



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DE AGUASCALIENTES**

**CENTRO DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES  
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN**

**TESIS**

**CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL PROFESOR DE EDUCACIÓN  
PRIMARIA AL IMPARTIR LA MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES**

**PRESENTA**

**Indira Viridiana Medina Mendoza**

**PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA  
EN INVESTIGACIÓN EDUCATIVA**

**TUTOR**

**Dr. David Alfonso Páez**

**COMITÉ TUTORAL**

**Dr. Daniel Eudave Muñoz**

**Dr. César Martínez Hernández**

**Aguascalientes, Ags., 05 de marzo de 2018**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DE AGUASCALIENTES

CENTRO DE CIENCIAS SOCIALES  
Y HUMANIDADES

DEC. CCS Y H OF. N° 0265  
Asunto: Conclusión de Tesis

**DRA. EN ADMÓN. MARÍA DEL CARMEN MARTÍNEZ SERNA  
DIRECTORA GENERAL DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO  
P R E S E N T E.**

Por este conducto le informo que el documento final de Tesis/Trabajo Práctico Titulado: **“CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL PROFESOR DE EDUCACIÓN PRIMARIA AL IMPARTIR LA MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES”**, presentado por la sustentante **INDIRA VIRIDIANA MEDINA MENDOZA** con ID. **119698**, egresada de la **MAESTRÍA EN INVESTIGACIÓN EDUCATIVA**, cumple las normas y lineamientos establecidos institucionalmente para presentar el examen de grado.

Sin más por el momento, aprovecho la oportunidad para enviarle un cordial saludo.

**A T E N T A M E N T E**  
**“SE LUMEN PROFERRE”**  
**Aguascalientes, Ags. A 5 de Marzo del 2018**

**DRA. GRISELDA ALICIA MACÍAS IBARRA**  
**DECANA**

c.c.p. Dr. Francisco Javier Pedroza Cabrera. Secretario de Investigación y Posgrado del CCS y H.  
c.c.p. Dra. Victoria Eugenia Gutiérrez Marfileño. Secretaria Técnica de la Maestría en Inv. Educativa  
c.c.p. Mtra. Imelda Jiménez García. Jefa del Depto. De Control Escolar  
c.c.p. Lic. Indira Viridiana Medina Mendoza. Egresada de la Maestría en Investigación Educativa  
c.c.p. Archivo



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DE AGUASCALIENTES

**DRA. GRISELDA ALICIA MACÍAS IBARRA**  
DECANA DEL CENTRO DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES  
P R E S E N T E

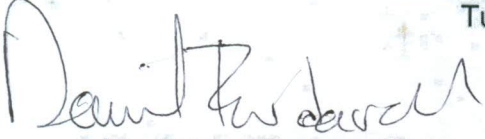
Por medio de la presente, como comité tutorial designado de la estudiante **INDIRA VIRIDIANA MEDINA MENDOZA** con ID 119698 quien realizó la tesis titulada: **CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL PROFESOR DE EDUCACIÓN PRIMARIA AL IMPARTIR LA MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES**, y con fundamento en el Artículo 175 Apartado II del Reglamento General de Docencia, nos permitimos emitir el **VOTO APROBATORIO** para que ella pueda proceder a su impresión. De igual manera, la estudiante podrá continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del grado en el programa de Maestría en Investigación Educativa.

Ponemos lo anterior a su digna consideración y sin otro particular por el momento, le enviamos un cordial saludo.

ATENTAMENTE  
"SE LUMEN PROFERRE"

Aguascalientes, Ags., a 28 de febrero de 2018

  
**Dr. David Alfonso Páez**  
Tutor de tesis

  
**Dr. Daniel Eudave Muñoz**  
Integrante Comité Tutorial

  
**Dr. César Martínez Hernández**  
Integrante Comité Tutorial  
MAR 2018

c.c.p. Interesada  
c.c.p. Secretaría Técnica de la Maestría en Investigación Educativa

**AZUCENA  
LIRA**

## AGRADECIMIENTOS

A Dios por ser mi fuente de fortaleza y compañía en todo momento.

A mis padres por todo el amor, cuidado, apoyo y enseñanzas que desinteresadamente me han brindado.

A mi hermana por haber estado a mi lado y por su apoyo incondicional.

Al Dr. David Alfonso Páez quien me ha guiado en este duro caminar hacia la culminación de mis estudios de maestría. Gracias.

Al Dr. Daniel Eudave y al Dr. César Martínez quienes gentilmente me orientaron en la realización de este proyecto de investigación.

A la Dra. Eugenia Ramírez y a la Mtra. Teresa Cañedo por sus consejos que favorecieron el desarrollo de esta tesis.

A Elsa del Socorro Ramírez por su compromiso con el desarrollo y término de este trabajo.

A la Dra. Guadalupe Pérez por el invaluable apoyo para obtener el grado.

A Carolina quien siempre estuvo al pendiente de mí en este proceso.

A mis amigos y amigas que siempre estuvieron para mí y alentaron en todo momento.

A aquellos profesores que me han inspirado en este caminar por la educación.

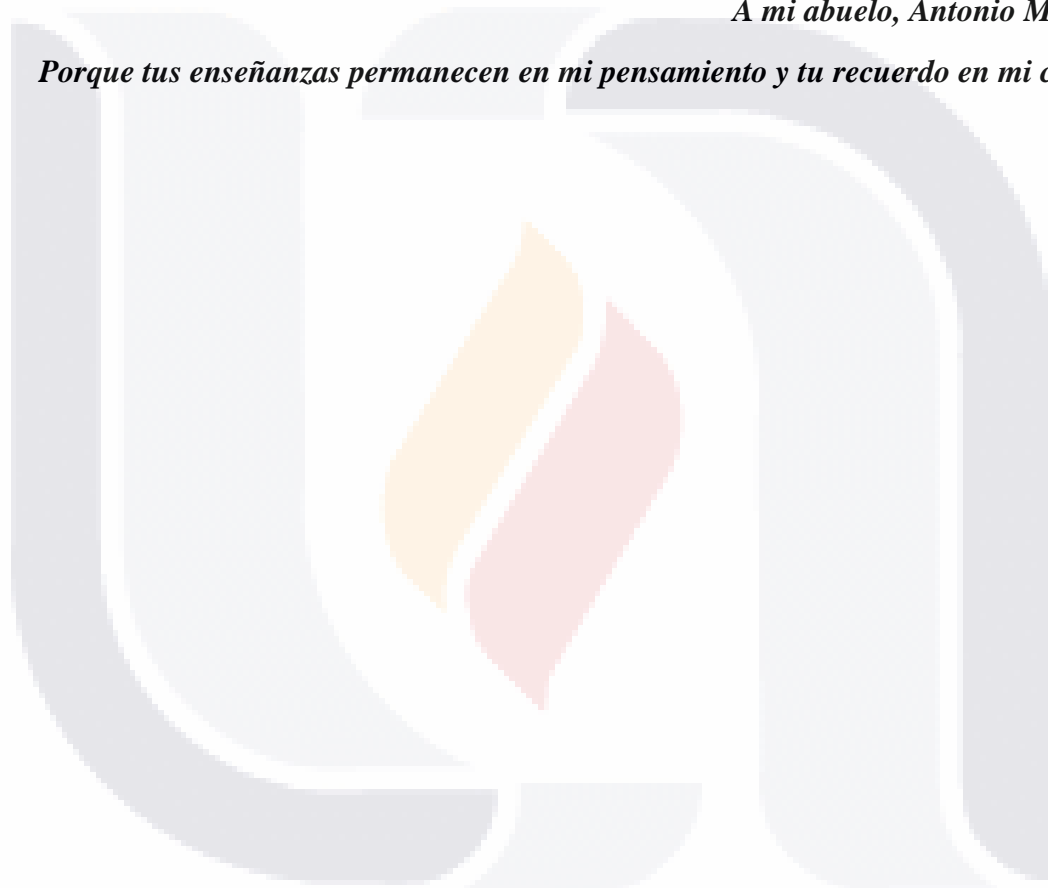
A mis alumnos de primaria quienes me mostraron el sentido de la educación.

A CONACYT que, a través del apoyo de la sociedad mexicana, promueve el desarrollo de la ciencia y tecnología que tanta falta le hace a nuestro país.

DEDICATORIA

*A mi abuelo, Antonio Mendoza.*

*Porque tus enseñanzas permanecen en mi pensamiento y tu recuerdo en mi corazón.*



## ÍNDICE GENERAL

	Pág.
Índice de tablas .....	4
Índice de figuras .....	5
Resumen .....	7
Abstract .....	8
Introducción .....	9
Capítulo 1. Planteamiento del problema .....	11
1.1 Antecedentes .....	11
1.1.1 Desempeño del estudiante en educación básica, un reflejo del profesor en matemáticas .....	12
1.1.2 Exigencias del plan y programa de estudios al profesor de primaria .....	14
1.1.2.1 Enseñar la fracción como parte-todo .....	15
1.1.3 Dificultades del profesor sobre el concepto y la multiplicación de la fracción .....	17
1.1.4 Dificultades en la didáctica para enseñar la fracción y su multiplicación .....	20
1.2 Preguntas de investigación .....	22
1.3 Objetivos .....	22
1.4 Justificación .....	22
Capítulo 2. Marco teórico .....	26
2.1 Antecedentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas .....	26
2.1.1 Aportaciones de Shulman: Conocimiento Base del Profesor .....	27
2.1.2 Aportaciones de Ball: Conocimiento Didáctico para Enseñar Matemáticas ..	28
2.2 Modelo del Conocimiento Especializado del profesor en matemáticas .....	30
2.2.1 Conocimiento del Contenido Matemático, MK .....	32
2.2.2 Conocimiento Didáctico del Contenido, PCK .....	33
2.2.2.1 Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, KMT .....	36
2.2.2.2 Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas, KFLM .....	36
2.2.2.3 Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas, KSML .....	37

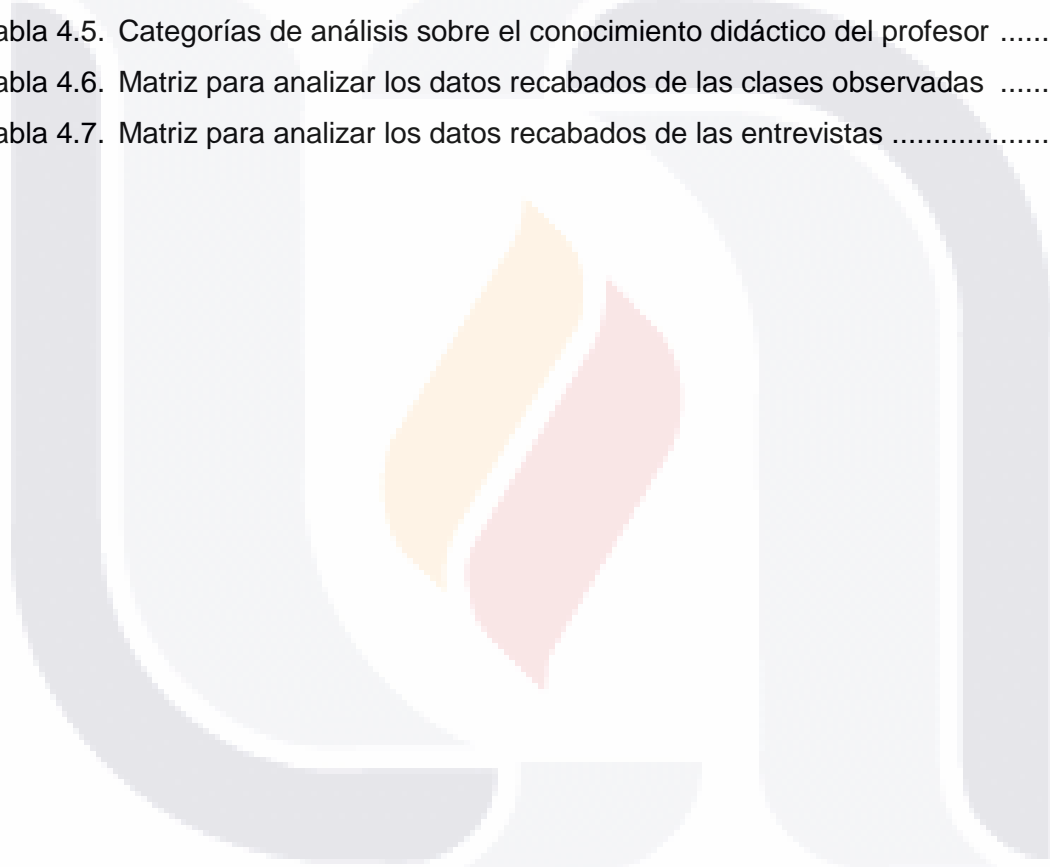
2.3 Aproximación a la multiplicación de fracciones .....	38
2.3.1 Noción de fracción (número racional) .....	38
2.3.2 Noción de multiplicación de fracción .....	39
2.3.2.1 Multiplicación de dos fracciones propias .....	40
2.3.2.2 Multiplicación de un entero por una fracción propia .....	41
2.3.2.3 Multiplicación de una fracción mixta por una fracción propia .....	43
2.3.2.4 Multiplicación de dos fracciones mixtas .....	43
Capítulo 3. Marco contextual .....	44
3.1 La multiplicación de fracciones en el currículum y Libro para el maestro .....	44
3.1.1 Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas .....	47
3.1.2 Conocimiento de las características del aprendizaje .....	54
Capítulo 4. Diseño metodológico .....	57
4.1 Tipo de estudio .....	57
4.2 Sujetos y contexto de estudio .....	58
4.3 Técnicas e instrumentos para el acopio de datos .....	60
4.3.1 Observación no participante .....	60
4.3.2 Entrevista semi-estructurada .....	60
4.4 Etapas del estudio .....	63
4.4.1 Primera etapa: observación de las sesiones de clase .....	63
4.4.2 Segunda etapa: entrevista a cada profesora .....	64
4.5 Características del análisis de datos .....	65
4.5.1 Análisis de las clases observadas .....	67
4.5.2 Análisis de la información recabada en las entrevistas .....	68
Capítulo 5. Análisis de datos .....	70
5.1 Enseñanza de la multiplicación de números fraccionarios .....	70
5.2 La clase de M1: enseñar la multiplicación de fracciones como parte-todo y suma reducida .....	71
5.2.1 Conocimiento didáctico de M1 al enseñar la multiplicación de fracciones ....	71
5.2.1.1 Estrategias de enseñanza .....	72
5.2.1.2 Materiales didácticos y recursos en la clase .....	77
5.2.1.3 Representaciones de las fracciones y la multiplicación .....	80

5.2.2 Características del aprendizaje de los alumnos.....	84
5.2.2.1 Conocimientos previos .....	84
5.2.2.2 Conocimiento del perfil del alumno .....	85
5.2.2.3 Sobre las dificultades del alumno .....	87
5.2.3 Sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas .....	90
5.2.4 M1 y la multiplicación de fracciones: síntesis .....	92
5.3 La clase de M3: enseñar la multiplicación de fracciones como parte-parte suma reducida y operador .....	95
5.3.1 Conocimiento didáctico de M3 .....	95
5.3.1.1 Estrategias de enseñanza .....	96
5.3.1.2 Materiales didácticos y recursos usados en clase .....	101
5.3.1.3 Representaciones de la fracción y la multiplicación .....	103
5.3.2 Características del aprendizaje de los alumnos.....	105
5.3.2.1 Conocimientos previos y dificultades de los alumnos .....	105
5.3.2.2 Conocimiento del perfil del alumno .....	108
5.3.3 Sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas .....	110
5.3.4 M3 y la multiplicación de fracciones: síntesis .....	111
Capítulo 6. Discusión de resultados .....	114
6.1 Estrategias, insumos y representaciones empleadas en la enseñanza de la multiplicación de fracciones en sexto grado .....	114
6.2 Enseñanza de la multiplicación de fracciones centrada en el alumno .....	118
6.3 Concepciones del currículum en torno a la multiplicación de fracciones .....	120
Capítulo 7. Conclusiones .....	122
7.1 El quehacer y la didáctica del profesor para la multiplicación de racionales .....	122
7.2 Limitantes de la investigación .....	124
7.3 Líneas de investigación a partir de este proyecto .....	124
Referencias .....	127
Apéndice .....	136



**ÍNDICE DE TABLAS**

	Pág.
Tabla 1.1. Resultados de evaluaciones en matemáticas de educación básica (sexto grado) y secundaria .....	12
Tabla 4.1. Características generales de la muestra .....	59
Tabla 4.2. Características del instrumento para entrevista .....	62
Tabla 4.3. Sesiones de clase observadas en cada profesora-participante .....	64
Tabla 4.4. Duración de la entrevista con cada profesora .....	65
Tabla 4.5. Categorías de análisis sobre el conocimiento didáctico del profesor .....	66
Tabla 4.6. Matriz para analizar los datos recabados de las clases observadas .....	68
Tabla 4.7. Matriz para analizar los datos recabados de las entrevistas .....	68



## ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 2.1. Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Hill, Ball & Schilling, 2008, p. 377) .....	28
Figura 2.2. Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Sosa, Flores-Medrano, & Carrillo, 2016) .....	31
Figura 2.3. Pasos para desarrollar problemas con el algoritmo fracción por fracción (Son, 2012, p. 392) .....	41
Figura 2.4. Ejemplo de demostración y representación visual de la multiplicación de fracciones como una suma repetida .....	42
Figura 2.5. Modelos empleados para resolver problemas de multiplicación de fracciones como operador (Son, 2012, p. 390) .....	42
Figura 3.1. Organización de temas, contenidos y aprendizajes para el Bloque I (SEP, 2011b, p. 76) .....	45
Figura 3.2. Organización de temas, contenidos y aprendizajes para el Bloque IV (SEP, 2011b, p. 78) .....	46
Figura 3.3. Índice de contenidos del Libro para el alumno (SEP, 2014a, pp. 4-5) .....	47
Figura 3.4. Trabajo colaborativo para la resolución de problemas multiplicativos de áreas (SEP, 2014b, p. 30) .....	49
Figura 3.5. Situación problemática para trabajar la multiplicación de fracciones: cálculo de kilómetros recorridos en una caminata (SEP, 2014b, p. 28) ...	50
Figura 3.6. Sugerencia de material para abordar la lección sobre multiplicación de fracciones (SEP, 2014b, p. 31) .....	52
Figura 3.7. Objetivo de la lección 62 sobre multiplicación de fracciones (SEP, 2014b, p. 194) .....	53
Figura 3.8. Consideraciones que el Libro del maestro ofrece para explicar la lección 61 (SEP, 2014b, p. 193) .....	54
Figura 3.9. Resolución de problemas de multiplicación de fracciones como operador (SEP, 2014b, p. 188) .....	55
Figura 3.10. Posibles procedimientos y razonamientos del alumno para resolver primer problema del Libro del maestro sobre multiplicación de fracciones (SEP, 2014b, p. 189) .....	55

Figura 3.11. Reflexión sobre las dificultades del alumno en torno a una lección sobre multiplicación de fracciones (SEP, 2014b, p. 31) .....	56
Figura 5.1. Maestra guía a los alumnos en la creación de tiras de papel .....	73
Figura 5.2. Representación gráfica de las cuatro tiras de papel para calcular $\frac{2}{3}$ .....	78
Figura 5.3. Niño doblando tiras de papel para obtener tercios .....	79
Figura 5.4. Representación del producto de dos fracciones mediante la La propiedad conmutativa .....	82
Figura 5.5. Sugerencia: una forma de graficación del proceso de multiplicar $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ ....	82
Figura 5.6. Lectura de izquierda a derecha de M1 de una multiplicación de fracciones .....	83
Figura 5.7. Problema de multiplicación de fracciones en el libro de texto (SEP, 2011a, p. 20) .....	88
Figura 5.8. Resolución de problemas del libro mediante tiras de papel .....	89
Figura 5.9. Diagrama del conocimiento didáctico de M1 para enseñar la multiplicación de fracciones .....	93
Figura 5.10. Representación gráfica empleada por M3 para simbolizar los 100 relojes divididos en quintos .....	100
Figura 5.11. Situación dictada por M3 a los alumnos para practicar la multiplicación de fracciones como suma reducida y operador (Aceves, et al., 2014, p. 95) .....	101
Figura 5.12. Procedimiento del pizarrón para reducir una fracción propia .....	102
Figura 5.13. Diagrama del conocimiento didáctico de M3 para enseñar la multiplicación de fracciones .....	112

## RESUMEN

El trabajo de investigación que aquí se presenta exhibe dos estudios de caso de dos profesoras de sexto año de educación primaria al momento de impartir el tema de la multiplicación de fracciones a alumnos de dicho curso escolar. Esta investigación tiene dos objetivos principales, el primero es la identificación del conocimiento didáctico del contenido que el profesor de educación primaria considera necesario para impartir la multiplicación de fracciones a estudiantes de sexto grado. El segundo objetivo pretende la descripción del conocimiento didáctico que el profesor de educación primaria muestra al enseñar la multiplicación de fracciones en sexto grado. Como parte de la metodología, se recurrió a cuatro profesoras con las siguientes características: tener experiencia de al menos un año en sexto grado, apoyarse del currículum vigente para dar clases y laborar en una escuela primaria pública. De las cuatro profesoras se eligieron los dos casos más representativos para reportarlos en el presente documento. Para obtener la información que nos ayudaría a adentrarnos al conocimiento del docente de educación primaria, se procedió a realizar observaciones no participantes de las clases donde las cuatro participantes enseñaron la multiplicación de fracciones, además, para reforzar esta información se les realizaron entrevistas a cada una de ellas. Los resultados muestran que hay una falta de conocimiento en las profesoras sobre el algoritmo de la multiplicación de fracciones así como sus distintos significados. También, se encontró que las maestras no explotan todos los recursos y materiales didácticos para enseñar este contenido curricular. Por otra parte, las maestras manifestaron su reflexión en torno a las sugerencias del currículum así como su preocupación por poseer un conocimiento sobre los estudiantes que les permita elegir la estrategias de enseñanza adecuadas, materiales y ejemplos que le ayuden al alumno a comprender el objeto matemático en cuestión.

## ABSTRACT

The presented research displays two case studies about two sixth grade teachers in primary education when explaining the topic multiplying fractions to students in the mentioned school year. This research has two main objectives, first, identifying pedagogical content knowledge that a primary school teacher considers necessary for teaching multiplying fractions to students in sixth grade. The second objective pretends describing pedagogical knowledge the elementary education teacher shows when teaching multiplying fractions in sixth grade. As part of the methodology, four teachers were resorted with the following characteristics: to have at least one year experience in sixth grade, to use the current curriculum for teaching and to work in a public primary school. From the four teachers, the two most representative cases were used to be reported in this document. To obtain the information that would help us deepen into the knowledge of the primary education teacher, non-participant observations of the classes were carried out in which the four participants taught multiplying fractions; moreover, to reinforce this information each teacher was interviewed. The results show the teachers have a lack of knowledge about the multiplying fractions algorithm and their different meanings. In addition, it was found that teachers do not exploit all the resources and pedagogical materials to teach this curricular content. On the other hand, the teachers expressed their reflection on the suggestions of the curriculum as well as their concern for having knowledge about students that allows them choose appropriate teaching strategies, materials and examples that help students comprehend the mathematical object in question.

## INTRODUCCIÓN

Para muchos estudiantes de educación básica la palabra “matemáticas” representa un obstáculo, una dificultad que están obligados a enfrentar para poder acceder a otro nivel educativo, o bien, un asunto tedioso y de escasa claridad. Como consecuencia, es común que el alumno demuestre un rechazo y un *pobre* entendimiento hacia las matemáticas, lo cual se ve reflejado en las evaluaciones nacionales e internacionales que intentan medir el desempeño escolar alcanzado en dicha materia en educación básica. Tales evaluaciones reportan que uno de los temas de mayor reto para los estudiantes mexicanos es el de fracciones y su operatividad aritmética; por ejemplo, la multiplicación. Por su parte, la literatura ha reportado que algunos profesores de matemáticas en educación básica enseñan este concepto de manera errónea o limitada, así como dificultades con la multiplicación de fracciones. El papel del docente es de gran relevancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que es responsable de brindarle espacios adecuados a los alumnos experiencias significativas en torno a la fracción y la multiplicación de ésta.

De acuerdo con lo anterior, en el presente documento se traza una investigación cuyo propósito es analizar el conocimiento didáctico que emplea el maestro para enseñar la multiplicación de fracciones en sexto grado de educación primaria. El documento está dividido en siete capítulos, los cuales reflejan el planteamiento, desarrollo y resultados de esta investigación, A continuación son descritos brevemente cada uno de ellos.

Capítulo 1. Se refiere al planteamiento de problema de esta investigación, de donde se desprenden los antecedentes de esta investigación, justificación, las preguntas de investigación y los objetivos que se trazaron en la presente investigación.

Capítulo 2. Está centrado en delinear el marco teórico que permitió en esta investigación acomodar y analizar los datos. Como marco teórico se tomó un de los modelos que discuten el Conocimiento Didáctico del profesor de matemáticas, además se hace una reflexión acerca del significado y el algoritmo de la multiplicación con fracciones.

Capítulo 3. En él se exhibe el marco contextual que rodea a la enseñanza de la multiplicación de fracciones en México.

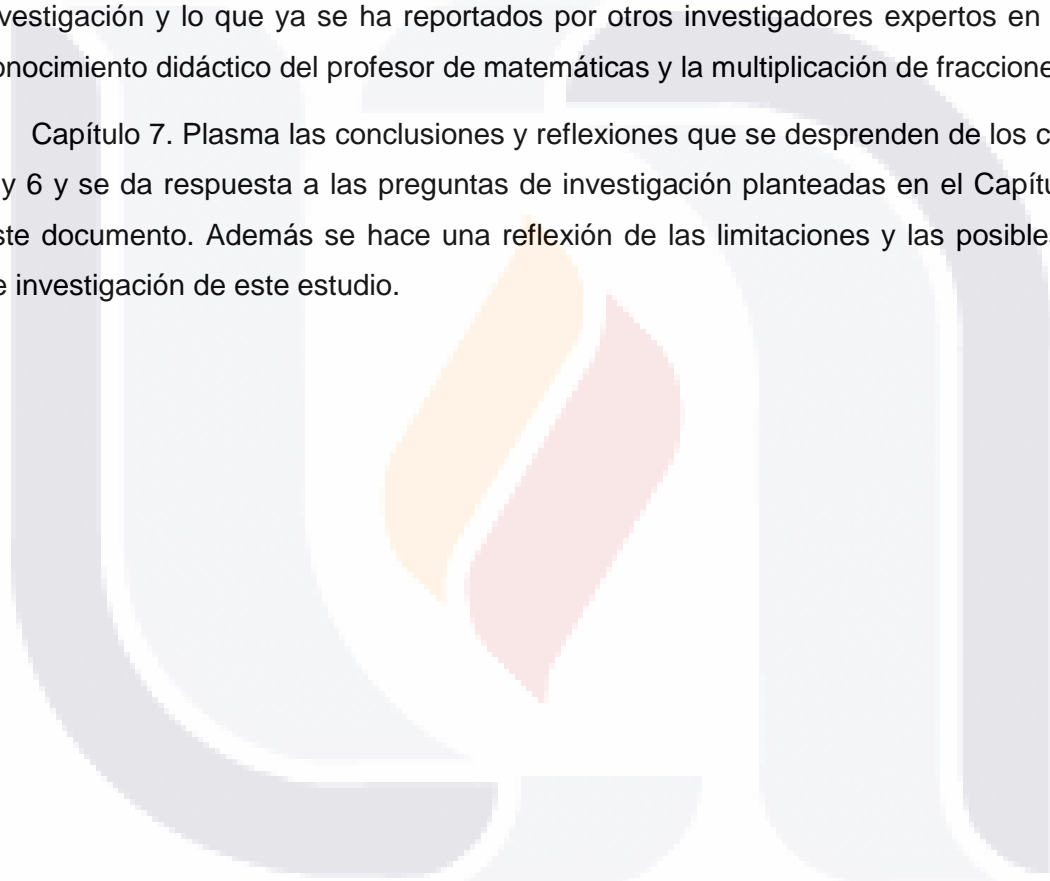
Capítulo 4. Define y explica la metodología que se empleó en este proyecto para dar respuesta a las preguntas de investigación y con ello alcanzar los objetivos propuestos.

En este capítulo se describe el tipo de estudio, la muestra, los instrumentos y las etapas para el acopio de datos.

Capítulo 5. Está centrado en mostrar el análisis de los datos recabados sobre el conocimiento didáctico del profesor sobre la multiplicación de fracciones. Es importante mencionar que se presentan dos estudios de casos, en los cuales se muestran semejanzas y diferencias en el conocimiento didáctico de dos profesoras.

Capítulo 6. Se muestra una discusión de los resultados que se obtuvieron en esta investigación y lo que ya se ha reportados por otros investigadores expertos en torno al conocimiento didáctico del profesor de matemáticas y la multiplicación de fracciones.

Capítulo 7. Plasma las conclusiones y reflexiones que se desprenden de los capítulos 5 y 6 y se da respuesta a las preguntas de investigación planteadas en el Capítulo 1 de este documento. Además se hace una reflexión de las limitaciones y las posibles líneas de investigación de este estudio.



## CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El presente capítulo está centrado en mostrar el planteamiento del problema de investigación y abarca los siguientes apartados: antecedentes, preguntas de investigación, objetivos y justificación. Los antecedentes fueron construidos a partir de indicadores nacionales e internacionales sobre desempeño matemático del alumno en educación primaria, dificultades del profesor en su conocimiento didáctico, práctica y manejo de la multiplicación de fracciones. Se plantearon dos preguntas de investigación que permitieron derivar los objetivos que guiaron esta investigación. Además, la justificación está desarrollada en términos de resaltar y sustentar la importancia de estudiar el conocimiento didáctico en relación con la enseñanza de la multiplicación de fracciones en las aulas de educación básica.

### 1.1 Antecedentes

La educación, de acuerdo con Delors (1996), debe sustentarse en cuatro pilares básicos: *aprender a ser, aprender a convivir, aprender a hacer y aprender a conocer*<sup>1</sup>. A partir de estos pilares, se espera que el alumno potencialice sus capacidades innatas y desarrolle competencias académicas e intelectuales que le permitan aspirar a un futuro digno y, conjuntamente, consiga resolver de manera creativa los retos sociales y laborales que se le van presentando tanto en su vida cotidiana como en la profesional. Para ello, y en palabras de Heredia y Gómez (2007), el profesor de cualquier nivel educativo juega un papel esencial como actor escolar, pues interviene y modifica de manera directa los procesos de enseñanza y aprendizaje. En matemáticas, el profesor de educación básica es una variable fundamental para el desempeño académico e intelectual de los estudiantes.

#### 1.1.1 Desempeño del estudiante en educación básica, un reflejo del docente en matemáticas

Investigadores en educación matemática (e.g., Adler, Ball, Krainer, Lin, & Novotna, 2005; Jaworski, 2006; entre otros) consideran que el conocimiento y la práctica del profesor

---

<sup>1</sup> *Aprender a ser* se refiere a las actitudes que favorecen la realización personal, *aprender a convivir* se relaciona con el descubrimiento del otro, *aprender a hacer* está enfocado al desarrollo de competencias y habilidades, y *aprender a conocer* implica el desarrollo de la adquisición del aprendizaje (Delors, 1996, pp. 4-5).



están estrechamente relacionadas entre sí e impactan en el aprendizaje de los estudiantes. En México, los resultados de las evaluaciones nacionales e internacionales (e.g. PLANEA y PISA)<sup>2</sup> han mostrado, o puede interpretarse, que este impacto no ha sido del todo favorable en el aprendizaje del alumno en la asignatura de matemáticas de educación primaria y secundaria (véase Tabla 1.1)<sup>3</sup>.

Tabla 1.1

*Resultados de evaluaciones en matemáticas de educación básica (sexto grado) y secundaria*

Prueba	Desempeño académico de los estudiantes		
	Nivel	%	Significado
PLANEA 2015	I	60.5	Tiene un <i>logro insuficiente</i> .
	II	18.9	Tiene un <i>logro apenas indispensable</i> .
	III	13.8	Tiene un <i>logro satisfactorio</i> .
	IV	6.8	Tiene un <i>logro sobresaliente</i> .
PISA 2012	I	31.9	Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.
	II	27.8	Son capaces de lograr interpretaciones directas.
	III	13.1	Llegan a soluciones que reflejan un nivel básico de interpretación y razonamiento.
	IV	3.7	Usan una limitada gama de habilidades y pueden razonar con una idea en contextos sencillos.
	V	0.6	Son capaces de trabajar de manera estratégica al usar habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas.
	VI	0	Poseen una avanzada capacidad de pensamiento y razonamiento matemáticos.

*Nota:* Tabla elaborada a partir de lo reportado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE, 2015, 2013).

De acuerdo con los resultados de la prueba PLANEA (INEE, 2015), de los cuatro niveles que comprendió la evaluación en la asignatura de matemáticas en sexto grado de

<sup>2</sup> Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA), y Programme for International Student Assessment (PISA).

<sup>3</sup> Resultados publicados en <http://www.inee.edu.mx/images/stories/2015/planea/final/fasciculos-finales/resultados/Planea-3011.pdf> y [http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/11149/1/images/Mexico\\_PISA\\_2012\\_Informe.pdf](http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/11149/1/images/Mexico_PISA_2012_Informe.pdf).

primaria, la mayor parte de los estudiantes se situó en nivel más bajo (60.5%)<sup>4</sup>. Lo anterior muestra que los alumnos presentan carencias en su desempeño académico en comparación con los aprendizajes esperados en matemáticas (SEP, Secretaría de Educación Pública, 2011b). Según el INEE (2015), estas “carencias [...] dificultarán el aprendizaje futuro” (s/p). Respecto a los resultados obtenidos en el estado de Aguascalientes, 52.2% de los estudiantes también se ubicó en el nivel bajo en contraste con 10.5% que llegó al nivel más alto (INEE, 2015). En este sentido, se plantea la preocupación por investigar lo que acontece en la clase de matemáticas; en especial, poner mayor atención al conocimiento y la práctica del profesor de educación básica.

En cuanto a los resultados en la prueba PISA 2012 (INEE, 2013), México se ubicó en la posición 53 de 65 países evaluados respecto al desempeño matemático de los alumnos que, en ese entonces, estaban por concluir la educación secundaria. Es de resaltar que más de la mitad de los alumnos que realizaron la prueba (59.7%) están ubicados en los dos niveles más bajos de desempeño (véase Tabla 1.1). Para el INEE (2013), es posible que la mayoría de estos estudiantes, en un futuro, “tendrán serias dificultades para usar las Matemáticas como una herramienta para beneficiarse de nuevas oportunidades educativas y de aprendizaje a lo largo de la vida, o para poder desarrollar un pensamiento o razonamiento matemático que les permita manejar abstracciones” (pp. 36-37).

Los resultados de las evaluaciones nacionales e internacionales muestran, *grosso modo*, los posibles problemas relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje que la educación básica enfrenta día a día en el área disciplinar de las matemáticas, asignatura que es de indispensable utilidad en la trayectoria escolar del alumno y en su contexto cotidiano. Es importante mencionar que la prueba PISA 2012 (INEE, 2013) presentó una variación de 30% a 50% de reactivos bien contestados en relación con el concepto y operatividad de la fracción, lo que para Burrell (2014) significa que existen países que tienen severas dificultades con este concepto matemático, siendo México uno de ellos.

Al respecto, Pinto y González (2008) aseveran que estos resultados desfavorables son producto de un desarrollo insuficiente de las habilidades cognitivas de los alumnos en

---

<sup>4</sup> En este nivel (I) se considera que el alumno escribe y compara los números naturales, sin ser capaz de resolver problemas aritméticos con números naturales. En ninguno de los cuatro niveles se considera la multiplicación de fracciones, aun cuando en sexto grado de educación primaria es uno de los contenidos curriculares que se debe enseñar (véase SEP, 2011, pp. 77 y 79), sólo en el nivel cuatro se hace referencia a solución de problemas aditivos con números fraccionarios.

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

dichos exámenes. Por ello, y de acuerdo con estos autores, surge un interés especial por indagar el conocimiento didáctico del profesor en la asignatura de matemáticas, especialmente, en la enseñanza de la multiplicación de fracciones. Coincidimos con Pinto y González y consideramos que el presente estudio puede ser un eje de partida para que surjan propuestas teóricas y empíricas que apoyen en un futuro la formación y actualización del docente, y con ello a la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje.

### **1.1.2 Exigencias del Plan y Programa de estudios al profesor de primaria**

El profesor de educación básica, al ser un actor importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Chevallard, 1998), se ha visto en la necesidad de buscar y construir nuevas estrategias de enseñanza que le permitan al alumno lograr los aprendizajes establecidos en el Plan de estudios vigente (SEP, 2011a). Al respecto, la SEP (2009) enfatiza la importancia de una constante preparación del profesor en servicio sobre los contenidos curriculares y los procesos que tienen que ver con la enseñanza de las matemáticas (i.e., sobre la didáctica efectuada en el aula de clases). Ella lo menciona de la siguiente manera:

Como agentes fundamentales de la intervención educativa, los maestros son los verdaderos agentes del desarrollo curricular, por lo que deberán participar en propuestas de formación inicial, actualización y desarrollo profesional, para realizar su práctica docente de manera efectiva, aplicar con éxito los nuevos programas en el aula y atender los requerimientos educativos que la diversidad de la población escolar le demande. (SEP, 2009, p. 37)

En el Plan y Programa de estudios (SEP, 2011a, 2011b) también se le exige al profesor cumplir en tiempo y forma los aprendizajes esperados, de modo que lo llevan a tomar decisiones que afectan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En concordancia con lo mencionado por Ball, Lubienski y Mewborn (2001) y Yasoda (2009), los profesores de matemáticas se sienten presionados y comprometidos por cubrir los contenidos curriculares que el Programa de estudio les demanda, debido a la creencia de que si no los desarrollan en su totalidad, el alumno carecerá de las experiencias de aprendizaje requeridas, de los conocimientos necesarios para avanzar al siguiente grado o nivel educativo y, además, éste no podrá ser evaluado en tiempo y forma. De igual manera, los anteriores autores concluyen que esta presión lleva a los docentes a abordar los contenidos curriculares de manera precipitada, superficial y con

poca claridad, ya sea para cubrir todos los temas del currículum o para realizar una prueba determinada.

Mora (1993) indica que en algunos países latinoamericanos la presión por lograr buenos resultados como indicadores de calidad genera que la mayoría de las escuelas ajusten su currículum a los contenidos de las pruebas; es decir, los exámenes se convierten en “objetos únicos de enseñanza” (p. 459). Para Mora, lo anterior se debe a la falta de mecanismos que evidencien que las instituciones que obtuvieron logros satisfactorios en realidad provean al alumno de un ambiente educativo integral de calidad. En México, las escuelas, los profesores y los alumnos son presionados por obtener puntajes altos en las pruebas relacionadas con matemáticas (e.g., PLANEA y PISA), lo que trae como consecuencia que el maestro fije su atención en enseñar contenidos que serán evaluados en estas pruebas y deje de lado otros conocimientos básicos que son indispensables para que el alumno comprenda contenidos posteriores.

