UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES

CENTRO DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

TESIS

GENERALIZACIÓN DE PATRONES EN SUCESIONES ARITMÉTICAS FIGURALES COMO ESTRATEGIA PARA FAVORECER EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

PRESENTA

Jesús Valenzuela García

PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

TUTORA:

Dra. Victoria Eugenia Gutiérrez Marfileño

COMITÉ TUTORAL:

Dra. Alma Elena Figueroa Rubalcava

Dra. Encarnación Castro Martínez

Aguascalientes, Ags., 20 febrero de 2018

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES

DRA. GRISELDA ALICIA MACÍAS IBARRA
DECANA DEL CENTRO DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES
P R E S E N T E

Por medio de la presente, como comité tutorial designado del estudiante **JESÚS VALENZUELA GARCÍA** con ID 187594 quien realizó la tesis titulada: **GENERALIZACIÓN DE PATRONES EN SUCESIONES ARITMÉTICAS FIGURALES COMO ESTRATEGIA PARA FAVORECER EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO**, y con fundamento en el Artículo 175 Apartado II del Reglamento General de Docencia, nos permitimos emitir el **VOTO APROBATORIO** para que pueda proceder a su impresión. De igual manera, el estudiante podrá continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del grado en el programa de Doctorado en Investigación Educativa.

Ponemos lo anterior a su digna consideración y sin otro particular por el momento, le enviamos un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E
"SE LUMEN PROFERRE"
Aguascalientes, Ags., a 29 de enero de 2018.

Dra. Victoria Eugenia Gutiérrez Marfileño
Tutora de tesis

Dra. Alma Elena Figueroa Rubalcava
Integrante Comité Tutorial

Dra. Encarnación Castro Martínez
Integrante Comité Tutorial

c.c.p. Interesado
c.c.p. Secretaría Técnica del Doctorado en Investigación Educativa

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES
CENTRO DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES

DEC. CCS Y H OF. N' 0247
Asunto: Conclusión de Tesis

DRA. EN ADMÓN. MARÍA DEL CARMEN MARTÍNEZ SERNA
DIRECTORA GENERAL DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
P R E S E N T E.

Por este conducto le informo que el documento final de Tesis/Trabajo Práctico Titulado: "**GENERALIZACIÓN DE PATRONES EN SUCESIONES ARITMÉTICAS FIGURALES COMO ESTRATEGIA PARA FAVORECER EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO**", presentado por el sustentante **JESÚS VALENZUELA GARCÍA** con **ID. 187594**, egresado del **DOCTORADO EN INVESTIGACIÓN EDUCATIVA**, cumple las normas y lineamientos establecidos institucionalmente para presentar el examen de grado.

Sin más por el momento, aprovecho la oportunidad para enviarle un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E
"SE LUMEN PROFERRE"
Aguascalientes, Ags. A 12 de Febrero del 2018

DRA. GRISELDA ALICIA MACÍAS IBARRA
DECANA

c.c.p. Dr. Francisco Javier Pedroza Cabrera. Secretario de Investigación y Posgrado del CCS y H.
c.c.p. Dra. Laura Elena Padilla González. Secretaria Técnica del Doctorado en Inv. Educativa
c.c.p. Mtra. Imelda Jiménez García. Jefa del Depto. De Control Escolar
c.c.p. Mtro. Jesús Valenzuela García. Egresado del Doctorado en Investigación Educativa
c.c.p. Archivo

Educación Matemática

Ciudad de México, 25 enero de 2018

Dr. Jesús Valenzuela García
Dra. Victoria Eugenia Gutiérrez Marfileño

Con gusto comunicamos a ustedes que su colaboración "Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones figurales" ha sido aceptada para su publicación en la sección Artículos de nuestra revista.

Esperamos seguir contando con su participación

C O R D I A L M E N T E

Dra. Avenilde Romo Vázquez
Editora en jefe

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi agradecimiento a la Dra. Victoria Eugenia Gutiérrez Marfileño por haber dirigido esta investigación. Por su cuidadosa revisión y aportes a este trabajo. Valoro su confianza y el tiempo que destinó a este proyecto.

Agradezco también a la Dra. Alma Elena Figueroa Rubalcava, por sus contribuciones que significaron una mejora a esta investigación. Aprecio el apoyo que me brindó en cada una de los espacios de formación académica.

Reconozco la inestimable contribución de parte de la Dra. Encarnación Castro Martínez. Agradezco el haber aceptado formar parte del comité de tutores. Aprecio además el haberme recibido en el período de estancia de investigación en España y compartir su vasta experiencia en el campo de la Didáctica de la Matemática.

Expreso mi gratitud a la Dra. María Eugenia Ramírez Esperón y Dr. David Alfonso Páez por cada uno de las lecturas, sus reflexiones y cuestionamientos al trabajo. Este diálogo permitió mejorar la investigación que presento en este documento. Valoro su amistad.

Mi sincero agradecimiento a cada uno de los profesores del Departamento de Educación de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, por la oportunidad de formación doctoral que he recibido y por su disposición a compartir su conocimiento y experiencia en el campo de la investigación educativa.

Agradezco a mis compañeros del programa del DIE: Gustavo, Adriana, Carlos, Cintya, Juan Francisco, Yahaira y Luis Eduardo; por compartir sus conocimientos y amistad.

A todos Ustedes mi reconocimiento por su calidad humana y profesional.

Finalmente agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca económica que me permitió formarme como investigador en el programa de Doctorado en Investigación Educativa en la Universidad Autónoma de Aguascalientes.

DEDICATORIA

A

Jesús y María, mis padres

Ivonne, mi esposa

Mateo, Jesús Santiago y Valeria, mis hijos

Cristina, Iván, Adriana y José, mis hermanos

A mi familia

A Ustedes por animarme a seguir. Por su apoyo. Por las alegrías.

A Corina Ruíz Flores Frausto, mi compañera del DIE. Por su enseñanza de vida.

ÍNDICE

ÍNDICE 1

ÍNDICE DE TABLAS 4

ÍNDICE DE FIGURAS 5

RESUMEN 6

ABSTRACT 7

INTRODUCCIÓN 8

CAPÍTULO 1. Planteamiento del problema de investigación 11

1.1. El problema de los aprendizajes algebraicos en el contexto escolar mexicano 12

1.2. Propuesta didáctica: la generalización de patrones y el pensamiento algebraico 16

1.3. Justificación del estudio 17

1.3.1. La generalización de patrones desde el punto de vista curricular 18

1.3.2. Desde el punto de vista personal 19

1.4. Preguntas de investigación 19

1.5. Objetivos 20

1.6. Marco de investigación. Análisis Didáctico 20

CAPÍTULO 2. Revisión de investigaciones previas 23

2.1. Estrategias y dificultades en la obtención de la regla general 23

2.2. El papel de la visualización en la obtención de la regla general 27

2.3 Los procesos de abstracción-inducción de la regla general 29

2.4 La generalización situada como actividad sociocultural 30

CAPÍTULO 3. Marco conceptual 32

3.1. Análisis de contenido 32

3.1.1. Definición de sucesión 32

3.1.2. Elementos de una sucesión 34

3.1.2.1. Propiedades de las sucesiones 34

3.1.2.2. Características de las sucesiones aritméticas 35

3.1.2.3. Formas de representación de las sucesiones 35

3.1.3. Término general de una sucesión 37

3.1.4. Las sucesiones en el currículo de matemática escolar 37

3.1.5. Las sucesiones en el currículo de matemática escolar en México 38

3.2. Análisis cognitivo 40

3.2.1. Pensamiento algebraico 40

3.2.1.1. Vínculo entre sistemas de representación matemática 42

3.2.1.2. Habilidad matemática 43
3.2.2. Habilidades cognitivas asociadas al pensamiento algebraico 43
3.2.3. Noción de patrón 46
3.2.4. Proceso inductivo 47
3.2.5. Generalización 48
3.2.5.1. Generalizar en el contexto escolar 50
3.2.6. Estrategias de generalización a partir de patrones 51
3.2.7. El papel de la estrategia visual en la generalización de patrones 52
3.3. Análisis de instrucción 54
3.3.1. De los procesos recursivos a la identificación de estructuras 55
CAPÍTULO 4. Marco metodológico 58
4.1. Investigación Basada en Diseño 58
4.1.1. Características de los estudios de DBR 59
4.1.2. Evaluación de la calidad de los estudios DBR 61
4.1.3. Experimentos de Enseñanza 61
Fases del Experimento de Enseñanza 62
4.2. Descripción del estudio 63
4.2.1. Participantes 64
4.2.2. Papel del investigador 64
4.2.3. Técnicas de obtención de datos 66
4.2.4. Uso del Análisis Didáctico 66
4.3. Conjetura general de la investigación 68
4.4. Tareas 69
4.5. Organización del trabajo 71
4.6. Actividades realizadas 71
4.7 Tipo de análisis de los datos 71
CAPÍTULO 5. Análisis de los resultados de intervención 73
5.1. Primera sesión 73
5.1.1. Planificación 73
5.1.2. Desarrollo 75
5.1.3. Análisis preliminar 75
5.1.3.1. Categorización y codificación de las respuestas en la prueba diagnóstico. 75
5.1.3.2. Categorización de las variables de los alumnos 76
5.1.3.3. Descripción de los resultados de la sesión de diagnóstico 77
5.1.3.4. Análisis de la primera tarea de diagnóstico 77
5.1.3.5. Análisis de la segunda tarea de diagnóstico. 85
5.1.3.6. Análisis de tercera tarea de diagnóstico 95
5.2. Segunda sesión 97
5.2.1. Planificación 97
5.2.2. Desarrollo 98
5.2.3. Análisis preliminar 100
5.2.3.1. Categorización y codificación de las respuestas 100
5.2.3.2. De la simbolización a la verbalización 101

5.2.3.3. De lo aritmético a lo visual como modo de razonamiento 104
5.3. Tercera sesión 107
5.3.1. Planificación 107
5.3.2. Desarrollo 108
5.3.3. Análisis preliminar 109
5.3.3.1. Trayectoria hacia la visualización como alternativa. Avances y desafíos 109
5.3.3.2. La estrategia visual como descubrimiento en la tarea de generalización 113
5.3.3.3. Retos de la visualización como tarea didáctica. 114
5.4. Cuarta sesión 116
5.4.1. Planificación 116
5.4.2. Desarrollo 117
5.4.3. Análisis preliminar 126
5.5. Quinta sesión 128
5.5.1. Planificación 128
5.5.2. Desarrollo 129
5.5.3. Análisis preliminar 130
5.5.3.1. Intervención didáctica en la tarea de figura genérica 131
5.6. Sexta sesión 139
5.6.1. Planificación 139
5.6.2. Desarrollo 139
5.6.3. Análisis preliminar 144
5.7. Sesión de entrevistas 148
5.7.1. Planificación 148
5.7.2. Desarrollo 148
5.7.3. Análisis preliminar 148
5.8. Síntesis de la fase de intervención 154

CAPÍTULO 6. Discusión de los resultados (Análisis retrospectivo) 160

6.1. Estrategias y uso de Pensamiento algebraico en la obtención de la regla general en sucesiones 160
6.2. Desarrollo del pensamiento algebraico mediante la generalización visual 166
6.2.1. La eficacia del recurso color en la abstracción-inducción de la regla 167
6.2.2. Manifestaciones de pensamiento algebraico desde la manipulación de objetos concretos 168
6.2.3. Evolución de las habilidades de pensamiento algebraico desde una experiencia didáctica 170
6.3 Implicaciones didácticas 172

CAPÍTULO 7. Conclusiones 176

7.1. Aportes del trabajo 178
7.2 Perspectivas y líneas de investigación 180
7.3. Limitantes del estudio 181

GLOSARIO 182

BIBLIOGRAFÍA 183

APÉNDICES 194

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1Representación tabular de una sucesión 33
Tabla 2 Estrategias de generalización de patrones 51
Tabla 3 Fases y acciones en un Experimento de Enseñanza 63
Tabla 4 Descripción general de las tareas 69
Tabla 5 Planificación de la sesión diagnóstica 74
Tabla 6 Respuestas correctas, estrategias y representación de la regla general. Primera tarea 78
Tabla 7 Respuestas incorrectas, estrategias y representación de la regla general 79
Tabla 8 Trayectorias de las estrategias de respuesta correcta utilizada por término 81
Tabla 9 Trayectoria no exitosas en la obtención de la regla y frecuencia por término 82
Tabla 10 Frecuencias de RC por modalidad de egreso y representación de la regla 82
Tabla 11 Frecuencias de RI por modalidad de egreso y representación de la regla 83
Tabla 12 Frecuencias de RC y RI por término y estrategias para Secundaria General 84
Tabla 13 Frecuencias de RC y RI por término y estrategia para Telesecundaria 85
Tabla 14 Respuestas correctas, estrategias y representación de la regla. Segunda tarea 86
Tabla 15 Respuesta incorrecta, estrategia y representación de la regla general 87
Tabla 16 Trayectoria de las estrategias utilizadas en respuestas correctas por término 89
Tabla 17 Trayectoria de las estrategias de respuesta correcta con dificultades al obtener la regla 90
Tabla 18 Trayectorias no exitosas y estrategias utilizadas 91
Tabla 19 Frecuencias de respuesta correcta por modalidad de egreso 91
Tabla 20 Frecuencias de respuesta incorrecta por modalidad de egreso 92
Tabla 21 Frecuencias de RC y RI por término y estrategia utilizada para Secundaria General 93
Tabla 22 Frecuencias de RC y RI por término y estrategia utilizada para Telesecundaria 94
Tabla 23 Frecuencias de respuesta correcta y estrategia utilizada. Tercera tarea 95
Tabla 24 Frecuencias de respuesta incorrecta y estrategia utilizada 96
Tabla 25 Frecuencias de verbalización del término general 101
Tabla 26 Tránsito de estudiantes con RC en diagnóstico hacia la estrategia de visualización 104
Tabla 27 Tránsito de estudiantes con RI en diagnóstico hacia la estrategia de visualización 105
Tabla 28 Uso de la visualización por estudiantes que no respondieron en tarea diagnóstico 106
Tabla 29 Respuesta correcta y estrategia por término 109
Tabla 30 Trayectoria de estudiantes con RC en diagnóstico hacia el uso de la visualización 112
Tabla 31 El uso de la visualización en estudiantes con RI en diagnóstico 113
Tabla 32 Estrategias de generalización en sucesión con término oculto 126
Tabla 33 Abstracción visual de la regla general 127
Tabla 34 Frecuencias de respuesta correcta en tarea de figura genérica 130
Tabla 35 Estrategias de generalización de la regla y modo de representación 131
Tabla 36 Frecuencias de visualización y representación de la regla general por tarea 145
Tabla 37 Trayectoria del desempeño por estudiantes en tarea de visualización 147

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Representación figural de la sucesión 33
Figura 2. Representación gráfica de la función $f(x) = 2x + 1$ 35
Figura 3. Representación de sucesiones en el dominio de los números naturales 35
Figura 4. Representación con términos consecutivos de la sucesión $f(x) = 2n + 3$ 36
Figura 5. Representación de un término genérico de la sucesión $f(x) = 2n + 6$ 36
Figura 6. Representación con términos ocutos de la sucesión $f(x) = 4n - 1$ 37
Figura 7. Análisis visual de sucesión de figuras 44
Figura 8. Síntesis del marco conceptual 57
Figura 9. Estructura general de una Investigación Basada en diseño 62
Figura 10. Uso inadecuado de la estrategia de conteo 79
Figura 11. Uso inadecuado de la estrategia de proporcionalidad 80
Figura 12. Proceso de abstracción-inducción de la regla general 152
Figura 13. Tendencias en la respuesta por término en diagnóstico 161
Figura 14. Caracterización de una generalidad algebraica 163
Figura 15. Verbalización de la regla general algebraica 165
Figura 16. Representación verbal de la regla general mediante visualización 168
Figura 17. Proceso de inducción de las relaciones mediante visualización 170
Figura 18. Distinción entre trayectorias de generalización aritmética y algebraica 172
Figura 19. Proceso de inducción de las relaciones generales 174

RESUMEN

Se presenta una investigación que parte del problema en los aprendizajes algebraicos en el contexto escolar. En respuesta, se llevó a cabo una intervención didáctica que tuvo como objetivo desarrollar las habilidades de pensamiento algebraico en 28 estudiantes de un plantel de bachillerato en México. Metodológicamente se adoptó el *Experimento de Enseñanza*; este método permitió implementar un proceso de diseño, reflexión, rediseño y evaluación de las manifestaciones de pensamiento algebraico en tareas de generalización de sucesiones en contexto figural.

A partir de los resultados de la fase diagnóstica, se evidenció una tendencia a la realización de generalizaciones aritméticas, no obstante, se observaron dificultades para obtener la regla debido a un uso inadecuado de las estrategias de tipo multiplicativo y proporcional. En la intervención didáctica se propuso abordar la inducción de relaciones generales entre los elementos vinculados en la figura desde el uso de la estrategia de visualización. Los hallazgos evidenciaron un avance en la habilidad de abstraer los elementos variables, inducir las relaciones generales entre cada uno de los elementos, establecer y argumentar la regla general en una sucesión de tipo figural. Esta investigación contribuye en la comprensión del proceso de inducir reglas generales de patrones en el contexto de sucesiones lineales mediante representación de figuras, como aspecto fundamental del pensamiento algebraico. Este proceso de inducción de patrones permitió comprender las implicaciones didácticas en el aula, identificando la estrategia visual como el modo de actuación eficaz al momento de abstraer e inducir un patrón. La investigación permitió identificar también las dificultades que los participantes experimentaron en el proceso de inducir la regla general, derivados éstos de una aplicación inadecuada de estrategias aritméticas.

Como futuras líneas de investigación, se plantea el replicar la propuesta de generalización algebraica mediante la estrategia de visualización como medio para favorecer las habilidades de pensamiento algebraico en otros contenidos matemáticos. Por otra parte, el diseño metodológico permitió, mediante el carácter reflexivo en el diseño del experimento, mejorar las habilidades de pensamiento algebraico.

