)**	**KH 1**.- Conocer las similitudes (las relaciones) entre varios conceptos matemáticos de un mismo tema o unidad.
	KH 2.- Saber cómo un contenido está relacionado con otro más general (incluso aunque no aborde esa forma más general en ese grupo porque el programa no lo incluye).
	KH 3.- Saber la aplicación del contenido en otras áreas.
	KH 4.- Saber cómo conectar un contenido con otro más específico.
	KH 5.- Saber cómo un contenido está relacionado con otros de cursos anteriores.
	KH 6.- Saber cómo un contenido está relacionado con otros de cursos posteriores.

Subdominio	Indicador
***Conocimiento del contenido y los estudiantes* (KCS)**	**Escuchar e interpretar** KCS 0.1.- Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto ─mezcla del lenguaje común con el matemático─).
	KCS 1.- Necesidades y dificultades. KCS 1.1.- Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.
	KCS 2.- Confusiones y/o equivocaciones. KCS 2.1.- Prever la confusión que pudieran tener los alumnos con algún aspecto específico del contenido que se estudia en clase. KCS 2.2.- Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado procedimiento. KCS 2.3.- Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores. KCS 2.4.-Saber que los estudiantes podrían hacer cálculo mentalmente sin saber realmente lo que están haciendo.
	KCS 3.- No saben/no recuerdan/no ven/no se fijan. KCS 3.1.- Prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática. KCS 3.2.- Prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro. KCS 3.3.- Saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin fijarse si pueden usar una propiedad.
	KCS 4.- Quedarse con una imagen inadecuada (equivocada). KCS 4.1.- Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea equivocada del contenido.
	KCS 5.- Cansado y aburrido. KCS 5.1.- Conocer lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido de un contenido matemático específico.
	KCS 6.- Interesante, motivador o desafiante. KCS 6.1.- Conocer lo que a los estudiantes les parecerá interesante, motivador o desafiante en el ejemplo, ejercicio o problema que el profesor elija para enseñar el contenido.
	KCS 7.- Respuesta intuitiva. KCS 7.1.- Saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema.
	KCS 8.- Lo que será más comprensible o resultará más fácil de resolver.

Subdominio	Indicador
	KCS 8.1.- Saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto (que puede aparecer en un libro de texto). KCS 8.2.- Conocer que los estudiantes entenderán "mejor el ejemplo si antes de empezar a hacerlo se les remarcan las principales características del concepto que se usará en el ejemplo. KCS 8.3.-Saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional.
	KCS 9.- Obstáculos comunes para llegar a la solución. KCS 9.1.- Saber que los estudiantes pueden atascarse en algunos detalles de la solución de un problema y perder el sentido del mismo. KCS 9.2.- Saber que a los estudiantes les puede parecer extraño usar por primera vez un método o regla que estaba diseñado para otro caso o situación del contenido KCS 9.3.- Saber que los estudiantes, al resolver problemas extensos, pueden olvidar algún cálculo que ya habían hecho al inicio y no aprovecharlo cuando se utilice nuevamente para solucionar el mismo problema. KCS 9.4.- Prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema.

Subdominio	Indicador
***Conocimiento del contenido y la enseñanza* (KCT)**	**KCT 1.- Ejemplos** KCT 1.1.- Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar. KCT 1.2.- Saber que la aplicación del concepto en un ejemplo les útil para inducir luego la definición del concepto KCT 1.3.- Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles. KCT 1.4.- Saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido. KCT 1.5.- Saber que, al explicar un ejemplo o un ejercicio, es importante que los estudiantes vean que los resultados obtenidos del ejemplo o ejercicio tienen un significado concreto. KCT 1.6.- Saber que ejercicios dejarles de tarea para que practiquen.

Subdominio	Indicador
	KCT 2.- Ayudas KCT 2.1.- Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema. KCT 2.2.- Saber que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema. KCT 2.3.-Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se usará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema.
	KCT 3.- Gestión de la participación *KCT 3.1.- Preguntas (Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático)* KCT 3.1.1.- Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático, para <u>hacer ver a los estudiantes que la respuesta de un estudiante es equivocada y orientar la pregunta a la respuesta</u> que el profesor(a) quiere escuchar. KCT 3.1.2.- Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta el mismo profesor u otros estudiantes KCT 3.1.3.- Saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación. KCT 3.1.4.- Saber qué preguntas formular sobre el contenido para involucrar a estudiantes pasivos KCT 3.1.5.- Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para gestionar por lo menos una participación pasiva de los demás estudiantes, cuando existe un diálogo entre el profesor y un determinado estudiante, para que se planteen el porqué de lo que se va exponiendo en el diálogo. KCT 3.1.6.- Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica.

Subdominio	Indicador
	KCT 3.2.- Respuestas KCT 3.2.1.- Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. KCT 3.2.2.- Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática. KCT 3.2.3.- Saber cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático. KCT 3.2.4.- Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido. KCT 3.2.5.- Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, referente al contenido, para corregir la de otro KCT 3.2.6.- Saber cómo aprovechar las respuestas de los estudiantes, aportadas en la discusión que se presenta en el grupo para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido.
	KCT 3.3.- Preguntas y respuestas KCT 3.3.1.- Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar en formar de explicación para todos los estudiantes.
	KCT 4.- Traducir KCT 4.1.- Saber cómo “traducir” a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo “traducir” alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual. KCT 4.2.- Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan “mejor”.
	KCT 5.- Hacer notar/remarcar/destacar KCT 5.1.- Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando.

Subdominio	Indicador
	KCT 6.- Alertar/prevenir KCT 6.1.- Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error KCT 6.2.- Saber cómo hacerles señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el examen, para alertar a los demás sobre los errores que se cometen y de alguna forma prevenirlos de ese error.
	KCT 7.- Preparar actividades KCT 7.1.- Saber cómo presentarles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando
	KCT 8.- Forma de presentarlo o representarlo KCT 8.1.- Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. KCT 8.2.- Conocer diferentes formas para introducir un tópico matemático con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido matemático o saber dar una breve reseña/anécdota histórica para contextualizar un tópico. KCT 8.3.- Saber distintas formas de presentar/representar la definición de un concepto: en forma genérica y no con números concretos. KCT 8.4.- Conocer la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar unos conceptos con otros hasta llegar al deseado. KCT 8.5.- Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. KCT 8.6.- Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. KCT 8.7.- Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. KCT 8.8.- Saber, tras la digresión en su discurso, rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando. KCT 8.9.- Saber “poderosas” analogías para presentar o representar el contenido matemático. Saber que al usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, puede hacer que los estudiantes logren entender “mejor” el significado de un contenido matemático. KCT 8.10.- Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. KCT 8.11.- Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. KCT 8.12.- Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. KCT 8.13.- Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. KCT 8.14.- Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor

Subdominio	Indicador
	considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. KCT 8.15.- Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. KCT 8.16.- Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema. KCT 8.17.- Saber cómo dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido del ejemplo o ejercicio.

Subdominio	Indicador
***Conocimiento del currículo* (KC)**	**KC 1**.- Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto
	KC 2.- Saber cómo está organizado el programa de la asignatura o curso que imparte.
	KC 3.- Saber qué temas se deben ver posteriormente en el curso
	KC 4.- Saber qué contenido deben aprender los estudiantes, aunque no aparezca en el libro de texto o en el programa del curso.