#### **1.1.2.1 Enseñar la fracción como parte-todo**

Uno de los contenidos presentes en el currículum mexicano es el concepto de fracción y sus operaciones (SEP, 2011a). En palabras de Cuapanteca (2007), el primer acercamiento que el niño tiene con las fracciones es en segundo año de educación primaria, donde se espera que resuelva problemas de reparto de cantidades enteras; en cambio, en tercer año se introduce la noción de fracción mediante casos simples (v. gr. cuartos y medios) y se comparan fracciones *sencillas* (e.g., un cuarto y un medio) con material concreto, también se enseña la representación convencional de las fracciones y se plantea la suma de fracciones simples a través de material manipulable.

Butto (2013) señala que la enseñanza del concepto de fracción en tercer grado de primaria es a través de problemas aditivos simples con fracciones y problemas de reparto; sin embargo, afirma que la fracción la definen como *una parte del todo* sin una reflexión clara para los alumnos. Al respecto, en su estudio llevado a cabo, Butto reporta que cuando este concepto matemático es visto sólo como una partición que se genera de dos acciones (dividir y tomar) se termina por reducir los constructos que rodean a la fracción dificultando su comprensión. Ante ello, este autor afirma que es necesario crear un escenario donde el docente replantee su conocimiento del concepto y haga uso de nuevas estrategias y dinámicas para subsanar tal dificultad en clase.

Al desarrollar una investigación con profesores de educación primaria sobre el concepto de fracción y el algoritmo de la multiplicación con estos números racionales, Luelmo (2004) encontró que estos profesores no tienen un desempeño apropiado en el uso de la fracción como operador multiplicativo debido a que concebían a la fracción como una unidad de medida y excluían su significado de operador multiplicativo. En torno al concepto de fracción, Butto (2013) asegura que los libros de texto presentan comúnmente a la fracción como la acción de *dividir* y *tomar* dificultando la comprensión de ésta como un número.

De igual forma, Freudenthal (1983, citado en Perera & Valdemoros, 2007) enfatiza que deben enseñarse los diferentes significados de los números fraccionarios y no únicamente la concepción parte-todo, pues este enfoque “sólo produce fracciones propias” (p. 34). Por su parte, para Lamon (2001, citada en Burril, 2014), cree que el profesor debería ampliar la idea de que la fracción es una parte de un todo, ya que esta definición limita el entendimiento del alumno sobre el tema. Además, Lamon (2012) refiere que la enseñanza de fracciones marca el inicio de una extensa jornada encaminada a la comprensión de los números racionales en niveles educativos posteriores; así mismo, considera que la falta de comprensión sobre este contenido matemático provoca “pérdidas incalculables [de conocimiento]” en los alumnos (p. xi). De acuerdo con lo anterior, es importante que el docente trabaje la fracción en sus distintos escenarios.

Profesor: Yo acostumbraba organizar mis clases a partir de las lecciones y actividades contenidas en el *Libro de Texto* para el niño y después me apoyaba en el *Fichero de quinto grado*, donde se formulan las actividades didácticas correspondientes al tema abordado y los objetivos de éstas, además de indicar qué ejercicios se pueden manejar antes o después de una de estas actividades del *Fichero*, para que los estudiantes entiendan mejor los contenidos matemáticos tratados. (Valdemoros, 2010, p. 430, cursivas en el original)

Para Valdemoros (2010), lo expresado por el profesor refleja una falta de actitud reflexiva ante su propia práctica docente, pues únicamente recrea actividades establecidas en los materiales curriculares señalados en su discurso, pero muchas de las veces estas actividades no cubren las necesidades particulares de cada grupo escolar. Además, esta dependencia propicia una falta de estrategias autónomas, ya que el docente se priva de emplear su creatividad para diseñar actividades, ejemplos y

materiales que tengan la finalidad de cubrir las necesidades de los alumnos en relación con el tema de las fracciones.

### **1.1.3 Dificultades del profesor sobre el concepto y la multiplicación de la fracción**

Para reducir la falta de autonomía sobre el libro de texto, Valdemoros (2010) señala que el profesor debe poseer un conocimiento que le permita implementar materiales y actividades idóneos para enseñar un determinado contenido matemático. De esta manera, el docente podrá tratar de forma efectiva los contenidos curriculares además de implementar diferentes estrategias y actividades que promuevan el aprendizaje de las matemáticas en el aula (Rodríguez & Zuazua, 2002).

Al respecto, Yasoda (2009) menciona que el profesor suele abordar problemas matemáticos rutinarios y, ello, se debe a técnicas que le fueron enseñadas previamente sin una comprensión; asimismo, este autor señala que ante una enseñanza tradicional de las matemáticas y el desarrollo de la misma como ajena y poco creativa, se podría obstaculizar la oportunidad de fomentar el interés del alumno por aprender, y cabría la posibilidad de que se le dificulte continuar en otro grado o nivel educativo, pues no tendría la habilidad reflexiva para construir el conocimiento matemático necesario en la resolución de problemas (Barting, 1981, citado en Yasoda, 2009).

Diversos investigadores reportaron que el profesor tiene dificultades en su conocimiento matemático y didáctico, siendo éste un tema de relevancia por la comunidad en educación matemática (e.g., Adler et al., 2005). Ball et al. (2001) aseveran que uno de los obstáculos para desarrollar conocimiento matemático y didáctico es la falta de entendimiento que el docente posee de éste. De la misma manera, la falta de conocimiento del profesor sobre la didáctica de las matemáticas da como resultado una enseñanza insuficiente de la asignatura y, por tanto, un aprendizaje limitado en el alumno (Yasoda, 2009).

En la investigación efectuada con profesores de una escuela pública mexicana, Luelmo (2004) encontró que éstos usaban el algoritmo de la multiplicación de fracciones sin contar con un conocimiento adecuado del procedimiento, ya que carecían de la noción de fracción como una estructura matemática. Luelmo concluyó que un porcentaje de los docentes sólo trabajaban con problemas en los cuales se les daba pistas de qué algoritmo usar; al respecto, esta investigadora menciona que “al no decirles en el problema alguna

palabra clave para determinar el algoritmo a aplicar [...] encontramos que algunos [de los docentes] ni siquiera hicieron el intento por resolverlo” (p. 90).

Por su parte, Muñoz-Catalán y Carrillo (2007) dirigieron una investigación cuyo propósito principal fue explorar el conocimiento adquirido por 33 futuros maestros de primaria sobre el contenido matemático *Números*. Para ello, se les implementó una prueba con tres problemas diferentes que abordaban temas tales como componentes decimales en una fracción, fracción irreducible, simplificación de fracciones y representación de fracciones. Es importante aclarar que en el contexto de esta investigación, los futuros docentes tenían que explicar su respuesta para que ésta se considerara válida. Los resultados arrojaron escasez de justificaciones en las respuestas de los participantes y carencias de conocimiento sobre contenidos conceptuales y procedimientos elementales.

De Castro (2008) argumenta que la enseñanza de la multiplicación de fracciones tiende a caer en la acción del “algoritmo de cancelación (cancelar-y-multiplicar)” por tradición (p. 101)<sup>5</sup>. Del mismo modo, la autora expone que los alumnos son incapaces de corregir sus errores porque existe una confusión en los fundamentos de la multiplicación de la fracción debido a su falta de comprensión del concepto de fracciones, multiplicación y división. Tomando en cuenta esta aseveración, convendría revisar el papel que juega el conocimiento didáctico del profesor en este tipo de dificultades. De igual forma, de Castro encontró tres problemas relacionados con la enseñanza de multiplicación de fracciones:

- La sintáctica en comparación con la semántica. Con ello, la autora habla de la poca disposición del profesor para dar ejemplos significativos a los alumnos. Se hace ver la multiplicación de fracciones como una serie de pasos rígidos y sin sentido que, al no tener un valor contextual para el alumno, seguramente se olvidan.
- El método de enseñanza de la multiplicación de fracciones. Los profesores, en su práctica de enseñanza, hacen uso de explicaciones centradas en la lógica del adulto más no en la del niño. de Castro (2008) menciona que los alumnos tienden a interpretar de manera errónea las fracciones debido a su creencia acerca de que

---

<sup>5</sup> El algoritmo o método de cancelación implica factorizar el numerador y el denominador, así como recurrir a la regla de cancelación de fracciones:  $\frac{ac}{bc} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$ , donde  $b, c \neq 0$ .

las fracciones presentan las mismas propiedades y leyes que los números naturales, lo cual es obstáculo cognitivo que el profesor no toma en cuenta.

- La limitación del conocimiento formal de fracciones. Tiene que ver con los “obstáculos cognitivos que hacen el aprendizaje de fracciones difícil para el alumno como el concepto de igualdad de partición y la invariancia de la totalidad” (Yoshida & Sawano, 2002, citados en de Castro, 2008, pp. 102-103). Este último punto también enfatiza el conocimiento previo necesario que el alumno debe poseer para aprender fracciones (i.e. multiplicación, división de números naturales, etcétera).

Isiksal y Cakiroglu (2011) sugieren que el docente tiene conceptos epistemológicos erróneos que no le permiten comprender y enseñar la multiplicación de fracciones. Además, para Chinnappan y Desplant (2012) “parte del conocimiento matemático del profesor es principalmente de naturaleza algorítmica” (p. 30) y, por ello, no se puede esperar que dicha naturaleza sea un apoyo para el docente en la provisión de problemas conceptualmente desafiantes para el alumno. Ante la falta de conocimiento matemático y didáctico, el profesor corre el riesgo de emplear recursos didácticos inadecuados, plantear problemas multiplicativos vagos, dar explicaciones equívocas y no resolver correctamente las dudas de sus estudiantes, provocando en ellos dificultades epistemológicas y conceptuales (Ball, 2003).

Por su parte, Thompson y Saldanha (2003) reportaron que la multiplicación de fracciones supone una *proporción múltiple* que se basa en la comprensión de medidas como las comparaciones de proporción, noción que el profesor no es capaz de presentar a sus alumnos, puesto que prevalece en los libros de texto o en el currículum la idea de que la multiplicación de fracciones es una *suma repetida*; además, existe la creencia de que el resultado de multiplicar fracciones es mayor que alguno de los factores implicados en dicha operación (Tirosh & Graeber, 1989).

Prediger (2008) asegura que la formación de modelos individuales basados en la regla intuitiva de multiplicar hace grande el producto es el principal obstáculo para entender la multiplicación de fracciones. Según Greer (1994, citado en Isiksal & Cakiroglu, 2011) y Prediger (2008), es indispensable cambiar estos modelos cognitivos para reducir o eliminar las dificultades que se le presentan al docente al momento de enseñar este contenido matemático, y una manera de hacerlo es a través de investigaciones donde se haga trabajo colaborativo y donde este actor educativo tenga posibilidad de analizar su



conocimiento matemático y didáctico. Así, el profesor será capaz de reflexionar sobre su conocimiento para mejorarlo y lograr en el alumno un aprendizaje significativo acerca de la multiplicación de fracciones, además le permitirá ser capaz de seleccionar el material y actividades adecuadas para la enseñanza, y tener un mejor dominio de lo que enseña.

#### **1.1.4 Dificultades en la didáctica para enseñar la fracción y su multiplicación**

Es evidente que el conocimiento, matemático y didáctico, del profesor es un tema vasto que implica complejidad en su estudio, muestra de ello son los trabajos desarrollados por diversos investigadores; por ejemplo, Ball et al. (2001), Carreño, Rojas, Montes y Flores (2013), Escudero, Flores y Carrillo (2012) y Llinares (2009). Asimismo, se han propuesto diversos enfoques centrados en definir y caracterizar el conocimiento del profesor en matemáticas; por ejemplo, Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball et al., 2001), Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, 2009) y Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (Carreño et al., 2013).

Para el INEE (2006) existe una necesidad de analizar el uso que el profesor le da al currículum escolar y al material pedagógico en el aula de clases, así como su didáctica y el conocimiento que éste posee sobre la fracción. Al respecto, Pinto y González (2008) concluyen que el profesor debe poseer un conocimiento pedagógico [didáctico] que le permita organizar y enseñar el contenido curricular de su materia, emplear estrategias de enseñanza y materiales adecuados al perfil de sus estudiantes, y tener un conocimiento pedagógico específico para cada tema (e.g., la multiplicación de fracciones), es decir, un *Conocimiento de la Didáctica Específica*. En este sentido, Shulman (1986) señala que:

El conocimiento de la didáctica específica va más allá del conocimiento de la materia *per se* a la dimensión del conocimiento *para la enseñanza*. Hablo del conocimiento del contenido [...] y de la forma particular del conocimiento del contenido que encarna los aspectos del contenido más asociado a su enseñabilidad. Dentro de la categoría de conocimiento de la didáctica específica, incluyo [...] las formas de representar y formular la materia que hacen que sea comprensible para los demás [...] el conocimiento de la didáctica específica también implica un entendimiento de lo que hace que el aprendizaje de temas específicos sea fácil o difícil: las concepciones e ideas previas que estudiantes de diferentes edades y orígenes traen consigo al aprendizaje de estos temas y lecciones más frecuentemente enseñadas. (pp. 9-10)

En relación con la enseñanza de la fracción, el docente debe poseer un dominio adecuado del concepto de fracción y ser capaz de usar su conocimiento mediante diferentes aristas, resolver y entender las dudas planteadas por los alumnos, elaborar problemas adecuados al perfil del alumno, revisar y comprender los ejemplos que los libros de texto brindan acerca de las fracciones y determinar la pertinencia y adecuación de tales ejemplos (Ball et al., 2008). Llevar a cabo lo anterior significa que este actor educativo debe tener el conocimiento necesario de lo que está enseñando y cómo transmitirlo, sin embargo, estudios muestran una falta de conocimiento básico en el profesor (e.g., Chinnappan & Desplant, 2012; Luelmo, 2004; Valdemoros, 2010).

En la investigación desarrollada por Valdemoros (2010) se ejemplifican algunas dificultades pedagógicas que se presentan al momento de enseñar fracciones; en particular, a través de una entrevista semi-estructura, muestra cómo una profesora de educación primaria exhibe en su discurso la falta de conocimiento matemático y didáctico sobre este contenido matemático:

La entrevistada (la profesora Delia) señaló que los problemas aritméticos presentados por ella a sus alumnos han sido los del Libro de Texto. En particular, muchos problemas de razón y proporción no los tomó en cuenta por su complejidad, aduciendo:

Delia: ¿Cómo voy a enseñar ni lo que yo misma entiendo? (p. 430)

Por su parte, el Programa de estudios de educación básica (SEP, 2011a) tiene el firme propósito de que al término de sexto grado los alumnos tengan competentes en lectura, escritura y comparación de números fraccionarios, y operar con ellos. Esto implique que el profesor debe tener un conocimiento específico necesario sobre el concepto de fracción y la multiplicación de fracciones, de modo que el conocimiento que construyen los alumnos y la enseñanza que se les da en ese momento sean favorables para comprender otros contenidos de mayor complejidad en matemáticas (Ball et al., 2008; Carreño et al., 2013).

Asimismo, y de acuerdo con diversos investigadores (e.g., Tirosh & Graeber, 1989; Thompson & Saldanha, 2003; Luelmo, 2004; entre otros), se reporta que aún falta por hacer acerca del conocimiento matemático y didáctico que el profesor de educación básica posee y debe poseer, especialmente, sobre la multiplicación de fracciones. Tomando en cuenta los antecedentes aquí descritos, se plantea en el presente

documento la siguiente problemática de investigación: *Explorar el conocimiento didáctico del profesor de educación primaria en la enseñanza de la multiplicación de fracciones.*

## 1.2 Preguntas de investigación

De acuerdo con los antecedentes y la problemática antes mencionada, se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

- Desde la perspectiva del profesor de educación primaria, ¿qué conocimiento didáctico se requiere para enseñar la multiplicación de fracciones?
- ¿Qué conocimiento didáctico presenta el profesor de educación primaria al enseñar, a sus alumnos, la multiplicación de fracciones de acuerdo con el Programa de estudios vigente?

## 1.3 Objetivos

Para dar respuesta a las preguntas planteadas en la presente investigación, se definieron los siguientes objetivos:

- Identificar el conocimiento didáctico que el profesor de educación primaria considera como necesario para impartir la multiplicación de fracciones a estudiantes de sexto grado.
- Describir el conocimiento didáctico que el profesor de educación primaria muestra al enseñar la multiplicación de fracciones en sexto grado.

## 1.4 Justificación

En palabras de Mack y Ball (1990, citados en Isiksal & Cakiroglu, 2011), los números fraccionarios son considerados como uno de los temas matemáticos más complicados para enseñar y aprender en educación básica, puesto que los profesores y los alumnos llegan a emplear procedimientos rutinarios y mecanizados (e.g., *regla del sándwich* o *ley de la tortilla para dividir fracciones*)<sup>6</sup>, en lugar de entender su significado (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983, citados en Isiksal & Cakiroglu, 2011). En el contexto nacional, García (2014) afirma que a los alumnos de educación básica les es difícil comprender la fracción

---

<sup>6</sup> El concepto de *regla de sándwich* o *ley de la tortilla* no existe como tal, pero algunos profesores suelen llamarle de esta manera a la división de fracciones:  $\frac{a}{d} \div \frac{b}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$ ; donde  $b, c \neq 0$ .

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

debido a una falta conocimiento acerca del sentido numérico. A raíz de ello, en esta investigación se tiene el interés por comprender e investigar el conocimiento didáctico del profesor, como una característica inmersa en el práctica docente que afecta la comprensión del alumno en torno a la multiplicación de fracciones.

Ramírez y Block (2009) establecen que “la relación entre las nociones de razón y fracción en las matemáticas escolares es sutil, versátil y también confusa: las razones se suelen definir como fracciones” (p. 64). Como consecuencia de tal imprecisión, el docente podría caer en explicaciones poco claras y didácticas mal abordadas en torno a la multiplicación de fracciones, es imprescindible que domine no sólo el conocimiento matemático sino también el conocimiento didáctico. En referencia a esto, se sabe que:

Sin este conocimiento, los profesores carecen de recursos necesarios para resolver los problemas centrales de su trabajo; por ejemplo, el empleo juicioso de materiales curriculares, la elección y el uso de modelos y herramienta, y la habilidad de interpretar y responder al trabajo de sus alumnos, y finalmente el diseño de las tareas útiles. (Ball et al., 2001, p. 24)

De aquí la pertinencia de estudios que enfatizan la importancia de analizar el conocimiento didáctico del profesor de educación primaria. Además de lo mencionado, realizar proyectos de tal naturaleza contribuye a generar nuevos conocimientos en educación matemática; hecho que es primordial dado que, y como lo establecen Ramírez y Block (2009), los trabajos que se han realizado hasta la fecha todavía no cristalizan alternativas explícitas y estables con respecto al conocimiento matemático para la fracción. Concretamente, la literatura habla de la necesidad de investigar más sobre el conocimiento del docente en torno al concepto de la multiplicación de fracciones (Isiksal & Cakiroglu, 2011; Luelmo, 2004; Tirosh & Graeber, 1989).

Aunado a lo anterior, Pinto y González (2008) señalan el limitado valor que se le ha dado al conocimiento didáctico del contenido curricular en los programas de formación de profesores en México y la falta de reconocimiento como objeto de estudio en educación matemática. Los mismos investigadores plantean la carencia de estudios sobre el profesor de matemáticas desde una “corriente de investigación didáctica diferente, a través de marcos conceptuales que nos permitan comprender cómo se construye los significados matemáticos, los transforma y los representa en su práctica docente” (p. 83).

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

Coincidimos con las razones que Pinto y González (2008) plantean y las cuales dan sentido a la realización de una investigación sobre el conocimiento didáctico del contenido matemático. A partir de estos argumentos, consideramos en la presente investigación:

- La urgente necesidad de profesionalizar la enseñanza.
- Los bajos resultados obtenidos por los alumnos de educación básica en pruebas nacionales e internacionales. PISA (INEE, 2012) indicó que en México 59.7% de los estudiantes no posee habilidades para el manejo de fracciones, por su parte, PLANEA (INEE, 2015) ubicó 6.8% de la población examinada como competentes en la resolución de problemas aditivos con fracciones y en la comparación de éstas. A partir de estos resultados, es necesario comprender qué pasa en el salón de clases, así como analizar y documentar la participación del profesor en torno a la enseñanza de la multiplicación de la fracción en educación básica.
- Las críticas hacia las corrientes imperantes sobre la didáctica del profesor basadas en el proceso-producto y las creencias del profesor que desembocan en un mayor cuidado en los procesos de evaluación y formación de docentes.
- La necesidad de integrar el conocimiento del contenido al conocimiento pedagógico [didáctico] otorgándoles el mismo valor en la formación de profesores, pues anteriormente se partía de la idea de que el profesor tenía el conocimiento del contenido por el simple hecho de estar en un nivel licenciatura.
- Elevar la docencia a una categoría más respetada partiendo del supuesto de que existe una base de conocimiento para enseñar que no todos poseen.

En México, expertos como García (2014) aseguran que entre los alumnos de nivel básico impera una falta de conocimiento del sentido numérico que desemboca en un bajo desempeño y comprensión de las fracciones. Por su parte, Alsina, Burgués, Fortuny, Giménez y Torra (1996) afirman que:

Conocer las fracciones más corrientes y tener conciencia del valor relativo de las fracciones, cosa harto difícil, ya que entra en contradicción con lo que el escolar ha aprendido hasta entonces de los números naturales [...] Como ampliación de la multiplicación y la división, además de las fracciones y decimales, es necesario el estudio a nivel de construcción de los múltiplos y los divisores de números naturales y

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

aplicar los conocimientos a la resolución de operaciones y situaciones reales. (pp. 117-118)

Los mismos autores también sostienen que la multiplicación de fracciones es confusa para los estudiantes a causa de las diferentes interpretaciones que envuelve la fracción misma. En los números naturales la multiplicación es considerada como la suma reiterada de un número cuyo producto es mayor a los factores; por el contrario, cuando los factores son dos fracciones “se necesita un entendimiento de la fracción como operador” (Rifandi, 2014, p. 1), además, el producto de dicha operación aritmética no siempre es mayor a los factores.

Como podemos ver, la enseñanza de las fracciones y, en concreto, la multiplicación de éstas, es un contenido reto para los docentes. Para poder enseñar este contenido, el profesor requiere de recursos y conocimiento adecuados para que los alumnos no lleguen a niveles académicos superiores sin antes comprender este tema, de modo que puedan comprender otros contenidos más avanzados ligados a la multiplicación de fracciones; por ejemplo, la división, la potencia con números racionales o la resolución de ecuaciones algebraicas (véase SEP, 2011a).

Todo lo anterior, nos indica que es necesario analizar el conocimiento del profesor acerca de la fracción y en particular, la multiplicación de fracciones pues es un tema poco abordado en investigaciones relacionadas con el conocimiento didáctico y del contenido. La razón de estudiar este tema radica en contribuir al estudio del conocimiento didáctico y, en especial, a la enseñanza de los números racionales.

La presente investigación proporciona información en torno a la complejidad de enseñar la multiplicación de fracción, y que en muchas de las ocasiones los profesores tienen que buscar alternativas como parte de su didáctica para hacerlo fácil de comprender, lo cual no es nada fácil. Además, aunque parece sencillo de enseñar la multiplicación con los números fraccionarios a través del algoritmo directo, tiene cierto grado de dificultad que muchos profesores desconocen por lo que no son capaces de proveer al alumno de los elementos necesarios para que lo comprendan y, así lograr los aprendizajes esperados en el currículum matemático escolar.

## CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

El presente capítulo está centrado en delinear el marco teórico en el que se sustenta la investigación aquí descrita. Para comprender el conocimiento didáctico del profesor de educación primaria en la enseñanza de la multiplicación de fracciones, retomamos el modelo *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*; en especial, planteamos la discusión que hace el autor de este modelo y sus seguidores acerca del Conocimiento Didáctico del Contenido y su categorización. En el capítulo también se hace una aproximación sobre el significado de multiplicación de fracciones tomando como referente a diversos autores relacionados con este contenido matemático.

### 2.1 Antecedentes del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

En la investigación desarrollada sobre educación matemática en México, Ávila (2016) reporta que en esta última década las investigaciones centraron su interés en analizar el papel del maestro como intermediario entre los estudiantes y el conocimiento matemático planteado en el currículum; así mismo, esta autora menciona que la enseñanza de algunos contenidos particulares, como las fracciones, se ha venido fortaleciendo en los últimos 20 años. El interés creciente por entender el papel que juega el profesor ha derivado en investigaciones cuyo objetivo es indagar el conocimiento que posee este actor educativo para enseñar matemáticas, así como las consecuencias de tal conocimiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Ante las exigencias que se tienen actualmente para una educación de calidad, al profesor se les demanda tener un conocimiento amplio que le permita desempeñar su labor en el salón de clases; sin embargo, es necesario discutir y precisar qué conocimiento requiere para enseñar contenidos matemáticos (Hill, Rowan, & Ball, 2005). Para coadyuvar en la comprensión del conocimiento del profesor en matemáticas, diversos investigadores han propuesto una variedad de modelos teóricos (Hill & Ball, 2009; Godino, 2009; Carrillo 2013).

Uno de estos modelos es el *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK), el cual se sustenta en las ideas de Shulman (1986, 1987) y Ball (Hill, Ball, & Schilling, 2008). Estos últimos investigadores proponen dos modelos por separado, mientras que Shulman introduce y discute el conocimiento del profesor en general, Ball

retoma las ideas de este autor y las redefine en el contexto de la enseñanza de las matemáticas.

### **2.1.1 Aportaciones de Shulman: Conocimiento Base del profesor**

Shulman (1986, 1987) plantea el modelo *Conocimiento Base para la Enseñanza*, en donde establece que el profesor posee un conocimiento determinado y necesario de acuerdo con la asignatura que enseña. Los referentes teóricos que sustentan el conocimiento base son: la formación académica en la disciplina a enseñar; los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado (e.g., el currículum escolar, el libro de texto y la organización escolar); la investigación sobre la escolarización, las organizaciones sociales, el aprendizaje humano, la enseñanza y los fenómenos socioculturales que influyen en el quehacer del profesor, y la sabiduría que otorga la práctica misma. Shulman (1987) divide el conocimiento base en siete tipos aplicables a cualquier profesor, sin hacer distinciones de nivel educativo o asignatura impartida:

- Conocimiento del Contenido: conocimiento de la asignatura que se está enseñando.
- Conocimiento Pedagógico General: técnicas de evaluación y gestión del aula.
- Conocimiento Curricular: conocer lo que está en el currículum, entender por qué está ahí y saber cómo abordarlo en el tiempo disponible.
- Conocimiento Pedagógico del Contenido: conocimiento de las técnicas que están disponibles para la enseñanza de una asignatura particular.
- Conocimiento de los Estudiantes y sus Características: los estudiantes en general y los individuos que componen una clase particular.
- Conocimiento de los Contextos Educativos: el sistema educativo como un todo y la escuela en particular.
- Conocimiento de los Fines, Propósitos y Valores de la Educación: los objetivos finales de la educación dentro de la sociedad y lo que se cree es el fin de la educación (Malderez & Wedell, 2007, pp. 17-18).

En relación al Conocimiento Pedagógico General y Conocimiento Pedagógico del Contenido, Garritz y Trinidad-Velasco (2004) aseguran que es fundamental distinguir el uno del otro. Según los mismos autores, el Conocimiento Pedagógico General se refiere al conocimiento del docente sobre las teorías (por ejemplo constructivismo y conductismo)



y métodos de enseñanza (e.g. pregunta y respuesta o exposición) y el entendimiento de principios generales de dirección organización del aula (e.g. normas de conducta); mientras que el Conocimiento Pedagógico del contenido abarca las representaciones y ejemplos que el docente emplea para hacer comprensible el contenido así como las razones por las que un tema es fácil o difícil de comprender para los estudiantes.

**2.1.2 Aportaciones de Ball: Conocimiento Didáctico para Enseñar Matemáticas**

A partir de las ideas del Shulman diversos investigadores proponen nuevos modelos para estudiar el conocimiento del profesor que imparte matemáticas, destacando los aspectos didáctico y matemático. Uno de esos modelos es el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*, propuesto por Ball y su equipo (Hill et al., 2008), y en éste se determina que el profesor posee un conocimiento especial para enseñar matemáticas (Hill & Ball, 2009). De acuerdo con sus características, está centrado en dos dominios principales: Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido. Ambos mantienen una relación dinámica entre sí, y cada uno incluye un conjunto de subdominios (véase Figura 2.1).

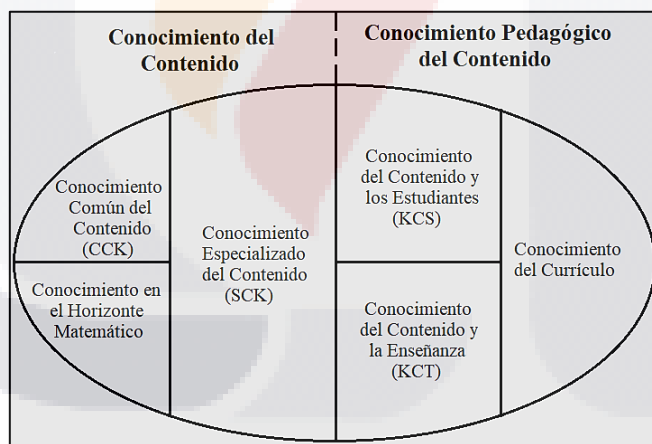


Figura 2.1. Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Hill, Ball & Schilling, 2008, p. 377).

Como puede observarse en la Figura 2.1, el Conocimiento del Contenido está centrado en las matemáticas y abarca tres subdominios (Ball, Thames, & Phelps, 2008):

- Conocimiento Común del Contenido: conocimiento básico y las habilidades matemáticas que poseen las personas que se desempeñan en cualquier ámbito y que no necesariamente se adquiere en el aula; por ejemplo, un vendedor de productos que emplea la regla de tres para calcular el porcentaje de sus ofertas.

- TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS
- Conocimiento Especializado del Contenido: conocimiento y destrezas matemáticas propias del maestro; por ejemplo, saber cómo la regla de tres se relaciona con la proporcionalidad.
  - Conocimiento del Horizonte Matemático: toma de conciencia sobre la relación del contenido matemático que se está enseñando con otros contenidos planteados en el currículum; por ejemplo, saber por qué la regla de tres está relacionada con porcentajes.

En cambio, el Conocimiento Pedagógico del Contenido está relacionado con la manera de enseñar matemáticas, además incluye tres subdominios (Ball et al., 2008):

- Conocimiento del Contenido y los Estudiantes: es el conocimiento del profesor que combina el conocimiento del alumno y el de las matemáticas; ejemplo, saber por qué los estudiantes tienen la creencia de que el producto de multiplicar dos fracciones es mayor que alguno de los factores.
- Conocimiento del Contenido y la Enseñanza: es la combinación entre el conocimiento matemático y el pedagógico; por ejemplo, saber qué metodología y estrategias emplear para que los alumnos comprendan el significado de la multiplicación de fracciones.
- Conocimiento del Currículum: conocer la variedad de programas diseñados para la enseñanza de alguna asignatura en matemáticas, así como los temas que abarcan dichos programas de estudio. Dentro de este subdominio se integra el manejo y conocimiento del profesor sobre los materiales didácticos de los que dispone. Finalmente, en este conocimiento se incluyen el manejo del currículum, contenido de éste y material educativo bajo ciertas circunstancias; por ejemplo, enseñar la multiplicación de fracciones a niños con necesidades educativas especiales.

En el modelo de Ball et al. (2008) se enfatiza que el profesor debe apropiarse y dominar conceptos matemáticos, así como saber desarrollarlos en el aula a partir del razonamiento de los estudiantes y los objetivos de aprendizaje. Finalmente, una característica que también se resalta en este modelo, es la referente al conocimiento pedagógico del contenido que está visto como una propuesta holística que vincula el currículum, el aprendizaje del alumno, el contenido matemático y las estrategias de enseñanza (Hill et al., 2008).

## 2.2 Modelo del Conocimiento Especializado del profesor en matemáticas

La propuesta de Ball sirvió de referente para introducir nuevos modelos en el contexto de la enseñanza de las matemáticas, los cuales intentan discutir aspectos más puntuales sobre el conocimiento del profesor. Una de estas propuestas es la desarrollada por Carrillo y colaboradores (Carrillo, Escudero, & Flores, 2014).

Para determinar el conocimiento del profesor que enseña matemáticas, Carrillo y colaboradores plantean el modelo *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* o MTSK<sup>7</sup>, donde el conocimiento es visto como el “conjunto integrado de saberes de distintas naturalezas”, abarca un dominio de la “matemática en general, de conocimientos matemáticos particulares y de su enseñanza y aprendizaje” (Carrillo et al., 2014, p. 16 y 19). Además, es aquel que el profesor usa exclusivamente para enseñar matemáticas. Al respecto, Muñoz-Catalán et al. (2015) plantean dos suposiciones:

Partimos de la base de varias asunciones, que condicionaron el modelo desarrollado. La primera de ellas es sobre la especialización. Entendemos que la especialización del conocimiento de un profesor deriva de su profesión (profesor de matemáticas), en el que la enseñanza de la matemática es un elemento definitorio. La segunda asunción es la especificidad del modelo a la enseñanza de matemáticas, es decir, el modelo está conceptualizado con base en el hecho de que se usará para la comprensión del conocimiento que un profesor de matemáticas use para enseñar matemáticas. (p. 7)

En el MTSK, el conocimiento del profesor abarca dos dominios relacionados con las matemáticas y con la enseñanza de éstas: Conocimiento del Contenido Matemático (MK) y Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), y cada uno se integra por tres subdominios:

a) MK:

- Conocimiento de los Temas (*Knowledge of Topics*, KoT).
- Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (*Knowledge of the Structure of Mathematics*, KSM).
- Conocimiento de la Práctica Matemática (*Knowledge of the Practice of Mathematics*, KPM).

b) PCK:

---

<sup>7</sup> Por sus siglas en inglés, *Mathematics teachers' Specialized knowledge*.

- Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (*Knowledge of Mathematics Teaching, KMT*).
- Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (*Knowledge of Features of Mathematics Learning, KFLM*).
- Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje (*Knowledge of Mathematics Learning Standards, KMLS*).

Para Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán (2013), el conocimiento del profesor es producto de creencias relacionadas con las matemáticas y con el proceso enseñanza y aprendizaje de éstas. De acuerdo con el MTSK, podemos decir que las creencias del maestro se refieren a operadores que interfieren directamente en el proceso de transformación de conocimiento matemático al diseño y aplicación de actividades que transfieran algún contenido matemático (Carrillo & Contreras, 1995).

Algunos ejemplos de creencias del profesor son sus opiniones sobre la utilidad de un enfoque de enseñanza o el uso de tecnología para enseñar matemáticas. Es importante señalar que el entendimiento de las creencias del profesor permite acercarnos a su conocimiento matemático y pedagógico, pues “la actividad que los profesores desarrollan en sus aulas parece estar orientada por sus concepciones, que mediatiza las opciones respecto al contenido, la metodología, la evaluación o los recursos a emplear” (Carrillo et al., 2013, p. 98). Por ello, el MTSK contempla dichas concepciones docentes como base para discutir el conocimiento del profesor (véase Figura 2.2).

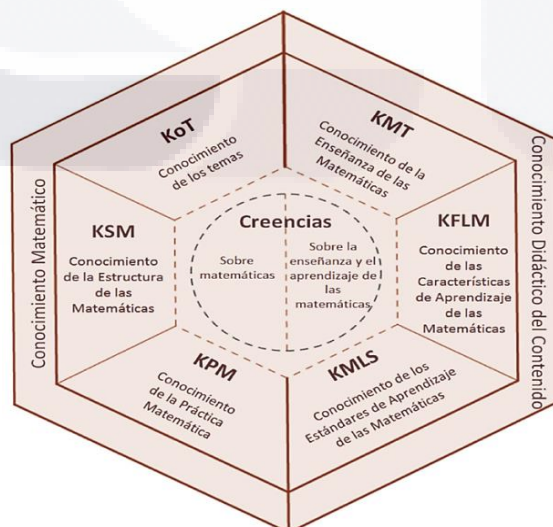


Figura 2.2. Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Sosa, Flores-Medrano, & Carrillo, 2016).

Como puede notarse en la Figura 2.2, el conocimiento del profesor sólo está delimitado por el conjunto de dominios y subdominios que tienen como sustento las creencias en torno a la enseñanza de las matemáticas y las matemáticas por sí mismas. A continuación se explican cada uno de estos dominios y sus componentes<sup>8</sup>.

### 2.2.1 Conocimiento del Contenido Matemático, MK

Para acceder a una *buena práctica* en matemáticas, el profesor debe tener un dominio en matemáticas y en didáctica (Socas, 2011). Al respecto, Planas (2009) menciona que es insuficiente tener un conocimiento del contenido para enseñar matemáticas, ya que también se requiere de un conocimiento didáctico; sin embargo, para proveer al estudiante de razones y explicaciones adecuadas, es preciso que el profesor comprenda y analice los contenidos matemáticos (Mochón & Morales, 2010), en otras palabras, que tengo un amplio conocimiento disciplinar.

Para Dubinsky (1996, citado en Rebollar, 2000), el conocimiento matemático que el profesor posee es “su tendencia a responder a situaciones matemáticas problemáticas mediante la reflexión sobre problemas y sus soluciones dentro de un contexto social y la construcción o reconstrucción de acciones, procesos y objetos organizándolos en esquemas para tratar con dicha situación” (p. 156). De la misma manera, el conocimiento matemático considera el dominio que el profesor ofrece sobre procedimientos matemáticos y su conocimiento para definir *algo* como verdadero o falso en la matemática (Ball et al., 2008). De acuerdo con lo anterior, el MK se refiere a un dominio, reflexión y conocimiento de conceptos, estructuras y procedimientos matemáticos que le ayudan al docente a entender el contenido que ha de enseñar. Carrillo et al. (2015) dividen el MK en tres subdominios que están caracterizados de la siguiente manera:

- c) Conocimiento de los Temas. El profesor está obligado a dominar los conceptos matemáticos más allá de lo que sus alumnos saben o aprenden de acuerdo con los objetivos del currículum. Este conocimiento se refiere a un dominio profundo de la disciplina matemática y de la matemática escolar; en otras palabras, considera los aspectos que se asocian con los temas, tales como: propiedades y fundamentos teóricos, procedimientos, aspectos fenomenológicos, ejemplos,

---

<sup>8</sup> El interés de la presente investigación es analizar el conocimiento didáctico (véase el apartado Objetivos, Capítulo 1, p. 25), sin embargo, explicitamos qué se entiende por conocimiento matemático según el MTSK. Esta discusión es porque ambos conocimientos mantienen una estrecha relación y nuestro objeto de estudio es la enseñanza de la multiplicación de fracciones.

definiciones, significados de conceptos abordados o las representaciones del contenido.