ABSTRACT

We present an investigation that starts from the problem in algebraic learning in the school context. In response, a didactic intervention was carried out that aimed to develop the skills of algebraic thinking in 28 students of a high school in Mexico. Methodologically adopted the Teaching Experiment; this method allowed to implement a process of design reflection, redesign and evaluation of the proposal in the evolution of the manifestations of algebraic thought in tasks of generalization of successions in context figural.

From the results of the diagnostic evaluation, there was a tendency to perform arithmetic generalizations, however, difficulties were observed to obtain the rule due to an inadequate use of multiplicative and proportional strategies.

In the didactic intervention it was proposed to address the induction of general relations between the elements linked in the figure from the use of the visualization strategy. The findings evidenced an advance in the ability to abstract the variable elements, to induce the general relations between each of the elements, to establish and to argue the general rule in a succession of figural type.

It is promoted as future lines of research to replicate the proposal of algebraic generalization through the visualization strategy as a means to favor the skills of algebraic thinking in other contexts of mathematical education, favoring the ability to abstract and induce the general rules among the elements that constitute a figure in succession. On the other hand, the methodological design allowed, through the reflective character in the design of the experiment, to improve the algebraic thinking abilities.

INTRODUCCIÓN

El presente documento muestra los resultados de investigación doctoral la cual se ubica dentro de la Línea de Generación y Aplicación del Conocimiento Instituciones y Actores de Educación Media Superior y Superior que se integra en el Programa de Doctorado en Investigación Educativa de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, México.

La investigación, aquí descrita, se constituye como un estudio desde la perspectiva de intervención en Didáctica del Álgebra y se sustenta metodológicamente en el paradigma de Investigación de Diseño; específicamente, en el método denominado *Experimento de Enseñanza* el cual se caracteriza por investigar procesos de aprendizaje ocurridos en ambientes naturales de aula.

En este trabajo de investigación se pretendieron dos aportes en el campo de la Didáctica del álgebra escolar: a) producir conocimiento que favorezca la formación de habilidades matemáticas en alumnos de Educación Media Superior (EMS) en relación al pensamiento algebraico a partir del trabajo de generalización de patrones en tareas de sucesiones lineales con representación figural; b) caracterizar un modelo de instrucción que permita a los profesores de matemáticas de los niveles básica y media, así como a la comunidad de investigadores conocer un acercamiento empírico centrado en el desarrollo de habilidades visuales relacionadas con el desarrollo de este tipo pensamiento matemático.

En el estudio se exploran los procesos cognitivos involucrados en el desarrollo del pensamiento algebraico en 28 estudiantes de primer semestre de bachillerato. Metodológicamente en la investigación se implementó un proceso de instrucción basado en el diseño, intervención, análisis y rediseño de un conjunto de seis sesiones de intervención didáctica en aula organizadas en tres fases: diagnóstico, intervención y evaluación. Con base en la fase de diagnóstico, la decisión didáctica en la intervención fue implementar y describir el uso de estrategias de naturaleza visual como heurístico en la inducción de patrones y su generalización, en tareas con sucesiones figurales. En la fase evaluativa se valora el impacto en las habilidades de establecer la regla general en una sucesión de figuras

La tesis se estructura en siete capítulos. El documento inicia con un primer capítulo dedicado a la construcción del objeto de estudio. En él se describe la problemática general que representa el aprendizaje del álgebra escolar en estudiantes de nivel medio superior. De forma particular se detalla la dificultad que representa el tránsito de los conocimientos aritméticos a los algebraicos en el medio escolar. Se continúa con la justificación de la propuesta y se concluye con la presentación de las preguntas y objetivos de investigación.

El segundo capítulo muestra una síntesis de los resultados de investigaciones que han abordado los procesos de generalización de patrones como estrategia didáctica en el desarrollo del pensamiento algebraico en el medio escolar. Derivado de esta revisión se han identificado estrategias y dificultades observadas en los estudiantes en el proceso de abstraer e inducir patrones en sucesiones de crecimiento aritmético con términos figurales.

En el tercer capítulo se desarrolla el Marco conceptual. La construcción de este capítulo se hizo con base en la herramienta de organización de Análisis Didáctico. Se presentan tres apartados de análisis: de contenido, cognitivo e instrucción. En el primero se describe y delimita el tema de sucesión como contenido matemático a trabajar en esta investigación; en el segundo análisis se caracteriza el constructo pensamiento algebraico, se destaca la contribución que esta habilidad supone en la formación matemática de los estudiantes; en el tercero se presentan las implicaciones didácticas de la propuesta de generalización como actividad encaminada al desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de nivel bachillerato.

En el cuarto capítulo se exponen los fundamentos del paradigma Investigación Basada en Diseño (DBR por sus siglas en inglés), se describe la naturaleza metodológica de éste y su contribución en la mejora de las prácticas de enseñanza en contexto de aula. En este capítulo se desarrolla también el Experimento de Enseñanza, como un método de investigación propio del paradigma de DBR cuyo carácter cíclico y reflexivo posibilita mejorar la enseñanza en el aula. Al cierre de este capítulo se detallan las tres fases del Experimento de Enseñanza.

En el quinto capítulo se muestran los resultados de la fase de intervención didáctica. El capítulo se organiza en siete sub apartados que corresponden a las sesiones de diagnóstico, intervención y evaluación, más una sesión de entrevistas con participantes en donde se indagó el proceso de inducción de la regla. Cada uno de los apartados se organiza con base en las fases del Experimento de enseñanza: planificación, intervención y análisis de intervención.

El capítulo seis se expone el análisis retrospectivo de la intervención. Para la construcción de este apartado se retomó y dio respuesta a cada uno de los objetivos de investigación a partir de las evidencias del trabajo empírico en aula. Derivado de este análisis se expone una serie de reflexiones que permiten evaluar el impacto de la propuesta de intervención, mismas que constituyen el aporte del estudio que se reporta.

La tesis concluye con una síntesis de esta experiencia de investigación. Se expone en este capítulo sugerencias para futuras investigaciones y propuestas didácticas que repliquen y mejoren el conjunto de los resultados aquí obtenidos

CAPÍTULO 1. Planteamiento del problema de investigación

En períodos anteriores, padres y educadores situados en la matemáticas escolares se condujeron dentro de una tradición bien establecida de separar trayectorias: álgebra para la élite, aritmética para las masas.

(Steen, 1988)

En este capítulo se expone tanto la problemática e interés que motivó a llevar a cabo esta investigación. Se parte de las dificultades que los alumnos experimentan en el aprendizaje del álgebra escolar y se destaca, en particular, aquellos referentes teóricos que señalan la inadecuación pedagógica que considera el estudio del álgebra como una extensión del conocimiento aritmético y cuyo resultado deriva en un estudio descontextualizado y mecanizado de estructuras algebraicas. Posteriormente se presenta un conjunto de reflexiones que motivaron la elección de los procesos de generalización de patrones en sucesiones lineales como vía para el desarrollo de un tipo de pensamiento matemático denominado pensamiento algebraico, el cual supone habilidades de pensamiento basado en la identificación de patrones y con ello el manejo de la generalidad. En la parte final se expone las preguntas y objetivos de investigación. Se concluye este capítulo con la presentación del Análisis Didáctico como herramienta para organizar los elementos teóricos-metodológicos de investigación.

A continuación se expone aquellos aspectos que dan cuenta de la problemática relacionada al aprendizaje del álgebra escolar. De este planteamiento se destacan resultados de pruebas estandarizadas que evidencian dificultades en los alumnos ante el aprendizaje del álgebra; además, se presenta una serie de referentes teóricos que permiten contar con un panorama de las dificultades que ha representado el aprendizaje de esta rama de la matemática y el constante debate en torno a qué tipo de álgebra necesita la sociedad actual.

Finalmente, situamos el estudio en torno a la idea del álgebra escolar como una oportunidad para desarrollar en los estudiantes hábitos de pensamiento más que la manipulación descontextualizada de símbolos. Partimos de una aspiración que responde a “la necesidad de entender el álgebra como un derecho fundamental” (Chambers, 1994, p. 30).

1.1. El problema de los aprendizajes algebraicos en el contexto escolar mexicano

La educación es un derecho fundamental en México. La Constitución Política de nuestro país establece que, además de la gratuidad, laicidad y obligatoriedad, la educación que imparte el Estado tenderá a asegurar la calidad en los aprendizajes que reciben los educandos, basados en el mejoramiento constante y el máximo logro académico (Diario Oficial de la Federación. Programa Sectorial de Educación 2013-2018 (PSE, 2013). Bajo esta demanda en los aprendizajes es como se orientarán las acciones tendientes a mejorar la educación impartida en México.

En contraste, la realidad educativa en nuestro país evidencia una baja calidad en los aprendizajes, ubicando éste como uno de los problemas centrales de la educación en México y, de forma puntual, en el nivel de Educación Media Superior (EMS), tal como lo han señalado de forma reiterada los resultados de evaluaciones internacionales y nacionales: Programa Internacional de Evaluación de los Alumnos (PISA, 2012) y el Examen de la Calidad del Logro Educativo (EXCALE 2008), así como su manifestación en los altos índices de reprobación académica y deserción escolar experimentados en este tramo de escolaridad (INEE, 2013).

Con base en el documento Plan y Programas de Estudio para los niveles de educación obligatoria emitido por la Secretaría de Educación Pública (SEP) en México, uno de los mayores desafíos en nuestro país se particulariza en los aprendizajes matemáticos, con mayor detalle son señaladas las dificultades en el aprendizaje y comprensión del álgebra escolar (SEP, 2002). De forma general, en los resultados obtenidos en la prueba estandarizada EXCALE se establece que aproximadamente 80% de los alumnos mexicanos próximos a finalizar su educación secundaria (12-14 años, aproximadamente) no logran resolver los problemas algebraicos ahí planteados (INEE, 2006).

Si bien, las disposiciones curriculares de formación matemática escolar establecen como objetivos en el eje curricular *Sentido numérico y pensamiento algebraico* que los estudiantes manejen y transiten entre las distintas formas de representación matemática y desarrollen la habilidad de generalizar y modelar situaciones del mundo real (SEP, 2011a;

2011b); la evidencia en los niveles de aprovechamiento escolar advierten dificultades en el logro de las habilidades asociadas al aprendizaje del álgebra escolar.

Con mayor detalle, los problemas planteados en el la prueba Excale 2009 expusieron que los estudiantes de tercer grado de secundaria lograron resolver correctamente problemas relacionados con el dominio de técnicas y mecanismos formales, sin embargo y en menor medida fueron capaces de resolver problemas en donde se requirió modelar situaciones mediante el uso del álgebra. Por ejemplo, 17% de los evaluados logró construir correctamente el patrón de una sucesión numérica o figurativa y usar la regla general para encontrar el término correspondiente a un determinado lugar de la sucesión (INEE, 2009).

Esta problemática en el logro de aprendizajes algebraicos señalada en el contexto nacional concuerda con lo observado en el escenario internacional. Por ejemplo, Encarnación Castro (2012) afirma que la mayoría de los estudiantes de nivel medio no logran construir un conocimiento algebraico satisfactorio a pesar del empeño puesto en su enseñanza por parte de los profesores. Además, agrega la autora, se ha derivado una gran cantidad de estudios los cuales han tratado de identificar los obstáculos en su aprendizaje, las causas que los originan y el desarrollo de diversas propuestas de solución en la enseñanza del álgebra.

La imagen tradicionalmente construida en torno a la enseñanza del álgebra escolar en el nivel medio (secundaria) se ha reducido a realizar actividades de simplificación de expresiones, destacando aspectos de reducción y el manejo de símbolos (Kieran, 1992; Wagner & Parker, 1993). Esta práctica pedagógica del álgebra, como herramienta para la manipulación simbólica y como medio para solucionar problemas, generalmente ficticios, ha representado la esencia del álgebra escolar en el currículo desde el siglo XIX hasta el XX (Kieran, 1992).

En la actualidad, sin embargo, se reconoce que este enfoque de enseñanza ha estado desprovisto de significados en el aprendizaje de los estudiantes, alejándolos de poder establecer conexiones entre el álgebra y otros contenidos matemáticos, y en general, la desvinculación del álgebra con su medio. En este escenario, los alumnos han enfrentado obstáculos y dificultades para aprender y adaptarse a las complejidades de esta herramienta representacional y procedimental (Wagner & Parker, 1993; Kaput, 2000; Kieran, 2007). Se observa entonces que la forma tradicional de introducir el álgebra en las escuelas no ha resultado eficaz en el desarrollo de la comprensión de las relaciones y estructuras matemáticas, además de provocar un manejo desprovisto de significado en el uso del lenguaje simbólico (Warren, 2004; Molina, 2009).

El estudio del álgebra es considerado un puente fundamental para acceder a las matemáticas superiores pero también un conocimiento que permite un mejor desempeño y estatus dentro de la dinámica social[1]. No obstante, las dificultades en su aprendizaje son evidentes. Mason (1996) y Kaput (2008) indican como una de las causas de esta dificultad la abrupta ruptura en la transición del estudio de la aritmética, trabajado en los niveles de educación elemental, al estudio del álgebra reservado para la educación secundaria.

Para Kieran (1992) una dificultad en la enseñanza del álgebra escolar, caracterizada como la generalización de las operaciones aritméticas aprendidas en la primaria, es que los profesores parten del supuesto de que las relaciones matemáticas, que son el verdadero objeto del álgebra, resultan familiares al estudiante debido a su conocimiento y dominio previo de la aritmética. En consecuencia, durante su enseñanza en la educación secundaria se presta poca atención a la habilidad de establecer nociones de variabilidad y de cambio que establecen estructuras y las cuales son expresadas a través de reglas generales que denotan este pensamiento relacional-funcional.

Se reconoce por tanto como deficiencia en la enseñanza del álgebra escolar la insuficiente formación en habilidades de pensamiento matemático de tipo relacional y funcional, el cual permita en el estudiante un aprendizaje con significado respecto de situaciones de variabilidad y generalidad (Lesley & Freiman, 2004).

Epistémicamente, Warren (2004) sugiere que una forma de distinguir entre los procesos de aprendizaje de la aritmética y el álgebra radica en que el pensamiento algebraico implica la

[1] Steen (1998) aporta tres argumentos para considerar el aprendizaje del álgebra como medio de posicionamiento social: 1) en la actualidad muchos trabajos requieren al menos alguna familiaridad con el álgebra y cita como ejemplo el necesario conocimiento de notaciones algebraicas básicas en el uso de hojas de cálculo en la computadora; 2) la mayoría de los países competidores comercialmente enseñan pensamiento algebraico durante muchos años posteriores a los grados de educación elemental, por consiguiente esto la convierte en parte universal de la educación escolar; 3) Para la sociedad tecnológica moderna, el álgebra se ha convertido en el símbolo de acceso al nuevo derecho civil. En consecuencia el álgebra es tanto una llave para las matemáticas avanzadas y un pasaporte a la estabilidad económica.

comprensión de procesos en donde están involucradas situaciones de relación y cambio, mientras que en el pensamiento aritmético se asume como el proceso de obtención de un producto de tipo numérico generado a partir de valores de entrada en una expresión que indica una igualdad.

Derivado de esta transición entre la aritmética y el estudio algebraico, Carraher y Schliemann (2007) señalan las siguientes dificultades observadas en los estudiantes de los niveles de escolaridad medio superior:

a) No hacen uso de los símbolos matemáticos para expresar relaciones entre cantidades;
b) muestran incomprensión en el manejo de letras (literales) como medio para representar valores generalizados o una variable;
c) presentan dificultad para operar sobre valores desconocidos

En términos de Stacey, Chick y Kendall (2004), la comprensión de las dificultades cognitivas asociadas al aprendizaje del álgebra es esencial en el diseño de unidades de enseñanza que busquen maximizar las oportunidades de aprendizaje. La idea que se plantea en esta investigación es la de promover y orientar la enseñanza del álgebra hacia al desarrollo de habilidades de pensamiento del tipo relaciones generales junto con la noción del concepto de función, más que al dominio exclusivo y aislado de técnicas encaminadas a la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones. Por lo anterior, resulta ilustrativo lo expresado por Radford (2006) quien afirma que "usar letras no significa hacer álgebra" (p.2). Al respecto, Wagner y Parker (1993) mencionan:

> En el pasado, muchos estudiantes han pasado por el estudio del álgebra memorizando "rituales", esos procedimientos formales de manipulación de símbolos han perdido conexión a los números que representan. Ahora, las computadoras personales pueden aliviarnos del trazo de gráficos y del trabajo penoso de manipular símbolos. Somos libres de dedicar más tiempo a pensar algebraicamente (p. 119)

Para delimitar el objeto de estudio, en lo subsecuente se hace referencia a la propuesta de trabajo centrada en la generalización de patrones de sucesión aritméticas con elementos figurativos como un medio para favorecer habilidades de pensamiento relacional-funcional, característico del pensamiento algebraico y la comprensión de las representaciones simbólicas. Esta propuesta de trabajo sobre la generalización de patrones pretende contribuir a la solución de las dificultades señaladas por Carraher y Schliemann (2007).

1.2. Propuesta didáctica: la generalización de patrones y el pensamiento algebraico

Los problemas relacionados con la construcción de patrones y su generalización han sido planteados, en ocasiones, en contextos pictóricos para probar con un formato alternativo a las listas de números (Castro, 1994). Investigaciones como las de Radford (2006),Lesley y Freiman (2006) y Samson (2012) demuestran que el tipo de tarea con representaciones figurales es una opción eficaz en el desarrollo de las habilidades de abstracción e inducción de la regla general de patrones, una actividad esencial en el trabajo matemático y un potente medio para el aprendizaje del pensamiento y lenguaje algebraico

Estudios llevados a cabo por Cañadas, Castro y Castro (2008); Becker y Rivera (2005,2006) documentan las estrategias y dificultades que los estudiantes enfrentan en el proceso de generalizar patrones. Se mencionan dos aspectos fundamentales: la poca habilidad para abstraer un patrón y, por otro, la tendencia hacia el uso de razonamientos de naturaleza aritmética en la obtención de la regla, pero que, a decir de Barbosa, Vale y Palhares (2009), Barbosa y Vale (2015) esta estrategia aritmética resulta inadecuada en el desarrollo de las habilidades de pensamiento algebraico. En contraste, en la revisión de la literatura se encontró que la estrategia de visualización posibilita al estudiante el establecer nociones de variabilidad entre los elementos de las figuras, argumentar la variabilidad, abstraer e inducir un patrón en la sucesión, y posteriormente establecer una regla general que le permita predecir el orden o regularidad de la sucesión (Barbosa, Vale & Palhares, P, 2009; Samson, 2012; Chalé & Acuña, 2013).