- d) Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas. Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán (2014, citados en Carrillo et al., 2014) aseguran que los conceptos matemáticos que ha de enseñar el docente no deberán presentarse de manera aislada, sino más bien como un “sistema de conexiones, que le permita [al alumno] comprender ciertos conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y desarrollar ciertos conceptos elementales mediante el tratamiento a través de herramientas avanzadas” (p. 109).
- e) Conocimiento de la Práctica Matemática. Como parte del proceso de enseñanza, el profesor debe saber las distintas formas de conocer y producir, así como saber definir, argumentar, razonar y proceder en matemáticas; por otro lado, el maestro también está obligado a entender cómo se entablan relaciones entre conceptos, propiedades y principios (Carrillo et al., 2014).

Aunque este proyecto de investigación pretende acercarse al Conocimiento Didáctico del Contenido del profesor en torno a la multiplicación de fracciones, es importante destacar que la comprensión del proceder matemático del maestro ayudará a entender lo que ocurre en su práctica al enseñar a multiplicar fracciones.

### **2.2.2 Conocimiento Didáctico del Contenido, PCK**

El desarrollo cognitivo de los estudiantes presenta una fuerte asociación con la instrucción e interacción del profesor en el salón de clases (Mochón & Morales, 2010), lo cual significa que el aprendizaje de alumno es, en parte, resultado de la práctica y el conocimiento didáctico del profesor. De acuerdo con diversos investigadores en educación matemática (Ball & Bass, 2000, citados en Mochón & Morales, 2010), el Conocimiento Didáctico del Contenido le permite al profesor simplificar conceptos y procesos matemáticos para los alumnos, escoger representaciones adecuadas para mostrar ideas matemáticas, analizar métodos y soluciones diferentes de las propias y deducir lo que entienden sus alumnos.

Por su parte, Chick, Baker, Pham y Cheng (2006) consideran que este conocimiento se relaciona con estrategias de enseñanza de las matemáticas, procesos de pensamiento de los alumnos, demanda cognitiva de las tareas, representaciones adecuadas de

conceptos, dominio sobre recursos y currículum. En el MTSK, el Conocimiento Didáctico del Contenido está definido como PCK y se refiere a que el profesor de matemáticas:

tenga claro los conceptos, imágenes, estructuras y planteamientos básicos vinculados a un tema [...] que además sepa identificar en sus estudiantes las dificultades y errores conceptuales que enfrentarán estos (problemas con las reglas de derivación, como por ejemplo las del producto, cociente o de la cadena), así como lo que esto signifique en su aprendizaje. Este conocimiento también reclama al profesor que, mediante actividades o estrategias metodológicas, el estudiante pueda identificar y discernir sobre sus ideas previas. (García, 2009, p. 42)

Además, Carrillo et al. (2014, p. 18) afirman que “no se tienen en cuenta los conocimientos pedagógicos en contextos de actividades de matemáticas, sino solo aquellos donde el contenido matemático condiciona la enseñanza y el aprendizaje”. En este sentido, Carrillo, Muñoz-Catalán y Climent (2006) coinciden con Schoenfeld (2002) sobre la importancia de permitirle al maestro fortalecer sus habilidades y su conocimiento matemático y pedagógico a través del tiempo, pues esto deriva en experiencias benéficas para los estudiantes, por ejemplo, el saber cómo ayudar a un alumno con necesidades educativas a entender la multiplicación de fracciones.

Al respecto, Hashweh (2005) plantea que el PCK representa un conocimiento personal y también se adquiere mediante la observación y la conversación con otros profesores. Por ello, el Conocimiento Didáctico del Contenido se adquiere del contacto social con los iguales y con los alumnos; además, es visto como una serie de construcciones pedagógicas<sup>9</sup> del maestro y no como una unidad completa. Hashweh sostiene que estas construcciones son una consecuencia directa de la interacción de diferentes dominios del conocimiento del profesor y sus creencias.

Para comprender el PCK del profesor es crucial conocer las características tanto del conocimiento matemático abordado anteriormente, como las del conocimiento didáctico.

---

<sup>9</sup> Las construcciones pedagógicas son resultado de la planeación y la experiencia, y se pueden observar en la fase interactiva y post-activa de la enseñanza. Para Hashweh (2005), estas construcciones se logran mediante procedimientos de reflexión por parte del profesor, donde se involucran aspectos tales como el currículum, el perfil y contexto del estudiante, tareas didácticas y una evaluación del proceso de enseñanza. Las construcciones pedagógicas comprenden un conocimiento base actualizado día a día a través de la experiencia, y se refieren a un esquema o guión que el profesor desarrolla al enseñar regularmente un contenido matemático, de modo que le permiten anticipar la secuencia de eventos que probablemente ocurran durante la enseñanza y determinar los ejemplos que podrían ser atractivos para los alumnos y faciliten la comprensión del contenido.

Sobre éste último, Cooper, Baturo y Grant (2006, citados en Mochón & Morales, 2010) establecieron las características del conocimiento didáctico en términos de una enseñanza efectiva; para ellos, este conocimiento incluye tres niveles:

- f) Genérica: se refiere a métodos que pueden ser empleados en cualquier tema matemático. Son las estrategias de enseñanza que pueden ser aplicadas para enseñar cualquier contenido matemático; por ejemplo, la multiplicación de fracciones. La pedagogía genérica habla de la capacidad del maestro para aterrizar y adaptar métodos generales a situaciones concretas de la matemática escolar, ello refleja el manejo del conocimiento didáctico y del contenido del profesor.
- g) Técnica: engloba todas las sugerencias prácticas alusivas a los aspectos técnicos de una clase en particular, como el uso de materiales o la gestión de tiempo para alguna actividad, disciplina, etc. Éstas tienen el propósito de hacer más eficiente la gestión de la clase, ahorrando tiempo y esfuerzo que puede ser empleado para profundizar en un tema.
- h) De dominio: Son todas las estrategias de enseñanza empleadas para impartir un tema concreto.

De las tres características descritas anteriormente, es en la *De dominio* en donde el PCK reside, pues ahí se sitúa el conocimiento que el profesor tiene para diseñar actividades y estrategias necesarias para impartir un contenido matemático (v. gr. la multiplicación de fracciones), así como el conocimiento del maestro sobre los materiales que acompañan a dichas estrategias o actividades y las representaciones que emplea como vehículo para la transmisión de ideas y procedimientos matemáticos. Hay que señalar que el PCK del profesor en matemáticas está determinado por las situaciones y contextos en los que la enseñanza y aprendizaje toman lugar, además del flujo constante de comunicación e interacción con los propios estudiantes (Muñoz-Catalán & Carrillo, 2012).

Para comprender a profundidad las características y componentes del Conocimiento del Contenido que el maestro posee sobre la asignatura de matemáticas, Sosa, Flores-Medrano y Carrillo (2016) dividen el PCK en tres subdominios: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFML) y Conocimiento de los Estándares del Aprendizaje de las Matemáticas (KMKS). A continuación se describe cada uno.



### **2.2.2.1 Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, KMT**

Carrillo et al. (2014) argumentan que el KMT se refiere al conocimiento que el profesor posee sobre los materiales, representaciones y ejemplos estructurados y adecuados para enseñar un contenido matemático bajo un contexto y etapa determinada (por ejemplo, enseñar la suma de fracciones por primera vez a niños de una comunidad rural).

Rojas (2014) añade que el KMT le permite al maestro elegir las representaciones, ejemplos, estrategias (v. gr. estrategias encaminadas a desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes), conocimientos teóricos (e. g. enfoque de resolución de problemas) y materiales para la enseñanza idóneos (e. g. libros de texto, hojas de trabajo, entre otros) para impartir un tema del currículum.

El KMT incluye también el conocimiento del maestro sobre las secuencias de aprendizaje que guían su práctica docente en torno al contenido matemático que está enseñando y que están basadas en las condiciones específicas del alumno (Carrillo et al., 2014). Al respecto, Carrillo y colaboradores aseguran que el MKT es:

La integración de matemáticas y enseñanza, pues no se trata de conocimiento de matemáticas por un lado, y de la enseñanza, por otro; no se incluyen aquí conocimientos pedagógicos en contextos de actividades matemáticas, sino tan solo aquello en donde el contenido matemático condiciona la enseñanza. (Carrillo et al., 2014, p. 110)

### **2.2.2.2 Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas, KFLM**

Schoenfeld (2002) hace énfasis en la necesidad actual de que el alumno entienda, razone y comunique ideas matemáticas en su vida cotidiana. Como una respuesta a esta situación, el docente está obligado a comprender el modo de pensar y actuar del estudiante con respecto a los contenidos matemáticos que se le presentan (Carrillo et al., 2014) y cómo los relaciona con su entorno. Es importante el conocimiento que el profesor tenga del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los temas del currículum y el contexto de los alumnos que atiende, así como el entendimiento del docente con respecto a los errores y dificultades asociados a un concepto matemático en particular y el lenguaje habitual con el que se trata dicho concepto en clase (Carrillo et al., 2014).

Además, Rojas (2014) considera que el KFLM también engloba “ciertas teorías o perspectivas que le aporten a la caracterización del proceso de aprender matemáticas,

como el conocimiento sobre la diferencia entre aprender matemáticas de un modo mecánico o con significado” (p. 62). Dicho en otras palabras, el KFLM es el conocimiento que tiene el profesor sobre las maneras en las que el alumno aprende cierto contenido matemático (enfoques didácticos, actividades y ejercicios, etcétera).

Es importante señalar la relevancia que toma el contexto educativo y personal del niño. Pareciera que el docente ha de partir de este contexto para comprender y anticipar los obstáculos y dificultades que atravesará el educando en el proceso de aprendizaje, además, dicho contexto es un determinante en la selección de las actividades, ejercicios o perspectivas que implementará el profesor en el aula para enseñar algún tema.

### **2.2.2.3 Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas, KSML**

El currículum es el punto de partida tanto para la práctica del docente como para el conocimiento didáctico, pues éste dicta qué contenido nuevo abordar y la secuencia y complejidad en el que deberá ser tratado. En este sentido, el profesor de matemáticas se ve obligado a conocer el contexto en el que fue creado el currículum que enseña, los enfoques a los que está sujeto y los fines y propósitos de éste (Carrillo et al., 2014). En virtud de lo anterior, el KSML se refiere, según Carrillo y su equipo, al entendimiento del maestro de los temas que abarcan los programas de estudio y la capacidad de éste para ubicarlos en un tiempo y contexto determinado (v. gr. enseñar la multiplicación de fracciones después de la suma y resta).

Freudenthal (1983, citado en Perera & Valdemoros, 2007) menciona la importancia de saber hilar y relacionar los contenidos del Plan de estudios. Este autor asegura que si se enseñan conceptos de manera aislada se fragmenta la conexión de éstos con el entorno del alumno y con otros contenidos del plan de estudios relacionados, lo cual dificultará el aprendizaje de otros contenidos (Perera & Valdemoros, 2007). Así mismo, el KSML contempla el conocer los materiales y recursos que el Plan de estudios le sugiere al profesor y las recomendaciones que hacen los expertos e investigadores sobre los objetivos y estándares que se deben alcanzar, por ejemplo, el NCTM<sup>10</sup> en Canadá y Estados Unidos (Rojas, 2014).

Un aspecto relevante del KMSL, es el dominio que debe tener el profesor en el manejo del currículum:

---

<sup>10</sup> National Council of Teachers of Mathematics.

Se introduce el conocimiento de objetivos y estándares de aprendizaje [...] que proceden de la experiencia del profesor respecto de los logros de aprendizaje, añadiendo un elemento de juicio y crítica en relación con lo prescrito por la administración educativa. (Carrillo et al., 2014, p. 110)

Aunado a lo que ya se ha mencionado, Schoenfeld (2002) asegura que hay evidencia substancial en la literatura sobre las bondades del manejo y conocimiento apropiado de los planes y programas de estudio, así como los materiales que se le sugieren al docente. Schoenfeld también indica que los alumnos, cuyos profesores tienen un conocimiento adecuado de estos ámbitos, logran desarrollar habilidades matemáticas que les permiten razonar conceptos y procedimientos así como resolver problemas adecuadamente.

### **2.3 Aproximación a la multiplicación de fracciones**

Además de la relevancia de entender qué es el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas, es indispensable precisar qué es la multiplicación de fracciones. Esto nos llevará a una mejor análisis y comprensión del actuar del maestro en el salón del clases en torno a este contenido matemático, incluido en el currículum mexicano de sexto grado de educación primaria (SEP, 2011b).

#### **2.3.1 Noción de fracción (número racional)**

Freudenthal (1986) define a las fracciones como el recurso fenomenológico de los llamados números racionales, puesto que se usan como puerta de entrada al aprendizaje de este tipo de números. El mismo autor asegura que, aunque el término *fracción* se deriva de la palabra *fractura*, las fracciones están fuertemente relacionadas con el concepto de *razón* que se asocia con los vocablos *proporción* y *medida*. En otras palabras, no se puede acotar el entendimiento de las fracciones únicamente como la acción de *dividir* y *tomar* ya que la comprensión de este tópico está sujeta a “múltiples interpretaciones, sin mencionar a las ya establecidas desde el lenguaje cotidiano, cuestión que suele estar presente en los procesos de aprendizaje de estos temas” (Linares & Sánchez, 1997, p.189 citado en Hincapié, 2011).

Tomando en cuenta que la presente investigación está centrada en la enseñanza de fracciones en educación básica, en los siguientes párrafos se discuten los significados que son indispensables para formar en el alumno de primaria la noción de fracción

(Flores, 2011; Perera & Valdemoros, 2008). En el lenguaje matemático, la fracción se define como  $\frac{a}{b}$ , donde  $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  y tiene seis significados: parte-todo, medida, cociente, razón y operador (Hazewinkel, 2001; Perera & Valdemoros, 2007).

- Parte-todo. En palabras de Kieren (1980, citado por Perera & Valdemoros, 2007), el concepto de parte-todo se relaciona con un todo, continuo o discreto, subdividido en partes iguales.
- Medida. La fracción como medida se asocia a “la asignación de un número a una región o a una magnitud (de una, dos o tres dimensiones), producto de la partición equitativa de una unidad” (Kieren, 1980 citado en Perera & Valdemoros, 2007, p. 212).
- Cociente. Perera y Valdemoros (2007) conciben la fracción como cociente, como el resultado de dividir uno o más objetos entre un número específico de personas o partes. El cociente, junto con la medida poseen características de carácter aditivo, según Valdemoros (1993, citada por Flores, 2011).
- Razón. La fracción como razón es la comparación numérica entre dos magnitudes y tiene cualidades multiplicativas al igual que el operador (Kieren, 1980, citado en Perera & Valdemoros, 2007; Valdemoros, 1993, citada en Flores, 2011).
- Operador. La fracción como operador tiene un papel “de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente. Esta transformación se puede pensar como la amplificación o la reducción de una figura geométrica en otra figura  $a/b$  veces más grande o  $a/b$  veces menor” (Kieren, 1980, citada en Perera & Valdemoros, 2007, p. 212).

### 2.3.2 Noción de multiplicación de fracción

Es imprescindible que el alumno distinga la diferencia entre multiplicar números naturales y números racionales (Rifandi, 2014). En el conjunto de los números naturales, de acuerdo con Castro, E., Rico y Castro, M. (1988), la acción de multiplicar involucra obtener un producto a través de dos factores: *multiplicando* (cantidad que se repite y representa un número cardinal concreto) y *multiplicador* (veces que se repite el multiplicando y es un cardinal de segundo orden).

En el conjunto de los números racionales, la multiplicación de dos fracciones es la fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el resultado de los denominadores (Godino, Recio, Ruiz, Roa, & Pareja, 2003). Dentro de las propiedades de la multiplicación de fracciones, Gispert (2001) describe las siguientes:

- *Uniforme*. El producto de dos fracciones y el producto de dos fracciones equivalentes a las anteriores son fracciones equivalentes:  $\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'}$  y  $\frac{c}{d} \cdot \frac{c'}{d'}$ , de modo que  $ab' = a'b$  y  $cd' = c'd$ ,  $(ab')(cd') = (a'b)(c'd)$ ; por lo tanto,  $\frac{ac}{bd} \cdot \frac{a'c'}{b'c'}$ .
- *Asociativa*. “En un producto de números racionales pueden sustituirse dos o más de los factores por el producto efectuado” (p. 49), ejemplo:  $(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} (\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f})$ .
- *Conmutativa*. El producto no es alterado por el orden de los factores:  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ .
- *Elemento neutro*. Se refiere al número racional que al multiplicarlo por cualquier otro racional  $\frac{a}{b}$  diferente a cero, resulta en  $\frac{a}{b}$ .
- *Elemento inverso*. “Es el que, multiplicado por un número racional, hace que su producto sea el elemento neutro” (p. 49).
- *Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma algebraica*. “Para aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma algebraica se procede como sigue: el factor se multiplica por cada término de la suma [...], aplicando la regla de los signos; por último se efectúa la suma algebraica indicada” (p. 50).

Sweetland (1984) y Son (2012) hacen una valiosa contribución a este tema definiendo los múltiples casos que envuelven a la multiplicación de fracciones y se ilustran a continuación:

### 2.3.2.1 Multiplicación de dos fracciones propias

Cuando dos fracciones propias son multiplicadas, el producto obtenido será menor a los dos factores; por ejemplo,

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{28}, \text{ donde } \frac{5}{7}, \frac{3}{4} > \frac{15}{28}$$

Para demostrar gráficamente lo anterior, Son (2012) emplea el siguiente procedimiento, el cual implica tres pasos:

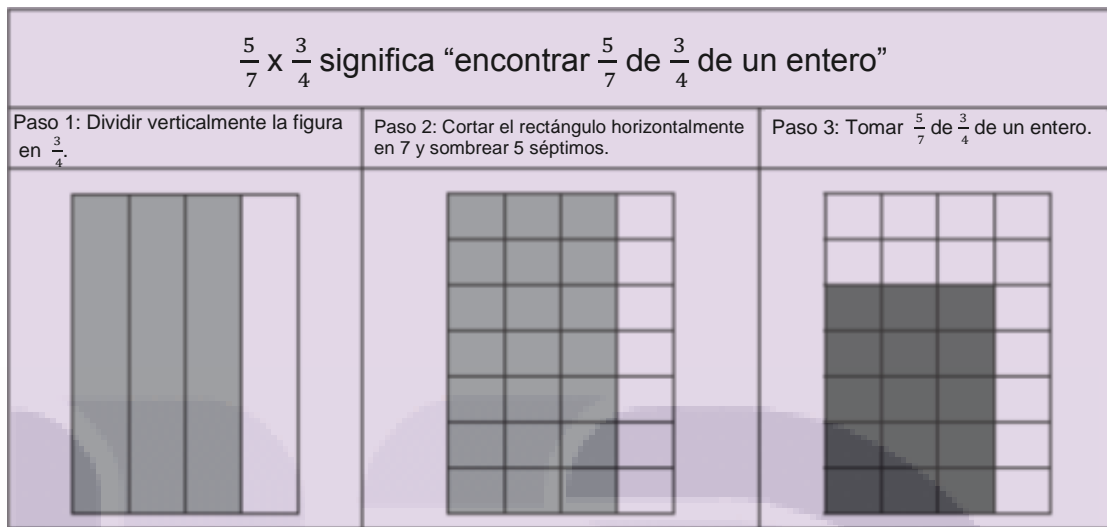


Figura 2.3. Pasos para desarrollar problemas con el algoritmo fracción por fracción (Son, 2012, p. 392).

Son (2012) le llama a este procedimiento *Multiplicación de fracciones como parte de una parte*. Esta autora destaca que el propósito de este procedimiento es mostrar la multiplicación de fracciones como la acción de tomar una parte de otra parte como se ve en la Figura 2.3.

### 2.3.2.2 Multiplicación de un entero por una fracción propia

Cuando dos números enteros se multiplican, el producto que se obtiene es mayor que los dos factores; sin embargo, si se multiplica un número entero por una fracción propia, el resultado que se obtiene es un número menor a los factores (Sweetland, 1984). En este caso, el orden de los factores determinará el significado de la multiplicación; es decir, si el entero precede a la fracción, estaremos hablando de una suma repetida (Son, 2012).

El multiplicando es un número entero que indica la cantidad de conjuntos o veces que se repite el multiplicador mientras que el segundo factor representa el tamaño del grupo y es un valor fraccionario; por ejemplo,

$$3 \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{4}$$

De acuerdo con Son (2012), el ejemplo anterior puede expresarse gráficamente de la siguiente manera:

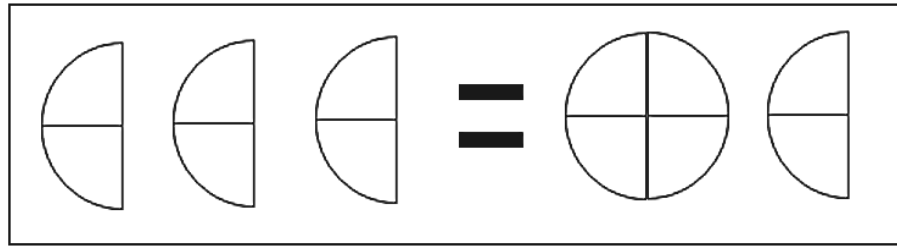


Figura 2.4. Ejemplo de demostración y representación visual de la multiplicación de fracciones como una suma repetida.

En la figura anterior, podemos observar que se está trabajando con 3 grupos de  $\frac{2}{4}$  cada uno, los cuales se suman; en otras palabras 3 veces  $\frac{2}{4}$ . En cambio, si la fracción es el primer factor y el entero es el segundo factor se tratará de una multiplicación de fracciones como operador. Son (2012) afirma que esta noción de multiplicación de fracciones es más compleja porque ahora el número entero representa una unidad de la cual se tomará lo que el primer factor indique; por ejemplo,

$$\frac{3}{4} \cdot 12 = \frac{36}{4}$$

En esta multiplicación, el algoritmo presentado indica que de 12 enteros se tomarán  $\frac{3}{4}$ , o sea  $\frac{3}{4}$  de 12. Son (2012) presenta dos modelos que sirven como apoyo visual para comprender la multiplicación de fracciones como operador (véase Figura 2.5).

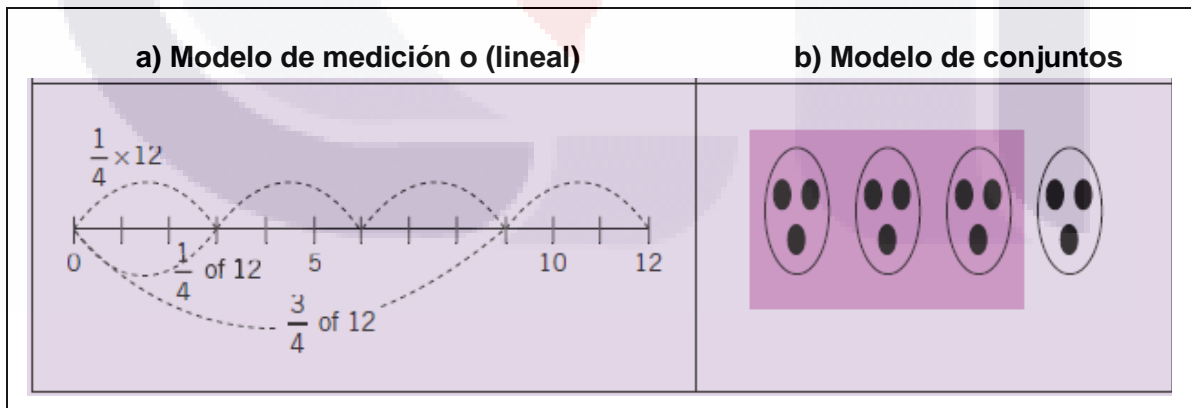


Figura 2.5. Modelos empleados para resolver problemas de multiplicación de fracciones como operador (Son, 2012, p. 390).

En el Modelo lineal mostrado en la Figura 2.5, observamos que se emplea una recta numérica dividida en 12 unidades que constituyen una *región entera* que a su vez se

divide en 4 partes iguales de los que se tomarán 3 partes. En cambio, en el segundo modelo se muestra la agrupación de 12 unidades en 4 conjuntos de tres unidades cada uno de los cuales únicamente nos servirán 3 conjuntos.

### **2.3.2.3 Multiplicación de una fracción mixta por una fracción propia**

El producto de multiplicar una fracción mixta por una propia es una cantidad que se encuentra entre los dos factores, por ejemplo,  $1\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$ . En esta multiplicación tenemos que  $\frac{5}{16}$  es mayor que  $\frac{1}{4}$ , pero menor que  $1\frac{1}{4}$ .

### **2.3.2.4. Multiplicación de dos fracciones mixtas**

En este último caso, el producto de multiplicar dos fracciones mixtas es mayor que cualquiera de los factores involucrados, por ejemplo, en el siguiente caso se tiene  $1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{2} = 1\frac{7}{8}$ , tal que  $1\frac{1}{4}, \frac{1}{2} < 1\frac{7}{8}$ .

Como podemos ver, la multiplicación de fracciones es un tema amplio que exige del docente un entendimiento profundo y razonado de elementos tales como los significados de la fracción, su algoritmo y representaciones.

A través del entendimiento de dichos elementos, el maestro será capaz de transmitir al alumno los conceptos relacionados con la multiplicación de fracciones que desee enseñarle mediante los medios y lenguaje apropiados, así como lograr los objetivos de aprendizaje propuestos en el currículo escolar (Flores, 2011; Freudenthal, 1986; Perera & Valdemoros, 2008; Son, 2012; Sweetland, 1984).



## CAPÍTULO 3. MARCO CONTEXTUAL

En el presente capítulo se hace una discusión acerca de cómo se pretende enseñar la multiplicación de fracciones en el contexto educativo mexicano a través del currículum y libros de texto. Para ello, se tuvo como referente el currículo de educación básica, nos dimos a la tarea de analizar en el Plan de estudios 2011 SEP (2011a), el Programa de estudios 2011 (SEP, 2011b) y el Libro para el maestro (SEP, 2014b) las sugerencias didácticas que éstos le proveen al profesor, así como la forma en que presentan el algoritmo de la multiplicación de fracciones.

### 3.1 La multiplicación de fracciones en el currículum y Libro para el maestro

En México, la SEP es la institución gubernamental que dictamina los procesos educativos que se deben llevar a cabo en todas las aulas de educación básica y media superior; por ende, establece planes y programas de estudio que los profesores deben efectuar en su labor. Para educación primaria, la SEP propone a la comunidad de maestros el *Plan de estudios 2011 SEP* (2011a) y el *Programa de estudios 2011* (SEP, 2011b) como los documentos base para el nivel de educación primaria. Respecto al Plan de estudios 2011, la SEP (2011a) dice lo siguiente:

Es el documento rector que define las competencias para la vida, el perfil de egreso, los Estándares Curriculares y los aprendizajes esperados que constituyen el trayecto formativo de los estudiantes, y que se propone contribuir a la formación del ciudadano democrático, crítico y creativo que requiere la sociedad mexicana en el siglo XXI, desde las dimensiones nacional y global, que consideran al ser humano y al ser universal. (p. 25)

El Programa de estudios 2011 (SEP, 2011b) fundamenta los ejes, temas y contenidos de los que todo maestro deberá echar mano para lograr los estándares esperados por la administración y, como consecuencia, desarrollar las competencias pertinentes en los estudiantes. En lo concerniente a la materia de matemáticas, este documento dicta tres ejes claves repartidos en ocho contenidos:

Para primaria y secundaria se consideran tres ejes, éstos son: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida, y Manejo de la información [...]

De cada uno de los ejes se desprenden varios temas, y para cada uno de éstos hay una secuencia de contenidos que van de menor a mayor dificultad [...] En el caso de la educación primaria se consideran ocho temas, con la salvedad de que no todos se inician en primer grado y la mayoría continúa en el nivel de secundaria. Dichos temas son: Números y sistemas de numeración, Problemas aditivos, Problemas multiplicativos, Figuras y cuerpos, Ubicación espacial, Medida, Proporcionalidad y funciones, y Análisis y representación de datos. (SEP, 2011b, pp. 73-74)

El contenido matemático para el presente estudio (multiplicación de fracciones) está ubicado en el tema *Problemas multiplicativos* y pertenece al eje *Sentido numérico y pensamiento algebraico*. Es primordial destacar que de los cinco bloques en los que se agrupan todos los contenidos matemáticos, sólo en dos de ellos se aborda explícitamente la multiplicación de fracción, los cuales son el Bloque I y Bloque IV (véase figuras 3.1 y 3.2).

Bloque I			
COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> <li>Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.</li> <li>Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que impliquen dos o más transformaciones.</li> <li>Describe rutas y calcula la distancia real de un punto a otro en mapas.</li> </ul>	<p><b>NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales. Explicitación de los criterios de comparación.</li> </ul> <p><b>PROBLEMAS ADITIVOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales.</li> </ul> <p><b>PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales.</li> </ul>	<p><b>FIGURAS Y CUERPOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Identificación de los ejes de simetría de una figura (poligonal o no) y figuras simétricas entre sí, mediante diferentes recursos.</li> </ul> <p><b>UBICACIÓN ESPACIAL</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Elección de un código para comunicar la ubicación de objetos en una cuadrícula. Establecimiento de códigos comunes para ubicar objetos.</li> </ul> <p><b>MEDIDA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Cálculo de distancias reales a través de la medición aproximada de un punto a otro en un mapa.</li> </ul>	<p><b>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Cálculo del tanto por ciento de cantidades mediante diversos procedimientos (aplicación de la correspondencia "por cada 100, n", aplicación de una fracción común o decimal, uso de 10% como base).</li> </ul> <p><b>ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura de datos contenidos en tablas y gráficas circulares, para responder diversos cuestionamientos.</li> </ul>

Figura 3.1. Organización de temas, contenidos y aprendizajes para el Bloque I (SEP, 2011b, p. 76).

Bloque IV			
COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Explica las características de diversos cuerpos geométricos (número de caras, aristas, etc.) y usa el lenguaje formal.</li> </ul>	<p><b>NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa. Aproximación de algunas fracciones no decimales usando la notación decimal.</li> <li>• Identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con números (naturales, fraccionarios o decimales) que tengan progresión aritmética o geométrica, así como sucesiones especiales. Construcción de sucesiones a partir de la regularidad.</li> </ul> <p><b>PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión "<math>a/b</math> de <math>n</math>".</li> </ul>	<p><b>FIGURAS Y CUERPOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Anticipación y comprobación de configuraciones geométricas que permiten construir un cuerpo geométrico.</li> </ul> <p><b>MEDIDA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cálculo de la longitud de una circunferencia mediante diversos procedimientos.</li> <li>• Cálculo del volumen de prismas mediante el conteo de unidades.</li> </ul>	<p><b>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparación de razones del tipo "por cada <math>n</math>, <math>m</math>", mediante diversos procedimientos y, en casos sencillos, expresión del valor de la razón mediante un número de veces, una fracción o un porcentaje.</li> </ul>

Figura 3.2. Organización de temas, contenidos y aprendizajes para el Bloque IV (SEP, 2011b, p. 78).

En el Bloque I, la multiplicación de fracciones se trabaja al final del eje Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico donde se establece como: "resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales" (SEP, 2011b, p.76). Aquí el profesor tiene la libertad de proponer el procedimiento para la solución de problemas multiplicativos con números decimales o fraccionarios.

De acuerdo con las sugerencias didácticas, los maestros que decidan abordar el contenido la multiplicación de fracciones desde el Bloque I, deberán hacerlo mediante procedimientos informales (véase Figura 3.2), es decir, sin institucionalizar el algoritmo directo que consiste en multiplicar los numeradores y los denominadores de ambos factores para obtener el producto final. Lo anterior resulta un reto didáctico para el docente, pues la multiplicación de fracciones es en sí un concepto abstracto que presenta propiedades y leyes diferentes a la de los números naturales (de Castro, 2008).

Si bien, en el Bloque I la multiplicación de fracciones es un tema que involucra procedimientos informales a enseñar, encontraremos que en el Bloque IV se le solicita al maestro abordar formalmente el contenido matemático bajo la expresión " $a/b$  de  $n$ " (SEP,

2011b, p. 78), lo que en palabras de Son (2012) refleja la noción de multiplicación de fracciones como operador. Esto implica un reto al docente nuevamente, pues el niño tiene que tener clara la diferencia entre las expresiones “ $a/b$  de  $n$ ” y “ $n$  de  $a/b$ ” para evitar confusiones conceptuales; sin embargo, en el currículum no le sugiere al profesor explorar “ $n$  de  $a/b$ ” en el aula. Cabe recordar que esta última la expresión muestra a la multiplicación de fracciones como una suma reducida.

En el Libro para el maestro (SEP, 2014b) se tienen seis lecciones que invitan al docente a enseñar tanto procedimientos formales como informales en torno a la multiplicación de fracciones (véase Figura 3.3). Tales lecciones se localizan en los Bloques I y IV del libro del alumno (SEP, 2014a), y las cuales llevan por título: “El Rancho de don Luis” (pp. 30-31), “La mercería” (pp. 32-33), “¿Cómo lo doblo?” (pp. 34), “Partes de una cantidad” (pp. 188), “Circuito de carreras” (pp. 191) y “Plan de ahorro” (pp. 194).

Bloque I		Bloque IV	
1. Los continentes en números	10	55. Los jugos	176
2. Sin pasarse	12	56. Los listones 1	179
3. Carrera de robots	14	57. Los listones 2	181
4. ¿Qué pasa después del punto?	17	58. ¿Cómo va la sucesión?	184
5. La figura escondida	19	59. Así aumenta	186
6. Vamos a completar	21	60. Partes de una cantidad	188
7. Rompecabezas	25	61. Circuito de carreras	191
8. El equipo de caminata	28	62. Plan de ahorro	194
9. El rancho de don Luis	30	63. Cuerpos idénticos	196
10. La mercería	32	64. El cuerpo oculto	199
11. ¿Cómo lo doblo?	34	65. ¿Cuál es el bueno?	201
12. Se ven de cabeza	38	66. ¿Conoces a $\pi$ ?	204
13. ¿Por dónde empiezo?	43	67. ¿Para qué sirve $\pi$ ?	206
14. Batalla naval	47	68. Cubos y más cubos	208
15. En busca de rutas	51	69. ¿Qué pasa con el volumen?	210
16. Distancias iguales	53	70. Cajas para regalo	212
17. ¿Cuál es la distancia real?	56	71. ¿Qué música prefieres?	214
18. Distancias a escala	58	72. ¿Qué conviene comprar?	216
19. Préstamos con intereses	60		
20. Mercancía con descuento	62		
21. ¿Cuántas y de cuáles?	65		
22. ¡Mmm... postres!	68		

Figura 3.3. Índice de contenidos del Libro para el alumno (SEP, 2014a, pp. 4-6).

Los temas sobre multiplicación de fracciones que presenta el Libro para el alumno en el Bloque I sugieren ser tratados mediante procedimientos no formales, mientras que los del Bloque IV tienen como objetivo emplear la expresión “ $a/b$  de  $n$ ”.

### 3.1.1 Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas

Para Carrillo et al. (2013), las estrategias y modelos de enseñanza son el elemento indispensable para el desarrollo de competencias matemáticas en los alumnos, de ahí la

importancia del conocimiento y manejo adecuado de ellas. El currículum mexicano actual sustenta la idea de este autor y explica de manera detallada lo que se espera el alumno sepa de una competencia matemática:

La noción de competencia matemática está ligada a la resolución de tareas, retos, desafíos y situaciones de manera autónoma. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o supuestos. Se trata también de que los alumnos sean capaces de resolver un problema utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles son más eficaces; o bien, que puedan probar la eficacia de un procedimiento al cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema, para generalizar procedimientos de resolución. (SEP, 2011b, p. 352).

De acuerdo con la cita anterior, el maestro de sexto grado debe poseer un conocimiento didáctico de las matemáticas pertinente mediante el cual el alumno adquiera destrezas y habilidades que le permiten crear las bases de su aprendizaje, identificar, comunicar y resolver problemas de manera creativa y exitosa; de modo que logre una autonomía en su aprendizaje. El currículum establece varios fundamentos que le servirán al profesor como soporte en su labor educativa.

El primer de estos fundamentos se refiere al trabajo colaborativo en el aula de clases que, de acuerdo con el Plan de estudios (SEP, 2011a), tiene como propósito la búsqueda y descubrimiento de soluciones, la comunicación de ideas respecto a un problema o situación matemática y la construcción del aprendizaje colectivo. En relación con esto, es deseable que en el libro de texto se evidencie la propuesta del currículum y que ésta propuesta lleve al trabajo cooperativo en el aula. A través de las seis lecciones para la multiplicación de fracciones, el Libro del maestro (SEP, 2014b) sugiere al profesor implementar el trabajo colaborativo mediante la agrupación en equipos o parejas como se muestra a continuación:

**9 El rancho de don Luis**

**Contenido**  
Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales.

**Consigna**  
En parejas, resuelvan los problemas.

1. En el rancho de don Luis hay un terreno en el que siembra hortalizas que mide  $\frac{1}{2}$  hm de ancho por  $\frac{2}{3}$  hm de largo. Don Luis necesita saber el área del terreno para comprar las semillas y los fertilizantes necesarios. ¿Cuál es el área de este terreno?  
\_\_\_\_\_
2. En otra parte del rancho de don Luis hay un terreno de  $\frac{5}{6}$  hm de largo por  $\frac{1}{4}$  hm de ancho donde se cultiva durazno. ¿Cuál es el área de este terreno?  
\_\_\_\_\_

Figura 3.4. Trabajo colaborativo para la resolución de problemas multiplicativos de áreas (SEP, 2014b, p. 30).

El contenido implicado en la figura anterior es la resolución de problemas multiplicativos a través de procedimientos no formales con la posibilidad de trabajar con números decimales o fraccionarios. Sin importar el tipo de números con el que el maestro aborde la lección, se pide explícitamente que se trabaje en parejas para la resolución de los problemas que implican el uso de conocimientos previos sobre áreas y fracciones.

En este tipo de actividades, el trabajo colaborativo impulsa en los niños el uso de lenguaje matemático y destrezas orales para comunicar sus ideas en torno al problema en cuestión; por otra parte, se promueve el pensamiento crítico en los niños, pues aparte de entender la situación planteada, deben discutir y descubrir en parejas la alternativa más viable para resolverla lo que a su vez fortalece las habilidades sociales del alumno al darse cuenta que la responsabilidad de aprendizaje es mutua.

En resumen, el trabajo colaborativo es un medio empleado por el currículum para favorecer en el alumno el pensamiento crítico y razonamiento que es “la actividad intelectual fundamental” (SEP, 2011a, p.48). El segundo fundamento es el uso de situaciones problemáticas o situaciones problema como enfoque didáctico en el aula para el desarrollo del razonamiento matemático en el alumno. Para comprender el concepto de situaciones problemáticas, se recurrió a Lester, Masingila, Mau, Lambdin, dos Santon y Raymond (1994), quienes las definen como contextos mediante los cuales los pupilos

crean significados de conceptos matemáticos a consecuencia de procesos de análisis, exploración, creación, verificación y generalización de estrategias que den solución a las situaciones problemáticas presentadas. Sobre este enfoque, el Programa de estudios (SEP, 2011b) menciona que:

Toda situación problemática presenta obstáculos; sin embargo, la solución no puede ser tan sencilla que quede fija de antemano, ni tan difícil que parezca imposible de resolver por quien se ocupa de ella. La solución debe construirse en el entendido de que existen diversas estrategias posibles y es necesario usar al menos una. Para resolver la situación, el alumno debe usar sus conocimientos previos, los cuales [...] le permiten *entrar* en la situación, pero el desafío consiste en reestructurar algo que ya sabe, sea para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o volver a aplicarlo en una nueva situación. (p. 67; cursivas en el original)

A manera de ejemplo, exploraremos la siguiente situación problema planteada en el Libro del maestro (SEP, 2014b) para el alumno:

**Contenido**

Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales.

## 8

### El equipo de caminata

*Consigna*

En parejas resuelvan este problema.

El equipo de caminata de la escuela recorre un circuito de 4 km. El maestro está registrando en una tabla como la de abajo las vueltas y los kilómetros recorridos por cada uno de los integrantes. Analicen la tabla y complétenla.

Nombre	Rosa	Juan	Alma	Pedro	Víctor	Silvio	Eric	Irma	Adriana	Luis	María
Vueltas	1	2	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$2\frac{7}{8}$	0.75	1.25	1.3	2.6
km											

Figura 3.5. Situación problemática para trabajar la multiplicación de fracciones: cálculo de kilómetros recorridos en una caminata (SEP, 2014b, p. 28).

Como se muestra en la Figura 3.5, el maestro tiene la oportunidad de efectuar el ejercicio con números fraccionarios o decimales. En caso de querer emplear los últimos,

es imprescindible que los niños conviertan las fracciones a decimales para finalmente multiplicar el número de vueltas por los kilómetros. Esto implica que el alumno haga uso de sus conocimientos previos sobre conversión de fracciones y tablas de multiplicar.

Por el contrario, si lo que se busca es resolver problemas multiplicativos con valores fraccionarios, el niño tendrá que emplear indirectamente la noción de “ $a/b$  de  $n$ ”; es decir, la multiplicación de fracciones como operador. Lo anterior representa un reto intelectual para el docente porque debe favorecer en el estudiante la construcción de una nueva estructura multiplicativa mediante el uso de racionales, además es un desafío didáctico ya que le exige al docente “tener dominio del saber matemático, para recontextualizarlo de acuerdo con los saberes previos y las condiciones cognitivas de sus estudiantes; y, luego, decidir las actividades que van a orientar la interacción de estos con los conceptos” (Múnera, 2011, p. 181). Aún con esta contrariedad, la situación problema expuesta ofrece la ventaja de tejer conceptos nuevos relativos a la multiplicación de fracciones que luego servirán de puente para transitar de la noción informal del contenido matemático a la institucionalización de éste.

Aunque las situaciones problemas favorecen actitudes en los estudiantes como la toma de riesgos y la elección de estrategias adecuadas para la resolución de tales dilemas matemáticos, es probable que también generen una sensación de fracaso debido a circunstancias como errar en el procedimiento o resultado. De aquí surge el tercer fundamento que es el fracaso controlado. Se dice que es controlado, pues el maestro tiene la obligación de orientar al alumno para que desarrolle tolerancia ante éste. Además, el docente debe ayudar al alumno a encontrar la estrategia idónea para resolver la situación problema y, aún más importante, que comprenda la raíz de su error:

Es ante un fracaso controlado que el alumno se plantea la pregunta: ¿por qué?, ¿qué falló? Esto significa que el diseño conducido por el docente debe permitir al estudiante un proceso de “recorrido a la inversa”, un proceso de reflexión sobre sus propias producciones. El pensamiento humano opera de este modo cuando el estudiante aprende. (SEP, 2011a, p. 267)

El profesor es responsable del manejo de estrategias metacognitivas en la clase de matemáticas para que los alumnos comprendan sus operaciones mentales y "qué son, cómo se realizan, cuándo hay que usar una u otra, qué factores ayudan o interfieren en su operatividad, etcétera" (Burón, 1993, p. 11, citado en Peñalva, 2010). En este sentido, el



maestro debe enseñar a los alumnos a reflexionar sobre su propia práctica, haciéndolos autónomos, responsables y monitores de su aprendizaje, capaces de detectar y expresar sus obstáculos y necesidades (Schoenfeld, 2002).

Otro fundamento, para el diseño y ejecución de una clase de matemáticas, es el referente al uso de materiales didácticos y recursos tecnológicos. El Plan de estudios (SEP, 2011a) enfatiza que los materiales didácticos elevan la calidad educativa y son necesarios para que el estudiante cuente con una experiencia de aprendizaje completa. A su vez, el mismo documento le sugiere al maestro el uso de materiales manipulables, audiovisuales, multimedia, internet, plataformas tecnológicas, softwares informativos, entre otros recursos para enseñar los contenidos propios del sexto grado.

A pesar del énfasis que pone el currículum en este tema, el Libro para el maestro no refleja lo mismo en los contenidos relativos a la multiplicación de fracciones. De las seis lecciones que abordan la multiplicación de fracciones, es en una en donde se ofrecen ideas y ejemplos de los materiales que el docente puede usar para impartir dicho contenido matemático (véase Figura 3.6).

**Consideraciones previas**

Es necesario recordar que el estudio explícito y formal de la multiplicación con fracciones se hace en secundaria; sin embargo, en este momento los alumnos pueden aplicar procedimientos no formales para resolver problemas multiplicativos con este tipo de números.

Para resolver el problema 1 es necesario multiplicar  $\frac{2}{3}$  por  $\frac{1}{2}$ , lo cual puede interpretarse también como  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{1}{2}$ . Una forma de realizar este cálculo es mediante gráficos o papel doblado.

$\frac{1}{2}$ 
 $\frac{2}{3}$  de  $\frac{1}{2}$

$\frac{2}{6}$

Cuando se trate de longitudes se puede utilizar una tira de papel, un listón, una agujeta o representaciones gráficas de estos objetos.

*Figura 3.6.* Sugerencia de material para abordar la lección sobre multiplicación de fracciones (SEP, 2014b, p. 31).

La Figura 3.6 es un extracto del tema “El rancho de don Luis” que aparece en el Libro del maestro (SEP, 2014a, pp. 30-31). El objetivo de esta lección es que los niños usen el

algoritmo de la multiplicación con números fraccionarios para obtener una parte de un todo al calcular el área de varios terrenos. Para la solución del problema, se le propone al maestro emplear materiales visuales (gráficas), materiales auténticos (listones y agujetas) y materiales manipulativos (listones, agujetas, tiras de papel y papel doblado).

Si bien, los recursos didácticos en el aula son materiales mediante los cuales el estudiante opera el contenido matemático, los ejemplos y explicaciones son también recursos para el educador cuyo fin es la transmisión de ideas y conceptos indispensables para la comprensión del contenido matemático. El Libro para el maestro (SEP, 2014b) provee de argumentos matemáticos y sugerencias para que el profesor pueda desarrollar el tema de la multiplicación de fracciones y hacerlo comprensible para los niños; sin embargo, llama la atención el argumento que este libro ofrece en la lección 62 “Plan de ahorro” (pp. 194-195), de donde se desprende lo siguiente:

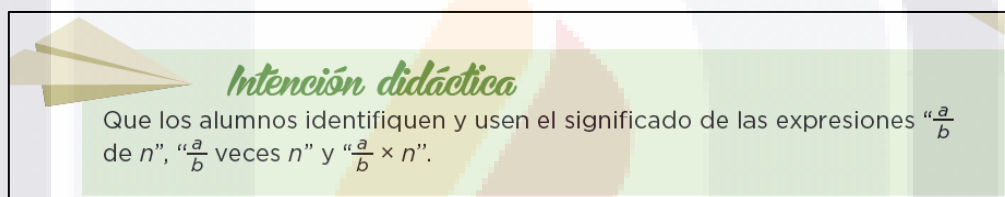


Figura 3.7. Objetivo de la lección 62 sobre multiplicación de fracciones (SEP, 2014b, p. 194).

La Figura 3.7 presenta dos significados distintos de la multiplicación de fracciones pues la primera y tercera expresión (“ $\frac{a}{b}$  de  $n$ ” y “ $\frac{a}{b} \times n$ ”) muestran a la multiplicación de fracciones como operador mientras que la segunda (“ $\frac{a}{b}$  veces  $n$ ”) representa una reducción de suma (Son, 2012). En otras palabras, cuando la multiplicación de fracciones equivale a un operador, las expresiones “de” y “x” son sinónimos pues expresan la idea de tomar  $\frac{a}{b}$  partes de “ $n$ ” que son los enteros (Son, 2012). En contraste, la palabra veces indica que la multiplicación de fracciones equivale a una reducción de suma, por lo que la expresión del libro “ $\frac{a}{b}$  veces  $n$ ” podría generar confusión.

De acuerdo con Son (2012), lo apropiado para este significado es tomar al entero como primer factor y a la fracción como segundo factor (i.e. “ $n$  veces  $\frac{a}{b}$ ”) siendo una suma reducida. Sin embargo, el libro para el maestro (SEP, 2014b) argumenta que emplear “ $\frac{a}{b}$

veces  $n$ ” significa lo mismo que “ $\frac{a}{b}$  de  $n$ ” y “ $\frac{a}{b} \times n$ ” por lo que pueden ser empleadas de manera indistinta al generarse el mismo producto:

Ahora bien, en el caso de los naturales, “ $3 \times 12$ ” y “3 veces 12” no son expresiones equivalentes a “3 de 12”, porque esta última se interpreta como  $\frac{3}{12}$ . Sin embargo, en el caso de las fracciones, las tres expresiones son equivalentes; así, “ $\frac{1}{3}$  veces 12”, “ $\frac{1}{3} \times 12$ ” y “ $\frac{1}{3}$  de 12”, dan como resultado 4.

Figura 3.8. Consideraciones que el Libro para el maestro ofrece para explicar la lección 61 (SEP, 2014b, p. 193).

Esta incongruencia en el significado de la multiplicación de fracciones podría causar dificultades en la comprensión de este contenido matemático en concreto; o bien, el maestro puede tomar como correcto lo que el libro de texto le plantea y ofrecerle a los alumnos la misma explicación. Es probable que el alumno tenga dificultades para comprender otros significados de la multiplicación de fracciones, así como generar obstáculos epistemológicos acerca de la fracción y la multiplicación con estos números.

### 3.1.2 Conocimiento de las características del aprendizaje

En términos del conocimiento del profesor sobre el perfil del alumno y su importancia en la enseñanza de la multiplicación de fracciones, el Plan de estudios (SEP, 2011a) advierte que la transformación de la práctica docente deberá enfatizar la enseñanza del contenido a través de la atención de estilos y necesidades de aprendizaje, condición personal, social, cultural e inclusive económica.

De acuerdo con lo planteado, se encontró que en el Libro para el maestro se dan sugerencias sobre las distintas formas en las que el alumno pudiera entender y resolver los ejercicios que se le plantean a lo largo de las seis lecciones sobre multiplicación de fracciones. Para ilustrar mejor lo anterior, mostraremos un fragmento de la consigna de lección 60 “*Partes de una cantidad*” (SEP, 2014b, pp.188-189) cuyo objetivo es resolver problemas multiplicativos con la expresión “ $\frac{a}{b}$  de  $n$ ”:

**Consigna**

En equipos, resuelvan estos problemas.

1. En un grupo de 36 alumnos,  $\frac{1}{3}$  del total son menores de 10 años. ¿Cuántos tienen 10 o más años?

---

¿Qué parte del grupo tiene 10 o más años?

---

Figura 3.9. Resolución de problemas de multiplicación de fracciones como operador (SEP, 2014b, p. 188).

Para obtener directamente el resultado del primer problema, es necesario multiplicar  $\frac{2}{3}$  del grupo por el total de estudiantes (36) (número total de alumnos), de modo que el producto obtenido de esta multiplicación corresponde al total de alumnos con 10 o más años de edad; así, la respuesta a la pregunta “¿Cuántos tienen 10 o más años?” es 24 niños. Una segunda estrategia es multiplicar  $\frac{1}{3}$  del grupo por el total de estudiantes para después restar el producto por el segundo factor:  $\frac{1}{3} \cdot 36 = 36 - 12 = 24$  *estudiantes con 10 o más años de edad*. Lo anterior nos lleva a determinar que la respuesta a la segunda pregunta es  $\frac{2}{3}$  *del grupo tienen 10 o más años de edad*. En torno a este ejercicio, el libro ofrece sugerencias y análisis sobre cómo el estudiante pudiera trabajar y razonar la información para conseguir el resultado:

Es muy probable que los alumnos calculen primero cuánto es  $\frac{1}{3}$  de 36, por la facilidad de asociar  $\frac{1}{3}$  con la división entre 3. Una vez que sepan cuánto es  $\frac{1}{3}$  de 36, pueden simplemente restar esta cantidad a 36 para obtener el resultado, probablemente sin reparar en que dicho resultado representa  $\frac{2}{3}$  de 36, pero para eso sirve la segunda pregunta.

Los alumnos que opten por calcular  $\frac{2}{3}$  de 36 seguramente calcularán  $\frac{1}{3}$  y multiplicarán el resultado por 2. Quienes realicen esto contestarán la segunda pregunta antes que la primera.

Figura 3.10. Posibles procedimientos y razonamientos del alumno para resolver primer problema del Libro del maestro sobre multiplicación de fracciones (SEP, 2014b, p. 189).

En la Figura 3.10 se infiere el uso por parte del niño de procedimientos informales de la multiplicación de fracciones para lograr el resultado; sin embargo, esta posible lógica

del alumno, es una de tantas que podrían presentarse en el salón de clases. Con estas sugerencias matemáticas, el docente puede prever dificultades y errores de los alumnos así como explicaciones y ejemplos que le ayudarán a dar sentido a la fracción en la multiplicación.

El Programa de estudios 2011 (SEP, 2011b) afirma que para planear una clase y llevarla a cabo se requiere anticipar los comportamientos del alumno, habilidades, estrategias y obstáculos que pudiera presentar el pupilo en relación con el contenido matemático, en este caso, la multiplicación de fracciones. Para sobrellevar esa situación, el libro para el maestro (SEP, 2014a) le propone al término de cada lección, contestar las siguientes preguntas:

### Observaciones posteriores

1. ¿Cuáles fueron las dudas y los errores más frecuentes de los alumnos?
2. ¿Qué hizo para que los alumnos pudieran avanzar?
3. ¿Qué cambios deben hacerse para mejorar la consigna?

*Figura 3.11. Reflexión sobre las dificultades del alumno en torno a una lección sobre multiplicación de fracciones (SEP, 2014b, p. 31).*

Como se puede observar en el extracto precedente, el Libro para el maestro (SEP, 2014b) le propone al profesor realizar un análisis posterior a su práctica sobre tres distintos aspectos: problemas del alumno con el contenido matemático, soluciones a dichos problemas y una propuesta para mejorar la consigna. El objetivo de estas preguntas es la derivación de soluciones a las dificultades que el docente enfrenta en la enseñanza del contenido matemático y la prevención de futuros obstáculos en la impartición del tema. Conjuntamente, estas tres preguntas invitan al maestro hacer un análisis de las dudas y errores del alumno ya que la comprensión de éstos provee de información acerca del avance del alumno sobre el tema lo que permita al educador buscar los medios ideales para auxiliar al alumno.

## CAPÍTULO 4. DISEÑO METODOLÓGICO

En el presente capítulo se detalla el tipo de investigación efectuado y el diseño metodológico que se empleó para recabar y analizar los datos. Para ello, primero se plantea y justifica el tipo de estudio en el que se apoya el trabajo aquí descrito para lograr los objetivos de investigación; segundo, se describen los instrumentos y las estrategias usados para recopilar información acerca del conocimiento didáctico del profesor en la enseñanza de la multiplicación de fracciones. En un tercer momento se da cuenta de la población y la muestra que participó en este estudio para finalmente describir el proceso de gestión en la aplicación de los instrumentos (recopilación de datos) y el proceso mediante el cual se analizaron los datos recogidos.

### 4.1 Tipo de estudio

La investigación aquí descrita es de corte cualitativo, ya que se caracteriza por interpretar y comprender el conocimiento didáctico de algunos profesores a través de sus acciones y de su discurso en un contexto *natural*, como es la enseñanza de la multiplicación de fracción en educación primaria (Rodríguez, Gil, & García, 1999). La elección de este enfoque permitió comprender y tener acceso al conocimiento y la práctica del profesor tomando como referente principal la realidad en el salón de clases, la cual tiende a ser dinámica, múltiple y holística (Rodríguez, 2003). El enfoque cualitativo que seguimos está orientado, principalmente, a dar cuenta de las acciones y el conocimiento que exhibe el profesor en su praxis, en otras palabras, se pretendió obtener datos mediante el discurso y las acciones de los profesores-participantes en la clase de matemáticas.

El método aquí utilizado se relaciona directamente con el *estudio de caso* porque, al trabajar con cuatro profesores de educación básica, se identificaron dos casos particulares que son de especial interés ya que poseen atributos que permiten comprender la práctica del docente bajo ciertas circunstancias y contextos (Stake, 1995). Aunque ambos casos son diferentes entre sí, muestran una realidad de la enseñanza de las matemáticas en las aulas mexicanas que merece ser analizada. Cada caso que se presenta es complejo y da detalle de la interacción del maestro con su realidad particular (Stake, 1995). Además, el método de estudio de casos aquí presentado conserva las siguientes características (Arzaluz, 2005):

- Estudia eventos fenómenos, individuos y procesos desde el contexto natural.
- Provee diversas fuentes de información en un tiempo determinado facilitando el estudio de la complejidad de la acción del profesor y los significados que rodean dicha acción.
- La realidad escolar es cambiante, es por ello que los estudios de caso muestran los patrones de la vida cotidiana de los actores educativos.
- Es un punto de partida para la toma de decisiones.

El estudio de caso, como método ideal, le permitió a la presente investigación explorar a mayor profundidad la realidad del docente y hacer una mayor reflexión acerca del conocimiento didáctico del profesor de educación básica a partir de experiencias concretas en el salón de clases con la asignatura de matemáticas; en especial, se tuvieron dos alcances, los cuales fueron: a) dar respuesta a eventos y fenómenos educativos en los que se pretende indagar el porqué y cómo estos ocurren; b) investigar a mayor profundidad el fenómeno de interés con el propósito de obtener una mejor comprensión de éste, y tratar de generar nuevos descubrimientos y líneas de investigación (Chetty, 1996, citado en Martínez, 2006). Así, desde esta aproximación cualitativa, intentamos desarrollar un examen de los hechos que se desenvuelven en un lugar y en tiempo determinado (Denny, 1978).

#### **4.2 Sujetos y contexto de estudio**

Para tener acceso y analizar el conocimiento didáctico en la enseñanza de la multiplicación de fracción, se determinó que la muestra de estudio debería estar conformada por al menos cuatro docentes de educación primaria; en especial, se decidió llevar a cabo la toma de datos con profesores de sexto grado, ya que en este nivel es donde se introduce y se enseña el algoritmo de la multiplicación con números racionales (véase SEP, 2011b, Bloques I y IV, pp. 76-78; Capítulo 3 del presente documento).

Por el carácter exploratorio de esta investigación, y con el propósito de tener una muestra que permitiera lograr los objetivos, se buscó de manera deliberada a profesores en servicio que cumplieran con las siguientes condiciones previamente establecidas:

- Laborar en alguna escuela pública de educación primaria.
- Ser profesor de sexto grado de educación primaria.

- Tener al menos un año de experiencia docente en ese nivel educativo<sup>11</sup>.
- Basar su enseñanza o apoyarse en el Plan de estudios vigente (SEP, 2011a).

Para tener acceso a los profesores de sexto grado, se acudió a cuatro instituciones de educación primaria del estado de Aguascalientes donde se tuvo la oportunidad de platicar con los directores de cada plantel educativo. A cada uno se le explicó de manera general los objetivos de la presente investigación y la metodología a seguir en la recopilación de datos<sup>12</sup>. De las cuatro escuelas se logró tener un acercamiento con seis profesores (2 hombres y cuatro mujeres), pero solo cuatro de ellos aceptaron participar voluntariamente. Así, la muestra definitiva estuvo conformada por cuatro profesoras de sexto grado de educación primaria (véase Tabla 4.1), a quienes se le identificó como: M1, M2, M3 y M4<sup>13</sup>. Es importante mencionar que, durante la recopilación de datos, las participantes laboraban en dos instituciones diferentes. En la siguiente tabla se muestran las características generales de cada profesora:

Tabla 4.1

*Características generales de la muestra*

Participante	Años de experiencia		Institución	Turno	Núm. de estudiantes
	Docencia	En sexto grado			
M1	10	2	B	Matutino	24
M2	13	6	B	Matutino	21
M3	23	18	A	Vespertino	32
M4	8	2	A	Vespertino	32

*Nota:* El número de estudiantes se refiere a los integrantes que conforman el grupo de sexto grado de cada profesora, durante la recopilación de datos.

Como puede notarse en la Tabla 4.1, durante la toma de datos, las cuatro participantes tenían al menos ocho años de experiencia en la docencia y dos años dando clases en sexto grado de educación primaria. Eso significa que también han impartido la asignatura de matemáticas por varios años. Mientras que M1 y M2 laboran en la misma

<sup>11</sup> Para esta condición se partió del supuesto de que la realidad del profesor se construye en parte por su experiencia dentro y fuera del salón de clases (Schoenfeld, 2002).

<sup>12</sup> No se proporcionó mayor información para evitar en lo posible sesgos en el acopio y análisis de datos. El acceso a los profesores se hizo a través de oficios elaborados por el director de la tesis y la coordinación de la Maestría en Investigación Educativa de la Universidad Autónoma de Aguascalientes.

<sup>13</sup> Se asignaron estos códigos para guardar la identidad de cada participante: *M* significa maestra y el número se usa para diferenciar a las cuatro participantes entre sí.



institución educativa e imparten clases en el turno matutino, M3 y M4 trabajan en la misma escuela pero en el turno vespertino.

### **4.3 Técnicas e instrumentos para el acopio de datos**

Para la recolección de datos se usaron dos técnicas propias del enfoque cualitativo: observación no participante y entrevista semi-estructurada. A continuación se describe y se fundamenta cada una de ellas.

#### **4.3.1 Observación no participante**

Se decidió realizar una observación no participante para apreciar la realidad en el aula tratando de afectar lo menos posible el escenario y el contentexo natural donde se dan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; en particular, nos permitió tener acceso y dar cuenta del conocimiento implícito en las acciones [práctica docente] de cada profesora sin alterarlo. Los criterios tomado en cuenta para esta técnica cualitativa son los siguientes: accesibilidad, tiempo, compromiso y flexibilidad (Moug, 2007)<sup>14</sup>.

Aunque el interés era intervenir en lo más mínimo la realidad del salón de clases a través de la observación no participante, las profesoras-participantes eran conscientes de que eran observadas por la investigadora –quien escribe el presente documento– y de cuáles eran los propósitos de observar sus clases<sup>15</sup>. Esto hizo que la investigadora, en el rol de observadora, “no se [viera] obligado[a] a pretender o fingir, ser lo que en realidad no es. Se [...] [evitaron] de este modo los peligros de malos entendidos, ambigüedades, celos y situaciones comprometidas [entre las participantes y la observadora]” (Ruiz, 2012, pp. 135-136).

#### **4.3.2 Entrevista semi-estructurada**

También se acudió a la entrevista como una segunda estrategia ideal para obtener información relevante sobre el conocimiento didáctico del profesor para la enseñanza de

---

<sup>14</sup> De manera general, el criterio de accesibilidad se refiere a las facilidades otorgadas por las dos instituciones para realizar la investigación y al apoyo y compromiso que brindaron a la responsable de esta investigación (compromiso). El criterio de tiempo se refiere a la oportunidad que se tuvo de observar a los participantes en el periodo y en el número de horas necesarias, las cuales las profesores sugirieron. La flexibilidad se refiere a la libre elección de herramientas e instrumentos con los cuales se efectuó el estudio.

<sup>15</sup> Antes de efectuar la toma de datos, a las profesoras se les comentó el objetivo de la investigación y la intención de observar algunas sesiones de clase, sin proporcionar mayor información. Cada profesora también informó a sus estudiantes de estas observaciones.

la multiplicación de fracciones. Esta técnica nos permitió “entender el mundo desde la perspectiva del entrevistado, y desmenuzar los significados de sus experiencias” (Álvarez-Gayou, 2003, p. 109). Se optó por una entrevista de tipo semi-estructura con el propósito de otorgar mayor libertad de expresión a cada una de las cuatro profesoras (Cohen, Manion, & Morrison, 2007).

Por otro lado, la técnica de entrevista semi-estructurada le permitió a la investigadora tener la libertad de diseñar y plantear preguntas abiertas, explicar o añadir información sin alterar el desarrollo de la entrevista (Cohen et al., 2007). Las características que tuvo esta técnica corresponden a las mencionadas por Ruiz (2012):

- Más que explicar un fenómeno, se pretende comprenderlo.
- Se ahonda en el significado para poder maximizarlo.
- Las preguntas se generan sin esquema fijo de respuestas.
- Se espera una respuesta sincera, ya que la realidad la crea el participante.
- Se tiene la posibilidad de explicar o verificar respuestas cuando sea necesario.
- El entrevistador es capaz de guiar la entrevista conforme las respuestas del participante surgen para obtener información valiosa.

Para llevar a cabo la entrevista, se diseñó previamente un guía de preguntas centradas en cuatro situaciones hipotéticas acerca del conocimiento didáctico del profesor en la enseñanza de la multiplicación de fracciones<sup>16</sup> (véase Apéndice). Consideramos que las preguntas y las situaciones planteadas fueron relevantes para tener acceso a ese conocimiento. Las preguntas de la entrevista se diseñaron de tal forma que permitieron a la investigadora identificar “palabras o frases clave que pueden no ser más que comentarios casuales que se han dejado caer sin ninguna intención... [y] buscar indicadores de la importancia que un tema de conversación tiene para un entrevistador” (Woods, 1989, p. 90). La guía de preguntas y las situaciones hipotéticas también se diseñaron tomando en cuenta el marco teórico de la presente investigación.

La entrevista constó de una sección de datos generales y cuatro situaciones hipotéticas (véase Tabla 4.2 y Apéndice); además se buscó que las preguntas incluidas

---

<sup>16</sup> Situación hipotética se refiere a aquella situación de corte imaginario donde se han introducido “intencionalmente argumentos dilemáticos” (Valbuena, 2015, p. 145) empleados para desencadenar la reflexión en la toma de decisiones.

en cada situación reflejaran lo que la investigadora estaba tratando de indagar, es decir, el conocimiento didáctico del maestro sobre la multiplicación de fracciones. Por la naturaleza de la problemática y los objetivos de investigación aquí establecidos, las preguntas fueron abiertas y centradas en el argumento de las maestras con respecto a las situaciones hipotéticas. Es importante mencionar que se empleó el mismo instrumento para las cuatro participantes con el propósito de encontrar coincidencias y obtener los dos estudios de casos más representativos.

Tabla 4.2  
*Características del instrumento para entrevista*

Apartados	Descripción	Núm. de preguntas
Datos generales	Información acerca de los años de experiencia en docencia y enseñanza de matemáticas en sexto grado de educación primaria.	7
Situaciones hipotéticas	1. <i>Imagine que a su escuela se integra un profesor, su nombre es Luis y será la primera vez que imparta clases en sexto grado. Un día platicando con usted, él le comenta que la próxima semana enseñará la multiplicación de fracciones y no tiene muy claro cómo hacerlo.</i>	9
	2. <i>La maestra Lupita, quien es su compañera de escuela, tiene 5 años trabajando como docente y no es la primera vez que imparte este tema (multiplicación de fracciones) en sexto grado. Según Lupita, sus actividades son efectivas porque tomó en cuenta a los estudiantes en la planeación y aplicación de éstas.</i>	4
	3. <i>El supervisor de zona observa cómo el profesor Javier imparte la multiplicación de fracciones. Al término de una de la sesiones, el supervisor le comenta a Javier que aunque su clase estuvo bien, no tomó en cuenta las sugerencias del plan de estudios.</i>	7
	4. <i>Uno de los problemas que se da en el libro de textos de Javier es el siguiente: “José estudia matemáticas ½ hora todos los días a la semana; sin embargo, esta semana sólo pudo estudiar 5 días, ya que enfermó”.</i>	3

Para su validez y fiabilidad, el instrumento se diseñó tomando en cuenta el PCK descrito en el modelo de Carrillo et al. (2014). Así mismo, el instrumento pasó por un proceso de revisión de dos expertos en educación matemática, quienes evaluaron su contenido e hicieron las sugerencias pertinentes, las cuales se tomaron en cuenta para su implementación final; también se piloteó con dos profesores de sexto grado de educación primaria, quienes cumplían con condiciones similares a las deseadas para este estudio.

Como parte del pilotaje, se realizaron dos entrevistas que fueron video-grabadas y, posteriormente, se analizó si las respuestas dadas por los dos profesores eran las que se buscaban. También se valoraron las sugerencias de ambos profesores sobre el contenido del instrumento. A través del pilotaje, se hizo evidente que el planteamiento de la segunda situación merecía ser reestructurada con el propósito de crear un instrumento firme que nos permitiera obtener la información necesaria en torno al conocimiento didáctico del maestro en la enseñanza del contenido matemático correspondiente (véase Tabla 4.2. y Apéndice). De acuerdo con las sugerencias de los expertos en educación matemática y la información que arrojó el pilotaje, los cambios que se dieron en el instrumento fueron de redacción y reestructuración sintáctica de la segunda situación.

#### **4.4 Etapas del estudio**

La recopilación de datos, como parte metodológica de la presente investigación, se llevó a cabo en dos etapas: observación de las sesiones de clase y entrevista a cada profesora-participante. Es importante mencionar que ambas etapas son independientes entre sí, lo cual significa que para efectuar la entrevista no fue necesario llevar a cabo previamente la observación no participante, o viceversa. Las dos etapas se desarrollaron por separado aun cuando el interés, en ambas, era estudiar el conocimiento didáctico que el profesor tiene y que usa en la enseñanza de la multiplicación de fracciones. A continuación se describe cada una de estas etapas.

##### **4.4.1 Primera etapa: observación de las sesiones de clase**

De acuerdo con los objetivos del estudio, se decidió observar a las cuatro profesoras por separado al impartir el tema de la multiplicación de números fraccionarios a los estudiantes de sexto grado de educación primaria. Las observaciones fueron de tipo no participante con la intención de que la presencia del investigador no alterara, en lo posible, el contexto *natural* y *habitual* donde cada profesora y los alumnos llevan a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de dicho tema.

Las observaciones se realizaron en las fechas indicadas por cada profesora, respetando la programación didáctica elaborada por ellas; en otras palabras, la dosificación realizada por cada docente. Esto implicó que se tomara en cuenta el número de sesiones de clase y el tiempo empleado para enseñar la multiplicación de fracciones, con la finalidad de captar la mayor parte de los momentos en los que las cuatro

profesoras recurrieron a su conocimiento didáctico. De acuerdo con la programación didáctica, las profesoras destinaron de una a dos sesiones de clase para enseñar la multiplicación de fracciones (véase Tabla 4.3).

Tabla 4.3.

*Sesiones de clase observadas en cada profesora-participante*

Participante	Dosificación		Observaciones	
	Días	Sesiones estimadas	Sesiones de clase	Duración (minuto)
M1	2	2	2	109 / 76
M2	1	1	1	71
M3	1	1	1	54
M4	1	1	1	96

Los instrumentos usados en la observación no participante fueron una videocámara y una grabadora de voz. Sin embargo, también se tuvo que recurrir a la cámara fotográfica y diseñar una bitácora de observación para recopilar los datos con M2 (ver Apéndice), quien en último momento decidió no ser videograbada a pesar de haber dado su consentimiento con anterioridad. Se decidió no observar a otro profesor en lugar de M2 debido a que los maestros que siguen el currículum de la SEP, imparten los contenidos en fechas similares.

Para validar y triangular los datos recabados de M2, la bitácora estuvo centrada en describir aspectos puntuales de la práctica de la profesora, las actividades que se llevaron a cabo en el aula, los objetivos de cada actividad y duración de éstas, el material empleado y los patrones de interacción o agrupamiento propuestos por el docente. Esto datos se apoyaron con lo recopilado con la grabadora de voz y cámara fotográfica.

#### 4.4.2 Segunda etapa: Entrevista a cada profesora

Para obtener información acerca del conocimiento didáctico que el profesor posee en torno a la multiplicación de fracción, se determinó diseñar una guía de entrevista para posteriormente implementarla con cada maestra por separado. Como se mencionó, este instrumento incluyó cuatro situaciones hipotéticas en torno al conocimiento didáctico en la

enseñanza de ese contenido matemático (véase Tabla 4.2 y Apéndice), además cada situación tenía un determinado número de preguntas.

La entrevista se llevó a cabo después de observar a las cuatro profesoras. Para tal propósito se contactó a las participantes para establecer horario y lugar del encuentro. Las cuatro profesoras coincidieron en ser entrevistadas en sus áreas de trabajo; es decir, en la escuela. Para la entrevista, se contempló la guía previamente diseñada y validada, una grabadora de voz y una videocámara para almacenar los datos. A cada docente se le proporcionó las cuatro situaciones impresas para que recurrieran a ellas cuantas veces fuera necesario, también se les dio papel y un bolígrafo en caso de que desearan hacer anotaciones. El tiempo de duración de las entrevistas se presenta a continuación:

Tabla 4.4  
*Duración de la entrevista con cada profesora*

Participante	Duración de la entrevista
M1	77 min
M2	44 min
M3	45 min
M4	50 min

#### 4.5 Características del análisis de datos

Para tratar la información recabada, se trabajó con tablas de doble entrada de acuerdo con Miles y Huberman (1994). Las tablas están basadas en unidades de observación, categorías y códigos provenientes del PCK (Carrillo et al., 2014) y del trabajo de campo. Tomando en cuenta el marco conceptual de la presente investigación, se definieron tres categorías centradas en el conocimiento didáctico del profesor de matemática, en términos de Carrillo et al. (2014) y de las cuales dos de ellas contienen sub-categorías específicas (véase Tabla 4.5).

Tabla 4.5

*Categorías de análisis sobre el conocimiento didáctico del profesor*

Categorías	Subcategorías
<p>1. KMT: Conocimiento de las distintas estrategias de enseñanza que le permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas, procedimentales y conceptuales del alumno. También involucra conocer los recursos y materiales que le permitan acercar algún contenido matemático pupilo así como los ejemplos y representaciones pertinentes para la enseñanza de las matemáticas.</p>	<p>a) <i>Estrategias de enseñanza</i>, KMTE: Conocimiento que el profesor posee sobre los procedimientos de enseñanza que llevan al alumno a la adquisición de competencias matemáticas.</p> <p>b) <i>Materiales didácticos y Recursos</i>, KMTM: Conocimiento sobre los medios o instrumentos que facilitan la interacción y manipulación de los alumnos con el objeto matemático.</p> <p>c) <i>Representaciones</i>, KMTR: Maneras en la que el profesor presenta el contenido, aclara dudas o introduce los procedimientos y significados del objeto matemático al alumno.</p>
<p>2. KFLM: Se refiere a saber cómo aprenden los alumnos el contenido matemático; es decir, el conocimiento de las características del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos temas, los errores, dificultades, y obstáculos asociados a dichos temas y el lenguaje habitualmente usado por los estudiantes en relación con el contenido tratado en clase.</p>	<p>a) <i>Conocimientos previos</i>, KFLMC: Conocimiento del profesor acerca del bagaje matemático del alumno.</p> <p>b) <i>Perfil del alumno</i>, KFLMP: Conocimiento del docente sobre las características de los alumnos a tomar en cuenta para enseñar un tema (enfoques didácticos por ejemplo); es decir, en qué se apoya el alumno para aprender, así como el conocimiento de la influencia del entorno personal del alumno para comprender algún tema en particular.</p> <p>c) <i>Dificultades del alumno</i>, KFLMD: Conocimiento del maestro sobre las dificultades que el alumno encarará (v.gr. confusión entre el algoritmo de la división de fracciones con el de la multiplicación), el porqué de los errores y cómo ayudarlos a lidiar con ellos.</p>
<p>3. KMLS: El profesor debe conocer lo que el currículo le pide en cada etapa del ciclo escolar, relación entre los contenidos de los planes y programas además de conocer las sugerencias didácticas y de materiales que se le hacen.</p>	

A partir de las categorías, se comenzó con el estudio de datos mediante el vaciado de la información recogida en tablas de doble entrada, ya que le ofrecen al investigador la oportunidad de leer los datos de manera horizontal, vertical y global además de la capacidad de síntesis que ofrecen (Miles & Huberman, 1994).

#### 4.5.1 Análisis de las clases observadas

Como parte de este análisis, primero se revisó la bitácora empleada con M2 y las grabaciones de audio y video de las clases de las cuatro profesoras. Para este propósito, se dividió cada sesión de clase en cinco momentos claves o fases del proceso de enseñanza y uso del contenido matemático por parte del profesor. Estas cinco fases son las que propone Penzo (2010) y el Center for Applied Linguistics (s.f.), las cuales a continuación se describen:

- a) *Introducción.* En esta etapa se presenta el objetivo de la lección de forma directa o indirecta a los alumnos y además se puede relacionar, el objetivo, con la vida cotidiana del pupilo. Un ejemplo de ello son los aprendizajes esperados que se leen al principio de la lección y se encuentran ubicados en los libros de texto del alumno.
- b) *Presentación.* Se introduce el objeto matemático a través de explicaciones o demostraciones de conceptos, ideas, ejemplos, representaciones, etc. Una actividad de presentación podría involucrar el emplear fruta en el salón de clases para cortarla en cuatro partes y con ello explicar la noción de cuartos.
- c) *Práctica.* Etapa controlada de la clase en donde el alumno tiene la oportunidad de experimentar y ensayar con el objeto matemático (v.gr. dibujar varias figuras en el cuaderno y dividir las en cuartos para luego sombrear la fracción indicada por el profesor:  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{2}{4}$  ó  $\frac{3}{4}$ ).
- d) *Aplicación.* Esta fase no consiste en repetir o practicar un proceso o concepto, se trata de usarlo en caso concreto, por ejemplo, resolver un problema matemático que le signifique al alumno emplear la noción de cuartos. En esta etapa los alumnos gozan de menor supervisión por parte del docente.
- e) *Cierre.* Son todas las actividades encaminadas a evaluar el conocimiento y performance del alumno en torno a cierto tema del currículum.