Se comprende la generalización de patrones como la habilidad de abstraer e inducir relaciones en contextos cuantitativos a partir de casos considerados particulares y extender este rango de razonamiento a la estructura general de la sucesión (Kaput, 2000).

En franca disonancia entre la definición estrecha de la matemática como la ciencia del espacio y los números, Steen (1988) señala que la diversidad de la actividad matemática moderna, producto de la influencia de las computadoras en la sociedades actuales, excede a esta limitada definición de la matemática como la ciencia que estudia el espacio-número y argumenta que, en esencia, la matemática busca patrones en los números, el espacio, en los datos, en las computadoras, agregando que la teoría matemática lo que hace es explicar relaciones a través de patrones.

1.3. Justificación del estudio

La importancia de esta investigación radica en intervenir en una problemática educativa concreta referida en términos de los aprendizajes en el área del álgebra en bachillerato. El objetivo central de esta investigación se encaminó a favorecer la formación de un tipo de pensamiento particular dentro del campo de la matemática, caracterizado por el establecimiento de relaciones generales. Para el alcance de este objetivo se consideraron como punto de partida los modos de actuación observados en los alumnos, producto de su trayecto por la educación básica en relación a los procesos de generalización.

La decisión de realizar esta investigación con estudiantes de primer semestre de bachillerato se justifica ante la necesidad de:

a. Fortalecer las habilidades de pensamiento algebraico en los alumnos participantes,
b. inferir acerca del quehacer didáctico en educación básica en relación a la enseñanza de las habilidades de abstraer e inducir relaciones generales en patrones, aportando al conjunto de investigaciones que intentan avanzar en la comprensión de los procesos cognitivos relacionados con el desarrollo del pensamiento algebraico en el contexto escolar.
c. extender un tipo de metodología emergente cuya pretensión es intervenir y transformar a favor sobre una realidad educativa concreta a partir del diseño de episodios de instrucción basado en la teoría y encaminado hacia la práctica (Molina, Castro & Castro, 2007).

Con esta propuesta de intervención se atiende sobre una problemática particular en el aprendizaje algebraico. Se buscó comprender los procesos cognitivos y sus implicaciones didácticas en atención a algunas de las dificultades, que se infiere, los participantes experimentan ante el aprendizaje algebraico.

Respecto de la dificultad que ha representado el incorporar los resultados y avances de la investigación en las prácticas de enseñanza en álgebra, pero que bien puede extenderse a otros campos de didáctica de la matemática, Kieran (2007) señala:

> Existen dificultades para que los profesores puedan aprender de los hallazgos de la investigación y cómo aplicarlos en la enseñanza. Algunas de las revistas de investigación en educación matemática tienen como metas específicas expresar hallazgos cognitivos y discuten sus implicaciones didácticas. Sin embargo, muchos de los artículos aparecen escritos para otros investigadores, no para el profesorado. Por otra parte, los profesores tienen muy poco tiempo para buscar los resultados de las investigaciones; muchos realizan la enseñanza que está en el libro de texto, pero es posible que este vacío acerca de cómo los profesores interpretan y deliberan sobre el contenido de las investigaciones sea una de las áreas con mayor necesidad de atención investigadora (p.22).

1.3.1. La generalización de patrones desde el punto de vista curricular.

Lo encontrado en los documentos curriculares relativos a la formación matemática escolar en México, el desarrollo de habilidades de pensamiento algebraico se observa como un tema no prioritario. En la revisión de los contenidos curriculares para la educación primaria y secundaria se otorga primacía a los temas relativos a habilidades de cálculo y el fortalecimiento de los algoritmos aritméticos. El trabajo sobre generalización de patrones en sucesiones figurales inicia desde el segundo grado de primaria y se extiende hasta el segundo grado de secundaria. En estos ocho grados de escolaridad, el tema es abordado en una sesión por ciclo escolar y la actividad pedagógica se centra en describir una regularidad (*Apéndice A*). No obstante, se entiende que esta habilidad de abstraer una regularidad representa sólo una parte de lo esperado, pues teóricamente al pensar algebraicamente se espera que el alumno, además de identificar una regularidad, sea capaz de expresar las relaciones generales ya fuera mediante representación verbal o simbólica.

Por otra parte, en el proceso de búsqueda de materiales relacionados con la formación del profesorado para educación secundaria en relación al desarrollo del pensamiento algebraico, se encontró sólo un documento que, lejos de expresar sugerencias didácticas, éste se centra en una serie de ejercicios en los cuales no figuró el trabajo sobre sucesiones figurales (SEP, 2002). Lo anterior sugiere una pobre formación en el desarrollo de habilidades de enseñanza en los futuros profesores de matemáticas en México.

1.3.2. Desde el punto de vista personal.

Como motivación personal, esta investigación buscó atender el problema de los aprendizajes algebraicos, mismos que, al representar un problema repercuten en indicadores como la reprobación y deserción escolar. En este sentido, lo que se pretendió fue promover la comprensión del álgebra como una herramienta que posibilite al individuo comprender e insertarse en los procesos sociales. Por consiguiente, se buscó experimentar propuestas didácticas de acceder al álgebra a partir de actividades, como el trabajo con sucesiones figurales, que promuevan un aprendizaje contextualizado y en donde el alumno sea capaz de utilizar el álgebra como medio para establecer y comunicar situaciones de variabilidad.

Investigar el desarrollo del pensamiento algebraico, como la habilidad de establecer nociones y comprensión de la generalidad, es un tema fundamental en el desarrollo de habilidades matemáticas indispensables en el estudio de temas posteriores como la estadística en donde la naturaleza está en comprender fenómenos que involucran la variabilidad y en donde están implicados factores o elementos en condición de cambio.

En conclusión, el interés personal de desarrollar esta investigación es promover el estudio de la matemática como una herramienta funcional en la comprensión de las realidades sociales, económicas, entre otras; en lugar de limitar estos conocimientos aislados de técnicas de manipulación sintáctica, pero desde una visión descontextualizada.

1.4. Preguntas de investigación

1.- ¿Qué estrategias y dificultades experimentan los participantes al momento de establecer la regla general en sucesiones lineales con elementos figurativos?

2.- ¿Cómo logran inducir los participantes la regla general de patrones en sucesiones de tipo figural y con ello promover el desarrollo de pensamiento algebraico?

3.- ¿Qué papel desempeña la visualización en la abstracción e inducción de la regla general?

4.- ¿Cuáles son los recursos semióticos (lingüísticos u otros) a través de los cuales los estudiantes expresan la regla general?

5.- ¿Cuáles son las implicaciones didácticas ante la tarea de inducir la regla general y el desarrollo del pensamiento algebraico?

1.5. Objetivos

1. Identificar las estrategias y dificultades que experimentan los alumnos en la construcción de la regla general en sucesiones lineales con elementos figurativos.

2.- Documentar una experiencia didáctica centrada en el desarrollo de pensamiento algebraico con alumnos de bachillerato vía el proceso de generalización de patrones en sucesiones lineales con elementos figurativos.

3. Explorar la evolución en la habilidad para abstraer e inducir patrones y su generalización como actividad esencial en el desarrollo del pensamiento algebraico.

4. Caracterizar un modelo de enseñanza enfocado en el desarrollo del pensamiento algebraico a partir de la visualización como estrategia para generalizar patrones en sucesiones lineales con elementos figurativos.

1.6. Marco de investigación. Análisis Didáctico

El Análisis Didáctico es un método de investigación propio de la Didáctica de la Matemática que utiliza técnicas y métodos de análisis-síntesis de un marco conceptual y de contenido, de instrucción y de evaluación que en conjunto describen cómo el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje (Lupiáñez, 2013). El Análisis Didáctico "puede ser útil en aquellos estudios sobre la comprensión y el aprendizaje de temas matemáticos en los que es necesario diseñar pruebas y esquemas de análisis de las actuaciones de los sujetos" (Valverde, 2012, p. 92).

El método consta de cuatro fases y presenta un carácter cíclico que permite articular procesos de análisis- síntesis a fin de operar de forma sistemática y didáctica un tema curricular concreto en el contexto de la matemática escolar. Las fases de análisis son las siguientes: de contenido, de tipo cognitivo, de instrucción y de actuación (Rico & Fernández-Cano, 2013).

- El *análisis de contenido* es el procedimiento mediante el cual el profesor identifica, organiza y selecciona los significados de un término matemático que considera relevantes a efectos de la planificación de la instrucción.
- En el *análisis cognitivo* el profesor describe las hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción sobre un tema matemático concreto. Este análisis habilita a este primero para que enuncie y organice las habilidades o conocimientos que espera desarrollar en los estudiantes sobre un tema matemático concreto delimitado en la fase previa. Como resultado del proceso análisis-síntesis correspondiente a esta fase se construye: a) las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares; b) las dificultades en el aprendizaje (hipotéticas o empíricas); c) demandas cognitivas. La síntesis de esta fase permite examinar la complejidad de las tareas según la profundidad de los contenidos, la diversidad de expectativas que atienden y las limitaciones cuya superación se proponen. Además, en esta fase se analiza también la contribución que las capacidades esperadas suponen al desarrollo de competencias matemáticas globales.
- El *análisis de instrucción* tiene por finalidad responder a la cuestión: ¿cómo y cuándo se lleva a cabo la formación? La concepción del análisis de instrucción es transformadora e interpretativa pues supone una adaptación de un programa de instrucción concreto al marco de un aula. Las categorías del análisis de instrucción consideran: a) las funciones, los tipos de tareas y su secuenciación, b) los materiales y recursos para la enseñanza y c) la interpretación, organización y gestión del trabajo en el aula. Como síntesis de esta fase se procura organizar los procesos de comunicación de los conocimientos, seleccionar tareas y actividades, las estrategias de intercambio y adquisición de ideas referidas a los conceptos y expectativas de aprendizaje previamente considerados para el tema seleccionado.
- El *análisis evaluativo* atiende a la cuestión de cuáles han sido los resultados de la intervención didáctica. En este análisis se usan tres tipos de categorías: a) criterios e

instrumentos para diagnosticar, orientar y valorar los aprendizajes; b) interpretación de los rendimientos y resultados alcanzados y c) toma de decisiones para la revisión del proceso de enseñanza y aprendizaje que se infiere de los logros alcanzados. La síntesis de este proceso contribuye a la mejora del proceso enseñanza-aprendizaje en consideración con los aprendizajes alcanzados; además permite valorar fortalezas y debilidades del proceso de instrucción y las oportunidades de mejora. Para el análisis evaluativo se necesitan datos empíricos que muestren los logros y fallos de la planificación realizada y de su puesta en práctica. A la conclusión del análisis evaluativo se lleva a cabo la síntesis conjunta del Análisis Didáctico.

CAPÍTULO 2. Revisión de investigaciones previas

En este capítulo se presenta una revisión de los estudios centrados en los procesos de generalización de patrones en el contexto de sucesiones lineales con elementos figurativos. Para la organización y presentación se han construido cuatro categorías que esquematizan el conjunto de los resultados obtenidos en las investigaciones: i) centradas en estrategias y dificultades observadas en la generalización, ii) que consideran la estrategia visual como heurístico en las tareas de generalización, iii) abordan los procesos psicológicos-cognitivos de inducción-abstracción de patrones; iv) acerca de la generalización como proceso y resultado sociocultural.

Este análisis permitió reconocer, por un lado, los diversos marcos teóricos y metodológicos, y por otro, los hallazgos que constituyen los antecedentes directos de esta investigación. Las investigaciones revisadas dan cuenta de las estrategias y dificultades que los estudiantes experimentan en la construcción de reglas de generalidad; de los procesos psicológicos involucrados en la inducción de un patrón y del papel de los recursos semióticos de representación como un producto cultural. Se presenta también el papel de la visualización en el proceso de inducción de la regla general algebraica.

2.1. Estrategias y dificultades en la obtención de la regla general

Becker y Rivera (2005, 2006) exploraron los modos de actuación con que estudiantes de 9° grado (jóvenes de entre 14 y 15 años de edad) construyen la regla general en contextos de sucesiones lineales. Como problemática que fundamenta su trabajo, estos investigadores exponen que entre los años 2000 al 2005 se evaluó en Estados Unidos la habilidad para encontrar la regla general de la sucesión. El estudio longitudinal se llevó a cabo en una población de 60,000. Los resultados muestran que 72% de los estudiantes resolvieron exitosamente las tareas de generalización cercana, es decir, encontraron el valor de los términos próximos a los observados, mientras que sólo un porcentaje cercano al 18% de estos estudiantes usaron el Álgebra (generalización algebraica) para detectar de forma correcta las relaciones en la estructura de los términos de la sucesión y, por tanto, pudieron expresar una regla general perteneciente a la estructura.

Para Becker y Rivera son preocupantes dichos hallazgos pues revelan la inhabilidad observada por parte de los estudiantes, próximos a finalizar su educación media, de solucionar exitosamente tareas de generalización. En consecuencia, en sus investigaciones se propusieron identificar las estrategias usadas ante este tipo de tareas, y comprender el papel de la visualización en la abstracción del patrón de generalidad.

Dentro de los resultados que reportan, estos autores identificaron 23 estrategias de resolución categorizadas en dos grandes grupos: visuales y numéricas. Se observó que la estrategia más utilizada por los estudiantes fue de tipo numérico, hallazgo que coincide con los resultados en estudios previos, llevados a cabo por estos mismos investigadores, con profesores en formación de educación básica (Becker & Rivera, 2007).

En este análisis de las estrategias se observa que los estudiantes, quienes lograron establecer una regla general mediante estrategia numérica, mostraron la incapacidad de dotar de significado a la expresión simbólica en el contexto de la sucesión de figuras trabajada. Dicho en otros términos, para estos alumnos las variables (literales) fueron usadas únicamente como marcadores o generadores de números, pero carecieron de significado en el contexto de la sucesión de figuras. Encontraron además que los estudiantes quienes lograron establecer la generalización a partir de la estrategia visual lograron abstraer e inducir relaciones generales entre los elementos que conforman un término de la sucesión. Este modo de actuación visual los valores simbólicos fueron comprendidos dentro del contexto de una relación funcional.

Barbosa, Vale y Palhares (2009, 2012), Barbosa y Vale (2015) reconocen como un aspecto fundamental en la enseñanza de la matemática el desarrollo de las habilidades necesaria en la comprensión de patrones, relaciones y funciones que posibiliten una construcción más positiva y significativa de las matemáticas y contribuya a potenciar la habilidad para solucionar problemas y el desarrollo del pensamiento algebraico. Si bien los autores reconocen las potencialidades del trabajo con patrones en la formación matemática, destacan que en los salones de clase en Portugal los profesores privilegian los aspectos numéricos sobre las habilidades visuales en la construcción de una regla general en el contexto de trabajo con sucesiones figurales.

A partir de este escenario, Barbosa, Vale y Palhares (2009) se propusieron describir las dificultades observadas en una población de 54 estudiantes de entre 11 y 12 años en escuelas de Portugal respecto de la habilidad para obtener la regla general. Entre los resultados se destaca en los alumnos un mejor rendimiento al momento de obtener un término cercano en relación a las figuras observadas, siendo preponderante el uso de la estrategia de conteo en la obtención de dichos términos. No obstante, los resultados mostraron también que los alumnos hacen uso de estrategias inadecuadas como la proporcionalidad o la multiplicación. Dentro de las consideraciones en estas investigaciones, se resalta la importancia de proveer tareas que fomenten en el alumno el uso y comprensión de la estrategia visual y conjuntarla con las de tipo numérico a fin de una mejor comprensión de la noción de variabilidad y el establecimiento de la regla general.

Posteriormente, Barbosa y Vale (2015) llevaron a cabo un estudio con 80 profesores de educación básica en Portugal. En su trabajo intentaron identificar las estrategias usadas, las dificultades y el papel que desempeña la visualización como estrategia para construir la regla general en actividades de sucesiones figurales. Para los autores, los resultados fueron similares a los observados en el estudio descrito en el párrafo anterior. Sin embargo reconocen que la exploración visual promueve la emergencia de múltiples patrones. Además, Barbosa y Vale (2015) reconocen que existen factores que influyen en el modo de razonamiento que los estudiantes emplean ante la tarea de generalización, entre éstos señalan los siguientes:

a) la modalidad de la tarea propuesta;
b) el tipo de preguntas que promueven el pensamiento relacional y reversible;
c) el solicitar generalizaciones tanto cercanas como lejanas; y
d) las características de las figuras con las cuales se trabaja, que pueden corresponder a sucesiones de primer orden (lineales o también llamadas transparentes) y de segundo orden (cuadráticas o no transparentes).

De forma general, estos autores dan a conocer que los estudiantes logran mejores resultados en las generalizaciones cercanas que en las lejanas, observando una variedad de estrategias;

aunque usan con mayor frecuencia la estrategia de conteo en la obtención de los términos próximos (generalización cercana) y la estrategia explícita para la inducción de la regla general (generalización lejana). Señalan también que algunos estudiantes trabajaron exclusivamente sobre contextos numéricos en donde la representación gráfica era transformada a valor numérico y sobre dichos valores numéricos aplicaban algoritmos de solución.

En España, Callejo, García-Reche y Fernández (2016), al promover la propuesta de pensamiento algebraico temprano en 264 estudiantes de entre 6 a 12 años, quienes no habían recibido formación específica sobre la generalización de patrones, implementaron una actividad de construcción de la regla general en una sucesión de figuras. La población de estudiantes estuvo representada por alumnos de los seis grados formación primaria. En dicha actividad hubo gradualidad respecto a la complejidad de la tarea y se formularon dos formatos del instrumento aplicado. En la primera versión (aplicada a alumnos de 1° y 2° grado) se indagó la forma en que los alumnos obtuvieron el término siguiente a los términos observados y el valor de un término lejano a la sucesión. En la segunda versión (3° a 6° grado) además de las actividades del formato anterior, se indagó sobre la construcción de la regla general (ya no sólo un término lejano) además de la posibilidad de obtener el valor de la variable independiente a partir de la dependiente.