Después de definir los momentos en los que se dividió cada clase video-grabada, se realizó una segunda revisión de la información que permitió obtener los fragmentos de la clase idóneos para mostrar el conocimiento didáctico del contenido, en particular, se identificaron fragmentos relacionados con la práctica del profesor y que reflejaran este conocimiento. Estos fragmentos fueron vaciados en la matriz correspondiente para su análisis (véase Tabla 4.6).



Tabla 4.6

*Matriz para analizar los datos recabados de las clases observadas*

Categoría	Sub-categoría	Desarrollo de la clase				
		Introducción	Presentación	Práctica	Aplicación	Cierre
KMT	KMTE					
	KMTM					
	KMTR					
KFLM	KFLMC					
	KFLMP					
	KFLMD					
KMLS						

**4.5.2 Análisis de la información recabada en las entrevistas**

El análisis de las entrevistas tuvo un procedimiento similar al anterior; primero se examinó el discurso de cada maestra de acuerdo con nuestro marco teórico (Carrillo et al., 2014) y se detectaron los fragmentos claves del discurso que reflejara su conocimiento didáctico al para enseñar la multiplicación de fracciones. A la par, estos fragmentos se vaciaron en la siguiente matriz:

Tabla 4.7

*Matriz para analizar la información proporcionada de las entrevistas*

Categoría	Sub-categoría	Participante			
		M1	M2	M3	M4
KMT	KMTE				
	KMTM				
	KMTR				
KFLM	KFLMC				
	KFLMP				
	KFLMD				
KMLS					

La matriz presentada permitió comparar la información otorgada por cada maestra en la entrevista, así como encontrar semejanzas y diferencias acerca del conocimiento didáctico que poseen cada una de ellas y que consideran necesario para enseñar la multiplicación de fracción. Además, esta matriz facilitó la identificación de los casos más representativos entre los cuatro profesores debido a sus características comparativas.



## CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE DATOS

El capítulo está centrado en presentar el análisis de la información obtenida en las dos etapas de recopilación de datos, en particular, para dar respuesta a las preguntas de investigación, se discuten dos estudios de caso (M1 y M3). El Capítulo está dividido en dos apartados, cada uno corresponde a un estudio de caso<sup>17</sup>. Con el fin de efectuar y mostrar el análisis correspondiente al conocimiento didáctico del profesor sobre la multiplicación de fracciones, en cada estudio de caso se hace referencia en un primer momento a la práctica del maestra registrada durante las videograbaciones y se empata con los datos recopilados en la entrevista; sin embargo, previamente se plantea un primer apartado para introducir y contextualizar ambos estudios de caso.

### 5.1 Enseñanza de la multiplicación de números fraccionarios

Las clases observadas, de las cuatro profesoras, retratan el primer contacto que el alumno de educación básica tiene con la multiplicación de fracciones. Aunque las profesoras fueron observadas por separado y en las fechas que ellos indicaron, en estas clases se trabajó la lección “El rancho de Don Luis” del Libro de texto (SEP, 2014a, p. 20), la cual pertenece al Bloque I y está centrada en la “resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales” (SEP, 2011b, p. 76). Además, cada profesora implementó sus propias actividades, estrategias y recursos, como parte de la cultura que se vive en cada salón.

Con el propósito de lograr los objetivos de aprendizaje, M1, M2 y M3 se enfocaron en enseñar la multiplicación de números racionales a través de fracciones propias, impropias, mixtas y enteros; M4 también usó los números decimales para explicar el tema. En cuanto a materiales y recursos, en todas las sesiones de clase se empleó el Libro de texto para resolver problemas relacionados con este contenido matemático, y el pizarrón como un recurso necesario para la exposición del tema y mostrar, en determinados momentos, aspectos que las profesores consideraron relevantes en torno a la enseñanza de la multiplicación de fracciones; por ejemplo, definiciones, conceptos, representaciones gráficas etc. M1, en comparación con sus colegas, también usó material manipulativo.

---

<sup>17</sup> En el análisis de datos también se tomaron algunos datos de M2 y M4, cuyo propósito es mostrar coincidencias con los dos estudios de caso, así como discutir los resultados.

De acuerdo con el desarrollo de las clases de cada profesora, es interesante observar que M2, M3 y M4, como parte de sus estrategias de enseñanza, partieron del algoritmo directo para realizar la multiplicación; es decir,  $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$ , tal que  $b, d \in \mathbb{N} \neq 0$ . Por su parte, M1 lo hizo hasta el cierre de este tema, como una forma de concluir e institucionalizar el algoritmo de la multiplicación en el conjunto de los números racionales.

## **5.2 La clase de M1: enseñar la multiplicación de fracciones como parte-todo y suma reducida**

### **5.2.1 Conocimiento didáctico de M1 al enseñar la multiplicación de fracciones**

En las clases observadas, así como en la entrevista, se puede percibir que M1<sup>18</sup> busca que los alumnos comprendan el algoritmo y significado de la multiplicación de fracciones, sin embargo la maestra manifiesta que durante su práctica se le han presentado diversos obstáculos en relación con la asignatura de matemáticas. M1 considera que los principales obstáculos que ha tenido que enfrentar es la falta de interés y gusto de sus alumnos por las matemáticas, así como la dificultad para vincular los contenidos con el contexto del alumno; por ejemplo, ella menciona en la entrevista lo siguiente:

*[El reto más grande que enfrento] para empezar [es] que [a los alumnos] les gusten las matemáticas y segundo que realmente las pueden aplicar en otra manera, que se vea que realmente le entienden... que lo apliquen [en la vida cotidiana], que lo comprendan. (E-M1)<sup>19</sup>*

Es interesante lo que M1 menciona, ya que muestra una realidad que se da en diversas aulas en México. Tal vez esta falta de interés por parte del estudiante es debido, por ejemplo, a la dificultad que dice tener la profesora para darle sentido y uso a las matemáticas. Aunque ella manifiesta estos obstáculos, en las clases observadas se puede notar que, como parte de sus estrategias de enseñanza, involucra a los estudiantes en diversas tareas matemáticas y usa problemas contextualizados para trabajar el algoritmo de la multiplicación con números fraccionarios.

---

<sup>18</sup> M1 labora en el turno matutino de una escuela primaria pública de contexto favorable ubicada en una zona rural del estado y el salón al que atiende está compuesto por 24 estudiantes. M1 tiene 10 años de experiencia docente de los cuales 2 son en el sexto grado. En lo que respecta a su formación académica, se puede mencionar que estudió la licenciatura en Educación Básica en una institución Normal del estado de Aguascalientes, posee también un Doctorado en Educación.

<sup>19</sup> Se usan los acrónimos E-M1 y E-M3 para hacer referencia a fragmentos del discurso de las profesoras M1 y M3 durante la entrevista.

A continuación, se presenta el análisis de la práctica de M1 acerca de su conocimiento didáctico al impartir la multiplicación de fracciones y algunos fragmentos de entrevista que, como ya se mencionó, amplían la información referida. Identificamos tres características principales del conocimiento didáctico, en términos del MTSK (Carrillo et al., 2013): estrategias de enseñanza, materiales y recursos, y representaciones de la multiplicación de fracciones.

### 5.2.1.1 Estrategias de enseñanza

Para lograr un aprendizaje sobre el algoritmo de la multiplicación de números fraccionarios y significado, M1 hace referencia en su práctica y discurso a una variedad de estrategias de enseñanza, por ejemplo: aprendizaje por descubrimiento dirigido, pregunta y respuesta, situaciones problema y actividades lúdicas, las cuales reflejan su conocimiento didáctico. La estrategia de enseñanza que sobresalió en la práctica de M1 es el aprendizaje por descubrimiento dirigido<sup>20</sup>; es decir, la docente guió a los niños mediante distintas actividades con el propósito de explorar el algoritmo de la multiplicación con fracciones (Domínguez, 1991). En la clase de M1, las actividades de aprendizaje por descubrimiento estuvieron centradas en diseñar modelos geométricos mediante tiras de papel y gráficos en el pizarrón para dar sentido y visualizar este algoritmo.

Como ejemplo del aprendizaje por descubrimiento en el contexto de la multiplicación de fracciones, M1 pidió a los niños recortar una tira de papel para realizar la siguiente multiplicación:  $\frac{4}{9} \times \frac{2}{4} = \frac{8}{36}$ . Los niños, con la guía de la maestra, dividieron la tira de papel en novenos y después colorearon cuatro de ellos para representar  $\frac{4}{9}$ . En seguida, M1 pidió dividir cada noveno coloreado previamente en 4 partes iguales, finalmente los alumnos sombrearon 2 cuartos de cada noveno para representar  $\frac{2}{4}$ . La docente acompañó el procedimiento manual con tiras de papel en el pizarrón a modo de guía para que los alumnos lograran comprender lo que se les pedía:

---

<sup>20</sup> El aprendizaje por descubrimiento fomenta en los estudiantes la adquisición de conocimientos a través de actividades o ejemplos que muestren cómo se usa u opera un objeto matemático para que sean ellos quienes deduzcan las reglas o algoritmos que lo envuelven (Domínguez, 1991).

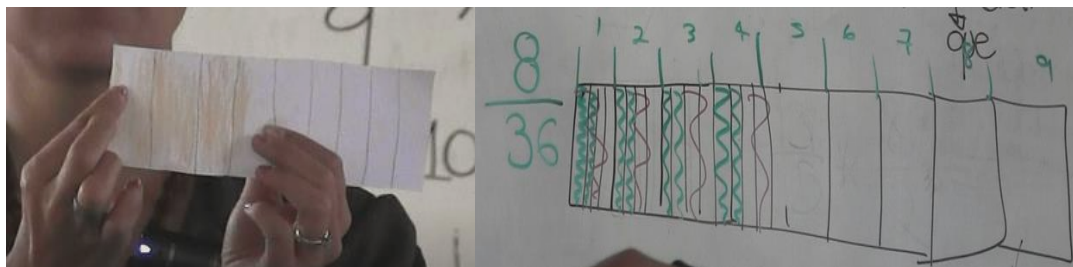


Figura 5.1. Maestra guía a los alumnos en la creación de tiras de papel.

El extracto anterior refleja cómo M1 empleó el aprendizaje por descubrimiento mediante un procedimiento no formal. Se dice que es un procedimiento no formal pues M1 no develó el algoritmo directo de la multiplicación de fracciones, sino que recurrió a una actividad en la cual los alumnos lograron identificar la regla para multiplicar fracciones. En otras palabras, descubrieron a través de colorear tiras de papel que, para obtener el producto de dos fracciones el algoritmo implicaba multiplicar directamente los numeradores y los denominadores:  $\frac{4}{9} \times \frac{2}{4} = \frac{(4)(2)}{(9)(2)} = \frac{8}{36}$ .

En distintos momentos de la sesión de clase, la docente advirtió su intención de emplear el aprendizaje por descubrimiento a sus alumnos:

*[Al inicio de la sesión] Después de tiras, al final de la clase ya cuando lo pongamos también en algún tipo de problema, lo contextualicemos, ahora sí... yo espero que todos me digan: "yo ya sé hacerlo de manera directa".*

*[Al final de la sesión] ¿Ya no hay dudas de cómo se hace? ¿Alguien en su mente nada más me dice... sí o no, ya sabe cómo se podría hacer esto [algoritmo de la multiplicación de fracciones] sin tiras? (E-M1)*

En este proceso de descubrimiento, M1 da tiempo para que los estudiantes infieran y determinan qué algoritmo han implementado para resolver el ejercicio con las tiras de papel. Este proceso tuvo lugar al final de la sesión, para ello la maestra escribió en el pizarrón la operación  $5 \times \frac{2}{4}$  y dijo lo siguiente:

*M1: Para cerrar lo de fracciones... contéstenmelo sin tiras [da marcador a alumna para que pase al pizarrón y realice la multiplicación]... va a explicar Alondra, dígalas a todos.*

*A<sup>21</sup>: Lo que pasó fue que los 5 enteros se multiplican por el 2 y se pasa el 4.*

<sup>21</sup> Se usan los acrónimos A y G para hacer referencia al Alumno y Grupo, respectivamente.

En la viñeta anterior, se hace evidente que fue la estudiante quien reveló a sus compañeros cómo manobra el algoritmo de la multiplicación con números enteros y fracciones:  $5 \times \frac{2}{4} = \frac{(5)(2)}{4} = \frac{10}{4}$ , el cual hace referencia a una suma reducida. El alumno fue responsable de su propio aprendizaje y la profesora adquirió el rol de guía, pues los condujo al encuentro del contenido. En este proceso de institucionalización, la profesora involucra a los estudiantes, quienes dan a conocer y validan lo que han descubierto. Después de la explicación otorgada por la niña, M1 institucionalizó el algoritmo:

*M1: El 4, yo ya sé que lo voy a pasar, pero ¿cómo lo voy a encontrar a veces? ¿Por cuál número se tiene que multiplicar el 4 para que me dé 4?*

*G: ¡Por 1!*

*M1: ¿Dónde creen que puedo poner el 1? Ahí [convierte los 5 enteros en fracción:  $\frac{5}{1} \times \frac{2}{4}$ ]. ¿5 x 2? 10 ¿1 x 4? 4.*

M1 muestra que el 5 también pertenece a los números racionales al considerar que éste va entre 1 (i.e.,  $\frac{5}{1}$ ), y hace uso de la propiedad de elemento neutro para dar significado al denominador 4 en el producto:  $5 \times \frac{2}{4} = \frac{5}{1} \times \frac{2}{4} = \frac{(5)(2)}{(1)(4)} = \frac{10}{4}$ . Al institucionalizar el algoritmo de la multiplicación, M1 dictó las siguientes ejercicios:  $3 \times \frac{5}{9}$ ,  $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7}$ ,  $\frac{5}{10} \times \frac{7}{9}$ ,  $\frac{2}{4} \times 5$ ,  $\frac{6}{4} \times \frac{3}{2}$ ,  $7 \times \frac{8}{3}$ .

Todos los alumnos los resolvieron de manera correcta, aun cuando la regla formalizada por la maestra tuvo que ver con enteros como primer factor. M1 abordó la multiplicación de dos fracciones propias (parte-parte) y multiplicaciones con enteros como segundo factor (operador). El momento de institucionalización se efectuó cuando M1 indicó a los niños que el algoritmo tomaba lugar al multiplicar los denominadores y los numeradores (“¿5 x 2? [Es igual a] 10 ¿1 x 4? [Es igual a] 4”).

El institucionalizar el algoritmo de la multiplicación de fracciones mediante una actividad de descubrimiento, le permitió a M1 “establecer y dar un estatus oficial al conocimiento referido en una actividad didáctica” (Brousseau, 1986 citado en Castañeda, Rosas, & Molina, 2012, p. 29). Asimismo, es importante rescatar que en este proceso de institucionalización, la profesora involucró activamente a los estudiantes, quienes dieron a conocer el algoritmo de la multiplicación como reducción de suma.

Para dar significado al algoritmo directo de la multiplicación con números fraccionarios, M1 se sirvió del enfoque de situaciones problema que el Plan de estudios

sugiere (SEP, 2011a), en particular, planteó una variedad de problemas contextualizados. En esta estrategia de enseñanza, se puede notar que los alumnos están centrados en implementar y practicar tal algoritmo con una forma de darle significado. Uno de los problemas que M1 dictó a los estudiantes es el siguiente:

*Rubén compró 3 pasteles, uno era de chocolate, otro de vainilla y el tercero de nuez. De cada pastel Rubén se comió  $\frac{2}{7}$  de rebanadas. ¿Cuánto pastel se comió Rubén en total?*

El problema dictado por la docente, implicó darle sentido a multiplicación de fracciones como suma reducida, donde se tuvo que determinar qué número fraccionario corresponde a la cantidad de pastel que Rubén comió; es decir, 3 veces  $\frac{2}{7}$ :  $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$  de pastel. Después de dictar el problema, la mayoría de los niños comenzaron a elaborar 3 tiras que representaran los enteros, sin embargo, al parecer no todos tenían claro el número de tiras. Uno de los alumnos le pregunta a M1 la cantidad de tiras de papel que hay que recortar, de modo que ella responde lo siguiente:

*M1: Vean el problema, tienen que escribir la multiplicación, tienen que pegar las tiras y convertir la fracción a mixta... la operación me va a decir qué es lo que voy a hacer con las tiras... [Después de unos segundos, pregunta a los estudiantes] ¿Por qué cortaron 3 tiras?*

*A: Porque eran 3 enteros.*

*M1: ¿En cuánto cortaron cada tira?*

*A: En séptimos.*

*M1: ¿Por qué en séptimos?*

*A: Porque en el problema dice que se comió  $\frac{2}{7}$ .*

*M1: ¿Con todo lo que se comió Rubén, se comería un pastel completo?*

*A: Ya casi, faltaba  $\frac{1}{7}$ .*

*M1: Ok, ¿cuál fue la respuesta?*

*G: ¡ $\frac{6}{7}$ !*

*M1: ¿Qué tipo de fracción es?*

*G: ¡Propia!*

*M1: ¿La puedo hacer mixta?*

*G: ¡No!*



A raíz de la situación problema dictado por M1, se derivaron varias preguntas cuyo propósito era que los estudiantes reflexionaran y se dieran cuenta de cómo obtuvieron el producto con apoyo de tiras de papel. M1 empleó la situación problema como parte de su estrategia de aprendizaje por descubrimiento, pues pidió que la resolvieran mediante procedimientos no formales. Una técnica de enseñanza fue plantear preguntas a los estudiantes, cuyo propósito principal consistió en monitorear el entendimiento del proceso de la multiplicación de números fraccionarios en los estudiantes, por ejemplo:

*M1: ¿Qué hacíamos para sacar el numerador?*

*A: ¡Contábamos!*

*M1: ¿Qué contábamos?*

*G: Los que coloreábamos [se refieren a las particiones sombreadas en los modelos geométricos].*

*M1: ... quedamos que esos iban a ser ¿qué?*

*G: ¡El numerador!*

A través de las preguntas planteadas, M1 supervisó si los niños comprendieron cómo se obtuvo el numerador del producto en la multiplicación mediante procesos no formales, con uso de tiras de papel. De acuerdo con las respuestas dadas por los alumnos, el concepto de numerador se llevó a cabo con éxito. El realizar este tipo de preguntas a los estudiantes, le permitió a M1 detectar si la guía brindada por ella hasta el momento había sido efectiva y con ello vigilar el desempeño del alumno en torno a este tema y tratar las posibles dificultades de los niños.

*Un aspecto fundamental en el conocimiento didáctico de M1 gira en torno a las características que deben tener las actividades empleadas en el salón de clases, cuyo propósito es lograr los objetivos de aprendizaje esperados en el Programa de matemáticas (SEP, 2011a), al respecto, la maestra menciona en la entrevista que:*

*Las características de cada una de las actividades... Bueno, para empezar tienen que estar de acuerdo a los aprendizajes esperados, no querer abarcar más de lo que nos pide el programa, ¿qué más?... Tienen que estar en base al programa, tienen que estar en base a los conocimientos [previos] que tiene el alumno para que de alguna manera los pueda ir resolviendo tomando en cuenta su contexto... Deben de ser llamativas para los alumnos... a través de material didáctico, lúdicas; o sea, que el alumno realmente interactúe con las fracciones y no lo vean como algo memorístico.*

*(E-M1)*

De acuerdo con el discurso de la profesora, para ella las actividades que planea en el salón de clases deben apegarse al Programa de estudios (SEP, 2011b). Es notorio que M1 tiene claro que debe lograr los objetivos de aprendizaje y ello significa tener las actividades, ejercicios o problemas (situaciones-problemas) adecuados.

El argumentó que M1 da para determinar que las actividades se apeguen al Programa de estudios, es considerar que éste es un documento oficial donde están los contenidos a tratar y los aprendizajes esperados, así como el perfil matemático del alumno y su contexto personal. M1 sugiere la implementación de actividades lúdicas para la enseñanza de la multiplicación de fracciones, las cuales sean pertinentes para el alumno y de modo que se dé oportunidad de interactuar con el objeto matemático. M1 enfatiza que las actividades lúdicas deben ayudar a que el alumno comprenda lo que se le está enseñando y no llevarlo a memorización o provocar dificultades; es decir, en términos de Yasoda (2009), consideramos que para M1 el juego rompe en cierta forma con la idea de que las matemáticas son rutinarias y estrictas, de modo que las acerca a la realidad del alumno.

En congruencia con su discurso, en la clase M1 empleó situaciones problema, enfoque propuesto por el Programa de estudios (SEP, 2011b, p. 67) para guiar al alumno al descubrimiento de la multiplicación de fracciones. Ejemplo de lo anterior es la situación problema sobre la cantidad de pastel que Rubén comió, en donde se aborda el concepto de suma reducida. Las actividades desarrolladas por los estudiantes cumplieron con las características solicitadas por la docente, ya que ellos fueron los encargados de crear su propio material didáctico (tiras de papel) y eso favoreció para comprender y descubrir la regla de la multiplicación de fracciones.

#### **5.2.1.2 Materiales didácticos y recursos en la clase**

Las hojas de papel fue el material didáctico más significativo en la clase de M1, a través de él se le dio significado al algoritmo de la multiplicación de fracciones. Para introducir este contenido, M1 recurrió a las fracciones y a los números enteros como factores de la multiplicación, donde la fracción es operador y se espera calcular un parte del entero,  $\frac{a}{b}$  de  $n$ , tal que  $b \neq 0$ ; M1 entregó varias hojas de papel a  $\frac{3}{4}$  partes del grupo (es decir, a 18 alumnos de un total de 24), con el objetivo de determinar el número de estudiantes que corresponde a las  $\frac{3}{4}$  partes del grupo:

M1: ¿Cuántos somos en total en el grupo?

G: ¡24 [alumnos]!

M1: Si estamos hablando de fracciones, ¿24 viene siendo mi qué?

G: ¡Entero!

M1: Si son los 24 y yo les quiero dar a  $\frac{3}{4}$  de ustedes media hoja [de papel], ¿a cuántos les voy a dar?

G: ¡18 [alumnos]!

La maestra pretendía que los alumnos descubrieran qué cantidad representaban los  $\frac{3}{4}$  del grupo a través de las hojas de papel. Éstos revelaron desde el principio el resultado (18 alumnos de 24). Al ver esto, M1 pide a los alumnos que comprobaran su respuesta con las hojas de máquina, pues ella menciona lo siguiente: “¿cómo le puedo hacer? [...] A ver, ¿cómo le hago? se pueden parar, se pueden contar [...] ¿cómo le hago?”. Las hojas de papel sirvieron de base para dar sentido a la multiplicación de fracciones. En el siguiente extracto, se ejemplifica cómo M1 pidió a los niños recortar tiras de papel para resolver  $4 \times \frac{2}{3}$ :

M1: Ahora les traigo otro reto, ¿cómo puedo multiplicar 4 enteros por  $\frac{2}{3}$ ?... ¿Qué es lo que necesito entonces? En esa hoja vamos a ir sacando enteros ¿sí? dice que necesito 4 enteros. Yo necesito 4 tiras... porque son 4 enteros.

G: [Miden y recortan las hojas de colores para obtener cuatro tiras que representan los enteros, mientras M1 las representa en el pizarrón [véase Figura 5.2].

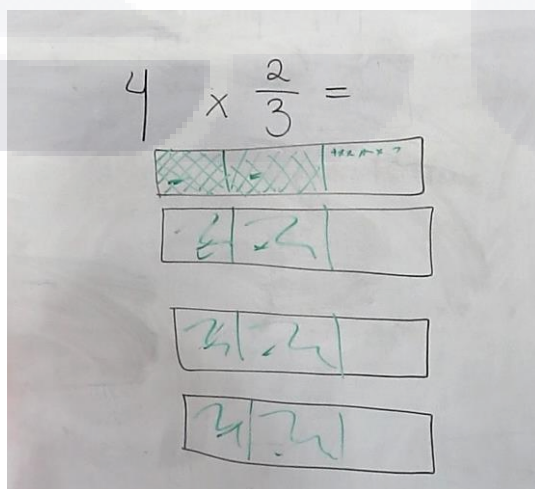


Figura 5.2. Representación gráfica de las cuatro tiras de papel que para calcular  $\frac{2}{3}$ .

M1: *¿Qué es lo que tengo que hacer? Éstos son cada uno de mis enteros ¿sí? [Señala las tiras dibujadas en el pizarrón] Ahora me tengo que fijar en la siguiente fracción que es  $\frac{2}{3}$ . ¿Qué creen que tenemos que hacer?*

A: *Cada entero partirlo en 3.*

M1: *Vamos a partir cada entero en tercios [alumnos miden o doblan las tiras para obtener tercios, Figura 5.3].*



Figura 5.3. Niño doblando las tiras de papel para obtener tercios.

M1: *Ahora, ¿qué me está pidiendo mi fracción también? Ya lo partí en tercios... tengo que agarrar 2 de cada entero... ¿Cómo le vamos a hacer? Ahora sí, con su lápiz o su pluma le van a hacer algún trazado [i.e., sombreado o coloreado de  $\frac{2}{3}$  de cada entero] sobre la hoja de color.*

Como se nota en el fragmento, M1 empleó una representación gráfica para ejemplificar el algoritmo de la multiplicación de enteros por fracciones, la cual los niños tenían que recrear con las hojas de papel (véase Figura 5.3). Para la representación gráfica, M1 dibujó en el pizarrón las 3 tiras de papel que representan los enteros, después dividió cada entero en 3 partes iguales y sombreadó  $\frac{2}{3}$  de cada uno para hacer evidente que el producto de multiplicar 4 enteros por  $\frac{2}{3}$  son  $\frac{8}{3}$ .

A diferencia del primer ejercicio con hojas de papel, en este ejemplo los alumnos tiene la oportunidad de manipular las hojas de papel para crear tiras que les servirán en la resolución del ejercicio; en otras palabras, M1 invita a los niños a crear su propio material didáctico y de esta manera recrear conceptos como enteros o tercios y profundizar en la multiplicación de fracciones con números enteros. El hecho de que los niños manipulen, elaboren y diseñen su propio material, los convierte en alumnos activos y autónomos involucrados en la creación y adquisición de nuevos conceptos y aprendizajes (Esch,

1996). Es de resaltar la relevancia de las hojas de papel en la construcción del algoritmo, ello podría deberse a la fácil manipulación y accesibilidad que M1 le da.

Además de tiras de papel, M1 se sirvió del pizarrón como apoyo para el modelaje de las instrucciones que daba a los alumnos (por ejemplo, ella les dice: “En esa hoja vamos a ir sacando enteros ¿sí? Dice que necesito 4 enteros. Yo necesito 4 tiras... porque son 4 enteros”) y como base visual tiene el gráfico trazado en el pizarrón (véase Figura 5.2). Por otro lado, M1 hace énfasis en la entrevista de la utilización del material didáctico adecuado en el aula de clases para impartir la multiplicación de fracciones:

*Hay muchísimos recursos... su plan de estudio, su diagnóstico, interactivos, de internet, hojas de trabajo, hay material concreto, que yo puedo diseñar. Ahora sí que para fracciones hay una infinidad porque todo se puede dividir. Entonces todo depende de... “qué le interesa a usted, qué les llama la atención a sus niños.” (E-M1)*

M1 mencionó, en la viñeta, una variedad de recursos y materiales para abordar la multiplicación de fracciones que van desde audiovisuales, nuevas tecnologías pasando por materiales auténticos, concretos y manipulativos hasta llegar a aquellos diseñados por el mismo docente. Añadiendo, M1 asevera que las propiedades principales de todo material didáctico son el atractivo y pertinencia; es decir, deberán ser adecuados al bagaje matemático del alumno, contexto personal de éste y currículum para que logren captar su atención y finalmente involucrase con el contenido matemático.

### **5.2.1.3 Representaciones de las fracciones y la multiplicación**

Las explicaciones por parte de M1 fueron de especial interés en esta investigación, ya que a través de ellas la profesora reveló, en general, su dominio y conocimiento sobre la multiplicación de fracciones y su capacidad para transmitirlo, aunque también se detectaron algunas confusiones. De todas las explicaciones realizadas por M1, centraremos la atención en la siguiente, donde la maestra se encuentra exponiendo la multiplicación de enteros con fracciones a manera de suma reducida y explica a un estudiante cómo debe ser el orden de los factores:

*Para que se nos haga más fácil vamos a tratar siempre de poner primero los enteros ¿sí? En una multiplicación es lo mismo si lo pongo acá [como primer factor] que lo ponga acá [como segundo factor].*

Es notorio que para M1 no hay una diferencia de significado en cuanto al entero como primer o segundo factor, pues su argumento está centrado en el producto; el orden de los factores no altera el producto, esto se debe a la propiedad *Conmutativa*:  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$  (Gispert, 2001). De acuerdo con Son (2012), el significado de multiplicar enteros con fracciones cambia según la posición de éstos; en otros términos, si el entero va como primer factor, estaremos hablando de una suma reducida mientras que cuando va como segundo factor se habla de operador. Se infiere que M1 tiene una dificultad en cuanto a su conocimiento sobre los significados de la multiplicación de fracciones pues se supondría que tendría que reconocer la diferencia entre una suma reducida y operador.

Una confusión similar resulta muy ilustrativa en el caso de M2 quien recrea la misma dificultad en el conocimiento del contenido de la multiplicación de fracciones (confusión con la ley de conmutación de los números naturales) y además muestra una falta de entendimiento del procedimiento de la multiplicación de fracciones como parte-parte:

*M2: Niños este ejemplo [ $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ ] quiero que lo veamos de otra manera y ustedes me van a decir si nos da lo mismo... de  $\frac{2}{5}$  yo voy a agarrar  $\frac{3}{4}$  ¿qué resultado me dio?*

*G:  $i\frac{6}{20}$ !*

*M2: Pero al final de cuentas ¿en cuánto se convierte todo?*

*G:  $i\frac{3}{10}$ !*

*M2: Y me da exactamente lo mismo [se refiere al producto de multiplicar  $\frac{2}{5}$  por  $\frac{3}{4}$ ].*

En el fragmento precedente, M2 hace notar a los niños que el orden de los factores  $\frac{3}{4}$  y  $\frac{2}{5}$  no altera el producto y ni su significado debido a la propiedad de conmutación. Aunque el orden de los factores en una multiplicación de fracciones no altera el producto, el significado de ésta sí podría cambiar y están en función del contexto que representan. Lo que mostró M2 en el fragmento anterior podría reducirse a una dificultad en el significado de las fracciones del algoritmo de la multiplicación debido a la propiedad de la conmutación.

Para sustentar su explicación sobre el orden de los factores en la multiplicación de fracciones, M2 recurre a representaciones gráficas que los alumnos copian en su libreta (ver figura 5.4) y les explica que el resultado es el mismo pero la representación gráfica cambia; es decir, no es lo mismo  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{2}{5}$  que  $\frac{2}{5}$  de  $\frac{3}{4}$ . Esto es una contradicción de la

maestra, pues al parecer lo que interesa es el producto y no su significado. Aunque M2 hizo la precisión pertinente sobre intercambiar los factores de la multiplicación de fracciones propias, las representaciones gráficas elaboradas por ella presentaron dificultades:

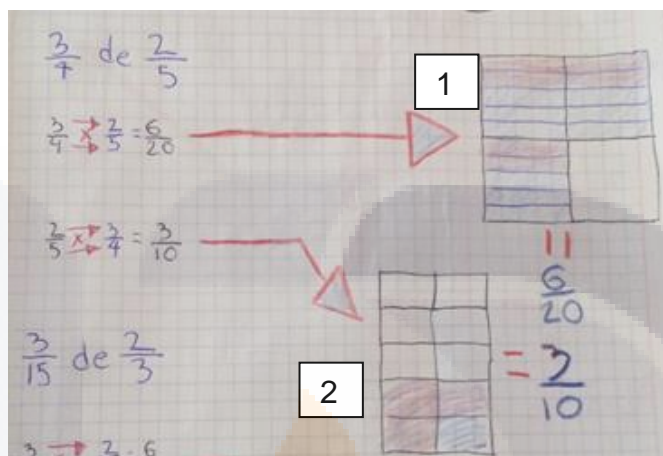
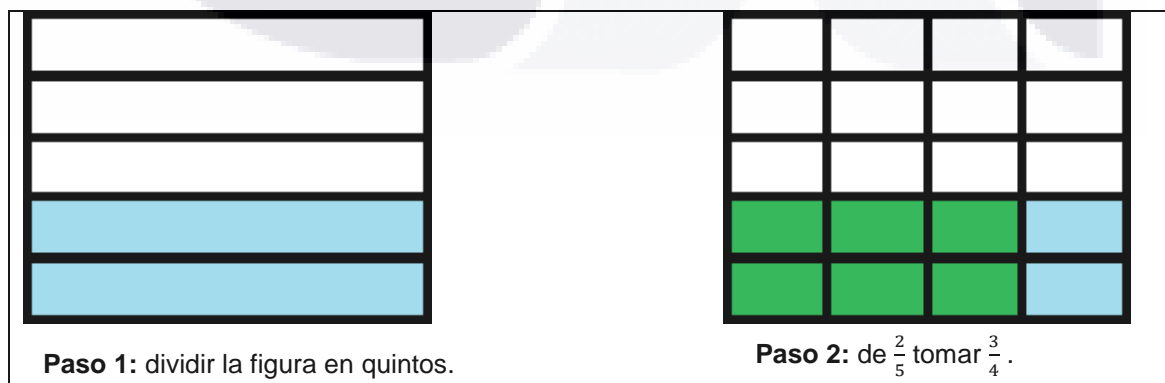


Figura 5.4. Representación del producto de dos fracciones mediante la propiedad conmutativa

Para realizar los procedimientos gráficos de la primera multiplicación ( $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ ), la maestra dividió el cuadrado en 4 partes iguales de los cuales sombreó 3. Luego dividió cada cuarto en 5 y sombreó  $\frac{2}{5}$  de cada cuarto. Este desarrollo, en palabras de Son (2012) es incorrecto pues la multiplicación de fracciones que eligió la maestra exige buscar  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{2}{5}$  de un entero. Aunque verbalmente se lee de izquierda a derecha el algoritmo de la multiplicación de fracciones, al momento de crear un modelo gráfico, se comienza a dividir la figura acorde al factor de la derecha:



**Paso 1:** dividir la figura en quintos.

**Paso 2:** de  $\frac{2}{5}$  tomar  $\frac{3}{4}$ .

Figura 5.5. Sugerencia: Una forma de graficar el proceso de multiplicar  $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ .

Nótese que la segunda representación gráfica, concerniente a la operación  $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ , tampoco está elaborada de la manera apropiada (Figura 5.4) ya que la maestra dividió la figura en 5 partes para luego cada quinto fragmentarlo en dos, después sombreó con color rojo 3 porciones, o sea  $\frac{3}{10}$  del total. M1 también presenta esta dificultad en la representación gráfica de la multiplicación de fracciones propias puesto que tomó como referencia la lectura oral de izquierda a derecha para plasmarla visualmente:

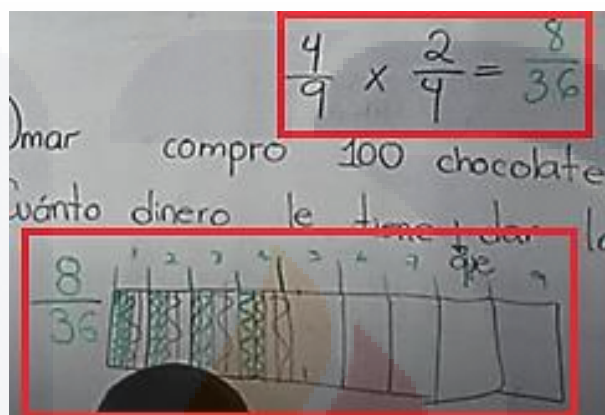


Figura 5.6. Lectura de izquierda a derecha de una multiplicación de fracciones.

Como ya se mencionó, dicha confusión en las representaciones gráficas de ambas maestras se debe a una limitante en el dominio matemático del contenido. En palabras de Carrillo et al. (2014) este dominio permite al profesor de matemáticas comprender el objeto a enseñar de forma total; es decir, su fundamentación teórica, los conocimientos ligados a éste, los distintos significados y contextos del contenido matemático y las formas adecuadas en las que se puede representar para ser mostrado al alumno. Por su parte, Hill et al. (2005) advierten que todo profesor es capaz de usar recursos visuales que permitan a los pupilos interpretar pertinentemente conceptos y procedimientos del objeto matemático. De acuerdo con lo anterior, se infiere que M1 y M2 requieren reforzar la comprensión de la multiplicación de fracciones para la representación gráfica, sí como los distintos significados del uso de los enteros en torno a este tema.

El significado de la multiplicación de fracciones como suma reducida predomina en la práctica de la M1, pues aunque no expresa de forma explícita que la multiplicación de fracciones equivale a una suma repetida, sí lo hace de manera tácita, como se presenta en el siguiente momento luego que M1 terminó de repartir las 18 mitades a los alumnos:



*¿Qué tuvimos que ir haciendo? Contando cada... medio más medio, más medio, más medio, más medio, más medio hasta que completé los 18... Entonces al igual que en la suma yo tendría que estar sumando medio, medio más, medio, más medio, más medio, más medio.*

La representación de la multiplicación de fracciones como una suma repetida es en parte, una confusión con los números naturales (Rifandi, 2014), pues no hay un conocimiento extenso de los distintos significados de la multiplicación de fracciones. Cabe aclarar que en efecto, hay situaciones donde la multiplicación de fracciones podría desglosarse en sumas, con todo, esta propiedad no está presente en todos los casos por lo que el docente ha de ser muy cuidadoso con la manera que plantea el contenido.

## **5.2.2 Características del aprendizaje de los alumnos**

### **5.2.2.1 Conocimientos previos**

La indagación de los conocimientos previos del alumno es parte fundamental en la práctica de M1 pues es el punto de partida para presentar la multiplicación de fracciones, esto en palabras de la propia docente durante la entrevista:

*Para introducir [la multiplicación de fracciones]... Yo le diría [al profesor]: “maestro, ponga unas fracciones en el pizarrón al azar y váyales preguntando: ¿a ver cómo se llama esta fracción? ¿Cuál es el numerador? ¿Cuál es el denominador?” (E-M1)*

M1 sugiere que, a modo de introducción al tema, los maestros deben hacer preguntas para identificar el conocimiento previo de los alumnos acerca de los tipos de fracción y sus partes. Durante la sesión, M1 tuvo varias oportunidades para retomar los conocimientos de los alumnos como se muestra en el siguiente fragmento de la clase:

*M1: ¿Qué tipo de fracción me quedó aquí? [Señala  $\frac{15}{72}$  en el pizarrón]*

*A: Propia*

*M1: ¿Cómo le tengo que hacer para convertirla en decimal?*

*A: Dividiendo 72 entre...*

*M1: ¿72?*

*A: ¡15 entre 72!*

*M1: Que no se nos olvide lo que hemos estado viendo.*

En el fragmento precedente, M1 recurre a los conocimientos previos de los aprendientes sobre dos temas en concreto: tipos de fracciones y conversión de fracciones a decimales. Se puede inferir que la intención de activar los conocimientos previos de los niños es mantener presente los temas aprendidos anteriormente en clase, pues M1 no les pide que involucren los decimales con la multiplicación de fracciones. M1 retoma en la entrevista el tema del papel de los conocimientos previos del alumno y propone:

*Para empezar [con la multiplicación de fracciones, el maestro] debe de ver el nivel que tienen sus alumnos en cuanto al conocimiento de fracciones o de la multiplicación de fracciones... un diagnóstico. (E-M1)*

Aunque M1 no indagó el nivel de conocimiento de fracciones de sus alumnos al inicio de la sesión, es consciente de la importancia de conocer lo que los estudiantes saben sobre los tipos de fracciones, pues según ella el docente no debe descartar la posibilidad de que ya existe una noción del tema por lo que debe averiguarlo a través de diagnósticos. Además, M1 considera que el diagnóstico es el primer paso que todo educador debe emplear antes de comenzar a hablar de multiplicación de fracciones.