En la obtención del término cercano a la sucesión, los alumnos participantes recurrieron de forma preponderante al uso de la estrategia gráfica (71.6%), en ella, realizaron un recuento directo del número de los elementos involucrados en las figuras y establecieron posteriormente una relación a partir de la disposición espacial de dichos elementos. Del total de participantes, 38.6 % logró obtener el valor del término lejano mediante el uso de la estrategia gráfica. Se identificó también que una proporción de 32.9% del total de alumnos usaron la estrategia gráfica pero presentaron errores en la obtención del término lejano; dichos errores consistieron en no respetar la estructura espacial o numérica de la figura. Otra de las estrategias empleadas fue el establecer una relación funcional de tipo multiplicativo no proporcional entre los elementos, en esta estrategia los alumnos recurrieron al uso de recursos *deícticos espaciales* que le permitieron identificar una relación entre los elementos implicados en la figura.

En las conclusiones, los investigadores lograron identificar un salto cualitativo respecto del tipo de estrategias empleadas. El uso de la estrategia gráfica para responder a la cuestión de la generalización lejana disminuyó a lo largo de los cursos (93% en primer grado al 45% en sexto grado); a la vez que incrementó el número de respuestas correctas a lo largo de los cursos (del 25% al 85.7%). Estos datos sugieren que los estudiantes parten del uso de estrategias basadas en el conteo y posteriormente logran establecer relaciones sobre la estructura espacial y numérica; este desarrollo que parte del conteo y avanza hacia el establecimiento de relaciones generales le permite al alumno construir una relación funcional entre los elementos en donde los recursos deícticos espaciales juegan un papel determinante. No obstante, es meritorio reconocer también que la aparición de los contenidos matemáticos de la proporcionalidad en el segundo tramo de la educación primaria generó dificultades al momento de obtener tanto los términos lejanos de la sucesión, así como la regla general, pues el uso inadecuado de la proporcionalidad en el contexto del trabajo sobre patrones, generó los casos de respuestas incorrectas.

2.2. El papel de la visualización en la obtención de la regla general

Hershkowitz, Arcavi, y Bruckheimer (2001) reconocen la necesidad de revalorar el papel, la naturaleza y la comprensión de la visualización como herramienta cognitiva en el aprendizaje matemático, especialmente en álgebra inicial (*early algebra*). Los autores pugnan porque los planes curriculares incorporen actividades apropiadas que tengan el potencial de fomentar tanto el razonamiento visual y simbólico como sus interconexiones. Por su parte Arcavi (2003) confirma la tesis respecto de la necesidad de revalorar el papel de la visualización en los planes curriculares y las prácticas en aula, reconociendo su naturaleza como un tema de investigación central en educación matemática.

En su estudio con jóvenes de noveno grado de escolaridad, Becker y Rivera (2006) afirman que los estudiantes que han explorado la visualización como estrategia de generalización mostraron ser capaces de justificar su generalización a partir de asociar una expresión simbólica con los elementos de la figura observada y determinar valores lejanos a los observados, sin necesidad de recurrir a otros modos de representación como las tablas.

En Turquía Tanişli y Özdaş (2009) indagaron las estrategias usadas por 12 alumnos de quinto grado de educación primaria en la tarea de obtener la regla general. Categorizaron los participantes por niveles de desempeño escolar: alto, medio y bajo. El proceso de recolección de datos se basó en la entrevista basada en tareas. Estos autores concluyen en que hay evidencia para pensar sobre una relación entre los niveles de éxito escolar de los estudiantes y el uso de los enfoques visual y numérico. A decir de los autores, usualmente los estudiantes con nivel alto de desempeño adoptan ambas estrategias; en cambio, estudiantes con nivel medio usan sólo estrategias numéricas y los estudiantes con nivel bajo recurren el enfoque visual y las propiedades estructurales de patrones.

Como parte de su tesis doctoral Samson (2012) reconoce la importancia de los procesos visuales como estrategia de generalización. El investigador revela que algunos alumnos presentan habilidades de visualizar y abstraer patrones de figuras en múltiples formas; en su artículo se reconoce el papel que desempeña los recursos como los gestos, ritmos y señales (el autor denomina a esta teoría como enactivismo) en los procesos cognitivos, particularmente, aquellos involucrados en la abstracción de patrones.

Para Samson (2012) los procesos de visualización y de abstracción de patrones en contextos de sucesión de figuras están profundamente entretejidos, argumentando que la generalización descansa en la habilidad de comprender o detectar aspectos comunes a partir de unos pocos elementos particulares en una secuencia. Este criterio o aspecto común observado que el autor nombra abstracción, es aplicable a todos los términos de la secuencia y posibilita al sujeto inducir la regla que representa el término general de la sucesión.

Como parte de sus conclusiones Barbosa y Vale (2015) reconocen dos retos respecto de la visualización como estrategia en el aprendizaje matemático y en el proceso de generalización de patrones:

- La devaluación de este enfoque por parte de los profesores y alumnos, pues éstos asocian al estudio de la matemática con el manejo analítico de números, expresiones y algoritmos.

- El reconocimiento de las formas de visualización: perceptual y discursiva. La primera se caracteriza por la aprehensión perceptual de las figuras como un todo. La discursiva implica la identificación de la estructura espacial a partir de los elementos que constituyen la figura, relacionando atributos invariantes o propiedades. La visualización de este tipo se asocia a una generalización constructiva-deconstructiva.

En México, Chalé y Acuña (2013) llevaron a cabo un estudio centrado en identificar cómo los estudiantes de bachillerato analizan el papel de la visualización en el proceso de generalización en sucesiones figurales. Ellos afirman que la estrategia de visualización permitió a los participantes construir argumentos y explicaciones que les posibilitó el obtener la regla general y que ésta emergió de un constante diálogo con el análisis estructural de las figuras “el análisis visual le permitió al estudiante construir argumentaciones y explicaciones y no sólo (aplicar) técnicas aritméticas que lo llevaran a la solución” (p. 8).

2.3 Los procesos de abstracción-inducción de la regla general

Uno de los estudios centrados en el pensamiento inductivo como método de construcción de un patrón en una sucesión de figuras es el llevado a cabo por Cañadas, Encarnación Castro y Enrique Castro (2008). Fundamentados en la teoría sobre razonamiento inductivo, propuesto por Polya (1973) los autores describen y caracterizan las formas de pensamiento empleados por 359 estudiantes de tercero y cuarto grado de Educación Secundaria en España (14-16 años de edad) en relación a la identificación de patrones y el establecimiento de la regla general. El instrumento utilizado en el estudio está constituido por una prueba escrita conformada por seis problemas sobre progresiones aritméticas de primer y segundo orden, de los cuales reportan el problema de las baldosas, el cual es un término genérico de una sucesión.

Este grupo de investigadores reporta que sólo 19.5% de los 307 estudiantes que participaron en el estudio respondieron a la tarea de construir una generalización, ya fuera en representación verbal o escrita, a partir de la identificación previa de un patrón adecuado a la sucesión. El proceso inductivo parte de una transformación gráfica de la figura a una representación numérica. Se encontró que 90% (54 de 60) de los alumnos que lograron inducir la regla general trabajaron de forma previa con términos particulares en un sistema de representación numérica y sólo 5% trabajaron únicamente en el sistema de representación gráfica; el 5% restante hizo alguna transformación antes de generalizar, empleando como único modo de representación la verbalización.

Otro dato ilustrativo es el que refiere al hecho de que únicamente 3 de los 60 estudiantes que lograron establecer una generalización, lo hicieron mediante una representación simbólica, mientras que el resto lo hicieron de forma verbal. Con base en sus resultados los autores destacan la dificultad en el manejo de las representaciones simbólicas (manejo del lenguaje alfanumérico), y como consecuencia la necesidad de reconocer otras formas de representación de la generalidad como lo es la verbal. Los autores resaltan la importancia de la visualización como estrategia heurística en la construcción de un patrón y sugieren retomar este modo de actuación como objeto de investigaciones posteriores.

2.4 La generalización situada como actividad sociocultural

Radford (2010; 2012; 2013) reporta estudios que tienen como objetivo el desarrollo del pensamiento algebraico bajo la propuesta de álgebra temprana en niños de 8 años. En su enfoque teórico sobre el proceso de la generalización de patrones, el autor presenta el constructo *Objetivación* para referirse a la forma en la cual los estudiantes abordan un objeto a fin de hacerlo notorio y dotarlo de sentido.

En los resultados que reporta Radford (2012) se destacan la posibilidad que tienen los estudiantes (8 a 13 años) de evolucionar en su capacidad del pensamiento para relacionar sucesiones numerales infinitas a partir de establecer patrones de generalización verbal, y concluye que el trabajo con patrones ha sido considerado como una vía prominente para introducirlos en el estudio del álgebra; sin embargo, advierte este autor, no todas las actividades conducen a este propósito. Menciona que las estrategias heurísticas como la de ensayo-error no pueden ser consideradas como procedimientos algebraicos de generalización, sugiere en cambio como elementos característicos de la tarea algebraica los siguientes:

a) observar el aspecto común (semejanza y diferencia) entre los elementos que componen la sucesión;
b) determinar un concepto -un género- que extienda lo común observado para todos los términos de la secuencia, y
c) establecer una regla general que exprese o integre a cualquier término de la secuencia

Las investigaciones antes citadas permiten identificar la inadecuación originada de un enfoque didáctico del álgebra que considera a ésta como una generalización de las formas de razonamiento aritmético a pesar de que la base epistémica de ambas son de orden diferente (Warren, 2004). A consecuencia de la afirmación dada respecto de la naturaleza distinta entre las formas de pensamiento aritmético y algebraico, se considera necesario explorar y describir el tipo de enseñanza que promueva el desarrollo de esta habilidad de pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato tomando en cuenta los aportes de las investigaciones relacionadas con este tema.

Por consiguiente, resulta pertinente abordar como objeto de estudio el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de nivel de bachillerato a partir de un enfoque metodológico centrado en el análisis del diseño de instrucción que informe acerca de los procesos socio-cognitivos asociados en la construcción de este tipo de pensamiento, situando esta tarea en la complejidad contextual que supone el aula de clase, un modelo metodológico capaz de generar conocimiento para el alumno y para el investigador.

CAPÍTULO 3. Marco conceptual

Este capítulo está centrado en el análisis de contenido, cognitivo y de instrucción propuestos en el método de Análisis Didáctico el cual dentro de sus finalidades está "fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación, puesta en práctica y evaluación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos escolares específicos" (Rico & Fernández-Cano, 2013, p.13).

En el apartado de análisis de contenido se presenta una definición del concepto sucesión, siendo la sucesión figural una de las formas de representar dicho concepto matemático. El propósito radica en delimitar y caracterizar el contenido que se aborda en esta investigación. Posteriormente, se ubica el tema de funciones como objeto matemático y la sucesión como una forma de representar una función.

En el segundo apartado se expone el constructo pensamiento algebraico por tratarse de la noción central en esta investigación. De igual forma se destaca la habilidad relacional y funcional como inherentes a este tipo de pensamiento. Se desarrolla asimismo una descripción del razonamiento inductivo como método de obtención de la regla general algebraica y la estrategia visual como heurístico en la inducción de relaciones generales.

En el tercer apartado se presentan las consideraciones didácticas derivadas de las implicaciones que conlleva la enseñanza de este tipo de habilidades de pensamiento en el contexto escolar. Particularmente se hace referencia a las habilidades de abstraer relaciones y su generalización como fundamentales en la tarea de generalización

3.1. Análisis de contenido

3.1.1. Definición de sucesión.

El término *sucesión* es un concepto en cuya base se encuentran las nociones de conjunto ordenado de números naturales ($\mathbb{N}$) con primer elemento y proceso infinito: en donde para todo término de la sucesión hay un siguiente. De acuerdo con García (2005) "*Una sucesión es una función del conjunto* $\mathbb{N} = 1,2,3, \ldots$ *de números enteros positivos en un conjunto A. Para indicar la imagen del entero n, se emplea el símbolo* a_n. *Se puede decir de una sucesión que es una estructura discreta con la que puede representarse una lista* *ordenada*" (p. 226). En esta idea la estructura a_n representa un elemento o término de la sucesión, donde *n* corresponde al conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1,2,3, \ldots\} \setminus \{0\}$.

Cada sucesión tiene asociada una función, entendida esta última como una relación binaria entre un conjunto de pares ordenados de números en la que para un valor *x (dominio)* le corresponde un valor *y (codominio)*. Como objeto matemático una función puede tener varias formas de representación: sucesiones, tablas, diagramas y pares ordenados de valores. Por ejemplo, en la Tabla 1 se muestra un ejemplo de una función tabular, en este caso corresponde a la función *f* con una regla verbal: *el doble del número del término más uno*, con un conjunto de dominio $x = \{1,2,3,4,5,6\}$ y codominio $y = \{3,5,7,9,11,13\}$.

Tabla 1

Representación tabular de una sucesión

(x)	1	2	3	4	5	6
(y)	3	5	7	9	11	13

Nota: $f(x) = 2x + 1$

Otra de las formas de representar una función es mediante una sucesión. Por ejemplo la sucesión numérica con crecimiento aritmético $\{3,5,7,9, \ldots \infty\}$ tiene como expresión general de su estructura la función $f(x) = 2x + 1$. En la Figura 1 se observa un tipo de sucesión con representación figuras que comparte la misma estructura de las funciones anteriores. Como se puede apreciar, el crecimiento de estas figuras supone una estructura asociada a la función anterior mencionada.

Figura 1. Representación figural de la sucesión

En el trabajo con sucesiones de crecimiento aritmético, y para esta investigación en particular no se toman en cuenta las funciones de la forma $f\,(x) = b, donde\ b = N$, es decir, se excluye la función donde el valor del dominio es igual al del contradominio.
Cañadas (2007) advierte que las traducciones entre las distintas formas de representación de la sucesión: verbal, tabla, figural y expresión simbólica, poseen un aspecto que las potencializa como medio de representación. Como ejemplo "cuando se pasa de una gráfica

a una descripción verbal, se facilita la lectura. Si se pasa de descripción verbal a expresión algebraica, o fórmula, se facilita la modelización" (Castro & Castro, 1997, p. 105).

3.1.2. Elementos de una sucesión.

En toda sucesión se destacan los elementos siguientes: los términos n-ésimos (o términos particulares) y el término general (Cañadas, 2007). Se denomina término a cada uno de los elementos o valores que constituyen el conjunto ordenado de la sucesión. En la literatura se escribe $a_{1,}a_{2,}a_{3,} \dots a_n$ donde la expresión a representa el término de una sucesión y el subíndice indica el lugar al que está asociado dicho término. Por su parte el término a_n designa el elemento la regla general de la sucesión.

3.1.2.1. Propiedades de las sucesiones.

Se distinguen las siguientes propiedades en una sucesión:

- Finitud. Depende del número de términos que contiene la sucesión. Sucesiones finitas son aquellas que restringen un número definido de términos, por ejemplo, los $\mathbb{N}$ menores que 10, N<10 = $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Por otra parte el conjunto de *N* en una sucesión infinitas $N = 1, 2, 3 \dots \infty$
- Monotonía. Hace referencia al orden *creciente o decreciente* de una sucesión. La sucesión finita $\{2,4,6,8\}$ es un tipo de sucesión creciente. El caso opuesto $\{8, 6, 4,2\}$ es una sucesión decreciente.
- Recurrencia. Una sucesión es *recurrente* si se puede obtener a partir de los términos anteriores, en caso contrario es *no recurrente*. Cañadas (2007) indica que dada una sucesión de recurrencia se requieren dos condiciones para obtener la regla de crecimiento: a) que algún término de la sucesión debe ser conocido, y b) que debe existir una relación que vincule cualquier término con los precedentes.

Se delimita a continuación el tipo de sucesión que se aborda en este trabajo. Se trata de sucesiones infinitas donde el objetivo está dado en la obtención de la regla que exprese el término general de una sucesión, por otro lado son sucesiones de tipo creciente y recurrente, es decir, una forma de poder acceder a los términos y regla general es a partir de la identificación del valor de los términos anteriores y de orden creciente.

3.1.2.2. Características de las sucesiones aritméticas.

Las sucesiones se clasifican como progresión aritmética cuando se estructura a partir de una sucesión numérica tal que un término cualquiera es igual al elemento anterior añadiéndole un valor fijo (constante) denominado razón de progresión. Debido a esta característica aditiva a las sucesiones aritméticas también se les identifica con el nombre de Progresiones por diferencia. Este tipo de sucesiones aritméticas les corresponde una función de primer grado asociada a una gráfica de tipo lineal como la presentada en la Figura 2.

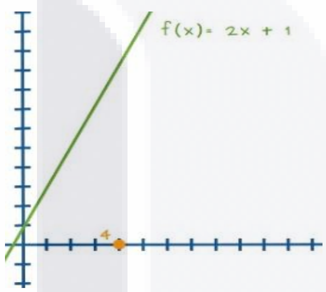


Figura 2. Representación gráfica de la función $f\,(x) \;=\; 2x + 1$

3.1.2.3. Formas de representación de las sucesiones.

Las sucesiones en general, pero en particular las de crecimiento aritmético en el dominio de los números naturales, pueden ser representadas mediante cuatro sistemas de representación. En la Figura 3 se aprecia cuatro modos de representar una sucesión de número naturales. Dentro de los modos gráficos se encuentran las representaciones de configuraciones discretas que es el modo al cual pertenece el tipo de sucesiones con elementos figurales.