Lo anterior podría deberse a que M1 considera que los diagnósticos, además de identificar el dominio del niño sobre el tema, permiten diseñar estrategias oportunas que propongan soluciones a las dificultades matemáticas que atraviesa el alumno además de prevenir situaciones tales como confusiones o malinterpretaciones sobre el contenido que puedan poner en riesgo el entendimiento y adquisición del mismo.

### **5.2.2.2 Conocimiento del perfil del alumno**

A continuación se discutirán los hallazgos obtenidos durante la fase de observación sobre el conocimiento del perfil del alumno de M1. Para ello, se presenta una viñeta de la clase donde M1 pretende dictar un problema sobre multiplicación de fracciones. Antes de comenzar a dictar el problema, pregunta a los alumnos sus fechas de cumpleaños y selecciona a un alumno, Rubén, para elaborar la situación problemática a resolver:

*M1: En una hoja nueva dicto un problema, uhm ¿quién cumple años este mes?*

*G: ¡Rubén!*

*M1: Ok, le ponemos: Rubén compró 3 pasteles... [Interrumpe el dictado para preguntar al alumno] ¿De qué te gustan los pasteles Rubén?*

*Rubén: De Chocolate.*

M1: ¡Ah! [Retoma el dictado] uno era de chocolate, otro de vainilla y el tercero de nuez. De cada pastel Rubén se comió  $\frac{2}{7}$  de rebanadas, ¿cuánto pastel se comió Rubén en total?

En el fragmento precedente se aprecia cómo la maestra emplea las fechas de cumpleaños y, de manera concreta, los gustos del niño. En otras palabras, M1 acerca el objeto matemático a través de problemas y ejemplos bajados a los intereses del niño y contexto personal, en este caso la fecha de cumpleaños y preferencia en pasteles para lograr involucrarlos en el tema. De esta manera, M1 ameniza el contenido y logra que los pupilos conecten con éste haciéndoles ver que el tema es significativo en otros contextos (e.g. celebraciones de cumpleaños) aparte del escolar. Aunque no se detectaron más ejemplos donde la profesora jugara con los gustos y ambiente personal del estudiante durante las clases videograbadas, M1 sí toca este tema en la entrevista:

*Generalmente cuando le preguntas a un niño sobre cualquier ejercicio sobre... bueno, multiplicación de fracciones siempre va a dar un ejemplo de algo que él ha vivido. (E-M1)*

M1 da cuenta de la importancia de conocer el perfil de los niños a través de sus experiencias y el ambiente social que les rodea, ya que es por medio de sus experiencias que le da significado al objeto matemático y lo integra a su vida cotidiana. De aquí que M1 enfatice la importancia aproximar y darle significado al objeto matemático con el uso de ejemplos contextualizados. Por otra parte, cuando se le pregunta si toma en cuenta la realidad de alumno para comprender trabajar la multiplicación de fracción, M1 asegura que no siempre se puede tomar la realidad del estudiante debido a presiones académicas, evaluativas y curriculares:

*Hay ciertas evaluaciones que se les hace a los alumnos a x tiempo que a nosotros como maestros pues nos traen con el Plan [de estudios] a todo lo que da. Entonces si yo me centro en la individualidad de cada alumno no voy a alcanzar. Hay muchísimas situaciones que no nos permiten llegar a eso [tomar en cuenta al alumno] como carga administrativa, que si le toca conmemorar lo de la navidad, actividades de ruta de mejora, conjunto de contenidos de cada asignatura, imprevistos personales... (E-M1)*

De acuerdo con la SEP (2011b), el maestro debe tomar en cuenta las necesidades específicas del alumno, lo que de acuerdo con M1 es imposible debido a las presiones administrativas y evaluativas. La percepción de M1 ha sido también reforzada por varios

autores (Ball et al., 2001; Yasoda, 2009), quienes aseguran que los maestros tienden a cambiar sus planeaciones y actividades para así cubrir todos los temas que el currículum y sesiones evaluativas les solicitan, siendo difícil basarse en la realidad de los alumnos.

### 5.2.2.3 Sobre las dificultades del alumno

Las dificultades que presenta el profesor en su práctica sobre multiplicación de fracciones, recae directamente en las dificultades que el alumno tiene respecto al tema. Éstas se relacionan, por ejemplo, con las tablas de multiplicar, el algoritmo de multiplicar números enteros y no identificar las partes de la fracción, tal como lo menciona M1:

*Si no se sabe las tablas de multiplicar se van a perder... [Otra dificultad es] que no sepan multiplicar, que yo les diga de manera directa “vas a multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador” y que se queden en ‘¿cuál es el numerador? ¿Cuál es el denominador?’ Que si yo les quiere implementar las tiritas [de papel] que no sepan cómo partirlas, que si yo les diga “lo vas a dividir en cuartos” que no sepan cómo partirlo en cuartos... (E-M1)*

Las dificultades que menciona M1 podrían ser englobas en dos categorías, la primera hace alusión a la falta de conocimientos previos en el niño y abarca aspectos tales como las tablas de multiplicar y conceptos básicos de fracciones como el significado de numerador o denominador; la segunda se relaciona con los conocimientos procedimentales del alumno sobre cómo llevar a cabo multiplicaciones y cómo obtener fracciones a partir de diversos materiales y recursos, tal como partir, doblar o recortar. Un ejemplo sería no saber cómo partir una barra de chocolate en 8 partes iguales o no saber cómo doblar una hoja para obtener novenos.

Una de las soluciones que M1 plantea para sobrellevar los obstáculos y problemas de los alumnos es hacer un diagnóstico de la multiplicación de fracciones con la intención de identificar los conocimientos previos o las dificultades que tienen y los aspectos que deben reforzarse:

*Tiene que hacer su diagnóstico, pero su diagnóstico no se tiene que enfrascar nada más a ponerles “a ver, multiplícame  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$ ”... Su diagnóstico tiene que ir “a ver, dibújame en esto un entero”. O sea, que vaya viendo todos los antecedentes que tiene que tener [los alumnos] para que a partir de eso vea en qué parte tiene que reforzar para llegar a*

esa multiplicación, porque si nada más le pone  $\frac{1}{2} \times \frac{5}{8}$  y sacan mal los niños la operación, pues no va a saber desde dónde partir, puede ser que va a tener que partir desde qué es un entero, qué es una fracción. En cambio, si pone todos los pasos [antecedentes de la multiplicación de fracciones] va a decir “¡ah!, eso ya lo dominan todos, nada más donde se equivocan es donde no sabe cuáles son las fracciones equivalentes”... La manera más sencilla de enseñar fracciones es no obviar ciertas situaciones porque hay veces que nosotros entendemos qué es un entero pero los niños no entienden qué es un entero, no entienden qué implica el entero. (E-M1)

Un aspecto importante que menciona M1 sobre la enseñanza de las fracciones en general es no dar por hecho que los estudiantes entienden los conceptos y algoritmos que rodean a la fracción, por más simple que sean para el docente. Es fácil caer en esta situación pues los alumnos trabajan a lo largo de varios años con las fracciones en su vida escolar, lo lógico sería que al llegar a sexto grado no tuvieran alguna dificultad con la suma de fracciones como antecedente de la multiplicación; en palabras de M1, el conocimiento previo o las posibles dificultades se pueden detectar mediante un diagnóstico oportuno.

En el salón de clases, M1 puso en marcha 3 distintas estrategias para el tratamiento de las dificultades de los alumnos. El primero se refiere a la explicación de procedimientos y respuestas a alumnos que no comprendieron el procedimiento de la multiplicación de fracciones por parte de sus compañeros. Un ejemplo de lo anterior ocurrió cuando M1 pidió contestar el siguiente ejercicio del libro:

## 9 El rancho de don Luis

### Consigna

En parejas, resuelvan los problemas.

1. En el rancho de don Luis hay un terreno en el que siembra hortalizas que mide  $\frac{1}{2}$  hm de ancho por  $\frac{2}{3}$  hm de largo. Don Luis necesita saber el área del terreno para comprar las semillas y los fertilizantes necesarios.

¿Cuál es el área?

*Figura 5.7.* Problema de multiplicación de fracciones en el Libro de texto (SEP, 2011a, p. 20).

La situación problema planteada en la Figura 5.7 requiere que el niño multiplique dos fracciones propias ( $\frac{1}{2}$  y  $\frac{2}{3}$ ) por lo que el significado empleado en éste es el de parte de una parte (Son, 2012). A través de este problema, los estudiantes tuvieron la oportunidad de ver cómo opera la multiplicación de fracciones en un contexto que involucraba al propietario de un rancho. De acuerdo con las instrucciones de la maestra, los estudiantes debían obtener el área del rancho de Don Luis empleando tiras que obtenían de hojas de papel. Después, los niños debían dividir las tiras de papel en tercios y cada tercio en medios. Para ello, los niños tenían que colorear un medio de cada tercio obteniendo como producto final  $\frac{2}{6}$ , como se muestra en la siguiente figura:

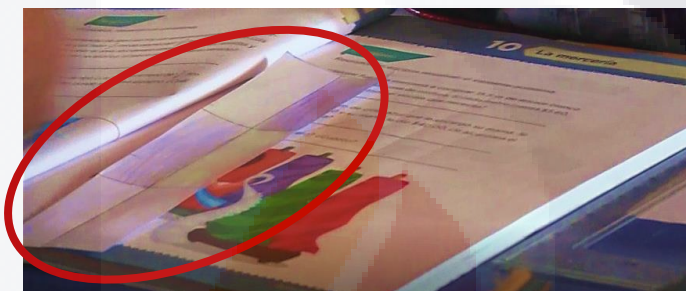


Figura 5.8. Resolución de problemas del libro mediante tiras de papel.

Al término de la actividad, M1 pidió a los niños mostrar sus tiras de papel con el resultado correcto; es decir, la porción correspondiente sombreada en la figura. Es en este momento cuando se percata que algunos estudiantes no siguieron el procedimiento correcto, de modo que les que pidió que se dirigieran con sus compañeros a explicar el procedimiento correcto. Es probable que no hayan obtenido la respuesta correcta porque aún no comprendían cómo operar la multiplicación de fracciones con las tiras de papel.

También puede ser que fue la primera vez que vieron a la multiplicación de fracciones contextualizada; previamente, habían trabajado con este contenido de una manera aislada, se les presentaba la operación multiplicativa que debían resolver (e.g.,  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$ ), este cambio pudo significar un dilema para el niño. Ante esta situación, M1 pidió a algunos alumnos que se dirigieran con sus compañeros a explicar el procedimiento correcto y la respuesta.

Las otras estrategias empleadas fueron: pregunta y respuesta y lectura en voz alta. Un ejemplo de lo anterior es cuando un niño solicitó la ayuda de la maestra al no comprender qué hacer para resolver el problema de los pasteles de Rubén:

A: *Maestra, ¿voy a multiplicar el 4 por 1 entero?... [La maestra lo interrumpe].*

M1: *¿Por qué por un entero? Lee el problema en voz alta.*

A: *[Lee el problema] Rubén compró 3 pasteles, uno era de chocolate, otro de vainilla y el tercero de nuez. De cada pastel, Rubén se comió  $\frac{2}{7}$  de rebanadas, ¿cuánto pastel se comió en total?*

M1: *¿De qué trata el problema?*

A: *De cuánto comió Rubén.*

M1: *Ok, ahí ¿cuáles son los enteros?*

A: *Uno.*

M1: *¿Uno? ¿Por qué uno? Me está hablando de que tiene un qué entonces, ¿qué es lo que tiene Rubén?*

A: *Pasteles.*

M1: *¿Y nada más tiene un pastel?*

A: *Es que son 3 pasteles... 3 enteros.*

M1: *[Afirma con la cabeza para indicarle que está en lo correcto]. (E-M1)*

El fragmento muestra a la maestra ayudando a un niño que no ha logrado identificar qué factores están contenidos en la situación problema, los cuales son los que se deben multiplicar a través de tiras. El propósito de ambas estrategias es despertar la reflexión del alumno para que sea él mismo quien dé solución a sus dificultades en la comprensión del tema. Tales acciones de M1, fueron exitosas pues consiguió que el alumno analizara su fallo y encontrara la respuesta adecuada y así corregir el error.

Cabe remarcar que a lo largo de la clase de M1, no se encontraron ejemplos explícitos donde la maestra anticipase el error de los alumnos y ponga en marcha soluciones evidentes para estos problemas. Esto podría deberse a que se está analizando la didáctica del profesor al momento, no se tomó en cuenta la planeación del maestro para este proyecto pues es probable que sea en este momento donde M1 tomara en cuenta tales aspectos; además, es pertinente mencionar que no conocemos las necesidades y características de los alumnos.

### **5.2.3 Sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas**

El último aspecto a analizar es aquél que tiene qué ver con el currículum que el maestro está obligado a trabajar en el aula de acuerdo con la SEP (2011a). Para indagar en este

conocimiento, se le preguntó a M1 sobre las sugerencias que se deben de tomar en cuenta y provienen del Plan de estudios para enseñar a multiplicar valores fraccionarios, ésta fue la respuesta de M1:

*Mira, para empezar el Plan de estudios ni siquiera coincide con el libro de texto. El Plan de estudios por ejemplo, muestra lo que son los Aprendizajes Esperados (i.e., objetivos de aprendizaje) lo que son los contenidos nada más. En este caso, si Javier se fue por el Plan de estudios [se refiere a uno de los ejemplos que se le proporcionó para analizar durante entrevista] pues debió de haber tomado en cuenta nada más su Aprendizaje Esperado, hasta dónde tenía que llegar. El Plan de estudios sí maneja algunos otros conceptos como que qué tipo de competencias, más bien es una explicación de por qué utilizamos aprendizajes y demás [...] al Libro para el maestro... ya no maneja aprendizajes esperados, maneja contenido y la Intención Didáctica (i.e., objetivos de aprendizaje). (E-M1)*

La viñeta anterior muestra el conocimiento de M1 sobre los conceptos y estructura en los que se apoyan el Plan de estudios y libro del maestro. En un primer momento, la maestra hace referencia a la incongruencia de estos dos elementos en cuestiones de terminología pues para referirse a un mismo concepto, objetivos de aprendizaje, el Plan de estudios emplea el término *Aprendizaje Esperado* mientras que libro del maestro le llama *Intención Didáctica*. Llama la atención que M1 hace una descripción amplia de la intención del Plan de estudios y su contenido pues asegura que éste tiene como propósito darle a conocer al maestro el catálogo de temas a seguir y competencias a desarrollar además de las razones por las cuales se persigue determinado aprendizaje en el alumno.

En esta viñeta la maestra resalta que el Plan de estudios es una sugerencia que se debe tomar a reserva de la realidad personal y académica del alumno; en otras palabras, si el Libro de texto presenta la multiplicación de fracciones a través de situaciones cotidianas de la ciudad, es probable que un niño de otro contexto no logre comprender esa situación, o es probable que un grupo de alumnos de sexto año no haya recibido las bases correctas de la suma de fracciones. En ambos casos, el docente tiene la responsabilidad de darle significado dependiendo de las características del alumno o del grupo.

Cuando se le preguntó a M1 si la propuesta del Libro de texto es suficiente para enseñar la multiplicación de fracciones, ella consideró que este recurso es adecuado para este propósito pero son los alumnos quienes presentan dificultades:



*Lamentablemente no todos los niños... tienen el nivel adecuado para que solamente con los ejercicios del libro alcancen el aprendizaje. Es por eso que ahora sí que como tarea tienes que saber en qué nivel están tus alumnos para hacer tus adecuaciones.*  
(E-M1)

La maestra indica que los conocimientos previos influyen directamente en el éxito del empleo del Libro de texto, a través de él los alumnos serán capaces de entender y resolver los ejercicios planteados; sin embargo, hay otros factores que los maestros deberán indagar cuando perciban que la propuesta del Libro, en ocasiones, requiere ser reforzada con otras actividades. El maestro tiene que analizar e identificar cómo piensan y experimentan las matemáticas los estudiantes (Schoenfeld, 2002), con el fin de evaluar y determinar si el Libro de texto y currículum manejan enfoques didácticos y metodologías que beneficien al alumno.

Aunque se planteó el propósito de identificar elementos del conocimiento de M1 sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas de la profesora, este conocimiento se hizo evidente en la entrevista y no en las clases observadas. Lo anterior podría deberse a que no se empató la práctica de la maestra con su planeación didáctica, ni tampoco M1 hizo referencia directa a elementos de este tipo de conocimiento didáctico como el Programa de estudios (SEP, 2011b) en el aula. Es relevante mencionar que en esta investigación no se tomó en cuenta la planeación de la clase.

#### **5.2.4 M1 y la multiplicación de fracciones: síntesis**

A manera de resumen se rescata la información presentada sobre el conocimiento didáctico de M1 para enseñar la multiplicación de fracciones en el siguiente diagrama, así como una reflexión de las tres principales dimensiones de este conocimiento:

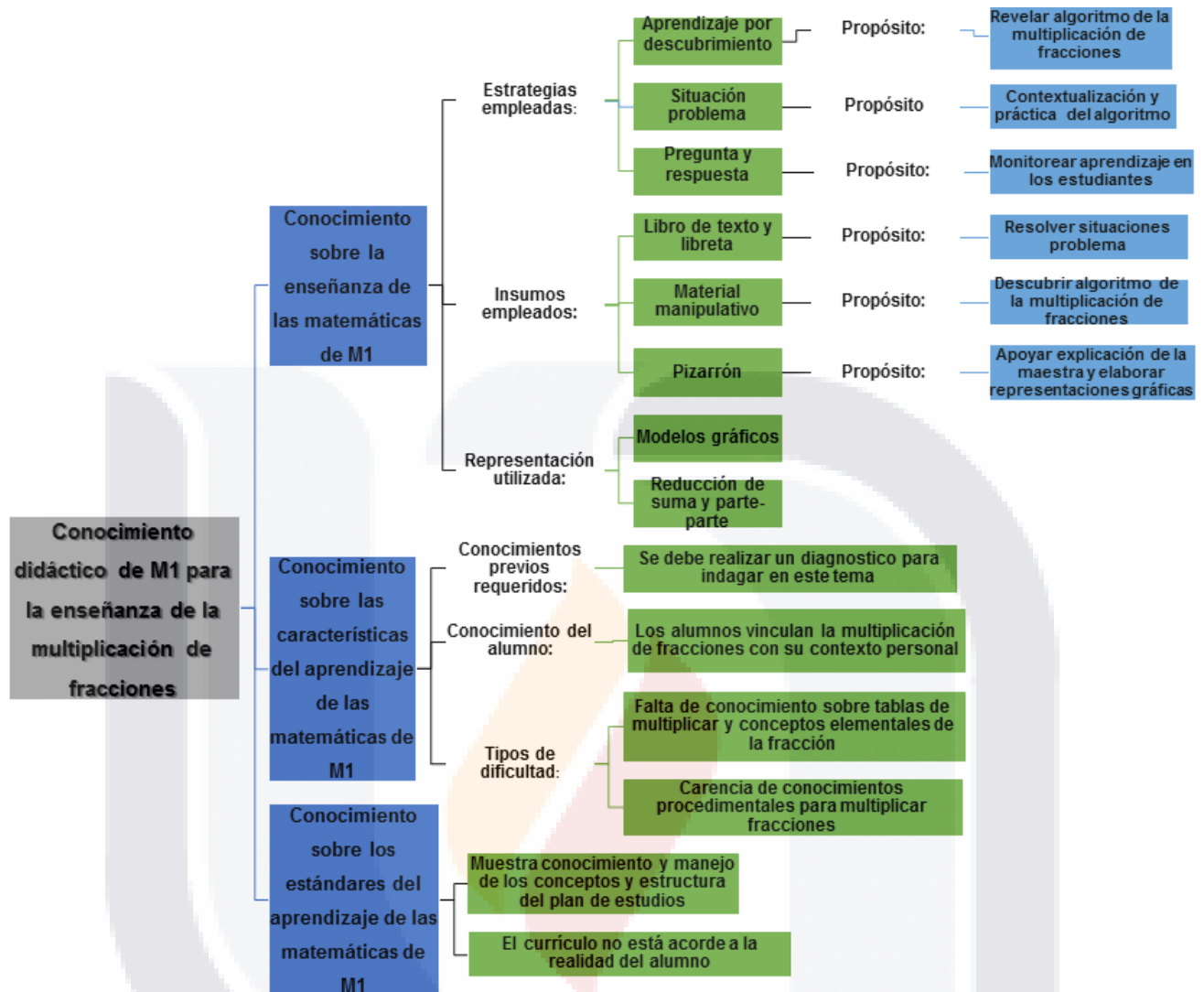


Figura 5.9. Diagrama del conocimiento didáctico de M1 para enseñar la multiplicación de fracciones.

**Conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas.** Durante las sesiones observadas se pudo apreciar que el aprendizaje por descubrimiento tomó un papel relevante en la práctica de M1, por medio de la resolución de ejercicios con material manipulativo guió a los alumnos para que descubrieran el algoritmo de la multiplicación de fracciones. El enfoque basado en situaciones problemas se observó al final de cada una de las dos sesiones de M1, donde los estudiantes debieron dar solución a problemas del Libro de texto o a problemas dictados por la maestra asociados al objeto matemático. Cabe señalar que los problemas fueron resueltos a través de procedimientos formales (algoritmo directo) y no formales (elaboración de tiras de papel). También se presentó la

técnica de pregunta y respuesta para supervisar el proceso de la multiplicación fracciones en los estudiantes.

El material manipulativo en forma de hojas y tiras de papel fue el más recurrido en el salón de clases para realizar procedimientos no formales sobre multiplicación de fracciones. Conjuntamente se empleó el pizarrón para elaborar representaciones gráficas del proceso de multiplicar fracciones y el Libro de texto donde también se resolvieron situaciones problemáticas, además de problemas planteados por la profesora. En cuanto a las representaciones, se observa que M1 dio especial importancia a los modelos gráficos para explicar visualmente el procedimiento de la multiplicación de fracciones. Se detecta en el discurso una referencia clara de la multiplicación de fracciones como suma repetida.

**Conocimiento sobre las características del aprendizaje de las matemáticas.** Se observó que M1 da especial importancia a la indagación de conocimientos previos sobre la multiplicación de fracciones y los conceptos básicos de la fracción a través de un diagnóstico. De acuerdo con M1, este diagnóstico representa una valoración del profesor sobre las dificultades del alumno y los temas que se deben reforzar antes de comenzar con la multiplicación de fracciones.

M1 recurrió a una variedad de situaciones problemas sobre multiplicación de fracciones para que los estudiantes dieran cuenta sobre el algoritmo de la multiplicación con números racionales y para que construyeran un significado de ésta. Además, durante la entrevistas, M1 asevera que los niños emplean su contexto para dar significado a la multiplicación de fracciones; sin embargo, considera que la situación de los planes y programas de estudios vigentes y las exigencias administrativas dificultan la consideración del contexto del niño en el aula.

M1 considera que los estudiantes presentan dos tipos de dificultad al momento de aprender la multiplicación de fracciones. La primera hace alusión a la falta de conocimientos previos sobre las tablas de multiplicar, y los conceptos elementales de la fracción. El segundo es sobre la carencia de conocimientos procedimentales necesarios para multiplicar fracciones, es decir, inconvenientes al desarrollar el algoritmo de la multiplicación de números enteros y no saber cómo obtener fracciones a partir de materiales como hojas de papel. Para sobrellevar cualquiera de estas dificultades, M1 sugiere realizar un diagnóstico previo, apoyarse de los alumnos para que sean ellos

quienes expliquen el tema e incitar la reflexión de los niños por medio de la pregunta y respuesta y lectura en voz alta.

**Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas:** M1 muestra un conocimiento y manejo de los conceptos y estructura del Plan y Programa de estudios. Así mismo, considera que aunque el Libro de texto no se ajusta a las distintas realidades del estudiante, éste debe ser tomado como sugerencia, lo verdaderamente obligatorio son los aprendizajes esperados.

### **5.3. La clase de M3: enseñar la multiplicación de fracciones como parte-todo, suma reducida y operador**

#### **5.3.1 Conocimiento didáctico de M3**

##### **5.3.1.1 Estrategias de enseñanza**

El enfoque de enseñanza que predominó en la clase de M3<sup>22</sup> es el de situaciones problema, el cual también usó M1 al final de las dos sesiones de clase. Este enfoque lo implementó M3 para presentar a los alumnos el algoritmo de la multiplicación de fracciones al inicio de la clase y practicarlo el resto de la sesión. La situación que empleó M3 para presentar a los alumnos el algoritmo de la multiplicación de valores fraccionarios es la siguiente:

*En la estantería A hay 60 botellas de  $\frac{3}{4}$  de litro cada una, y en la estantería B hay 120 botellas de  $\frac{1}{5}$  de litro cada una. ¿Cuántos litros tiene en total las botellas de cada estantería? (Aceves et al., 2014, s/p)*

La situación problemática presentada por M3 involucra trabajar la multiplicación de fracciones como una suma reducida de acuerdo con Son (2012). Para cada situación se espera que los alumnos multipliquen el número de botellas por la capacidad de litros de cada botella:  $(n)\left(\frac{b}{d}\right)$ , tal que  $n, b, d \in \mathbb{N} \neq 0$ . Al tener la multiplicación como una suma reducida, el significado es  $n$  determina las veces que  $\frac{b}{d}$  se suma por sí mismo:  $n$  veces  $\frac{b}{d}$

---

<sup>22</sup> M3 realiza su práctica docente en una escuela primaria pública de contexto desfavorable en el turno vespertino. El grupo de estudiantes a los que imparte clase está conformado por 32 alumnos. M3 ha dedicado 23 años a la profesión docente de los cuales 18 han sido dedicados al 6° grado. M3 posee dos licenciaturas, una en Educación Básica y la otra en Educación Secundaria con especialidad en español. Además, M3 cursó una maestría en docencia e investigación. En palabras de esta maestra, su principal reto en torno a las matemáticas es apoyar a los alumnos para que salgan bien preparados y enfrentarse a la vida cotidiana.

(Son, 2012). Para que los alumnos respondieran la situación problemática, M3 recurrió a la técnica de pregunta y respuesta como una forma de guiar a los niños para que deduzcan el algoritmo que deben utilizar:

M3: *¿Cómo lo pudiéramos resolver? díganme ustedes...*

G: *¡Multiplicando!*

M3: *¿Qué vamos a multiplicar?*

G: *60 botellas.*

M3: *60 botellas ¿por? No sé... ¿cuánto contiene cada botella?*

G:  *$\frac{3}{4}$ !*

M3: *Entonces vamos a multiplicar 60 ¿por?*

G:  *$\frac{3}{4}$ !*

M3: *[Escribe  $60 \times \frac{3}{4}$  en el pizarrón] ¿Cierto?*

G: *¡Sí!*

M3: *Para saber cuánto tenemos en total ¿y en la estantería B?*

G: *¡ $120 \times \frac{1}{5}$ !*

M3: *[Escribe  $120 \times \frac{1}{5}$  en el pizarrón], ¿cómo resolveríamos esa multiplicación, si aquí tenemos enteros y acá tenemos fracción?*

G: *Convertir a fracción.*

M3: *Vamos a convertir a fracción ¿qué?*

G: *¡El 60!*

En el extracto anterior M3 guía, a través de preguntas y el uso de conocimientos previos (conversión de fracciones), a los estudiantes para que deduzcan los factores de la multiplicación de fracción y lo que se debe hacer cuando se presentan enteros; en otras palabras, la conversión de enteros en fracción. Aunque M3 está presentando a la multiplicación de fracciones en su concepción de suma, ésta no hace referencia a este significado. Podría suponerse que ello se debe a que el foco de la maestra fue que los estudiantes conocieran y practicasen el algoritmo de la multiplicación de fracciones.

La segunda situación problema que M3 empleó para que los estudiantes practicasen la multiplicación de fracciones está en Libros *Me Divierto y Aprendo 6* (Aceves et al., 2014, s/p), el cual es un recurso en la profesora se apoya de manera constante durante la observación de su clase. Esta situación problema es la siguiente:

En una caja de 100 relojes,  $\frac{2}{5}$  son de color azul; de esos relojes azules,  $\frac{3}{4}$  son digitales.  
¿Qué fracción del total representan los relojes digitales?

La situación precedente representa una multiplicación de enteros por fracciones propias. El significado que se emplea en esta ocasión es el de operador según Son (2012), donde se espera que los alumnos obtengan parte-todo:  $\frac{b}{d}$  de  $n$ , en la situación planteada sería  $\left(\frac{c}{e}\right)\left(\frac{b}{d}\right)$  de  $n$ . Como puede verse en el siguiente fragmento, para calcular los relojes azules (40) los estudiantes tomaron  $\frac{2}{5}$  de 100, luego  $\frac{3}{4}$  de 40 para determinar la cantidad de relojes digitales (30):

M3: [Alumnos se encuentran resolviendo la primera situación problema sobre las botellas y litros] ¿Cuántos litros obtuvimos entonces? [Se refiere a los litros de la estantería B que se obtienen al multiplicar  $120 \times \frac{1}{5}$ ].

G: ¡24 litros!

M3: ¿Hasta ahí tenemos alguna duda?

G: No.

M3: ¿No? Ok, ése fue uno de los ejemplos de cómo podemos realizar problemas multiplicativos con fracciones, ¿de acuerdo?, ¿dudas?

G: No.

M3: ¿Ya tomaron nota?

G: Sí.

M3: Nos pasamos al ejemplo 2: en una caja de 100 relojes,  $\frac{2}{5}$  son de color azul...

A través de la situación problema, antes descrita, los alumnos pudieron tener la oportunidad de conocer la multiplicación de fracciones como operador y diferenciarlo de la suma reducida. Sin embargo, esta oportunidad se vio disminuida, ya que M3 transitó de la reducción de suma a la multiplicación de fracciones como operador de un momento a otro, sin dar oportunidad para que los niños comprendieran la diferencia entre ambos significados.

Como se muestra en el fragmento precedente, M3 no dio oportunidad a los estudiantes de que estuvieran más en contacto con problemas multiplicativos de tipo suma reducida, pues al terminar de resolver situación problema presentó la otra concerniente a la multiplicación de valores fraccionarios como operador. Esta transición,

sin una reflexión de su diferencia, pudo haber causado dificultades en la comprensión del estudiante sobre el significado de la multiplicación de fracciones, tal vez identificar que “ $n$  veces  $\frac{b}{a}$ ” y “ $\frac{b}{a}$  de  $n$ ” se refieren al mismo, al determinar que el algoritmo funciona igual y se tiene el mismo producto, lo cual podría generar obstáculos epistemológicos y conceptuales.

Es evidente que M1 busca que sus alumnos construyan un conocimiento de la multiplicación de la fracción mediante el algoritmo convencional. Sin embargo, en el siguiente extracto se hace evidente cómo M3 empleó un procedimiento no formal para resolver la situación problema sobre los relojes:

M3: *A ver, díganme qué podemos hacer para resolver esa situación. El total son 100 relojes, ése es el entero ¿sí? el total. Pero de ese total, dice ahí,  $\frac{2}{5}$  son de color azul ¿qué tenemos que hacer?*

A: *Multiplicar*

M3: *¿Multiplicar?*

A: *Dividir*

M3: *¿Qué vamos a dividir?*

A:  $\frac{2}{5}$  y  $\frac{3}{4}$

M3: *Primero ¿qué tenemos que identificar? ¿Cuáles son los de color azul? ¿Sí está claro?*

G: *Sí.*

M3: *[Dibuja en el pizarrón un rectángulo que representa la centena de relojes] Son los 100 relojes, ¿en qué lo vamos a dividir?*

G: *En 5 partes.*

M3: *¿Cuánto es 100 entre 5? [Al no contestar bien la pregunta los alumnos, M3 continúa con la explicación]... Primero tenemos que saber cuántos son azules, no se cofundan. Yo te doy 100 relojes y te digo, de esos 100 relojes me vas a separar  $\frac{2}{5}$  del total, ¿qué van a hacer?*

G: *Dividir... 100 entre 5.*

M3: *¿Por qué entre 5? Porque primero tenemos que saber cuánto es  $\frac{1}{5}$  de 100. ¿Cuánto es 100 entre 5 entonces?*

G: *¡20!*

M3: 20 relojes equivale a un  $\frac{1}{5}$ , pero aquí nos dice que son  $\frac{2}{5}$  de esos 100, ¿qué tenemos que hacer?

G: ¿Multiplicar? ¿ $20 \times 5$ ? ¿ $20 \times 4$ ? ¿ $20 \times 2$ ?

M3:  $20 \times 2$  porque son dos  $\frac{2}{5}$  ... ¿cuántos son de color azul?

G: ¡40!

M3: Pero la pregunta es... ¿Qué fracción del total representan los relojes digitales? Es decir, de este total que ya tenemos de azules, ¿cuánto es  $\frac{3}{4}$ ?, ¿qué tenemos que hacer?

A: Multiplicar.

M3: Multiplicar  $\frac{3}{4}$  por 40, entonces [escribe  $\frac{3}{4} \times 40$  en el pizarrón], si el 40 es el entero, ¿lo vamos a convertir a qué?

G: ¡A fracción! [Luego de esto, los alumnos resuelven el problema mediante el algoritmo directo de la multiplicación de fracciones].

De acuerdo con este fragmento de clase, en vez de emplear el algoritmo directo, M3 decidió que primero se obtendría el valor de cada quinto del entero para así calcular la cantidad de relojes exactos en  $\frac{2}{5}$ , de modo que determina  $\frac{100}{5} = 20$ , tal que  $(20)(2) = 40$  relojes azules =  $\frac{2}{5}$  de 100 relojes. Esto les permitió a los alumnos usar el algoritmo directo  $\frac{3}{4} \times \frac{40}{1}$  y obtener 30 relojes azules digitales como respuesta a la situación planteada. Por lo tanto, para los problemas de multiplicación de fracciones como operador, M3 decidió emplear primero un procedimiento no formal (esto se vio cuando les indicó obtener el valor de  $\frac{1}{5}$  de 100 para determinar los  $\frac{2}{5}$ ) y después el procedimiento formal con el algoritmo directo.

Llama la atención que en esta situación problema M3 brindó a los niños de forma visual el significado de la multiplicación de fracciones como operador al dibujar un rectángulo en el pizarrón y decir que ése representa los 100 relojes (véase Figura 5.10). En este caso, los 100 relojes significan la unidad que fue simbolizada por un rectángulo con el fin de que los niños pudiesen conceptualizar visualmente al entero como unidad, y la partición les permite a los niños identificar cada parte qué número de relojes le corresponde de modo que en dos partes iguales se refiere a 40 relojes de color azul.



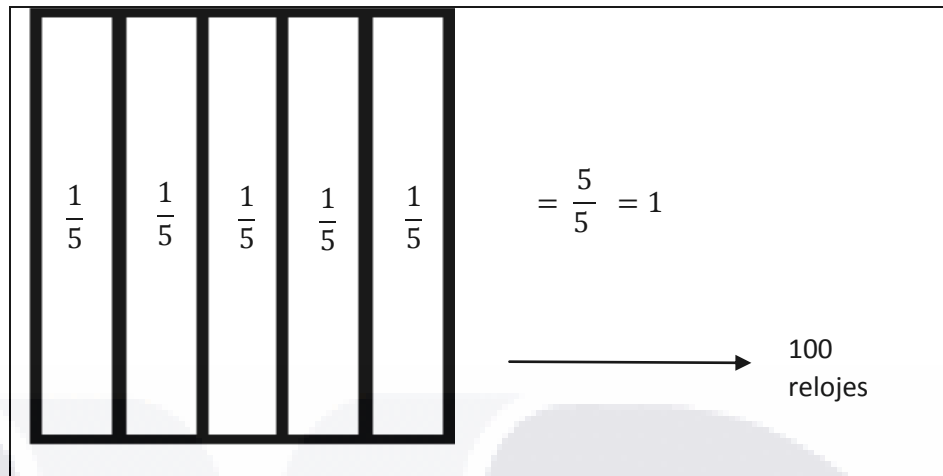


Figura 5.10. Representación gráfica empleada por M3 para simbolizar los 100 relojes divididos en quintos

La tercera y última situación que dictó la maestra fue extraída también del libro *Me Divierto y Aprendo 6* (Aceves et al., 2014, s/p) y consistió en lo siguiente: “En la papelería hay 50 borradores de los cuales  $\frac{2}{4}$  de éstos son bicolores; de esos  $\frac{1}{5}$  son chicos. ¿Qué fracción representa los borradores chicos?”

El problema presentado es, de nueva cuenta, una multiplicación de fracciones como operador y fue resuelta por los alumnos con el mismo procedimiento empleado en la situación problema de los relojes; es decir, primero calcularon  $\frac{2}{4}$  de 50 para obtener 25 borradores bicolores y luego  $\frac{1}{5}$  de 25 para concluir que 5 de estos borradores son chicos. En esta ocasión, los alumnos sí tuvieron la oportunidad de reforzar, mediante la práctica, su conocimiento sobre la multiplicación de fracciones como operador dado que fue la segunda situación que resolvieron de este tipo.

La práctica de M3 observada en el salón de clases da una especial importancia al enfoque de situaciones problema, pues acompañó a los alumnos en el descubrimiento y práctica del algoritmo explícito de la multiplicación de valores fraccionarios mediante las situaciones del libro *Me Divierto y Aprendo 6* (Aceves et al., 2014) y del libro de texto (SEP, 2014a, p. 20), como recursos fundamentales. Es de destacar la congruencia de la maestra tanto en su práctica en el salón de clases, así como en su discurso en la entrevista, pues reflejan el enfoque didáctico:

*[El maestro debe] iniciar primero con las fracciones, o sea identificar una fracción. Luego... partir de una situación cotidiana para introducir. Y ya en el desarrollo, a partir*

de la situación, aterrizar en lo que es el algoritmo, o sea la operación de fracciones. Ya cuando queda claro eso, entonces ya los niños pueden hacer operaciones con planteamiento matemático o sin planteamiento matemático. (E-M3)

Al parecer, de acuerdo con el discurso de la maestra, para iniciar con el contenido de la multiplicación de fracciones se deben considerar los conocimientos previos de los alumnos sobre temas anteriores de fracciones. Cabe mencionar que M3 recomienda contextualizar la multiplicación de fracciones a través de una situación problema y partir de ésta para explicar su algoritmo. Según M3, si el alumno es capaz de entender este tema a través de situaciones problema, también será capaz de resolver problemas multiplicativos de fracciones contextualizadas o ejercicios donde se presente este contenido matemático de manera aislada, pues el algoritmo está institucionalizado. De aquí que M3 le dé a este enfoque didáctico el papel principal en su práctica para enseñar a multiplicar valores fraccionarios. Sin embargo, la situación problema no es desencadenante de la reflexión de los niños, es sólo el contexto, o el pretexto, que sirve de base a la exposición de un algoritmo de parte de la docente.

### 5.3.1.2 Materiales didácticos y recursos usados en la clase

A diferencia de M1 quien se distinguió por emplear hojas de papel para dar significado a la multiplicación de fracciones, M3 se apoyó principalmente de materiales diseñados para la enseñanza tal como el libro *Me Divierto y Aprendo 6* (Aceves et al., 2014) y el Libro de texto autorizado por la SEP (2014a). M3 empleó las situaciones problemas del primer libro para presentar la multiplicación de fracciones a manera de suma reducida y operador (véase Figura 5.11).

**Ejemplo 3**

En la estantería **A**, hay 60 botellas de  $\frac{3}{4}$  de litro cada una y en la estantería **B** hay 120 botellas de  $\frac{1}{5}$  de litro cada una. ¿Cuántos litros contienen en total las botellas de cada estantería? ¡Vamos a resolverlo! Rápidamente notamos que debemos multiplicar el número de botellas de cada estante por el contenido de cada una.

► Resuelve la siguiente situación.

En la papelería hay 50 borradores de los cuáles  $\frac{2}{4}$  de éstos son bicolors; de esos  $\frac{1}{5}$  son chicos. ¿Qué fracción representa los borradores bicolors chicos?

Figura 5.11. Situaciones problemas dictadas por M3 a los alumnos para practicar la multiplicación de fracciones como suma reducida y operador (Aceves et al., 2014).

Las actividades planteadas por el Libro de texto y el libro “Me Divierto y Aprendo 6” implicaban situaciones problemas, enfoque didáctico seleccionado por M3 para impartir la multiplicación de fracciones por lo que hay una congruencia del material empleado con el enfoque aplicado en el salón, aunque como ya se menciona, no las posibilidades didácticas del enfoque de resolución de problemas. Otros insumos empleados por M3 fueron el pizarrón para represar visualmente explicaciones sobre el procedimiento del algoritmo de la multiplicación de fracciones y para que los niños resolvieran situaciones problema dictados por la maestra o planteados en el libro como se muestra en la Figura 5.12, donde M3 ayudó a los niños a reducir el producto de la multiplicación de fracciones:

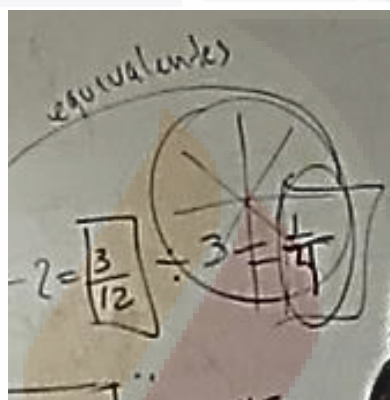


Figura 5.12. Procedimiento en el pizarrón para reducir una fracción propia.

M3 hace referencia, durante la entrevista, que existen otro tipo de materiales e insumos que considera pertinentes para enseñar el algoritmo de la multiplicación de fracciones, por ejemplo, ella menciona lo siguiente:

*Todo lo que hay a tu alrededor [sirve para enseñar la multiplicación de fracciones]. Yo siempre me apoyo de situaciones cotidianas..., todos los recursos didácticos, el libro de texto, las guías [como el empleado en la clase de la editorial Montenegro], yo soy mucho de darles ejercicios también fotocopiados, tienen un cuaderno de ruta de mejora donde ellos hacen sus propios planteamientos y lo resuelven, o sea, todo eso... depende del objetivo que se quiere lograr, en este caso enseñar la multiplicación de fracciones, puedes buscar material enfocado a la multiplicación de fracciones... Hay otro tipo de ejercicios que tienen... lectura de comprensión enfocada a las matemáticas donde a partir de una situación te plantean preguntas.*  
(E-M3)

De acuerdo con M3, los materiales ideales para enseñar la multiplicación de fracciones son: situaciones problemas entendidas como *situaciones* cotidianas, Libros de texto, guías, fotocopias con ejercicios del tema, cuadernos de los alumnos donde ellos crean sus propias situaciones problemas y lecturas de comprensión enfocada en las matemáticas. Como se puede observar en el fragmento presentado, la mayoría de los materiales sugeridos por la maestra para enseñar este contenido matemático involucran directamente al niño con la escritura, lectura de resolución de problemas y ejercicios matemáticos; en especial, estos últimos más como repeticiones y mecanizaciones que como motivos para la reflexión.

Asimismo, en este fragmento de entrevista se muestra que el propósito de los recursos como los libros de texto, guías y cuadernos es el de practicar y conservar la información para ser consultada posteriormente. Por su parte, las lecturas de comprensión con enfoque matemático de las que habla M3, plantean situaciones problema en donde el niño, a través de un contexto, emplea sus conocimientos previos y recientemente adquiridos sobre la multiplicación de fracciones para resolver el problema. Por segunda vez, hay una congruencia entre el material aludido por M3 y lo sucedido su aula.

### 5.3.1.3 Representaciones de la fracción y la multiplicación

Las representaciones que emplea M3 para desarrollar el objeto matemático en cuestión, se encuentran contenidas en las situaciones problema de Aceves et al. (2014); por ende, son indispensables las situaciones problemas que M3 presenta a los alumnos:

**Situación 1:**

En la estantería A, hay 60 botellas de  $\frac{3}{4}$  de litro cada una y en la estantería B hay 120 botellas de  $\frac{1}{5}$  de litro cada una. ¿Cuántos litros tienen en total las botellas de cada estantería?

**Situación 2:**

En una caja de 100 relojes,  $\frac{2}{5}$  son de color azul; de esos relojes azules,  $\frac{3}{4}$  son digitales. ¿Qué fracción del total representan los relojes digitales?

**Situación 3:**

En la papelería hay 50 borradores de los cuales  $\frac{2}{4}$  de éstos son bicolors; de esos  $\frac{1}{5}$  son chicos. ¿Qué fracción representa los borradores bicolors chicos?

En la situación 1, M3 eligió impartió la multiplicación de fracciones como suma reducida ya que en palabras de Son (2012), los enteros indican la cantidad de veces que se repetirá la fracción. En las situaciones 2 y 3, la multiplicación de fracciones aparece como operador puesto, donde el entero simboliza una unidad de la cual se toma lo que la fracción (multiplicando) indique (Son, 2012).

Aunado a estas situaciones problema, M3 pidió a los alumnos que contestar las situaciones problemas del Libro de texto (SEP, 2011a; consultar Figura 3.4 del presente documento) que implican resolver problemas multiplicativos con valores fraccionarios referentes a áreas. Este tipo de situaciones llevan al niño a usar el significado de la multiplicación de fracciones como parte de una parte al multiplicar dos fracciones (Son, 2012). En total, M3 empleó tres significados de la fracción empleando como representación las situaciones problema, estos significados son: suma reducida, operador, parte de una parte. Es importante mencionar que M3 no explicita estos significados durante la sesión de clase, ni tampoco hace referencia a las diferencias que hay en situaciones problemas planteadas.

M3 coincide con M1 en que la falta de conocimientos de representaciones gráficas de la multiplicación de fracción desemboca en dificultades en torno a la práctica del maestro, por ejemplo, en la entrevista ella menciona lo siguiente:

*A lo mejor la representación gráfica pudiera ser un problema [en la práctica del maestro]. A veces a los niños, si tú se lo planteas de manera gráfica, entonces como que bueno, comprenden más que de manera numérica. Con la gráfica ellos entienden por qué son  $\frac{4}{4}$  y representándoles las dos fracciones [los dos factores de la multiplicación] y ya ver el resultado ya lo relacionan con la multiplicación. Ésa es una dificultad que se nos presenta a nosotros maestros ¿cómo hacerles entender a los niños gráficamente el resultado de una operación?... A veces nosotros como maestros no lo hacemos, por el tiempo...o por más rápido y dejamos de lado esa partecita. Sí es importante hacerlo, en los planteamientos matemáticos yo aplico ese*

*aspecto: datos, operaciones, representación gráfica y resultada porque si en las operaciones no lo quedó claro, la representación gráfica le va ayudar al niño a que comprenda un poquito más. (E-M3)*

La relevancia que M3 otorga a la enseñanza de la multiplicación de fracciones es a través de las representaciones gráficas. Para la docente, éstas le dan al alumno una idea más clara de lo que se le está pidiendo hacer y acercan al alumno al objeto matemático. De acuerdo con M3, ella implementa la representación gráfica en los planteamientos matemáticos (situaciones problema), sin embargo, en la clase videograbada no se observó que hay usado este recurso visual para ejemplificar el algoritmo de la multiplicación de fracciones y darle significado. La única representación visual empleada tuvo lugar en el transcurso de la situación 2 sobre los relojes azules y digitales, donde la docente quería ejemplificar el concepto de unidad para obtener una parte de ésta:  $\frac{2}{5}$  de 100 (véase Figura 5.10).

Aunque M3 resalta en la entrevista la importancia que tienen las representaciones visuales para que el alumno comprenda la multiplicación de fracciones, en la sesión observada empleó una vez este recurso como apoyo a la comprensión de los estudiantes. Es probable que, como menciona M3 en el fragmento anterior (“*A veces nosotros como maestros no lo hacemos, por el tiempo...*”), no haya ilustrado la multiplicación de fracciones a través de representaciones gráficas debido a cuestiones asociadas al tiempo.

### **5.3.2 Características del aprendizaje de los alumnos**

#### **5.3.2.1 Conocimientos previos y las dificultades del alumno**

El siguiente punto trata del conocimiento de M3 acerca de los antecedentes matemáticos de sus alumnos y qué acciones toma para indagar en ellos. El fragmento que a continuación se muestra parte de la primera situación problema que empleó M3 para introducir la multiplicación de fracciones. En este fragmento se pretende indagar en la comprensión de M3 sobre el bagaje matemático del alumno y las dificultades de éste sobre la conversión de enteros a fracciones:

*M3: Entonces, hay que convertir el entero a fracción ¿cómo lo convertimos? ¿Cómo convertimos 60 a fracción?*

*A: El 60 por, pues por esos  $\frac{3}{4}$ .*

M3: No, pero primero tenemos que convertir éste [señala 60 en el pizarrón] para poder hacer la multiplicación, si no, no la podemos resolver. Acuérdense que tenemos que hacerlo con la misma representación numérica y aquí ya tenemos fracción, [acá] tenemos entero. Ya vimos que éste [señala  $\frac{3}{4}$  en el pizarrón] no lo podemos convertir a enteros porque no se completa ni uno. Entonces nos queda ahora convertir ésta [señala 60 en el pizarrón] a fracción, ¿cómo lo podemos resolver si son 60 enteros? Un entero es una unidad ¿sí?

A: 6 enteros.

M3: ¿6 enteros? Tenemos más de 6, ¿cuántos son?

A: ¡60!

M3: 60... les recuerdo los de las fracciones equivalentes, que para convertir a fracción equivalente, y si queremos simplificar fracciones, dividimos. Recuerden un poquito ese proceso. ¿Cómo convertir entonces [interrumpe un alumno]?

A: ¡ $\frac{1}{6}$ !

M3: Pero un  $\frac{1}{6}$  no es 60 enteros.

A: 6 enteros.

M3: Tenemos 60 chicos, los enteros ya están, son 60 enteros ¿sí?...Nadie lo recuerda ¿no? Ok... ¿Cómo yo puedo entonces obtener los 60 enteros? ¿Entre qué número lo tengo que dividir para que me dé 60?

A: [Dan diferentes respuestas] ¡Entre 4! ¡Entre 3!

M3: Si yo divido 60 entre 4, ¿me va a dar 60?

A: [Dan diferentes respuestas] ¡Entre 5! ¡Entre 1!

M3: ¡Entre 1! Dividan 60 entre 1 a ver cuánto les da.

G: 60.

M3: ¿Sí? estoy convirtiendo mi entero... en fracción [escribe  $\frac{60}{1}$  en el pizarrón]. Como ya tengo mi fracción ahora sí puedo resolver mi operación.

M3 pretendió apoyarse del bagaje que los alumnos tienen sobre los enteros y conversión de fracciones para introducir la multiplicación de fracciones como suma reducida., de modo que busca recuperar los conocimientos previos sobre las tablas de multiplicar para resolver divisiones y de esta forma convertir los enteros a fracción (e.g., cuando ella les dice: “Si yo divido 60 entre 4, ¿me va a dar 60?”). Al igual que en M1, en la clase de M3 los conocimientos previos funcionaron como un puente para construir

nuevas estructuras matemáticas concernientes a la multiplicación de fracciones, aunque todo este proceso estuvo dirigido por la docente, sin dar un espacio real para que los alumnos reflexionaran en la situación.

Además, en el fragmento de la entrevista se muestra cómo la falta de conocimientos previos sobre los temas de propiedades de enteros y conversión de enteros a fracciones dificulta el entendimiento de los estudiantes sobre la multiplicación de fracciones. Esto se debe a que el proceso elegido por M3 para impartir este contenido matemático fue el de enseñar directamente el algoritmo  $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{d \cdot d}\right)$  a través de una situación problema; sin embargo, al no tener dos denominadores explícitos (sólo se tenía un entero y una fracción:  $n \cdot \frac{a}{b}$ , tal que  $n, b, d \in \mathbb{N} \neq 0$ ) los alumnos no fueron capaces de resolver dicha situación, debido a su falta de comprensión de los enteros y conversiones ( $n = \frac{n}{1}$ ).

Para esta situación, M3 intentó a través de preguntas despertar la reflexión y bagaje de los alumnos sobre los enteros y conversiones. A pesar de estas acciones, parecía que varios de los estudiantes daban respuestas al azar (v.gr. “M3: *Entre qué número lo tengo que dividir para que me dé 60? Alumnos: ¡Entre 4! ¡Entre 3!*”), por lo que M3 terminaba explicando el tema. Por otra parte, llama la atención la falta de indagación de M3 en las respuestas de los alumnos, pues pareciera que en este momento del extracto presentado, ellos reflexionan y recuerdan el tema:

*M3: 60... les recuerdo los de las fracciones equivalentes, que para convertir a fracción equivalente, y si queremos simplificar fracciones, dividimos. Recuerden un poquito ese proceso. ¿Cómo convertir entonces [interrumpe un alumno]?*

*A:  $\frac{1}{6}$ !*

*M: Pero un  $\frac{1}{6}$  no son 60 enteros.*

*A: 6 enteros.*

La intención de M3 era que los alumnos convirtieran los 60 enteros a fracción; es decir, que obtuvieran  $\frac{60}{1}$ . Llama la atención que los alumnos responden varias veces que el resultado de convertir 60 enteros a fracción es 6 y no se hace discusión de eso, pero es aún más interesante que un alumno lo representa como  $\frac{1}{6}$ . Se puede inferir de este momento de la clase los alumnos reflexionaron y tomaron en cuenta sus conocimientos previos, aunque sus respuestas fueron erróneas; ahora ellos mencionaban fracciones



cuyos números estaban contenidos en  $\frac{60}{1}$  (i.e.  $\frac{1}{6}$  contiene el número 1 y 6 que también se encuentran en la fracción  $\frac{60}{1}$ ).

A pesar de esta aparente reflexión de los alumnos, M3 dejó pasar la oportunidad de indagar en la respuesta del alumno, es probable que al indagar en la respuesta del estudiante, M3 hubiera podido obtener pistas de las dificultades del alumno y con ello, saber cómo enfrentarlas para que los alumnos comprendieran el tema de los enteros y su conversión y así facilitar la adquisición de la multiplicación de fracciones.

Partiendo de los supuestos de que todo maestro de matemáticas debe examinar los conocimientos previos del alumno para evitar dificultades en el proceso de aprendizaje, encontramos que al igual que M1, M3 menciona la existencia de una deficiencia de conocimiento y dominio de las tablas de multiplicar arraigado en los niños de sexto y que dificulta su práctica docente en torno a la multiplicación de fracciones; por ejemplo, en la entrevista menciona lo siguiente; “*Conmigo es específicamente las tablas de multiplicar [...] En la multiplicación de fracciones no hay de otra más de que las tablas de multiplicar*”.

Para M3, la falta de dominio de las tablas de multiplicar por parte de los alumnos deriva en un obstáculo para el profesor, ya que como menciona “*en la multiplicación de fracciones no hay de otra*” refiriéndose a la obtención del producto mediante el algoritmo directo. Aunque el docente puede apoyarse de representaciones gráficas o materiales manipulativos (como los empleados por M1) para que el alumno entienda y aplique la multiplicación de fracciones, es ineludible el uso de las tablas de multiplicar para realizar ejercicios asociados a este contenido matemático en algún momento. Si el alumno no tiene un dominio de las tablas o cualquier otro tema que le sirva como bagaje, el profesor deberá emplear tiempo extra para subsanar la ausencia de conocimientos previos, de modo que habrá un desfase del currículum.

### **5.3.2.2 Conocimiento del perfil del alumno**

De acuerdo con M3, las necesidades y el perfil del niño son dos factores que juegan un papel crucial en la enseñanza de la multiplicación de fracciones. La profesora asegura que éstos tienen que ser considerados en la etapa de planeación:

*Para poder planear obviamente tienes que considerar las características de tus alumnos, todas. Tienes que ver aquellos alumnos que son, por ejemplo, visuales,*

*aquellos alumnos que a veces no te saben expresar de manera verbal, pero lo hacen a través de un escrito o a través de un dibujo. Entonces todas las características de los niños se tienen que considerar cuando hagas tu planeación porque no es posible que hagas la planeación de manera generalizada cuando en tu grupo hay diferentes necesidades de tus alumnos. (E-M3)*

Para M3, las características del alumnado y sus necesidades deben ser tomadas en cuenta desde la planeación, al considerar que es en este momento donde se articulan las actividades y propósitos de aprendizaje con el estilo de aprendizaje de los niños. Conocer el perfil del alumno ayuda al profesor a encontrar la raíz de las dificultades del alumno, esto sólo si se hace un análisis del perfil del alumno y carencias. El beneficio de este análisis es el descubrimiento de los materiales y estrategias idóneas a la edad del niño, gustos, estilos de aprendizaje y necesidades particulares de aprendizaje. Como se sabe, todos los anteriores elementos generalmente son incluidos en la planeación, de ahí la importancia del KFLMP en la multiplicación de fracciones.

Además del estilo de aprendizaje del niño y sus necesidades, M3 considera crucial tomar en cuenta el contexto personal del infante como punto de partida para comprender el desempeño y comprensión del alumno en torno a la multiplicación de fracciones. Sobre este punto, M3 argumenta que:

*Aquí tengo niños de todo tipo, tengo desde aquel niño que nada más se sienta a ver y debes de saber tú, si está aprendiendo o no está aprendiendo. Tengo desde el niño que llega y viene sin comer, tengo desde el niño que llega y trae un montón de cosas en su cabeza. O sea, todos esos aspectos son de los que uno debe estar pendiente de ellos... Nosotros debemos ubicarnos precisamente en nuestra realidad ¿cuál es nuestra realidad? Ésta, con muchas carencias y que esas carencias nadie nos las va a resolver, las tenemos que resolver nosotros mismos para poder sacar adelante a esos niños... Hay muchos factores que implican en el contexto del niño para su aprendizaje, el social, económico, todo, hasta el religioso. Entonces tiene mucho que ver el contexto. (E-M3)*

En el fragmento precedente se puede notar que para M3 las carencias económicas de los estudiantes y los problemas personales o familiares repercuten directamente en el entendimiento, por ejemplo, de la multiplicación de fracciones. Eso significa que la realidad del niño no se puede desligar de la planeación del profesor y su práctica. El

conocimiento del maestro sobre este aspecto, le permite conocer las limitantes de sus alumnos y las oportunidades que tiene para enseñar la multiplicación de fracciones.

Es de resaltar que M3 enfatiza la responsabilidad de “sacar adelante” a los alumnos para que adquieran los conocimientos sugeridos en el programa de estudios; además considera que esta responsabilidad es del profesor ya que “nadie nos las va resolver”. Para M3, los maestros no reciben el apoyo correspondiente para sobrellevar las carencias del alumno, entonces el docente se ve obligado a emplear su conocimiento didáctico del contenido (v. gr. creación de material, selección de estrategias, perfil del alumno...) con el fin de lidiar con el contexto adverso del alumno de modo que éste logre los aprendizajes esperados.

Durante la clase no se hizo evidente algún momento en donde M3 empleara su conocimiento sobre el perfil de sus estudiantes, pero es factible que este conocimiento se plasme de manera tácita en su planeación, pues como ella lo menciona, la planeación es el momento idóneo donde el profesor emplea su conocimiento sobre el perfil del alumno para elaborar una sesión acorde a los objetivos del programa de estudios (“Entonces todas las características de los niños se tienen que considerar cuando hagas tu planeación”).

### **5.3.3 Sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas**

El Plan de estudios vigente (SEP, 2011a) plantea sugerencias didácticas (e.g. enfoque situación problema) para que el educador las tome en cuenta al enseñar la multiplicación de fracciones. La opinión de M3 sobre las sugerencias didácticas es la siguiente:

*El Plan de estudios como que ya no está muy acorde a la realidad, de hecho... a veces traemos las sugerencias [didácticas] del Plan de estudios y lo traemos a nuestra planeación. Llegas al salón de clase, las condiciones no te permiten desarrollarlo tal cual, tú lo tienes que modificar de acuerdo a las necesidades de los niños. No lo tienes que llevar tal cual ¿por qué? porque las condiciones del grupo no lo permiten. Entonces tienes que modificar y uno de maestro tiene que tener la capacidad y la creatividad para modificar, crear una nueva y que te dé resultado. (E-M3)*

En el fragmento anterior M3 expone una desvinculación del currículum con la realidad educativa que se vive. Aunque ella no menciona las razones por la cual los planes y

programas no contemplan el contexto del niño, considera que las consecuencias de ello es la poca adaptación de los materiales curriculares al estudiante. Se infiere que para M3 es indispensable poseer un conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas con el propósito de realizar las modificaciones pertinentes para empatar el plan al contexto del niño y sus necesidades.

Otra situación relevante, que se desprende de la entrevista de M3, es la percepción de un Plan de estudios (SEP, 2011a) rutinario e incapaz de llamar la atención a los alumnos:

*El irte por el plan de estudios tal como lo marca a veces es muy mecánico y en ocasiones hasta aburrido y uno siempre busca lo más práctico, lo más fácil para que los niños lo comprendan de la mejor manera posible y lo más sencillo. ¿Por qué digo esto? Porque es lo mismo que le digo a mis niños “el caminito ustedes lo van a elegir, ustedes eligen si es el más largo o más cortito, lo importante es que lo sepan resolver correctamente”. (E-M3)*

Derivado de esta percepción, la maestra sostiene que no se debe seguir el currículum tal cual pues se debe involucrar al estudiante en una diversidad de explicaciones, recursos y procedimientos para que éste por sí mismo identifique el “caminito” que le funcione. Para M3 es primordial que los docentes ofrezcan a los alumnos diferentes insumos, procedimientos y estrategias para que elijan el que más le facilita la adquisición del aprendizajes esperados. Esto implica la constante investigación y actualización por parte del docente para abarcar las distintas necesidades de los alumnos.

#### **5.3.4 M3 y la multiplicación de fracciones: síntesis**

A continuación, se proporciona un mapa conceptual que sintetiza el conocimiento didáctico que M3 posee para impartir el tema de la multiplicación de fracciones mostrado durante la clase y entrevista:

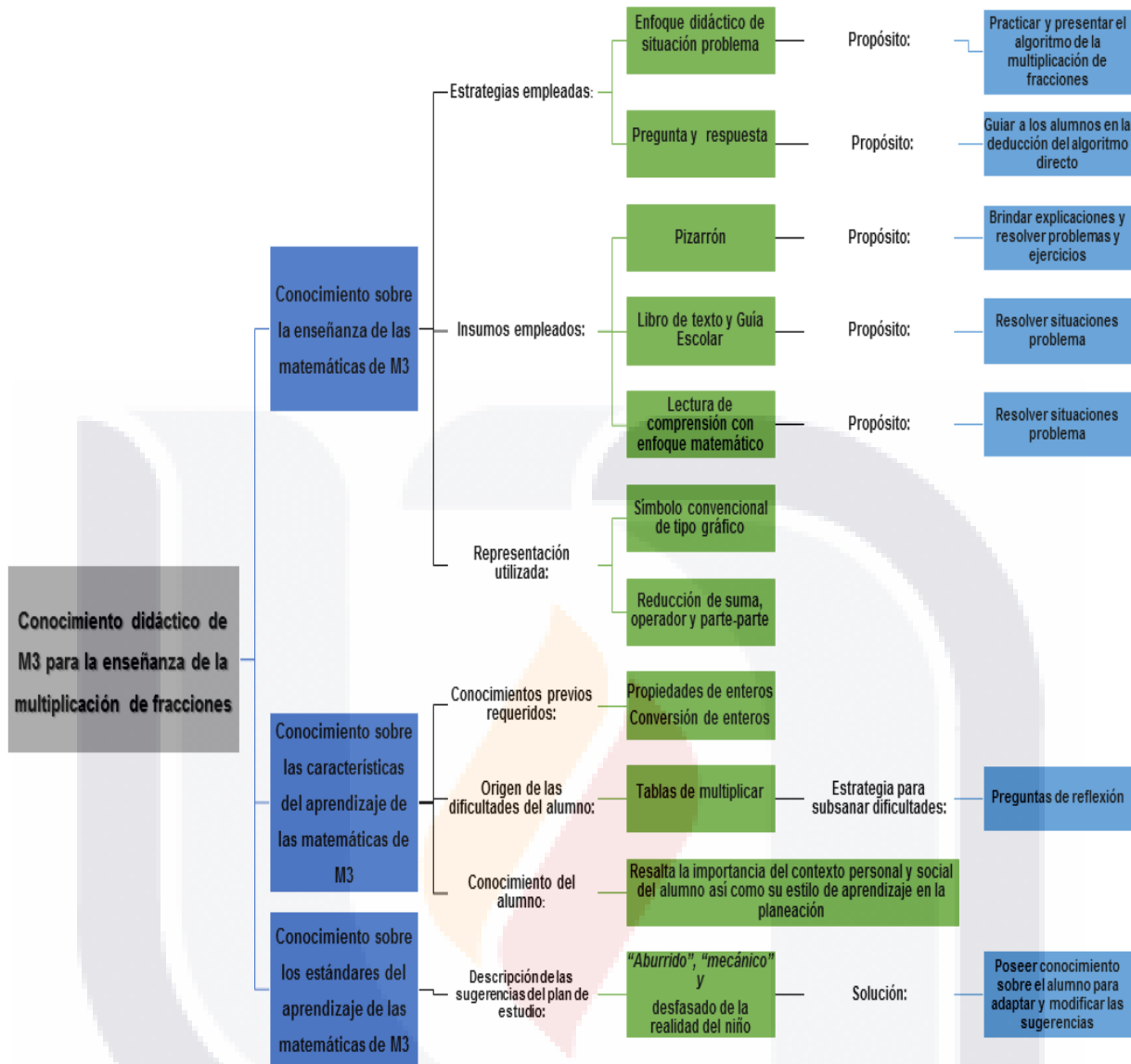


Figura 5.13. Diagrama del conocimiento didáctico de M3 para enseñar la multiplicación de fracciones.

**Conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas.** La clase observada y la entrevista señalan que el enfoque predominante de M3 para enseñar la multiplicación de fracciones es el enfoque didáctico de situación problema, que finalmente terminó siendo un enfoque expositivo seguido de ejercicios de reforzamiento. Este enfoque se empleó durante la sesión de clase con dos propósitos: el primero para presentar el algoritmo de la multiplicación de fracciones y el segundo para practicar dicho algoritmo. Además de las situaciones problema, M3 empleó la técnica de pregunta y respuesta para despertar la reflexión en los niños sobre este contenido matemático.

Los insumos empleados en el aula para enseñar la multiplicación de valores fraccionarios fueron los siguientes: el pizarrón para apoyar sus explicaciones orales y resolver problemas, el Libro de texto donde se resolvieron situaciones problema, guía escolar que se empleó para dictar situaciones problemáticas a los alumnos y las lecturas de comprensión con enfoque matemático que le plantean al situaciones cotidianas donde se contextualiza el objeto matemático y que ellos tienen que resolver. La representación que M3 utilizó en clase fue, además de los símbolos convencionales, de tipo gráfica (i.e. dibujo de rectángulo en el pizarrón) para explicar el concepto de entero. Los significados de la multiplicación de fracciones usados fueron: reducción de suma, operador y parte-parte.

**Conocimiento sobre las características del aprendizaje de las matemáticas:**

Para impartir la multiplicación de fracciones, M3 partió de los conocimientos previos de los alumnos sobre propiedades de enteros y conversión de enteros. Así mismo, M3 declaró que los niños deben comprender y manejar las tablas de multiplicar para dominar la multiplicación de fracciones, la carencia de este contenido provoca dificultades en el alumno. Para sobrellevar los problemas de los estudiantes, M3 realizó preguntas cuyo propósito era despertar la reflexión de los alumnos y que se dieran cuenta del porqué de su error. Finalmente, M3 resalta la importancia de contar un conocimiento sobre el contexto, características y necesidades de los pupilos al momento de la planeación.

**Conocimiento sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas:** En palabras de M3, el plan de estudios es “*aburrido*” y “*automático*”, tampoco está acorde a la realidad y contexto de los niños por lo que no se puede aplicar tal cual en el salón de clases. Por ende, es indispensable que el docente tenga el conocimiento necesario para modificarlo y adaptarlo a las necesidades del grupo. Así mismo, M3 hace referencia a la obligación del profesor de investigar constantemente insumos y procesos que abran la puerta a los alumnos a distintos *camino*s para el entendimiento de la multiplicación de fracciones.

## CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se realiza una discusión de los datos y resultados obtenidos a partir de las entrevistas y observaciones llevadas a cabo con las dos maestras de sexto año, M1 y M3, en articulación con literatura especializada en el tema. El capítulo está conformado por tres apartados que discuten cada uno de los subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido que las ambas profesoras mostraron para enseñar la multiplicación de valores fraccionarios en sexto grado de educación primaria.

### **6.1 Estrategias, insumos y representaciones empleadas en la enseñanza de la multiplicación de fracciones en sexto grado**

En el transcurso de las sesiones observadas se realizaron dos procesos de enseñanza distintos para impartir la multiplicación de fracciones. El primero que se mencionará, aconteció en la práctica de M3, quién usó el enfoque didáctico de *situación problema* o *situación problemática* para enseñar a los alumnos ese contenido. De acuerdo con Moreno y Waldegg (2002, citados en Múnera, 2011), las situaciones problema son espacios que detonan la actividad cognitiva matemática en el alumno, pues tienen la capacidad de activar los conocimientos previos para ligarlos con los conceptos nuevos; asimismo, deben ser lo suficientemente complicadas para que represente un reto al niño, pero a la vez accesible para que lo pueda resolver en el nivel matemático que se encuentra. En relación con esto, la responsabilidad del docente recae en construir o elegir las situaciones problemas adecuadas al bagaje matemático del alumno y su perfil, como se vio en la clase de M3.

Las situaciones problema guían la práctica del profesor, donde éste es capaz de identificar y abordar las limitaciones de conceptos y procedimientos matemáticos de sus alumnos para, así, reforzar conocimientos previos y darles herramientas que los ayuden a realizar las tareas matemáticas (Chevallard, 1998). Además, las situaciones problema “se vuelven un contexto para la construcción de significados de los conceptos, en el que se recrean las actividades individual y colectiva, se autocontrolan los procesos de pensamiento matemático y se sistematizan los nuevos aprendizajes” (Múnera, 2011, p. 180). Las situaciones planteadas por M3 mostraron un escenario real o cotidiano que llevaron a los alumnos a construir el algoritmo de la multiplicación de fracciones, sin

embargo no fueron aprovechadas por la docente para detonar el razonamiento de los estudiantes y termino finalmente enseñando y presentado actividades de mecanización del algoritmo.

El enfoque de situación problema exige habilidades reflexivas y críticas que le permitan al alumno resolver dificultades en torno a la multiplicación de fracciones que se le presentan en la vida cotidiana. En este sentido, el Plan de estudios (SEP, 2011a) pretende emplear este enfoque para fortalecer la capacidad de los alumnos al resolver problemas, tomar decisiones y crear sus propios procesos de aprendizaje. En relación con ello, M3 resalta en su discurso la importancia de ofrecerle al alumno la oportunidad de construir significados y procedimientos en torno a la multiplicación de fracciones, en vez de darles de manera directa el algoritmo o, como M3 dice, “el *caminito*” que el maestro conoce”.

La idea expresada por la maestra es sustentada en Godino et al. (2003), quienes comparan al alumno con un matemático al considerar que ambos tienen la obligación de resolver problemas y comprobar que el método de solución sea correcto, creando así modelos matemáticos. Lo anterior significa un gran reto para el docente, pues tiene que generar una atmósfera donde el niño se sienta motivado a tomar riesgos y aventurarse a conjeturar sus propios procedimientos y explicaciones acerca del algoritmo y significado de las fracciones en la multiplicación, sin olvidar los conocimientos previos y competencias matemáticas y lingüísticas que pone en juego. No obstante que lo planteado por estos autores, la docente termina exponiendo el algoritmo, tal vez por la falta de tiempo y las presiones existentes en la escuela y que señala durante la entrevista.

Se coincide con Godino et al. (2003) al considerar que las situaciones problema son un medio ideal para que los alumnos contextualicen y personalicen las matemáticas. Para estos autores, personalizar las matemáticas es clave para la adquisición de conocimientos, pues es un proceso por el cual el alumno puede triangular la información recibida sobre el contenido matemático por parte del docente y recursos didácticos para la comprensión y manipulación posterior de éste. En cambio, para contextualizar las matemáticas es necesario que el profesor se apoye en recursos y materiales para la enseñanza y representaciones adecuadas que hagan ver, por ejemplo, las fracciones y el algoritmo de la multiplicación de éstas como un elemento útil en el mundo físico.

El segundo proceso de construcción de la multiplicación de fracciones que cobró relevancia tuvo lugar en las sesiones observadas en el salón de M1. Llama la atención



que ella se distinguió por recurrir al *aprendizaje por descubrimiento* para enseñar a los alumnos este contenido matemático. Bruner (citado en Baro, 2011) señala que el aprendizaje significativo toma lugar cuando el alumno tiene la experiencia de descubrir por sí mismo la información para adquirir nuevos conocimientos. En congruencia con Bruner, M1 se apoyó en actividades y materiales pertinentes que les permitieran a los alumnos llegar al descubrimiento de las reglas de la multiplicación de fracciones; es decir, a institucionalizar el procedimiento matemático generado en las actividades didácticas propuestas por M1 (Brousseau, 1986 citado en Castañeda, Rosas, & Molina, 2012).

Para propiciar el aprendizaje por descubrimiento en torno a la multiplicación de fracciones, es indispensable que el profesor busque y seleccione estrategias y actividades que guíen al alumno de forma inductiva a la develación del algoritmo de la multiplicación de fracciones y, además, que le permitan darle significado. Estas actividades y estrategias deben dar insumos que faciliten la reflexión y, con ello, el reconocimiento del algoritmo de la multiplicación en los números racionales como sucedió en el salón de M1, donde las hojas de papel empleadas le permitieron al niño *manipular* al objeto matemático con el fin de entender los distintos significados de la multiplicación de fracciones.

El aprendizaje por descubrimiento favorece en los estudiantes habilidades necesarias como la reflexión, pensamiento crítico y creatividad para resolver problemas referentes a la multiplicación. Este tipo de habilidades también fomentan en el alumno hábitos de investigación (Baro, 2011), y eso implica tomar en cuenta los conocimientos previos. De acuerdo con el análisis de los datos aquí recabados, se encontró que M1 y M3 recurrieron a los conocimientos que los alumnos tenían sobre enteros, conversión de enteros, tablas de multiplicar, entre otros para facilitar la multiplicación de fracciones; aunque finalmente no hayan podido propiciar un aprendizaje por descubrimiento.

Aunque las actividades lúdicas no se plasmaron en las clases de M1, considera que juegan un papel relevante en la práctica de todo maestro, pues así lo hizo saber en la entrevista. M1 indicó que la implementación de actividades lúdicas en la enseñanza es pertinente para darle la oportunidad al alumno de interactuar con el objeto matemático, de modo que no lo perciba como algo memorístico o difícil; en términos de Yasoda (2009), hay que involucrar actividades donde las matemáticas no se vean rutinarias, difíciles y estrictas para los estudiantes.

El significado de la multiplicación de fracciones y su algoritmo se presentan como algo práctico y ameno. La creación de juegos encaminados a la enseñanza es una tarea compleja, ya que “la teoría, en realidad, ha modelizado el juego” (Carrillo, 2009, p.157) y esto implica que el profesor tenga un conocimiento acerca del perfil del alumno, contenido matemático y objetivos de aprendizaje para lograr actividades efectivas que cubran las necesidades de aprendizaje de los niños y currículum (Carrillo et al., 2013). Esto se refleja en la clase de M1, quien decidió emplear hojas de papel para que los alumnos comprendieran el significado y procedimiento de la multiplicación de fracciones. En esta actividad los estudiantes se encargaron de crear tiras de papel con el fin de operar y experimentar el procedimiento de la multiplicación de fracciones. Este recurso didáctico fue eficiente para la generación de nociones operativas debido a su fácil manipulación y accesibilidad.

El hecho de que los pupilos manipulen, elaboren y diseñen su propio material, los transforma en alumnos independientes y reflexivos que participan activamente en sus procesos de aprendizaje (Esch, 1996). Una de las ventajas de utilizar este tipo de materiales manipulativos radica en el hecho de que, a través de su uso, los niños tienen la oportunidad de crear distintas maneras de solución a un problema y ofrecer una comprobación tangible de esa solución.

Otro material que se puede emplear para la multiplicación de fracciones, es la lectura de comprensión con enfoque matemático de las que habla M3. Para este tipo de material, el alumno debe comprender lo que se le está pidiendo, hacer y conocer el procedimiento a seguir, de modo que el éxito de la resolución del problema depende del nivel de comprensión lectora que posee y su entendimiento de la multiplicación de fracciones. Sin embargo, en la clase de ambas profesoras se percibe que se requiere reflexionar e indagar por qué el error de algunos estudiantes, pues es probable que ellos comprendan el algoritmo de la multiplicación de valores fraccionarios pero no el planteamiento del problema.