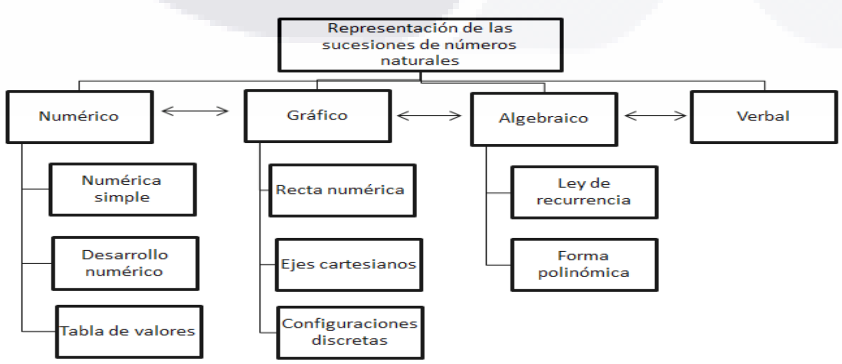


Figura 3. Representación de sucesiones en el dominio de los números naturales

Las sucesiones de crecimiento aritmético con elementos figurales o pictóricos son una secuencia conformada de figuras o puntos, denominadas configuraciones discretas, que cambian en un modo predecible a partir de una figura inicial (Walkowiak, 2014; Liang & Hoyles, 2014). Las sucesiones lineales con términos figurales (configuraciones discretas) presentan variantes según el modo de mostrarlas; se presentan tres variantes de estas configuraciones:

- La primera de ellas provee tres o más términos sucesivos. Este tipo de representación es el empleado en las investigaciones llevadas a cabo por Radford (2006) y Rivera (2013; 2015). La propuesta es inducir un patrón o regla general a partir del análisis de los términos presentados. Esta forma de presentar una sucesión se muestra en la Figura 4.

Figura 4. Representación con términos consecutivos de la sucesión $f(x) = 2n + 3$

- El segundo tipo muestra sólo un término de la sucesión (genérico) Esta forma de presentar la sucesión se reporta en el estudio de Cañadas, Castro y Castro (2008). Se pretende que, desde el análisis de un término genérico, el estudiante logre abstraer e inducir las relaciones generales entre los elementos conforman la figura; por ejemplo, la relación que se establece en la Figura 5 se consigue a partir de la relación entre baldosas de color naranja en relación a las azules.

Figura 5. Representación de un término genérico de la sucesión $f(x) = 2n + 6$

- Una tercer tipo es aquel en el que deliberadamente se ocultan términos de la sucesión. Samson (2012) argumenta que en esta forma de presentar la sucesión se pretende que el alumno analice y establezca relaciones entre los elementos que conforman la figura y, con ello, evitar que el estudiante recurra de forma mecánica a estrategias de conteo y aritmética como heurístico de solución; en cambio, se potenciaría la habilidad para utilizar estrategias visuales que permitan el establecimiento de reglas generales. Ejemplo de este tipo de sucesión, es el que se muestra en la Figura 6.

Figura 6. Representación con términos ocutos de la sucesión $f(x) = 4n - 1$

Cabe hacer mención a las dos formas de generalizar que destacan Liang y Hoyles (2014). Para estos autores las reglas de generalización pueden adquirir dos formas: recursiva y funcional. La primera permite el cálculo del término próximo o cercano de una sucesión mediante la diferencia del término inmediato anterior; por su parte, la regla funcional o lejana se refiere a la regla expresada como una función que permite obtener el término general a partir de la posición que ocupa en la sucesión,

El objetivo del trabajo con sucesiones figurales en el contexto matemático escolar es analizar, describir y extender el patrón o regla funcional que subyace a la sucesión y generalizar la relación de variabilidad, además de representar este producto en un modo simbólico o verbal. Como se analizará en el siguiente apartado, para cada una de estas formas de generalización están asociadas distintas estrategias, mismas que se agrupan como de carácter visual y no visual.

3.1.3. Término general de una sucesión.

Para Rico, Castro y Romero (2000) el término general es la expresión algebraica o ley que expresa la estructura común de los términos de un conjunto ordenado. En esta idea la estructura puede ser identificada como la forma en la cual un patrón es sistematizado mediante una generalización (Mulligan & Mitchelmore, 2009).

3.1.4. Las sucesiones en el currículo de matemática escolar.

El National Council for Teaching Mathematics (2000), NCTM, plantea como objetivo del currículo escolar del álgebra en el nivel medio superior, el desarrollo de habilidades en el estudiante que le permitan expresar relaciones entre dos cantidades e interpretar los componentes de la relación, aprender un conjunto de conceptos y competencias ligadas a la representación de relaciones cuantitativas como un estilo de pensamiento para formalizar patrones, funciones y generalizaciones.

La investigación con patrones en sucesiones figurales ha estado asociada al trabajo sobre generalizaciones al considerar que este tipo de tareas podrían, de forma natural, introducir al estudiante en el estudio del álgebra. Por ello se valora esta actividad del estudio sobre patrones como un poderoso vehículo para la comprensión de relaciones entre cantidades que subyacen a la matemática funcional, contribuyendo de esta forma al establecimiento de relaciones de variación y fluidez en el manejo del lenguaje simbólico y en términos generales al desarrollo del pensamiento algebraico (Warren, 2004; Blanton & Kaput, 2005, 2011; Mason, Graham & Johnston-Wilder, 2012).

Por tanto, la necesidad de incorporar actividades didácticas de tipo generacional[2] en el desarrollo del pensamiento algebraico en el contexto de EMS, de forma específica el trabajo con actividades de generalización de patrones, deriva en que esta forma de acercamiento didáctico tiende un puente al introducir de forma efectiva actividades de enseñanza que suavicen la transición de la aritmética al pensamiento algebraico (Kieran, 2004).

3.1.5. Las sucesiones en el currículo de matemática escolar en México.

En el contexto de la formación matemática escolar en México, uno de los propósitos señala que el alumno "modele y resuelva problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones" (SEPa, 2011, p. 14). Dentro de los ejes temáticos que organizan el programa de estudios para la educación secundaria en México, se menciona el eje de Sentido numérico y

[2]Kieran (2004) las actividades de generalización implican la construcción de expresiones y ecuaciones objeto del álgebra que se presentan desde patrones geométricos o secuencias numéricas y expresiones de generalidad que rigen relaciones numéricas. En este tipo de trabajo se introduce la noción de variables, valores desconocidos e igualdades.

Pensamiento algebraico. De éste se menciona como estándar de aprendizaje que el alumno "resuelva problemas que implican expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión" (SEPa, 2011, p. 16)

El análisis de los programas de estudio de Educación Básica muestra que el trabajo sobre exploración de patrones en tareas de sucesiones inicia desde el segundo grado de educación primaria y se extiende hasta el tercer grado de secundaria (ver Apéndice A). El primer acercamiento que los estudiantes tienen con este tipo de tareas se encuentra en el bloque cuatro de segundo grado de educación primaria, en este nivel se espera que el estudiante identifique y describa el patrón en sucesiones construidas con figuras compuestas (SEPa, 2011). Este trabajo sobre con representación de elementos figurales es constante en cada uno de los grados de educación primaria y continúa en la formación secundaria.

Para la formación en el nivel de secundaria se plantea como uno de los aprendizajes esperados del eje *Sentido numérico y pensamiento algebraico* que el alumno represente sucesiones de números y figuras a partir de una regla dada y viceversa. Se menciona además que el alumno formule en lenguaje común la expresión general que defina la regla de una sucesión de números o figuras con progresión aritmética o geométrica.

En esta investigación se optó trabajar con estudiantes de nivel bachillerato pues era de interés explorar el tipo de estrategias con que los alumnos que recién concluían su educación secundaria, lograban establecer la regla general. Por otra parte y como se ha mencionado, se propuso como objetivo promover la estrategia visual como modo de actuación para establecer dicha regla, pues se planteó como conjetura de inicio que los estudiantes no desarrollaron esta habilidad visual a lo largo de la educación primaria, en consecuencia, la propuesta fue promover esta habilidad de establecer la regla general mediante la estrategia de visualización.

Estos referentes de orden curricular que se han mencionado permiten evidenciar la existencia de contenidos y objetivos curriculares relacionados con la habilidad de obtener la regla general. Es relevante pues da cuenta de la formación matemática que los alumnos de bachillerato han recibido en cuanto a la obtención de la regla general vía el trabajo con patrones en sucesiones con representación figural. Estos contenidos y los propósitos constituyen el antecedente curricular directo de este trabajo.

3.2. Análisis cognitivo

En el análisis cognitivo se recogen y describen las características del constructo pensamiento algebraico así como las expectativas de aprendizaje promovidos en el contexto de la intervención de aula. Como parte de este análisis se plantean conjeturas respecto de las posibles estrategias y dificultades asociadas a la habilidad de abstraer el término general.

3.2.1. Pensamiento algebraico.

Conocer la naturaleza de los procesos de pensamiento que intervienen en la actividad matemática ha sido objeto de interés preferente tanto por parte de psicólogos como de matemáticos. Es en el último medio siglo cuando se ha sistematizado la investigación sobre pensamiento matemático (Castro, 1994). Para Dewey (1989) el constructo pensamiento hace referencia a aquella idea o imagen construida de alguna realidad, "siendo el hecho de pensar una sucesión de tales ideas" (p, 23).

Visto así, el pensamiento alude a procesos que no son directamente observables, sino que son inferidos a través de las acciones de los individuos. Citando a Mayer (1986) en la noción de pensamiento están involucradas tres ideas:

- El pensamiento es cognitivo, pero se infiere de la conducta.
- Es un proceso que establece un conjunto de operaciones sobre el conocimiento en el sistema cognitivo
- Es dirigido y tiene como resultado la resolución de problemas

Walkowiak (2014) afirma que el pensamiento algebraico es un elemento fundamental del pensamiento matemático general pues involucra el reconocimiento de patrones y reglas generales de relaciones matemáticas observadas en los números, los objetos y las formas geométricas.

Para distinguirlo del álgebra escolar tradicional, el constructo pensamiento algebraico puede ser interpretado como una habilidad para razonar sobre situaciones cuantitativas que enfatiza aspectos de las relaciones generales, en la que se hace uso de medios semióticos como formas de representación externa de la generalización (simbolismos alfanuméricos, recursos verbales, gestos o ritmos) (Radford, 2006).

En las conclusiones de su trabajo doctoral Lins (1992) señala que, técnicamente el pensamiento algebraico es visto como una intención y una habilidad para transitar del análisis del contexto a la estructura. El potencial de esta forma de razonamiento emerge no en la solución de un problema en particular sino en el tipo de problemas generales y la solución que obtiene el estudiante. En esta definición toma lugar el concepto de estructura el cual se entiende como "la identificación de propiedades generales que son instanciadas en situaciones particulares como relaciones entre los elementos; cuando la relación es vista como instanciación de una propiedad, la relación se convierten parte de la estructura" (Mason, Stephen & Watson, 2009, p.10).

Romberg y Kaput (1999) afirman que el pensamiento algebraico aparece cuando, a través del proceso de conjeturar y argumentar se establecen generalizaciones sobre relaciones entre los datos y se expresan gradualmente en un lenguaje formal, es decir, la exteriorización de esta relación encontrada evoluciona desde un enunciado natural o verbal hasta la forma sintética. Este proceso de generalización puede ocurrir de situaciones aritméticas, geométricas o de modelado de fenómenos.

Autores como Blanton y Kaput (2011) señalan dos aspectos fundamentales que caracterizan el pensamiento algebraico:

- Hacer y expresar generalizaciones en sistemas simbólicos cada vez más formales y convencionales
- Razonar con formas simbólicas, incluyendo las manipulaciones sintácticamente guiadas a las formas simbólicas (manejo estructural de los objetos matemáticos).

Mason, et al. (2012) establecen la formulación de leyes generales como el corazón de la actividad matemática escolar, puntualiza que, "una lección sin la oportunidad para los estudiantes de expresar una generalidad no es una lección de matemáticas" (p. 297). También afirman que sin la confianza y familiaridad con esta capacidad de expresar ideas que denote lo general, el resto del pensamiento algebraico tiene poco o nada de sentido.

En la exposición del constructo pensamiento algebraico aparecen dos conceptos necesarios de precisar y de establecer relaciones entre ellos a fin de robustecer la caracterización del mismo. En primer momento definir qué se entiende por representación matemática, dada la implicación de analizar aquellos objetos involucrados en la tarea de generalizar patrones en el contexto de tareas sobre sucesiones figurales; posteriormente qué se entiende por habilidad, pues de ella se retoma la eficacia con que determinada estrategia permite construir la regla general.

3.2.1.1. Vínculo entre sistemas de representación matemática.

En el trabajo sobre el análisis de las representaciones matemáticas Rico, Castro y Romero (2000) reconocen un vínculo entre dos formas de representación: interna y externa. Las representaciones internas son objetos de pensamiento ubicados y construidos en las mentes de los sujetos, mientras las formas de representación externa son de carácter semiótico y mediante las cuales es posible exteriorizar las representaciones internas en un medio social.

Para estos autores ambas formas de representación no pueden verse como dominios diferentes, sino que "el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones externas; la diversidad de representaciones de un mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos y, por consiguiente, su capacidad de pensamiento" (Rico, Castro & Romero, 2000, p. 160).

Se precisa entonces que las formas de representación externa utilizadas en este trabajo están relacionadas con el análisis de sucesiones figurales, sobre las que el individuo, como aspecto de la representación interna, abstrae e induce un patrón que es generalizado; es decir, a partir del análisis de representaciones figurales el estudiante induce una regla de generalización, recurriendo a la representación verbal, simbólica u otra de las mencionadas en el apartado 3.1.1, como recurso de representación externa de la regla.

3.2.1.2. Habilidad matemática.

Por habilidad se entiende aquel "constructo hipotético creado con el fin de explicar cómo unos individuos realizan cierto tipo de tareas mejor que otros" (Suwarsono, 1982, p. 38).

Retomando el carácter generalizador del pensamiento algebraico, éste es interpretado como una habilidad de pensamiento matemático centrado en el establecimiento relaciones generales en contextos cuantitativos, en donde, a partir del identificación de variables se modelan dichas reglas. Driscoll (1999) menciona que uno de los objetivos primordiales en los estudiantes del nivel medio superior es el desarrollo en la habilidad de expresar una relación entre dos cantidades e interpretar los componentes de esta relación.

Si bien este autor no menciona de forma explícita el concepto de la generalidad, implícitamente se entiende que una regla describe una generalidad a partir de una relación establecida, en tanto, esta idea de Driscoll (1999) permite ampliar la discusión y comprender que en el pensamiento algebraico está implicado el trabajo con variables, su comportamiento y representación externa o semiótica.

3.2.2. Habilidades cognitivas asociadas al pensamiento algebraico.

Para Butto y Rojano (2010) y Callejo (2015) en el pensamiento algebraico está implicada la tarea de establecer relaciones funcionales como producto de la generalización de patrones. Esta afirmación permite identificar dos componentes del constructo pensamiento algebraico: la habilidad de establecer relaciones entre elementos en un contexto cuantitativo y la posibilidad de generar modelos que expliquen dichas relaciones.

Una situación de uso del aspecto relacional en el contexto matemático consiste cuando "una persona examina alternativamente dos o más conceptos o ideas matemáticas para apreciar relaciones que puede existir entre ellos, y analiza o usa estas relaciones con la intención de resolver un problema" (Molina, Castro & Ambrose, 2006, p. 35). En este caso, establecer relaciones es un factor indispensable para la elaboración de modelos generales.

Se propone analizar la Figura 7 con la intención de presentar al lector la caracterización en la tarea de establecer relaciones y representar dichas relaciones mediante la estructura de la regla general.

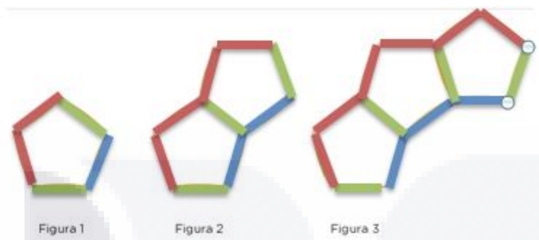


Figura 7. Análisis visual de sucesión de figuras

Al observar los elementos de color azul se puede establecer que están en relación al término de la figura, por ejemplo: para a_1 hay una línea azul, para a_2 existen dos líneas azules, etc. En los elementos de color verde se establece una relación de $n+1$ respecto del término: para a_1 hay dos líneas verdes, para a_2 hay tres líneas verdes, etc. Para los elementos de color rojo existe una relación de $2n$: el término a_1 tiene dos líneas de color rojo, para a_2 hay cuatro líneas de color rojo, etc.

Planteamos al lector extender esta regla para el término a_{65} de la sucesión. Mediante la regla general $[n+(n+1)+2n=4n+1]$ que se ha construido, se puede establecer que para el término a_{65} habrá 65 líneas azules; 66 líneas verdes más 130 líneas rojas. En el contexto del trabajo sobre sucesiones con elementos figurales, este tipo de relaciones que se han descrito tienen por objetivo la solución de una tarea: obtener el término general de la sucesión.

La otra forma de pensamiento vinculada al pensamiento algebraico estaría dada a partir del establecimiento de modelos que representen y generalicen dichas relaciones. Blanton y Kaput (2011) definen pensamiento funcional como "la generalización de relaciones entre cantidades de covarianza" (p.47). Como se ha mencionado, el pensamiento algebraico involucra la habilidad de identificar relaciones como la posibilidad de representar éstas. Al atender dicho requerimiento de representar los razonamientos de la generalización y recuperando la actividad de establecer relaciones generales mediante el análisis de la Figura

8, se recurre en este caso a la generalización de la regla mediante símbolos, con el propósito de mostrar al lector que el trabajo con patrones, es una posibilidad de apropiación de este lenguaje, aunado al dominio del manejo de nociones de variabilidad.

Simbólicamente las relaciones entre los elementos de la figura 8 quedarían representadas mediante la expresión correspondiente:

$$n + (n+1) + 2n; \text{ donde}$$

$$n = líneas\ azules$$

$$(n+1) = líneas\ verdes$$

$$2n = líneas\ rojas$$

$$4n + 1 = estructura\ o\ regla\ general$$

Se considera por tanto que ambas habilidades: relacional y funcional, son modos de pensamiento involucrados y entretejidos en la actividad algebraica, que los alumnos pueden adquirir y desarrollarlas desde los niveles escolares básicos y medios debido al potencial que tiene esta tarea de enriquecer la actividad matemática escolar y, muy especialmente, el aprendizaje del álgebra escolar (Morales, Cañadas, Brizuela & Gómez, 2016)

Al respecto, Blanton y Kaput (2011) señalan,

> El pensamiento algebraico se constituye como una actividad de generalización de ideas matemáticas mediante la representación simbólica con el uso de literales, representando una relación funcional, todo esto implícito en tareas no reservadas para la educación secundaria, sino como una actividad enfocada a la generación de ideas que constituyen el pensamiento matemático desde los niveles de educación primaria (p. 6).

Según esta propuesta, los maestros han de promover la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, en conjunto, crear un ambiente escolar en el que se valoren actividades en donde los alumnos exploren, modelen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo.

En conclusión, el trabajo sobre generalización de patrones tiene un efecto positivo en el rendimiento matemático de los estudiantes y es un medio potente para el desarrollo de estrategias de pensamiento matemático en los sujetos y como precursores de la capacidad matemática de generalizar (Papic, 2007).

3.2.3. Noción de patrón.

El término patrón es la traducción elegida para el concepto inglés *pattern*, de importancia considerable en educación matemática (NCTM, 1991). La idea básica implicada en esta idea es que toda situación repetida con regularidad da lugar a un patrón. Esto es, en cada patrón los elementos que lo constituyen están organizados de alguna manera normal y la forma en que un patrón es organizado se denomina estructura (Castro, 1994; Mulligan, Mitchelmore, Kemp, Marston & Highfield, 2008, Rivera, 2013).

En el contexto de la formación matemática escolar y en particular en el trabajo algebraico, el reconocimiento de patrones resulta fundamental en el desarrollo de la habilidad para establecer relaciones, ya que a partir de una regularidad observada y predictible, se busca determinar un patrón que resulte válido para la totalidad de los casos. Para Walkowiak (2014), "las experiencias sistemáticas con patrones pueden construir una comprensión de la idea de función, la experiencia con números y sus propiedades, que representen una base para el trabajo posterior con símbolos y expresiones algebraicas" (p. 57).

La comprensión fundamental de patrones en el contexto escolar involucra la capacidad de inducir estructuras las cuales pueden ser contraídas y condensadas simbólicamente mediante una regla matemática, preferiblemente una función que representa las características comunes necesarias, abstraídas de ese conjunto ordenado y predictible (Rivera, 2013). Una fórmula en geometría, un modelo de regresión en estadística son sólo algunos ejemplos de la utilidad de un patrón.

Por tanto, desde una perspectiva epistémica, la Matemática es considerada la ciencia que estudia las regularidades, que explica un fenómeno a partir de la construcción de un patrón. Castro (1994) afirma que analizar, e inducir patrones, así como el establecer conexiones entre diferentes formas de representación y sus transformaciones, son actividades propias de la matemática. Para esta investigadora, la importancia del uso de patrones en la enseñanza escolar se pone de manifiesto por dos hechos relevantes:

- Primero, en el mundo en que vivimos abundan los patrones y regularidades
- Segundo, los patrones son frecuentes en matemáticas, por ello la habilidad para reconocer patrones matemáticos ayuda a la comprensión de expresiones y relaciones que se pueden usar en estudios posteriores de matemáticas.

En el contexto escolar la tarea de abstraer e inducir un patrón no se restringe al trabajo sobre representaciones numéricas o pictóricas, aunque éstos resultan ser el contexto usualmente empleado en los planes de estudio de la matemática escolar. (Cañadas, Castro & Castro, 2008), por consiguiente, el propósito central de las tareas de generalización es desarrollar la capacidad de abstraer e inducir patrones a partir del estudio de las relaciones que se establecen entre casos particulares, extender este razonamiento al término general de la sucesión y representar esta inducción en formas significativas para los estudiantes y válidas desde el punto de vista institucional.

3.2.4. Proceso inductivo.

Castro, Cañadas y Molina (2010) consideran que el razonamiento inductivo es un modo de pensamiento generalizado en la labor científica que conduce al descubrimiento de leyes generales que proporcionan regularidad y coherencia a los datos a partir de la observación de casos particulares. Se puede comprender el razonamiento inductivo como un heurístico o modo de actuación que favorece el desarrollo en la habilidad de reconocer relaciones generales a partir del análisis de casos particulares. En el contexto de la formación matemática escolar, el pensamiento inductivo se constituye como una vía para acceder al descubrimiento de leyes a partir del análisis de situaciones particulares, observando las regularidades y alcanzando la generalización.

A partir de sus investigaciones sobre razonamiento inductivo con alumnos de educación secundaria y de la síntesis que hacen de los trabajos de Polya (1973), Castro, Cañadas y Molina (2010) sugieren el trabajo inductivo como un proceso que inicia con el análisis de casos particulares, la formulación y comprobación de conjeturas. Estas autoras proponen un modelo de siete pasos para el trabajo inductivo como método heurístico para la resolución de problemas en el contexto de la matemática escolar:

a) Trabajo con casos particulares. Casos sencillos y fácilmente observables.
b) Organización de casos particulares. Percepción de patrones, ya sea a través de una tabla, filas, columnas, con algún orden.
c) Identificación de patrones. El patrón es lo común y que se prevé puede volver a repetirse.
d) Formulación de conjeturas. Proposición que se supone verdadera pero no ha sido sometida a exploración.
e) Justificación de conjeturas. Razón dada para convencer de la verdad de su afirmación.
f) Generalización. Implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares.
g) Demostración. Validación de la conjetura.

El resultado de este proceso articulado de pensamiento entre el proceso de particularización-generalización, es una regla que determina un patrón, mismo que organiza y da coherencia a un fenómeno.

3.2.5. Generalización.

Posicionado en la idea del pensamiento algebraico como la habilidad que moviliza razonamientos generales a partir del análisis de los casos particulares observables, se comprende la generalización como el trabajo que hace posible dicha habilidad de razonamiento y en donde el simbolismo algebraico es el lenguaje sofisticado, pero no el único, que da voz al pensamiento algebraico, el lenguaje que expresa la generalidad. (Kaput, 1995; Blanton & Kaput, 2001; Radford, 2008; Mason, Graham & Johnston-Wilder, 2012).

La habilidad de la generalización ha sido reconocida como un proceso que implica al menos una de las siguientes actividades:

- Examinar casos particulares para identificar aquello que tienen en común

- Extender el razonamiento más allá de los casos particulares
- Establecer un resultado más amplio para los casos particulares

Dörfler (1991) argumenta que la generalización se encuentra vinculada a la construcción y uso de variables y distingue dos formas de generalización: empírica y teórica. La primera se basa en el reconocimiento sensorial de características comunes a los objetos o situaciones; la segunda se deriva de la identificación y construcción de invariantes. Para este autor, los símbolos juegan un papel esencialmente semiótico en los procesos de generalización, pues permiten representar externamente fenómenos de variabilidad en torno a las relaciones generales. Este autor concluye que "generalizar significa construir variables" (p.84).

Al reflexionar respecto de la importancia de la habilidad cognitiva para detectar relaciones de generalidad, se señala que el álgebra se ha encargado de desarrollar, evolucionar y hacer uso de "un lenguaje por medio del cual se comunican las ideas matemáticas de forma sintética y su característica principal es el expresar declaraciones generales que existen en todas las áreas de las matemáticas" (Zazkis & Liljedahl, 2002). Pero la naturaleza de dicha expresión puede ser diversa y existir un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente un patrón de generalidad y la habilidad para emplear la notación algebraica con facilidad.

Sobre los medios de representación de la generalidad, Mason, et al. (2012) reconocen no sólo el uso de un tipo especializado como lo es el lenguaje simbólico, sino que concede también el uso de palabras (generalización verbal) como medios para expresar reglas de generalidad sobre valores no específicos o desconocidos, en donde las múltiples expresiones (gestuales, gráficas, verbales o simbólicas) producto de las distintas formas de identificación de invariantes o generalizaciones teóricas señaladas en Dörfler (1991) pueden dar cuenta de una misma estructura.

De forma puntual, English y Warren (1998) consideran que la parte más difícil de la representación de las leyes es expresar la generalización en su forma simbólica. En este proceso de generalización, la habilidad para abstraer e inducir una característica común es una tarea intelectualmente compleja, pero aún más complicado resulta el exteriorizar ese aspecto común que se ha abstraído e inducido.

De lo anterior se puede concluir la idea de generalización una habilidad de pensamiento matemático capaz de construir la noción de variabilidad a partir de la construcción de un patrón que unifica, da coherencia y generaliza a los términos de la sucesión. A su vez, este producto de la actividad requiere ser expresado y validado en un contexto social. Por lo cual en este trabajo se identifica la importancia de las formas de representación verbal como una forma emergente que comunica un razonamiento de generalidad, y del simbolismo algebraico, situarlo como el medio más sofisticado e históricamente construido que denota lo general, pero que en esta investigación con constituye el foco principal, más bien se busca comprender la actividad cognitiva implicada en la construcción de la regla.

3.2.5.1. Generalizar en el contexto escolar.

En el contexto de la matemática escolar, generalizar es una habilidad fundamental con amplias aplicaciones y es un puente entre el álgebra y el estudio de otras ramas de la matemática, además ofrece a los estudiantes la oportunidad de trabajar con tareas que implican encontrar un patrón que permita predecir cualquiera de los términos incluido en una sucesión (Güner, Ersoy & Témiz, 2013; Liang & Hoyles, 2014).

El NCTM (2000) en su resumen ejecutivo del documento "*Principles and Standards for School Mathematics*" sostiene que el estudio del álgebra debe ser tratado de forma longitudinal desde la educación elemental hasta el nivel universitario, a fin de ayudar al estudiante a construir una base sólida de aprendizaje y preparación para un trabajo de mayor sofisticación en estudios de nivel medio y superior; se expone además que el pensamiento algebraico tiene como foco el análisis y la representación del cambio y la generalización de las relaciones entre cantidades.

Este organismo plantea como objetivo primario del currículo escolar del álgebra en el nivel medio, el desarrollo de habilidades que le permitan al estudiante establecer y expresar relaciones entre cantidades e interpretar los componentes de la relación, junto con el aprendizaje de un conjunto de conceptos y competencias ligadas a la tarea de representar dichas relaciones como un hábito de pensamiento tendiente a formalizar patrones y su generalización. Para Rivera (2015) el propósito de enseñanza en este tipo de tareas es el de instruir a los estudiantes a desarrollar habilidades de generalización y expresar esta regla en formas significativas para el estudiante y el grupo de clase.

3.2.6. Estrategias de generalización a partir de patrones.

Desde la Educación Matemática, las estrategias se definen como las formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas que se realizan sobre representaciones de conceptos y relaciones. Las estrategias operan dentro de una estructura conceptual y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda efectuar, teniendo en cuenta las relaciones y los conceptos implicados (Rico, 1997).

Ellis (2007) distingue entre la actividad cognitiva del sujeto a la que denomina acciones de generalización y el resultado de dicho razonamiento que se expresa mediante afirmaciones, definiciones o reglas, que define como generalizaciones de la reflexión. A partir de una síntesis de estudios que abordan los modos de actuación de los sujetos ante la tarea de generalización, Güner, Ersoy y Témiz (2013) consideran las siguientes estrategias y llevadas a cabo en dicha actividad, mismas que se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2

Estrategias de generalización de patrones

Estrategias	Propiedades
Conteo	Incluye el cálculo numérico de los componentes los cuales construyen una forma o modelo o dibujar una figura la cual describe la situación a fin de calcular una cualificación deseable.
Recursiva y aditiva	Los estudiantes encuentran la diferencia entre dos términos y suman esta diferencia a fin de encontrar el término siguiente de la sucesión.
Multiplicar con las diferencias	Los estudiantes observan una diferencia constante entre los términos y expresa el valor de n como la multiplicación de n y la diferencia.
Objeto entero o proporción	En esta estrategia se usa valor como unidad para construir un término mayor al usar proporcionalidad de las unidades
Adivinar y comprobar	Involucra reglas de estimación un resultado sin prestar atención al contexto de las figuras..
Contextual	Incluye construir una regla enfocándose en el contexto, a saber, información relacionada a la situación.
Explicita	Involucra la relación entre dos variables a fin de obtener cualquier término de la sucesión., determina una función mediante el uso de expresiones que pueden ser usadas para encontrar términos tanto cercanos como lejanos.

El reconocimiento de la diversidad de estrategias remite a señalarlas como el resultado de diferentes tipos de razonamiento en la resolución de este tipo de problemas y como propósito de enseñanza, por consiguiente, resulta necesario que los estudiantes comprendan el potencial y limitaciones de cada uno de estos modos de actuación, reconociendo que algunas estrategias pueden conducir a los estudiantes a observar dificultades en la detección de un patrón, o aun, construir respuestas incorrectas

3.2.7. El papel de la estrategia visual en la generalización de patrones.

La visualización es definida como “una habilidad, proceso y un producto de creación, interpretación, uso y reflexión sobre representaciones externas como dibujos, imágenes o diagramas con el propósito de representar y comunicar información. (Hershkowitz, et al, 1989, p. 75). Como habilidad, la visualización posibilita el análisis de una solución a un problema o la comprensión de un concepto matemático y su aprendizaje (Ramírez, Ramírez, Flores & Castro, 2013). Como proceso, Presmeg (2006) afirma que la visualización implica la transformación de una representación externa (imágenes o figuras) a formas de representación interna (abstracción) a fin de generar como producto una expresión verbal o simbólica que, en el caso de este estudio, representa la regla general en una sucesión.

Es tal el reconocimiento que desempeña la visualización que se le considera como un componente central en la actividad matemática “El desarrollo de la capacidad de visualizar abre a los alumnos muchos caminos para pensar y hacer un nuevo tipo de matemáticas” (Castro, 1994, p. 34). Si bien para Arcavi (2003), Barbosa, Vale y Palhares (2009) resulta también reconocible el papel de la visualización como un medio para fomentar el razonamiento, la solución de problemas y un medio para la argumentación, el incorporar la estrategia visual en la formación matemática ha mostrado dificultades, de forma particular la incorporación de la visualización en la tarea de construir la regla general en sucesiones figurales. Dichas dificultades las clasifican en tres grupos:

- Generalmente en el trabajo con patrones lineales se tiende a aplicar razonamientos numéricos de proporción directa, sin el reconocimiento y argumentación de los símbolos como elementos de cambio.
- La fijación en el método recursivo y multiplicativo, que aunque puede ser útil en solucionar generalizaciones cercanas no contribuyen estas estrategias a la comprensión del aspecto estructural de un patrón.
- La incapacidad en los sujetos para visualizar o explorar patrones de forma espacial.

Retomando la idea de las dificultades cognitivas asociadas al uso de la visualización como un medio para el aprendizaje, se reconoce la representación interna como una poderosa herramienta matemática indispensable en la construcción de conceptos matemáticos. Hiebert y Carpenter (1992) sostienen que la matemática es comprendida si sus representaciones mentales son parte de una red, en donde el grado de comprensión es determinado por el número y fortaleza de las conexiones que se establecen, lo que Duval (2006) señala como la *Integración de sistemas de representación*.

Desde esta perspectiva la comprensión de un concepto matemático se construye a través de tareas que implican el uso de diferentes sistemas de representación y promueven la coordinación flexible entre representaciones, en el caso de esa investigación se ha mencionado como formas de representación externa las sucesiones con elementos figurales que presentan un crecimiento aritmético y su transformación en una regla general de tipo verbal y/o simbólico como producto de la representación interna, estando de por medio la abstracción e inducción de un patrón. Por tanto, el aprendizaje de la matemática implica la construcción de estructuras cognitivas mediante las cuales el estudiante puede reconocer el mismo objeto a través de sus diversas representaciones (Hsien, 2015).

Dentro del contexto de la generalización de patrones, la visualización y la tarea de generalizar están profundamente entretejidas. Como se ha comentado, la generalización de patrones descansa en la habilidad de abstraer un criterio común a partir de los elementos particulares presentes en una sucesión y la habilidad de inducir estas relaciones en cada uno de los términos de la sucesión, y finalmente ser capaz de articular una expresión que represente el término general que de estructure y coherencia a la infinitud de términos integrados en una sucesión. Por lo anterior, en esta investigación se conjetura sobre la necesidad de promover la estrategia visual como una habilidad eficaz al momento de abstraer, inducir y representar un patrón de generalidad a partir del trabajo con sucesiones lineales con términos figurales.

Para efectos de análisis cognitivo, es importante identificar la diversidad de estrategias empleadas por los estudiantes en la tarea de detectar y establecer una regla general pues a partir de su descripción se puede reconocer las fortalezas, los alcances y las dificultades de cada una de ellas en la tarea de generalizar un patrón. Se adopta entonces los referentes teóricos que apuestan por el trabajo visual como modo de actuación y se considera ésta la decisión didáctica en la actividad de inducir un patrón. Finalmente, se atiende también al señalamiento que plantean Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996), Aspinwall, Shaw y Presmeg (1997) quienes afirman que en el trabajo sobre comprensión de conceptos y el desarrollo de habilidades matemáticas existe un vínculo entre las formas de pensamiento visual y la forma analítica, y que ambas formas de razonamiento deben estar presentes e integradas en el trabajo matemático.

3.3. Análisis de instrucción

El trabajo con patrones está planteado en los estándares curriculares y de evaluación por el NCTM (1991) en cuyo documento se señala el uso de patrones desde muy temprana edad (lo equivalente a la enseñanza preescolar), extensible hasta los grados superiores. De acuerdo con este documento, el trabajo desarrollado en primaria debe incluir la exploración de patrones y funciones con el propósito de que los estudiantes sean capaces de descubrir, extender, analizar y crear una amplia gama de patrones, además de describir y representar relaciones con tablas, gráficas y reglas. Para el caso del nivel medio, el NCTM (2000) indica que el objetivo es que el estudiante aprenda el álgebra como un conjunto de conceptos y de habilidades relacionadas con la representación de relaciones cuantitativas y como un estilo de pensamiento que permita la formalización y generalización de patrones.

Noss, Healy y Hoyles (1997), Janet, Wilson y Bills (2003) enfatizan que en la tarea de generalización es necesario abordar primeramente una estrategia que permita hacer objetiva una estructura, que implica la competencia para manipular objetos y expresar de forma explícita las relaciones entre los elementos y términos de la secuencia. En relación al tipo de tarea Küchemann (2010) recomienda el uso de situaciones problemas que no se presenten en la forma de elementos secuenciales debido a la tendencia de emprender estrategias de generalización de tipo recursivo o multiplicativo, que se distancian de las habilidades de pensamiento algebraico requerido. A favor de establecer procesos de abstracción e inducción, este autor sugiere el uso de tareas de tipo genérico donde la atención primaria esté en abstraer la estructura que emergen del análisis visual de la figura, para posteriormente inducir el patrón y su generalización.