La elección y diseño de materiales pedagógicos involucra “la presencia de conocimiento del contenido y la enseñanza, especialmente en el cuidado que el profesor pone en la enseñanza del concepto de fracción” (Carrillo et al., 2013, p. 59). En el contenido matemático aquí discutido, el profesor tiene la oportunidad de elegir entre una gama de recursos y materiales como hojas de trabajo, videos, etc. Para seleccionar lo

adecuado, el profesor debe comprender primero el concepto de fracción y el algoritmo de la multiplicación, las exigencias que el currículum le establece y el nivel de dominio que sus alumnos poseen respecto al tema.

La representación gráfica de la multiplicación de fracciones constituye una parte sustancial en la enseñanza de este contenido, ya que muestra de manera visual cómo se desarrolla este algoritmo con números fraccionarios. A pesar de ello, tres de las cuatro maestras observadas presentaron problemas en la representación gráfico, lo que representa una falta de conocimiento matemático. En palabras de Carrillo et al. (2014), este dominio permite al profesor comprender el objeto a enseñar de forma total; es decir, su fundamentación teórica, los conocimientos ligados a éste, los distintos significados y contextos del contenido matemático y las formas adecuadas en las que se puede representar para ser mostrado al alumno. Por su parte, Hill et al. (2005) advierten que todo profesor de matemáticas debe ser capaz de usar recursos visuales que permitan a los pupilos interpretar pertinentemente conceptos y procedimientos del objeto matemático.

De todo lo anterior, podemos inferir que ambas docentes requieren reforzar la comprensión gráfica que tienen de la multiplicación de fracciones, así como los distintos significados del uso de los enteros y de la noción misma de fracción. De lo contrario, los estudiantes presentarán dificultades y obstáculos en niveles superiores al tratar de comprender conceptos tales como la división de fracciones o potencias de fracciones por mencionar algunos.

## **6.2 Enseñanza de la multiplicación de fracciones centrada en el alumno**

El bagaje matemático del alumno es indispensable en la enseñanza de la multiplicación de fracciones, pues el aprendizaje significativo depende de las relaciones que establece el alumno con lo que conoce del objeto matemático, y la experiencia del docente es la que determina sobre qué conocimientos previos indagar (Miras, 1993). Por ello, se observó que ambas maestras emplean procesos de enseñanza distintos, comenzaron su clase tratando de activar, a su entender, los conocimientos previos de los alumnos sobre los enteros, conversión de enteros a fracción, conceptos básicos de la fracción y tablas de multiplicar.

Desde el enfoque constructivista de Miras (1993), el conocimiento que el docente posee sobre el bagaje matemático del alumno es fundamental para promover nuevos

aprendizajes. El estudiante no es una *tabla rasa* donde el maestro tiene la posibilidad de depositar ideas y conceptos; por el contrario, el alumno se basa en los significados previamente adquiridos para construir nuevas ideas y conceptos, y así aprender cualquier contenido escolar que se le presente (Miras, 1993). Para la multiplicación de fracciones, el docente debe partir de lo que ya sabe el alumno, conversión de fracciones o la suma con números racionales fracciones, aunque esto no siempre se logre.

Además de indagar en el *background* matemático del alumno para partir en la enseñanza de la multiplicación de fracciones, es conveniente que el maestro observe y averigüe las maneras en las que sus alumnos aprenden las matemáticas de modo que tenga la información necesaria para elegir las estrategias metodológicas que favorezcan el aprendizaje de la multiplicación de fracciones (Díaz, 2012). Durante las clases observadas no se encontró evidencia suficiente para elaborar una discusión amplia sobre el conocimiento que poseen nuestros participantes acerca el perfil del alumno. Este conocimiento se hizo presente durante una ocasión, cuando M1 indagó las fechas de cumpleaños de sus alumnos para elaborar una situación problema. No obstante, durante la etapa de entrevistas, las profesoras hicieron explícita su valoración sobre el conocimiento del alumno al enseñar la multiplicación de fracciones.

Las profesoras argumentan que las clases deben ser planeadas en torno al contexto social, económico y personal del niño, así como sus necesidades, gustos, estilos de aprendizaje, edad, etc. Llama la atención que la postura en torno al currículum y el perfil de los niños de M1 y M3 es opuesta. De acuerdo con M1, muchas veces el maestro no toma en consideración el contexto, perfil y necesidades particulares del alumno debido a factores como carga administrativa o evaluaciones en las que están obligados a participar.

Por su parte, M3 argumentó que es posible tomar en consideración los elementos anteriores siempre y cuando se realicen las adaptaciones pertinentes al currículum aún con las dificultades que plantea la realidad educativa. Para los maestros mexicanos que realizan su labor en escuelas públicas, llevar a cabo la idea anterior es desafiante pues debe dosificar su atención y tiempo entre numerosos estudiantes que conforman su grupo logrando que aprendan significativamente el contenido matemático.

Aún con esta realidad, el profesor se esfuerza en identificar los estilos de aprendizaje de sus alumnos para comprender por qué ellos tienen complicaciones al tratar con la multiplicación de fracciones. Sobre el contexto personal del niño, Planas y Font (2003)

indican que la base de los problemas de aprendizaje de los sujetos acerca de las matemáticas se halla en el entorno social, cultural y emocional del alumno. Es decir, el sujeto interpreta la matemática y le da significado desde sus vivencias y experiencias personales; como consecuencia de esto, el profesor está obligado a razonar en cómo el estudiante vive la matemática. Sólo de esta forma, el docente logrará acercarse a la lógica del niño en torno a un contenido específico del currículum de matemáticas y comprender los errores en su desempeño en la materia.

Es un menester para el profesor analizar e identificar cómo piensan y viven las matemáticas nuestros estudiantes, ya que de esta manera se comprende el porqué y en qué se equivocaron al aprender la multiplicación de fracciones y por ende la detección de actividades o estrategias que los ayuden a salir de tales dificultades (Schoenfeld, 2002). M1 y M3 consideran que los obstáculos en la práctica del maestro, referente a la multiplicación de números fraccionarios, son resultado directo de la falta de conocimientos previos, el pobre desempeño del alumno en temas relacionados con las tablas de multiplicar y conceptos básicos de fracciones. Al respecto, Miras (1993) menciona que la raíz de los errores de los alumnos es la predisposición de abordar un contenido de cierta manera debido a variables de tipo interpersonal y personal. La misma autora afirma que:

La práctica docente continuada en determinados niveles y áreas de contenido nos proporciona indicaciones bastante fiables sobre cuáles son las dificultades más habituales de los alumnos respecto al aprendizaje de un determinado contenido, cuáles son las actitudes, conceptos y procedimientos que tienen que poner en juego para llevar a cabo dicho aprendizaje, qué errores sistemáticos suelen cometer o qué lagunas detectamos año tras año en sus conocimientos previos. (Miras, 1993, s/n)

En otras palabras, la comprensión que el profesor posee de las dificultades de los alumnos, acerca de la multiplicación de fracciones, le permite detectar quiénes son más propensos a caer en cierto tipo de equivocaciones, anticipar posibles errores desde la planeación y sortearlos en la práctica.

### **6.3 Concepciones del currículum en torno a la multiplicación de fracciones**

Los resultados muestran que los profesores tienen conocimientos sobre el currículum y recurren a él para lograr los objetivos de aprendizaje. Al respecto, Valdemoros (2010) sostiene que la dependencia que algunos profesores desarrollan por el currículum y Libro

de texto resulta en una práctica docente *desdibujada y carente* de estrategias autónomas. Es necesario que el maestro considere el currículo, pero no al grado de generar dependencia de él de modo que logre una autonomía de enseñanza, ya que desarrolla la capacidad de crear actividades, procedimientos matemáticos, explicaciones y recursos atractivos que den respuesta a diferentes situaciones y problemas que seguramente atravesará en su labor de enseñanza.

Aunado a esto, la dependencia hacia el libro de texto y currículum, provoca una falta de postura crítica hacia estos elementos y sus propuestas. Como mencionó M1, el material curricular sólo brinda sugerencias, por lo que el maestro tiene la opción de emplearlas, adaptarlas o descartarlas en pos del aprendizaje esperado. El conocimiento pertinente del maestro sobre programas, planes de estudio y libro de texto le permite evaluar oportunamente la viabilidad de implementación de los recursos curriculares a los que está sujeto partiendo de las particularidades y necesidades de su grupo y la calidad de la información que se presenta sobre el objeto matemático.

Como se observó en el Capítulo 3, la explicación de multiplicación de fracciones presentada en el libro, podría confundir a aquellos profesores cuyo conocimiento sobre el contenido no esté bien cimentado. Convendría revisar cómo se relacionan el contenido disciplinar (en este caso la multiplicación de fracciones) con la práctica pedagógica propuesta por la SEP. En esta revisión, sería pertinente poner especial atención al tratado que el material curricular le da a la diversidad del alumnado de tal modo que se logre determinar el nivel de contextualización del currículum matemático (Fernandes, Leite, Mouraz, & Figueiredo, 2013). La articulación de los planes de estudios, programas y libro de textos con el entorno personal del alumno causa un impacto significativo en el aprendizaje del alumno ya que los contenidos se abordan desde la realidad y necesidades del niño haciendo provechoso el conocimiento adquirido.

## CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

Este último capítulo está centrado en presentar las conclusiones y reflexiones derivadas de los capítulos 5 y 6 de esta investigación; en especial, está centrado sobre los resultados que se obtuvieron, así como el logro de los objetivos de la presente investigación. Además, se abordan las limitantes que la investigadora tuvo que encarar para la realización del estudio, así como los posibles temas o líneas de investigación que se desprenden.

### 7.1 El quehacer y la didáctica del profesor para la multiplicación de racionales

La enseñanza de cualquier asignatura implica un trabajo arduo por parte del profesor que no siempre es valorado por aquellos que no están involucrados directamente en la educación. En el caso concreto del profesor de matemáticas de educación primaria, el reto se acrecienta pues la matemática es considerada difícil y poco útil pues *“¿para qué sirve estudiar cálculo si no es algo que usaremos en la vida real?”* y en algunos casos intimidante. Con todo esto, el maestro debe sacar adelante a sus estudiantes valiéndose de todo su conocimiento, experiencia y recursos a la mano. Conscientes de lo anterior, diversos autores tales como Carrillo, Ball, Godino, entre otros, sientan las bases para analizar la práctica del profesor a través de modelos que exhiben la complejidad del conocimiento que el docente tiene sobre su quehacer matemático. Este tipo de modelos permiten valorar el esfuerzo del profesor que imparte matemáticas y con ello dignificar su labor del docente, como se vio con M1 y M3.

En palabras de Carrillo et al. (2014), el profesor que imparte la materia de matemáticas tiene distintos tipos de conocimiento, uno de ellos es el que se refiere a la didáctica para enseñar un tema del currículum en concreto, en el caso de este proyecto, la multiplicación de fracciones. Este Conocimiento Didáctico del Contenido, se compone de las estrategias y modelos de enseñanza encaminados a enseñar dicho tema así como el currículum, materiales, ejemplos y representaciones que emplea el maestro para el mismo propósito. Retomado el tema de los planes y programas de estudio, se encontró en esta investigación que las docentes observadas conocen la estructura y organización de éste así como sus carencias pues saben que en muchas ocasiones no coincide con la realidad educativa que vive en el aula. Por ello, aseguran que los materiales curriculares

ofrecidos por la SEP deben tomarse a reserva de las condiciones de sus alumnos los que los convierte únicamente en sugerencias para enseñar un contenido.

Sobre las sugerencias del currículum que se menciona en el párrafo anterior, se encuentran las que tienen que ver con los materiales para enseñar la multiplicación de fracciones. Una vez concluido este proyecto investigativo, se puede decir que no se explotan todos los materiales y recursos tecnológicos a los que el profesor tiene acceso debido a que se considera que la multiplicación de fracciones no es un tema complejo que puede ser abarcado en un día, ya que sólo se multiplica el numerador por el numerador y el denominador por el denominador. La anterior idea se debe a la notable falta de conocimiento del contenido del maestro de servicio sobre la multiplicación de fracciones. Siendo así, se plantea la necesidad de revisar el conocimiento que se les brinda a los profesores no sólo sobre este tema en específico sino en lo que a fracción y sus operaciones se refiere.

Entre los propósitos del currículum mexicano (SEP, 2011a, 2011b) se encuentra la práctica docente encaminada a las necesidades y estilos de aprendizaje de los alumnos. Esto orilla al profesor a proveer de ejemplos y explicaciones orales para aquellos estudiantes cuyo estilo de aprendizaje es de tipo auditivo. Favorecer actividades lúdicas y el empleo de materiales que le permitan al alumno kinestésico moverse y *tocar* el objeto matemático, así como emplear representaciones gráficas ideales para que el niño visual y se conecte el con el contenido matemático (SEP, 2011a). Sin embargo, es la representación gráfica donde se observó el desconocimiento de los modelos que se tienen para enseñar la multiplicación de fracciones y que favorecen y facilitan la comprensión del alumno sobre este tema.

Como ya se sabe, en el centro de la educación se encuentra el niño y su contexto personal. Debido a lo anterior, el Plan y Programas de estudio invitan al docente a basarse en éste para diseñar sus lecciones, la realidad en el aula nos permitió ver que aún hay maestros que presentan el contenido de manera aislada o a través de situaciones que no son lo suficientemente cercanas a la realidad del niño. Aunque esto sucede en la práctica, en el discurso, el profesor reconoce la importancia de poseer conocimiento sobre la realidad matemática del alumno para partir de ésta y seleccionar actividades, materiales y ejemplos adecuados teniendo como fin impartir la multiplicación de fracciones. Aunado a esto, el maestro de primaria resalta el valor de conocer los gustos e



intereses del alumno para acercarlo al contenido matemático. Sin embargo, esta perspectiva del maestro sobre el conocimiento necesario para enseñar la multiplicación de fracciones expresada en la entrevista no se vio reflejada en el aula pues apenas una de las docentes indagó en los gustos de sus alumnos para llevar a cabo su clase.

## **7.2 Limitantes de la investigación**

Fueron varias las dificultades por las que se transitaron durante el desarrollo de este estudio. Para comenzar, mencionaremos que uno de los propósitos que se tenía en el capítulo del Marco teórico, era definir las creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y las creencias sobre las matemáticas del profesor bajo la perspectiva del Modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, hecho que no ocurrió debido a la falta de investigaciones sobre este componente del modelo. Es justo mencionar que hay una extensa literatura sobre las creencias del maestro de matemáticas pero se pretendía abordar el tópico desde el enfoque del modelo antes mencionado.

La siguiente limitante ocurrió en el trabajo de campo cuando se asistió al salón de M2 a realizar la videograbación correspondiente, la docente no permitió el acceso de cámaras al salón; sin embargo, no tuvo inconvenientes en que se tomaran fotos del pizarrón y la libreta de los niños ni en que se empleara una grabadora de audio. Esto subsanó exitosamente el problema.

Finalmente, hay que recordar que el currículum en el que se basan los docentes para impartir sus lecciones, marcan tiempos específicos para llevar a cabo su labor con los contenidos. Nos es raro que las maestras-participantes enseñaran la multiplicación de fracciones el mismo día a en horas similares. Este obstáculo se superó mediante el apoyo de un compañero observador quien grabó la sesión de una de las maestras mientras la investigadora se encontraba observando otra lección a la misma hora.

## **7.3 Líneas de investigación a partir de este proyecto**

De acuerdo con los resultados de la presente investigación, es indispensable que se hagan otros estudios sobre el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas en relación con la comprensión y la práctica del profesor en la enseñanza de la multiplicación de fracciones. El trabajo en este terreno deriva en una comprensión más sólida sobre el conocimiento del profesor. Es interesante analizar qué dominios y

subdominios del conocimiento del profesor influyen en mayor medida el desarrollo de actitudes favorables hacia la matemática por parte del alumno, con el fin de identificar creencias que general rechazo y temor hacia las matemáticas, de modo que se hagan propuestas de intervención.

Consideramos que esta investigación representa un aporte en la comprensión del conocimiento didáctico y del contenido del profesor en torno la multiplicación de fracciones, Por su parte, el MTSK podría ser un referente para hacer nuevos modelos que permitan analizar el conocimiento y la práctica de los maestros que impartes otras asignaturas, ya sean de ciencias o inclusive inglés, y de esta manera acceder a su conocimiento para comprender manera de actuar.

No podría dejar de lado, para cerrar el apartado de conclusiones, las observaciones que hicieron algunos de los profesores en la entrevista sobre cómo influyen las condiciones sociales, económicas, familiares y personales del alumno en su práctica. Aunque es una realidad que el desempeño del maestro de matemáticas es fundamental para el desarrollo académico del alumno, sería inexacto decir que sólo se ocupan profesores bien preparados para abatir el rezago educativo en un país donde la mayoría de sus habitantes no tienen las condiciones básicas para desarrollarse a plenitud. A través de estos modelos se aprecia con mayor transparencia la labor que hace el docente en el aula y el conocimiento que desarrolla para sortear con éxito las dificultades económicas, sociales y familiares de sus alumnos favoreciendo la inclusión de la matemática en su vida cotidiana.

La enseñanza de cualquier asignatura implica un trabajo arduo por parte del profesor que no siempre es valorado por aquellos que no están involucrados directamente en la educación. En el caso concreto del profesor de matemáticas de educación primaria, el reto se acrecienta, pues la matemática es considerada difícil y poco útil pues “¿*para qué sirve estudiar cálculo si no es algo que usaremos en la vida real?*” y en algunos casos intimidante.

Con todo esto, el maestro debe sacar adelante a sus estudiantes valiéndose de todo su conocimiento, experiencia y recursos a la mano. Conscientes de lo anterior, diversos autores tales como Carrillo, Ball, Godino, entre otros, sientan las bases para analizar la práctica del profesor a través de modelos que exhiben la complejidad del conocimiento que el docente tiene sobre su quehacer matemático. Este tipo de modelos permiten

valorar el esfuerzo del profesor que imparte matemáticas, desde los diferentes contextos sociales, y con ello dignificar su labor del docente.



## REFERENCIAS

- Aceves, M., Aguilar, A., Aguilar, J., Aguilar, M., Burciaga, A., Domínguez, F., & Trinidad, M. (2014). *Me Divierto y Aprendo 6*. México: Montenegro.
- Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 359-381.
- Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J., Giménez, J., & Torra, M. (1996). *Enseñar Matemáticas*. Grao: España.
- Álvarez-Gayou, J. L. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología*. México, DF. Páidos.
- Arzaluz, S. (2005). La utilización del estudio de caso en el análisis local. *Región y sociedad*, 17(32), 107-144.
- Ávila, A. (2016). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo. *Educación Matemática*, 28(3), 31-59.
- Ball, D. (2003). *Mathematics in the 21st Century: What Mathematical Knowledge is Needed for Teaching Mathematics*. USA: Department of Education.
- Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching*. New York: Macmillan.
- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 399-406.
- Baro, A. (2011). Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. *Revista digital innovación y experiencias educativas*, (40), 1-11.
- Burril, G., (2014). Fractions, Ratios and Interactive Dynamic Technology. En A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the 12th International Conference*. Montenegro.
- Butto, C. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: Una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Revista Horizontes Pedagógicos*, 15(1), 33-45.

- Carreño, E., Rojas, N., Montes, M., & Flores, P. (2013). Mathematics teacher's specialized knowledge. Reflections based on specific descriptors of knowledge. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 419-459). Antalya, Turquía: CERME.
- Carrillo, J., & Contreras, L. C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación matemática*, 7(3), 79-92.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, C., & Muñoz-Catalán, M. (2013). Determining Specialized Knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz (ed.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: CERME.
- Carrillo, J., Escudero, D., & Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. *Revista de Análisis Matemático-Didáctico para profesores*, 1, 16-26.
- Castañeda, A., Rosas A., & Molina, J (2012). La institucionalización del conocimiento en la clase de matemáticas: Un estudio sobre el discurso del aula. *Perfiles educativos*, 34(135), 26-40
- Castañeda, A., Rosas, A., & Molina, J. (2012). La institucionalización del conocimiento en la clase de matemáticas: Un estudio sobre el discurso del aula. *Perfiles Educativos*, 34(135), 26-40.
- Castro, E., Rico, L., & Castro, M. (1988). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. España: Editorial Síntesis.
- Center for Applied Linguistics (s.f.). Lesson Planning. En *Part II: Activity Packets*. Recuperado de [http://www.cal.org/caela/tools/program\\_development/elltoolkit/Part2-29LessonPlanning.pdf](http://www.cal.org/caela/tools/program_development/elltoolkit/Part2-29LessonPlanning.pdf)
- Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. *Actes de l'UE de la Rochelle*, 91-118.
- Chick, H., Baker, M., Pham, T., & Cheng, H. (2006). Aspects of Reachers' Pedagogical Content Knowledge for Decimals. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the International Group for the PME* (Vol. 2, pp. 297-304). Praga: PME.

- Chinnappan, M., & Desplat, B. (2012). Contextualisation of fractions: Teacher's pedagogical and mathematical content knowledge for teaching. *Journal of Science and Mathematics*, 35(1), 43-59.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. UK: Routledge.
- Cuapanteca, A. (2007). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en tercer año de primaria* (tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Ciudad de México, México.
- De Castro, B. (2008). Cognitive models: The missing link to learning fraction multiplication and division. *Asia Pacific Education Review*, 9(2), 101-112.
- Delors, J. (Dir.) (1996). *La educación encierra un tesoro*. Madrid: Santillana-UNESCO.
- Denny, T. (1978). *Story-telling and educational understanding*. Paper presentado en el National Meeting of the International Reading Association, Houston.
- Díaz, Á. (2013). TIC en el trabajo del aula. Impacto en la planeación didáctica. *Revista iberoamericana de educación superior*, 4(10), 3-21.
- Domínguez, M. (1990). El aprendizaje por descubrimiento dirigido aplicado a la enseñanza de las matemáticas. *Suma*, 7, 39-41.
- Domínguez, M. (1991). El aprendizaje por descubrimiento dirigido aplicado a la enseñanza de las matemáticas. *SUMA* (7), 39-41.
- Esch, E. (1996). Promoting Learner Autonomy: criteria for the selection of appropriate methods. En Pemberton, R., Li, E., Or, W., & Pierson. H. (Eds.), *Taking control. Autonomy in Language Learning* (35-48). Honk Kong: Honk Kong University Press.
- Escudero, D., Flores, E., & Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Sosa, E. Aparicio, & F. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XV escuela de invierno en matemática educativa* (pp. 35-42). México, DF: CIMATES.
- Fernandes, P., Leite, C., Mouraz, A., & Figueiredo, C. (2013). Curricular contextualization: Tracking the meanings of a concept. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 22(4), 417-425.
- Flores, R. (2011). Los significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23.

- Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.
- García L. (2009). *Un Estudio sobre el conocimiento didáctico del contenido (CDC) de profesores de matemáticas que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de carreras de ciencias económicas* (tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.
- García, S. (2014). *Sentido numérico. Materiales para apoyar la práctica educativa*. México: INEE.
- Garritz, A., & Trinidad-Velasco, R. (2004). *El conocimiento pedagógico del contenido. Educación química, 15(2)*, 98-102.
- Gispert, C. (2001). Números Racionales. En *Enciclopedia Didáctica de Matemáticas* (pp. 44-51). Barcelona, España: Océano.
- Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.
- Godino, J., Recio, A., Ruiz, F., Roa, R., & Pareja, J. (2003). Recursos interactivos para el estudio de las fracciones. *XVIII Reunión del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de la Matemática* (pp. 1-14). Córdoba, España: SIIDM
- Hashweh, M. Z. (2005). Teacher pedagogical constructions: a reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and Teaching, 11(3)*, 273-292.
- Hazewinkel, M (Ed.). (2001). Fracción. En *Encyclopaedia of Mathematics*. Springer.
- Heredia, Y., & Gómez, M. (2007) Factores que afectan el desempeño escolar: el caso de las escuelas primarias públicas de Nuevo León. Memorias del IX Congreso Nacional de Investigación Educativa. Mérida, México: COMIE.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American educational research journal, 42(2)*, 371-406.
- Hill, H., & Ball, D. (2009). The curious—and crucial—case of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan, 91(2)*, 68-71.
- Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education, 39(4)* 372-400.

- Hill, H., Rowan, B., & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Hincapié, C. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la institución educativa San Andrés de Girardota* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.
- Instituto Nacional de Evaluación para la Educación [INEE] (2006). *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria*. México: INEE.
- INEE (2013). *México en PISA 2012*. México: INEE. Recuperado de [http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/11149/1/images/Mexico\\_PISA\\_2012\\_Informe.pdf](http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/11149/1/images/Mexico_PISA_2012_Informe.pdf)
- INEE (2015). *Resultados nacionales 2015*. Recuperado de <http://www.inee.edu.mx/index.php/resultados-nacionales-2015>
- Isiksal, M., & Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(3), 213-230.
- Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(2), 87-211.
- Lamon, S. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. Nueva York y Londres: Routledge.
- Lester, F., Masingila, J., Mau, S., Lambdin, D., dos Santon, V., & Raymond, A. (1994). *Learning how to teach via problem solving*. Reston, Virginia: NCTM.
- Llinares, S. (2009). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. *Colección Digital Eudoxus*, (15), s/p.
- Luelmo, M. (2004). Concepciones matemáticas de los docentes de primaria en relación con la fracción como razón y como operador multiplicativo. *Revista del Centro de Investigación*, 6(22), 83.



- Malderez, A., & Wedell, M. (2007). *Teaching teachers: Processes and practices*. Nueva York: Continuum International Publishing Group.
- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión. Revista de la División de Ciencias Administrativas de la Universidad del Norte*, (20), 165-193.
- Miles, M., & Huberman, A. (1994). *Qualitative data analysis: A sourcebook*. Beverly Hills: Sage Publications.
- Miras, M. (1993). Un punto de partida para el aprendizaje de nuevos contenidos: los conocimientos previos. En C. Coll, E. Martín, E., T. Mauri (Eds.), *El constructivismo en el aula*. Barcelona: Graó.
- Mochón, S., & Morales, M. (2010). En qué consiste el "conocimiento matemático para la enseñanza" de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación Matemática*, 22(1), 87-113.
- Mora, J. (1993). El currículum entendido como proceso y la calidad de la educación primaria y básica: una propuesta de debate para maestros de América Latina y el Caribe. *Ciencia y sociedad*, 18(4), 448-462.
- Moug, P. (2007). Non-participative observation in political research: The 'poor' relation? *Politics*, 27(2), 108-114.
- Múnera, J., (2011). Una estrategia didáctica para las matemáticas escolares desde el enfoque de situaciones problema. *Revista educación y pedagogía*, 23(59), 179.
- Muñoz-Catalán, C., & Carrillo, J. (2012). Buenas prácticas en la Universidad de Huelva: El conocimiento profesional en la acción del profesor de "Matemáticas y su Didáctica". *REDU: Revista de Docencia Universitaria*, 10(1), 177-198.
- Muñoz-Catalán, M., Carrillo, J., Climent, N. (2006). La reflexión de una maestra de Matemáticas en el "Prácticum" y en los inicios de su práctica docente. En *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 217-224). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.
- Muñoz-Catalán, M., Contreras, L., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M., y Climent, N., (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo

analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 18(3), 589-605.

Penzo, W., (coord). (2010). *Cuadernos de docencia universitaria. Guía para la elaboración de las actividades de aprendizaje*. Barcelona: ICE y Editorial Octaedro.

Peñalva, L. (2010). Las matemáticas en el desarrollo de la metacognición. *Política y cultura*, (33), 135-151.

Perera, P., & Valdemoros, M. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en educación matemática XI*, 209-218.

Pinto, J., & González, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas. *Educación Matemática* 20(3), 83-100.

Pinto, J., & González, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática*, 20(3), 83-100.

Planas, N., & Font, V. (2003). Una aproximación sociocultural a las dificultades del aprendizaje matemático. *Educació I Diversitats: Formació, acció i recerca*.

Planas, N., (2009). Matemáticas en la educación superior. En N. Planas, & A. Alsina (Coord.), *Educación matemática y buenas prácticas. Infantil, primaria, secundaria y educación superior* (pp. 205-212). España: Graó.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analyzing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, 18(1), 3-17.

Ramírez, M., & Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación Matemática*, 21(1), 63-90.

Rebollar, A., (2000). *Una variante para la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, a partir de una nueva forma de organizar el contenido, en la escuela Media cubana* (tesis doctoral). Instituto Superior Pedagógico Frank País García, Santiago de Cuba, Cuba.

Rifandi, R. (2014). *Developing grade 5 students understanding of multiplication of two fractions* (tesis de maestría). State University of Surabaya, Surabaya, Indonesia.

- Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1999). *Métodos de investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe.
- Rodríguez, J. (2003). Paradigmas, enfoques y métodos en la investigación educativa. *Investigación Educativa*, 7(12), 23-40.
- Rodríguez, R., & Zuazua, E. (2002). Enseñar y aprender Matemáticas. *Revista de Educación del MEC*, 3(329), 239-256.
- Rojas, n. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.
- Ruíz, J., (2012). *Metodología de la investigación cualitativa*. Bilbao: Publicaciones de la Universidad de Deusto.
- Schoenfeld, A. H. (2002). Making mathematics work for all children: Issues of standards, testing, and equity. *Educational researcher*, 31(1), 13-25.
- Secretaría de Educación Pública [SEP] (2009). *Plan de Estudios. Educación básica. Primaria*. México: SEP.
- SEP (2011a). *Plan de Estudios. Educación básica. Primaria*. México: SEP.
- SEP (2011b). *Programa de estudios .Guía para el maestro. Primaria. Sexto grado*. México: SEP.
- SEP (2014a). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno*. México: SEP.
- SEP (2014b). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro*. México: SEP.
- Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), pp. 4-14.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.
- Socas, M. M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. *Educatio siglo XXI*, 29(2), 199-224.
- Son, J. (2012). Fraction multiplication from a Korean perspective. *Mathematics teaching in the Middle school*, 17(7), 388-393.

- Sosa, Leticia & Flores-Medrano, Eric & Carrillo, José. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática*, 28(2), 151-174.
- Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Estados Unidos: Sage.
- Sweetland, R. D. (1984). Understanding Multiplication of Fractions. *Arithmetic Teacher*, 32(1), 48-52.
- Thompson, P., & Saldanha, L. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. *Research companion to the principles and standards for school mathematics*, 95-113.
- Tirosh, D., & Graeber, A. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics*, 20(1), 79-96.
- Valbuena, R., (2015). *La investigación científica avanzada: Con introducción a los programas de investigación científica, La Investigación Internivel y El Razonamiento Artificial*. Caracas, Venezuela.
- Valdemoros, M. (2010). Dificultades didácticas en la enseñanza de razón y proporción: estudio de caso. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13, 423-440.
- Woods, P. (1989). *Inside schools: ethnography in educational research*. New York: Routledge.
- Yáñez, J. C. (2009). Resolución de problemas. Su concreción en algunos recursos clásicos. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 151-161.
- Yasoda, R. (2009). *Problems in Teaching and Learning Mathematics*. Nueva Delhi: Discovery Publishing House.

## APÉNDICE



## Entrevista para las maestras

**Estimado(a) profesor(a):**

Me dirijo a usted para saludarlo (a) cordialmente y agradecerle de antemano aceptar contestar esta entrevista que forma parte de un proyecto de investigación realizado en el Departamento de Educación de Universidad Autónoma de Aguascalientes. A través de esta entrevista se pretende obtener información acerca de la práctica del profesor de educación primaria en torno a la enseñanza de la multiplicación de fracciones.

Cabe resaltar que la información que usted proporcione será completamente confidencial y con fines académicos y científicos, por ello, me permito solicitarle permiso para poder video-grabar la entrevista facilitando el análisis posterior de sus valiosos comentarios. Le reitero mi agradecimiento a usted por las facilidades otorgadas en este proyecto investigativo.

Aguascalientes, Ags., México a \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 201\_

### GUÍA DE ENTREVISTA

**Instrucciones:** El protocolo de entrevista incluye tres situaciones hipotéticas relacionadas con la didáctica del profesor de educación primaria en torno a multiplicación de fracciones, y cada una de éstas contiene un conjunto de preguntas.

Le solicito de manera atenta que conteste las preguntas tomando en cuenta la situación planteada y de acuerdo con los conocimientos que usted posee. No hay opiniones buenas o malas, cualquier respuesta que emita será la adecuada.

Conviene mencionar que la entrevista es con fines de investigación y no se pretende evaluar su conocimiento, además, la información que me proporcione será confidencial. Cualquier duda o falta de claridad en la situación hipotética o en las preguntas, por mínima que sea, le pido me lo haga saber para buscar alternativas de modo que sean comprendidas por usted. Si no hay dudas o comentarios, procederemos con la entrevista.

<b>Guía de entrevista</b>
<b>Primera situación</b>
<p>Imagine que a su escuela se integra un profesor, su nombre es Luis y será la primera vez que imparta clases en sexto grado. Un día platicando con usted, él le comenta que la próxima semana enseñará la multiplicación de fracciones y no tiene muy claro cómo hacerlo.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ¿Qué debe hacer o implementar Luis para enseñar la multiplicación de fracciones?</li> <li>2. ¿Qué requiere saber Luis para que sus alumnos aprendan a multiplicar fracciones?</li> <li>3. ¿La multiplicación de fracciones se enseña de una manera específica?                         <ul style="list-style-type: none"> <li>• De ser así, ¿cuál sería y por qué se enseña de una manera específica?</li> <li>• De no ser así, ¿por qué no se requiere de una manera particular?</li> </ul> </li> </ol>
<p>4. ¿Pueden los alumnos presentar dificultades en torno a la multiplicación de fracciones? ¿Cuáles son y a qué se deben dichas dificultades? ¿Qué tendría que hacer Luis para confrontarlas?</p>
<p>5. ¿Qué posibles dificultades podría experimentar Luis en su práctica para desarrollar el tema de la multiplicación de fracciones?, ¿qué le recomendaría usted para encarar dichas dificultades?</p> <p>Transcurridos un par de días, el profesor Luis le pide ayuda a usted para planear la clase:</p>
<p>6. ¿Qué tipo de actividades o ejercicios le puede sugerir a Luis para introducir, desarrollar y cerrar el tema de la multiplicación de fracciones? ¿Es necesario que haya</p>

un orden en estas actividades o ejercicios?

- De ser así, ¿Cuál sería y cuáles serían los criterios para determinar ese orden?
- De no ser así, ¿por qué no es necesario un orden entre las actividades o los ejercicios?

7. ¿Qué le sirve de apoyo el profesor para enseñar este tema?

8. ¿Qué criterios debe considerar Luis para seleccionar materiales y recursos en torno a este tema?

9. Maestro, me puede proporcionar algunos ejemplos de las características que deben poseer las actividades o ejercicios que Luis debe utilizar para abordar la multiplicación de fracciones.

**Segunda situación**

La maestra Lupita, quien es su compañera de escuela, tiene 5 años trabajando como docente y no es la primera vez que imparte este tema en sexto grado. Según Lupita, sus actividades son efectivas porque tomó en cuenta a los estudiantes en la planeación y aplicación de éstas.

1. ¿Está de acuerdo con la maestra Lupita?

De ser así, ¿por qué? ¿Qué cree usted que se tomó en cuenta para diseñar y lograr que dichas actividades hayan sido efectivas? ¿Por qué es necesario considerar esos aspectos?

- De no ser así, ¿por qué?

2. ¿La realidad nos permite tomar en cuenta a los alumnos? [indagar sobre la respuesta]

3. ¿Qué conocimientos previos de los alumnos consideró la maestra Lupita para que comprendieran la multiplicación de fracciones?

4. ¿Qué papel jugó el contexto del niño al momento de enseñarle la multiplicación de fracciones?

**Tercera situación**

El supervisor de zona observa cómo el profesor Javier imparte la multiplicación de fracciones. Al término de una de la sesiones, el supervisor le comenta a Javier que aunque su clase estuvo bien, no tomó en cuenta las sugerencias del plan de estudios.

1. ¿Qué sugerencias del Plan de Estudios debió tomar en cuenta Javier para enseñar la multiplicación de fracciones?, ¿por qué las debió tomar en cuenta?

2. ¿Javier debió de haber recurrió a las sugerencias y lineamientos del Plan de estudios aun cuando su clase estuvo bien?, ¿Cómo puede fundamentar su respuesta?

3. ¿Cree usted que las sugerencias en el Plan de estudios le ayudarían a Javier a enseñar la multiplicación de fracciones?
  - De ser así, ¿cómo ayudan?
  - De no ser así, ¿por qué?
4. ¿Cómo debió llevar a cabo Javier las sugerencias del Plan de Estudios a la práctica? En el tiempo que enseñó la multiplicación de fracciones, Javier decidió ajustar su planeación de clase y usar sólo el libro de texto:
5. ¿La propuesta que el libro de texto da para enseñar la multiplicación de fracciones permite lograr objetivos del Plan de estudios? ¿Cómo puede fundamentar su respuesta?
6. ¿Qué papel juegan el Plan de estudios y el libro de texto en la práctica del profesor para enseñar la multiplicación de fracciones?
7. ¿Cree usted que el Plan de estudios y el libro de texto tiene alguna relación?
  - De ser así ¿cuál sería y por qué?
  - De no ser así, ¿por qué?

**Cuarta situación**

- Uno de los problemas que se da en el libro de textos de Javier es el siguiente: “José estudia matemáticas  $\frac{1}{2}$  hora todos los días a la semana; sin embargo, esta semana sólo pudo estudiar 5 días, ya que enfermó.
1. ¿Cuántas horas estudió José esta semana?. Varios de los alumnos dieron la siguiente respuesta a esta pregunta: “ $\frac{6}{3}$  de horas”.
  2. ¿Cómo cree que los alumnos obtuvieron dicho resultado?
  3. ¿Qué debería hacer Javier para que sus alumnos reflexionen sobre este resultado?

**Generales**

1. ¿Qué carrera estudió para impartir clases en nivel primaria?
2. ¿En qué institución llevó a cabo dicha carrera?
3. ¿Cuál es su último grado de estudios?
4. ¿Ha recibido cursos de actualización o formación docente en el área específica de las matemáticas? Mencione cuáles.
5. ¿Cuántos años de experiencia profesional tiene? ¿Y en sexto grado?
6. ¿Cuál es el reto más grande que enfrenta como maestro de matemáticas?
7. ¿Cuál es su opinión de las matemáticas?



**Bitácora descriptiva**

Nombre de la escuela: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

Código del profesor: \_\_\_\_\_

Hora de inicio de la sesión: \_\_\_\_\_ Hora de término de la sesión: \_\_\_\_\_

Lugar: \_\_\_\_\_

Fase	Actividad (procedimiento)	Propósito	Material	Patrón de interacción	Tiempo
					