3.3.1. De los procesos recursivos a la identificación de estructuras.

Al situarnos en los procesos didácticos encaminados al desarrollo del pensamiento algebraico Kieran (2004) puntualiza sobre algunos aspectos que deben ser atendidos al momento de organizar la enseñanza, partiendo de una diferenciación entre las formas de pensamiento algebraico y aritmético. Esta autora supone como aspecto problemático en la enseñanza del pensamiento algebraico el hecho de que los estudiantes operan preponderantemente en un marco aritmético de referencia tendiente a no observar el aspecto relacional y funcional de las operaciones o elementos puestos en juego y sólo están centrados en un proceso de cálculo unidireccional que va de sentido izquierda a derecha del signo igual. En contraste y como se ha mencionado, el pensamiento algebraico requiere enfocarse en establecer relaciones de variabilidad. Los siguientes aspectos hacen referencia al ajuste en el desarrollo de esta forma de pensamiento matemático:

- Enfocarse sobre las relaciones y no meramente sobre el cálculo de una respuesta numérica;
- Centrarse en la propiedad de las operaciones (conmutativa, distributiva, asociativa)
- Prestar atención en las múltiples formas de representación y solución de un problema en lugar de meramente solucionarlo;
- Dar mayor importancia a los números y letras que representa el lenguaje simbólico, el cual permite expresar las ideas algebraicas en lugar de sólo usar números. Esto incluye a su vez:
  a) Trabajo con letras que pueden ser a la vez parámetros desconocidos, o variables

b) Aceptar expresiones sin clausura como respuesta
c) Comparar expresiones equivalentes basadas sobre propiedades en lugar de hacer una evaluación numérica;

- Reenfocar el significado del signo igual, no como una operación de derecha a izquierda, sino como representación de igualdad

Otro aspecto de carácter fundamental al momento de atender el tipo de estrategia utilizada en los procesos didácticos del pensamiento algebraico se encuentra en los trabajos de Radford (2006). En el contexto de los referentes teóricos de la semiótica, este autor considera que en la conformación cultural de esta habilidad de pensamiento algebraico implica en el estudiante transitar sobre un proceso que parte del análisis factual de casos observados en donde los recursos como los gestos, las señas y el ritmo permiten avanzar hacia una abstracción de orden más general de reglas de que describen relaciones de covarianza determinadas a partir de una relación funcional entre el espacio y número que gradualmente pasarían de la forma verbal a una simbólica. Además, este autor desconoce las estrategias aritméticas como modos de actuación propios del pensamiento algebraico.

En la Figura 8 se presenta una síntesis del marco conceptual que se ha desarrollado. En la parte superior de la figura se reconoce el pensamiento algebraico como una forma del pensamiento matemática general, caracterizado este primero como la intención de generar leyes a partir del análisis de casos particulares. Como modo de pensamiento la inducción permite al sujeto establecer y validar hipótesis que surgen desde el estudio de casos particulares y establecer un orden que estructure la totalidad de los casos presentados en un fenómeno predictible, formando así una ley que da coherencia a ese fenómeno particular. En el campo de la formación matemática escolar, esta habilidad de pensamiento es abordada desde los proceso de generalización de patrones en donde el contexto de tarea pueden ser sucesiones con número o figuras. Las sucesiones por su parte expresan el objeto matemático de la función. Dada su naturaleza visual, en esta investigación se determinó trabajar con sucesiones de figuras con crecimiento aritmético. El trabajo se centró en identificar las estrategias y debilidades que observan los estudiantes de nivel bachillerato al inducir una regla verbal o simbólica a partir del análisis de términos con representación figural. Por otra parte, se propuso valorar la eficacia e implicaciones didácticas ante la tarea de abstraer e inducir visualmente la regla general, desarrollando con ello las habilidades de generalizar patrones como vía de desarrollo del pensamiento algebraico.

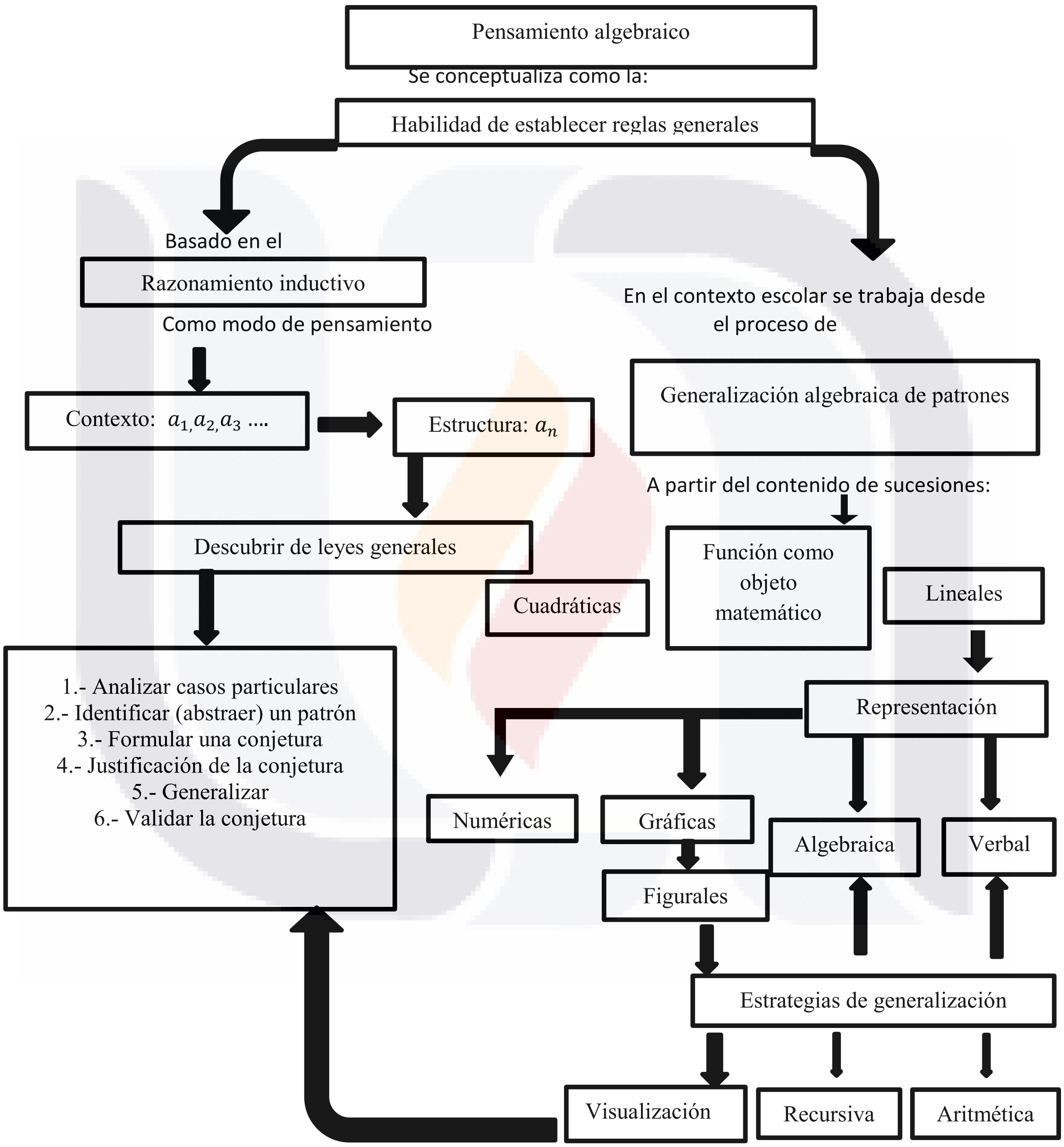


Figura 8. Síntesis del marco conceptual

CAPÍTULO 4. Marco metodológico

En este capítulo se describe la metodología del estudio. El capítulo se compone de dos apartados. En el primero se expone un desarrollo de los fundamentos teóricos de la propuesta metodológica Investigación Basada en Diseño, destacando su carácter naturalista y de mejora en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En seguida se hace una descripción del método Experimento de Enseñanza, el cual se inserta en el paradigma de Investigación Basada en Diseño. En la segunda parte se hace una descripción de las características del estudio: participantes, contexto, papel del investigador. Además se presentan las conjeturas de investigación y el tipo de tareas trabajadas en la intervención. Se concluye con la descripción del tipo de análisis realizado al conjunto de evidencias del trabajo.

4.1. Investigación Basada en Diseño

La Investigación Basada en Diseño (Design Based Research, DBR) se entiende como un paradigma centrado en desarrollar y evaluar intervenciones educativas (programas, estrategias de enseñanza-aprendizaje, materiales, productos y sistemas) como soluciones a problemas complejos en la práctica educativa. Este paradigma metodológico de investigación pretende avanzar en el conocimiento científico acerca de las características de las intervenciones en aula y el proceso de diseño y desarrollo del mismo. Investigadores como Barab y Squire (2004), Plomp y Nieveen, (2013), McKenney y Reeves, (2014) afirman que: "La DBR no es tanto un enfoque, sino una serie de enfoques que intentan producir nuevas teorías, artefactos, y prácticas que dan cuenta del potencial impacto en el aprendizaje y la enseñanza en escenarios naturales" (p.2).

Euler (2014) refiriendo los orígenes de este paradigma metodológico, señala que los proyectos de investigación de DBR emergen principalmente en respuesta a la falta de aplicación práctica de los hallazgos de investigación en el campo de la enseñanza y el aprendizaje. Para este autor, los resultados generalmente han sido inaccesibles o incomprensibles para el profesor y su trabajo en el aula. En consecuencia, este paradigma se legitima a partir de dos de sus características: por un lado la relevancia en la práctica; y por otro la generación de teoría situada con relevancia práctica.

Como fortaleza Shavelson, Phillips, Towne y Feuer (2003) consideran que esta metodología le permite al investigador evaluar teorías en la práctica, en donde se construye conocimiento sobre problemas cotidianos de aula entre docentes e investigador, eliminando el abismo entre la teoría y la práctica, adaptando la enseñanza de forma iterativa y refinando las condiciones contextuales de la intervención. Esta metodología ha mostrado ser de utilidad en el campo de la Didáctica de la Matemática y las Ciencias, espacios donde se enfatiza la importancia de abordar los procesos de aprendizaje bajo la mirada de una ciencia de diseño, con el propósito de determinar "cómo los diferentes diseños de ambientes contribuyen a la mejora de los procesos de aprendizaje, la cooperación, motivación y demás variables del proceso didáctico" (Molina, Castro, Molina & Castro, 2011, p. 5).

En ideas de Confrey (2006) en la DBR se persigue documentar:

> Qué recursos y conocimiento previo ponen en juego los alumnos en las tareas, cómo interaccionan los alumnos y profesores, cómo son creadas las anotaciones y registros, cómo emergen y evolucionan las concepciones, qué recursos se usan, y cómo es llevada a cabo la enseñanza a lo largo del curso de la instrucción; todo ello mediante el estudio del trabajo de los alumnos, grabaciones de videos y evaluaciones de clase (p. 2).

Sobre este objetivo de documentar los procesos de aprendizaje, una variable fundamental son los instrumentos de trabajo, entendidos éstos como un conjunto de tareas curriculares cuidadosamente secuenciadas, que permiten valorar cómo se desarrollan y son aprendidos algunos conceptos o conjunto de habilidades en interacción entre los estudiantes y bajo la guía del profesor (Confrey, 2006; Gravemeijer & Cobb, 2013). En este estudio se parte de la idea propuesta por Barab y Squire (2004) quienes afirman que "el conocimiento no es una cosa ubicada dentro del individuo pensante, sino que es un proceso distribuido entre el aprendiz, el ambiente en el cual ocurre y la actividad en la cual participa el estudiante" (p. 1).

4.1.1. Características de los estudios de DBR.

Molina, et al., (2011) desarrollan un conjunto de características que distinguen a este tipo de estudios de DBR:

- Ocurren en escenarios complejos que caracterizan la situación de vida real en donde ocurre el aprendizaje. En los ambientes de enseñanza están implicadas múltiples variables las cuales no pueden ser controladas en su totalidad, sino sólo se aspira a caracterizar la situación que afecta a las variables, por tanto, resulta necesario precisar cuáles de éstas serán objeto de estudio y cuáles son de tipo contextual. La participación de diferentes agentes en el proceso de diseño aportan variadas experiencias lo que enriquece la elaboración y análisis del diseño, en la interpretación de los datos, incrementado la calidad del proceso de investigación.
- Persiguen el desarrollo de modelos teóricos empíricamente fundamentados y relativos a un dominio de aprendizaje específico, necesarios para la mejora de la educación. Este tipo de estudios no provee de grandes teorías de aprendizaje, sino son marcos de alcance intermedio que destacan el potencial para detectar orden, regularidades y patrones en constructos teóricos en los complejos contextos de aprendizaje.
- Son ciclos continuos de práctica, análisis y rediseño en donde los investigadores evalúan y refinan conjeturas sobre el fenómeno de aprendizaje y los medios en los que se apoya. Se basa en evidencias empíricas y en fundamentos sobre enseñanza y aprendizaje procedentes del análisis teórico, además permiten una doble tarea: el rediseño y la interpretación de datos.
- Esta metodología necesita recoger extensos registros del proceso de aprendizaje: lo que los alumnos, los docentes e investigadores aprenden a lo largo del experimento, por lo cual es importante la recolección de datos al momento de detallar la evolución de la investigación. La exhaustividad de datos recogidos permiten considerar variables no señaladas al principio del proceso del Experimento de Enseñanza pero que pueden ser importantes en el avance de la investigación. Generalmente este tipo de registros incluyen videograbaciones o entrevistas de clase, notas de campo y trabajos escritos de los estudiantes
- Inherente a su carácter cíclico, esta metodología de investigación obliga dos tipos de análisis: un análisis preliminar a lo largo del proceso que relacione directamente los objetivos de instrucción con el de investigación, por tanto es señalado como un análisis de carácter práctico; el segundo es denominado retrospectivo en el cual se

persigue contribuir al desarrollo de un modelo teórico del proceso de un aprendizaje particular o habilidad con base en el análisis de la totalidad de los datos.

4.1.2. Evaluación de la calidad de los estudios DBR.

Nieveen y Folmer (2013) distinguen cuatro criterios para validar la calidad de los estudios de DBR:

- Relevancia. Implica llevar a cabo la intervención y su diseño en un estado del conocimiento previo que le otorgue validez de contenido.
- Consistencia. Denota un diseño lógicamente diseñado. Los autores la empatan con la validez de constructo. Molina et al., (2011) nombra este criterio como la fiabilidad en el estudio.
- Utilidad. Se espera que la intervención resulte útil en el entorno para la cual fue diseñada.
- Replicabilidad. Refiere a la posibilidad de utilizar y generalizar los resultados de la investigación en otros contextos.

4.1.3. Experimentos de Enseñanza.

Este método de Experimento de Enseñanza se integra dentro de los estudios de DBR. Una de sus caracterizas es el interés del investigador por conocer de forma directa el proceso enseñanza-aprendizaje y modos de razonamiento de los alumnos. Como objetivo del método se espera que "el alumnado construya conocimiento, que el investigador-docente construya conocimiento sobre la construcción de conocimiento por parte de los alumnos, y que los demás investigadores construyan conocimiento sobre ambos y sus interacciones" (Molina, et al., 2011, p. 79).

En general una DBR y en particular un Experimento de Enseñanza se compone de una secuencia de episodios de enseñanza en los que participa un investigador en el rol de profesor, uno o más alumnos y un investigador-observador (ver Figura 9). El tiempo de duración del experimento es variable e implica ciclos continuos de generación y prueba de hipótesis. Las conjeturas o hipótesis guían la intervención e interacción de los investigadores con los estudiantes en cuanto al desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, proporcionando con ello información que respalda o genera modificaciones de estas conjeturas, también promueve la elaboración de nuevos supuestos, de ahí su carácter iterativo-reflexivo (Valverde, 2012).

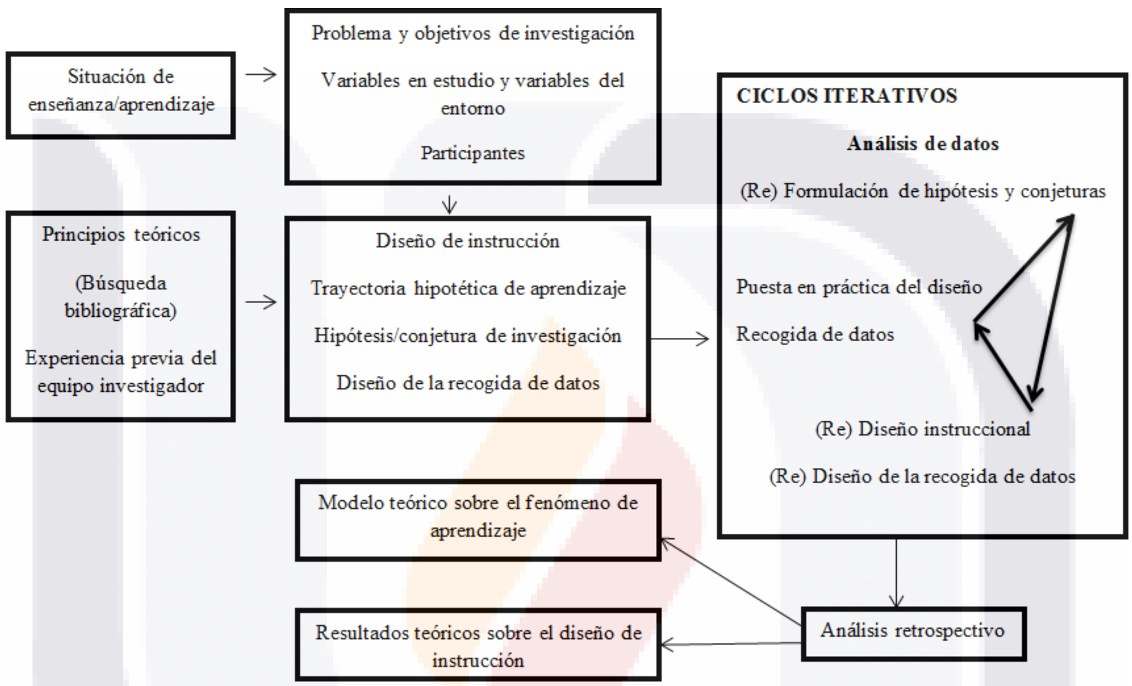


Figura 9. Estructura general de una Investigación Basada en diseño
Fuente: Molina et al., (2011, p. 76)

Fases del Experimento de Enseñanza

Un Experimento de Enseñanza se compone de tres fases: 1) preparación del experimento, 2) experimentación y 3) análisis retrospectivo de datos (Molina et al., 2011). En la Tabla 3 se sintetizan las acciones para cada una de las fases:

Tabla 3

Fases y acciones en un Experimento de Enseñanza

FASE: Preparación del Experimento
Definir el problema y objetivos de investigación. Evaluar el conocimiento inicial de los alumnos. Identificar las metodologías de enseñanza adecuadas para los contenidos en función de los objetivos. Diseñar de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización. Diseñar el acopio de datos. Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado de aprendizaje. Ubicar el experimento dentro de un contexto teórico amplio que enmarque el modelo teórico emergente.
FASE: Experimentación
Antes de cada intervención Obtener información sobre el trabajo previo en el aula, para considerarlo en el diseño de intervención e interpretación posterior de datos Identificar los objetivos de instrucción de la intervención Ultimar el diseño de la intervención, de forma justificada, a partir de la información empírica y teórica disponible Elaborar conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención Seleccionar los métodos de recolección de datos Registrar las decisiones tomadas en el proceso de ejecución de las acciones anteriores y su justificación *En cada intervención* Si es necesario, modificar de manera justificada el diseño de la intervención de acuerdo con los objetivos Recoger datos de lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención *Después de cada intervención* Analizar los datos recogidos en la intervención Revisar, y en su caso reformular, las hipótesis/conjeturas de investigación
FASE: Análisis retrospectivo de datos
Recopilar y organizar toda la información requerida Analizar el conjunto de datos, esto implica: a) Distanciarse de los resultados del análisis preliminar, de las conjeturas iniciales, y de la justificación del diseño de cada intervención, para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad b) Identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada alumno atendiendo a las acciones específicas del investigador-docente que contribuyeron a dichos cambios.

4.2. Descripción del estudio

Se trata de una investigación que pretende favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de nivel medio superior a partir del uso de la visualización como heurístico en la inducción de un patrón en tareas de sucesiones figurales. El trabajo de acopio de datos se realizó a partir de una sesión de diagnóstico, cinco sesiones de intervención didáctica y una sesión final de entrevistas. La intervención didáctica se llevó a cabo entre los meses de septiembre-noviembre del año 2016. El estudio es exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández & Baptista, 2003) pues se dispone de poca información empírica precedente de estudios previos en relación al papel de la visualización en la tarea de generalizar patrones, por consiguiente se intenta comprender el modo en que los alumnos de nivel medio superior hacen uso de esta habilidad como estrategia en la resolución de este tipo de problemas matemáticos.

4.2.1. Participantes

En esta investigación participaron 30 estudiantes inscritos en el primer semestre, fueron 17 mujeres y 13 hombres. 18 estudiantes cursaron la modalidad de Secundaria general y el resto proviene de escuelas Telesecundarias. La institución donde se llevó a cabo el estudio pertenece a la modalidad de Colegio de Bachilleres y se ubica en una comunidad rural situada a una distancia aproximada de 150 kilómetros dirección suroeste del estado de Zacatecas.

Se consideraron como único criterio de selección el que fueran alumnos recién egresados de la educación secundaria, pues era de interés identificar las estrategias de obtención de la regla general. Los participantes contaban con experiencia de trabajo en la obtención de la regla general en sucesiones figurales. El plan de estudios de matemáticas para el nivel de secundaria, presentada en el punto 3.1.6 evidenció el tratamiento que el contenido sobre sucesiones se ha hecho en este nivel y que como se señaló, constituye el antecedente de las habilidades que los alumnos desarrollaron en cuanto a la habilidad de construir la regla general.

4.2.2. Papel del investigador.

El investigador-docente tuvo por tarea el proceso de diseñar, implementar, rediseñar y evaluar el Experimento de Enseñanza. Si bien, en un inicio y basado en los supuestos del método se pensó en el trabajo conjunto entre el profesor de asignatura y el investigador-docente, el profesor titular de la asignatura de matemáticas mostró poco interés por el trabajo propuesto, estuvo presente sólo en la sesión de diagnóstico, no obstante brindó las condiciones de tiempo para llevar a cabo la intervención.

El papel del investigador se detalla a partir de las siguientes actividades:

- Antes de la intervención, el investigador docente definió: a) los objetivos de aprendizaje esperados a partir de la revisión teórica del concepto pensamiento algebraico; b) el tipo de tarea (sucesión) presentada a los alumnos, c) los materiales de trabajo; d) los equipos de trabajo (trabajo en grupo de cuatro integrantes y trabajo grupal). Además, diseñó el acopio de datos.
- Al inicio de cada sesión el investigador docente explicó la dinámica del trabajo a los alumnos y el tiempo destinado para la resolución de la tarea propuesta.
- Durante el desarrollo de las tareas el investigador-docente orientó el trabajo hacia el logro de los objetivos propuestos, las decisiones de enseñanza se orientaron a favorecer las habilidades visuales como heurístico en la tarea de generalización, atendió a las dudas que surgieron en el avance de las actividades. Con mayor detalle de este se expone la tarea del investigador-docente en el capítulo de Planificación, Desarrollo y Análisis preliminar de cada una de las sesiones que están contenidas en el Capítulo 5.
- En el proceso de análisis y diseño de cada una de las sesiones, el investigador junto con el grupo de profesores investigadores exploraron los resultados observados en relación a las habilidades de los alumnos ante cada tarea resuelta. Este análisis se efectuó a partir de la triangulación entre las evidencias recogidas en las grabaciones de video, el trabajo de los estudiantes y las notas de campo.
- El análisis preliminar de cada sesión fue retomado por el investigador-docente como elemento para el rediseño y puesta en práctica de las sesiones posteriores: el tipo de tarea (sucesión) planteada, las preguntas de investigación y objetivos, así como los materiales utilizados.
- En el análisis retrospectivo, el investigador docente identificó los cambios observados en la habilidad para establecer la regla general mediante la estrategia visual y con base en esta interpretación se identificaron aquellas acciones específicas que contribuyeron a promover la habilidad de generalización en sucesiones figurales y del pensamiento algebraico

4.2.3. Técnicas de obtención de datos.

La Investigación de Diseño demanda una extensa colección de datos con el objetivo de disponer de información fiable que dé cuenta de los modos de actuación de los estudiantes. Se obtuvo registro de las hojas de trabajo de cada una de las ocho tareas que se implementaron y que los estudiantes resolvieron a lo largo de la sesión diagnóstica, las cinco sesiones de intervención y la sesión de entrevistas individuales. La información recogida por este medio permitió al investigador-docente identificar el tipo de estrategias utilizadas por los alumnos en la tarea de construir la regla general y valorar la modificación del tipo de respuesta a partir de incorporar estrategias de visualización como heurístico en la resolución de tareas de generalización. Además facultó al investigador-docente evaluar las frecuencias de respuestas correctas en el logro de la tarea de obtener una regla general al inicio de la intervención y contrastarlas al final de las cinco sesiones de intervención.

Otro de los medios de acopio de información fue la grabación en video de las sesiones de trabajo. Con estos registros fue posible identificar el discurso y argumentos que externaron los estudiantes en cuanto el tipo de estrategias desarrollada al momento de la resolución de la tarea y la socialización de las mismas al interior de los grupos de trabajo. Además, se obtuvo evidencia del trabajo de campo mediante la observación directa de clase. El investigador-docente registró en notas de campo las estrategias y dificultades observadas por los estudiantes en el momento de la resolución de las tareas. Estas evidencias fueron entrelazadas con el registro de las transcripciones de los videos.

4.2.4. Uso del Análisis Didáctico.

El Análisis Didáctico como herramienta de organización permitió identificar los contenidos curriculares, las estrategias y los objetivos de instrucción relacionados con el tipo de habilidades de pensamiento que se esperaba desarrollar en la propuesta. En esta parte del experimento se pudo delimitar a la profundidad, extensión y formas de representación del contenido de sucesiones de crecimiento aritmético como contenido específico en el proceso de generalización. Se describe a continuación cada uno de los análisis y la contribución en la fase de preparación del experimento.

Fase de preparación

En relación al análisis de contenido, éste permitió identificar el tipo de habilidades que se esperaba desarrollar a partir de la caracterización de la noción *pensamiento algebraico* (Lins, 1992). Con base en esta comprensión de las habilidades se exploraron un conjunto de tareas que potencialmente promueven las habilidades cognitivas implicadas en las tareas de generalización; delimitando en esta fase la profundidad y extensión de las formas de abordar las tareas sobre sucesiones de crecimiento aritmético. Finalmente este análisis permitió vincularlo con el análisis de instrucción el cual se presenta posteriormente.

La revisión de los estudios previos permitió identificar la naturaleza epistémica, los alcances y límites de las distintas estrategias de generalización. Resultado de este análisis de las investigaciones fue posible definir la visualización como la estrategia vinculada con los procesos de abstracción e inducción de las relaciones generales y expresar éstas una regla funcional. Además estos referentes permitieron conjeturar las dificultades que los alumnos presentarían al momento de realizar las tareas de generalización.

En el análisis de instrucción se delimitaron los contenidos y tareas sobre sucesiones de crecimiento aritmético. Pero, concretando aún más, se propuso el trabajo con sucesiones en su representación figural, aprovechando de la sucesión el aspecto visual que esta representación ofrece. De este punto derivó la planificación de las tareas y se vinculó con los objetivos de aprendizaje en cada sesión, así como con el objetivo general de investigación que fue el desarrollo de habilidades de pensamiento algebraico. La selección de las tareas fue una variable que permitió el rediseño de las actividades en las sesiones y que fueron el resultado en el continuo análisis entre las fases de contenido-cognitivo y de instrucción.

Fase de experimentación

La construcción de cada una de los aspectos antes señalado permitió en la fase de experimentación implementar la propuesta; de ella se logró obtener los datos que expusieron las actuaciones y el avance de los estudiantes en relación a la estrategia de visualización como heurístico en tareas de generalización de sucesiones; además, permitió valorar el impacto de cada una de las variables presentadas en las tareas. En esta fase de experimentación se plantearon modificaciones en cuanto al tipo de tarea y los recursos materiales con que se implementaron las actividades. Este proceso de (re) diseño se nutrió de la revisión continua de investigaciones antecedentes, las cuales permitieron justificar las decisiones tomadas en la planificación del diseño y de las acciones al momento de la intervención.

Fase de análisis retrospectivo

Para esta fase se recurrió a la herramienta de análisis evaluativo, en ésta se valoró el impacto de la estrategia visual en la inducción de la regla general a partir de relacionar dicha habilidad para generalizar con el tipo de tarea, los materiales utilizados y el tipo de preguntas o actividades planteadas. Para tal evaluación se tomó como referente la naturaleza del tipo de pensamiento relacional y funcional propios del pensamiento algebraico en cuanto a la habilidad de abstraer e inducir la regla general en tareas de generalización de sucesiones figurales.

4.3. Conjetura general de la investigación

Se conjetura que los estudiantes mostrarán una tendencia a establecer estrategias de tipo aritmético y mostrarán dificultades al establecer una regla general. Se mencionan como estrategias aritméticas aquellas situadas en un contexto numérico en donde se recurre a razonamientos de tipo multiplicativo o de cálculo proporcional al momento de establecer el valor de los términos lejanos en la sucesión. Por otro lado, se prevé que los estudiantes lograrán con relativa facilidad construir una generalización cercana (obtener términos cercanos) y utilicen para ellos estrategias como el conteo. Esto se conjetura a partir del tipo de experiencia previa que los estudiantes tienen con tareas sobre sucesiones figurales en su formación matemática en secundaria, basada en el establecimiento de cálculos aritméticos, pues las sugerencias del plan de estudios en México así lo señala. Se conjetura por consiguiente que el alumno difícilmente hará uso de estrategias visuales en la resolución del problema de obtener el valor de un término lejano y al momento de construir la regla general. También es posible que se observen habilidades en el manejo simbólico de la regla general, en cambio se espera que experimenten dificultades para construir una regla verbal.

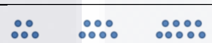
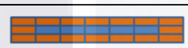
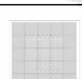
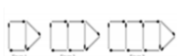
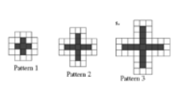
No obstante, se esperó que mediante el análisis visual de las figuras, el manejo de materiales concretos y la argumentación grupal al interior de los grupos, los alumnos desarrollen la habilidad de razonamiento visual que les permita establecer una regla general y expresarla tanto en su representación verbal como simbólica, logrando con ello favorecer la comprensión de nociones de variabilidad a partir del trabajo con patrones.

4.4. Tareas

En el trabajo de campo se consideraron ocho sucesiones reportadas en investigaciones previas. Se consideró utilizar tres formas de presentación de la sucesión. (Ver Tabla 4).

Tabla 4

Descripción general de las tareas

Sesion	Figura	Regla general	Tarea	
			Generalización cercana	Generalización lejana
Diagnóstico		$a_n = 2n + 3$	Obtener términos a_5 y a_{10}	Obtener términos a_{100} y a_n
		$a_n = 3n + 1$	Obtener términos a_4 y a_{10}	Obtener términos $a_{100}, I a_{20}$ y a_n
		$a_n = 2n + 6$		Obtener término a_{1320}
S. 1		$a_n = 2n + 3$	Obtener términos a_5y a_{10}	Obtener términos a_{100}y a_n
S. 2 y 3		$a_n = 4n - 1$	Obtener términos a_7y a_{10}	Obtener términos a_{100}y a_n
				Verbalizar a_n
S. 4		$a_n = 4n + 4$	Obtener términos a_6y a_{10}	Obtener término a_{20}, a_{47}, a_{139}y a_n
S. 5		$a_n = 3n + 3$		Obtener a_n
Entrevista		$a_n = 8n + 8$		Establecer a_n para los cuadros blancos

En la fase de diagnóstico se trabajó con tres sucesiones. La primera presentó los términos consecutivos $a_{1,} a_2$ y a_3, con una diferencia de 2 entre cada término y su estructura consiste en dos filas de puntos. La segunda sucesión mostró al alumno los términos $a_{1,} a_2$ y a_3, la diferencia entre términos es 3 y su estructura consistió en una estrella central con tres brazos salientes. La tercera sucesión presentó el término genérico a_5 de la sucesión, su estructura es una fila de baldosas centrales (azules) con dos filas de baldosas naranjas en igual número al de las azules, más dos filas constantes de tres baldosas en cada extremo.

La sesión uno de intervención presentó la incorporación de elementos de color que tuvieron como finalidad hacer objetiva la estructura en la sucesión e identificar la estructura que consiste en dos filas de puntos variables en relación al lugar del término, más tres puntos constantes, se mostraron los términos consecutivos $a_{1,} a_2$ y a_3.

La segunda y tercera sesión mostró los términos genéricos no consecutivos $a_3 y$ a_5 de la sucesión. La estructura de la figura se basó en una base triangular como elementos variable y en relación al lugar del término y un número de filas superiores en relación al número de figura menos uno.

En la cuarta sesión se trabajó una sucesión con el término genérico a_3, la estructura de la figura consistió en una figura que tiene cuatro cuadros en las esquinas como valor constante, más el número de cuadros que conforman cada una de las cuatro líneas de perímetro y que se relacionan con el número de cuadros interiores como valor de perímetro.

La quinta sesión presentó al estudiante dos sucesiones figurales; la primera de éstas mostró una base triangular como valor constante y una estructura de tres líneas que forman una "canasta"; la segunda sucesión fue retomada de la sesión de diagnóstico.

En la sesión de entrevista se analizó una sucesión en forma de cruz, se buscó establecer el número de cuadros blancos en relación al número de cuadros negros, al extremo de los cuatro brazos una estructura constante de tres cuadros, cuatro brazos como estructura variable en relación al número de figura más cuatro brazos en relación a menos uno en relación al número de la figura.

4.5. Organización del trabajo

Cada sesión se inició con la distribución de las hojas de trabajo y se presentó el problema con la lectura y comprensión de la actividad al interior del grupo. Posteriormente se organizaron los grupos de trabajo a fin de generar espacios de discusión y reflexión ante las tareas propuestas hasta llegar a la verificación de los resultados. El papel del profesor consistió en plantear preguntas de reflexión en torno a la construcción del patrón de la figura, además de brindar ideas sobre cómo establecer relación entre los elementos.

El propósito de las entrevistas fue comprender el proceso mediante el cual los alumnos abstraen e inducen una estructura de la sucesión de figuras. Se estableció como criterio de selección de los alumnos para la entrevista aquellos que mostraron la habilidad de inducir visualmente la regla general. El tipo de preguntas en la entrevista se dirigieron a identificar qué estructura percibieron los alumnos como constantes en cada término de la sucesión, qué estructura observan variable y en qué estructura resultó en esta variabilidad en relación a la figura.

4.6. Actividades realizadas

Se organizó el trabajo de grupo tanto en forma individual como con la conformación posterior de grupos de entre tres y cinco integrantes según el criterio de afinidad.

Se partió del supuesto de que las figuras sucesivas trabajadas en la primera sesión promoverían estrategias recursivas para acceder a generalizaciones cercanas pero esta estrategia limitaría y dificultaría abstraer relaciones de variabilidad entre los elementos y poder acceder a un patrón a partir de dicha relación. En cambio las figuras no sucesivas y las genéricas fomentarían el uso de un pensamiento de tipo relacional que le permitiría al estudiante abstraer e inducir un patrón que determina la forma general de la sucesión.

La duración aproximada de cada una de las sesiones fue de 50 minutos. Las sesiones tuvieron lugar en días de la semana y horarios diferentes (ver Apéndice B).

4.7 Tipo de análisis de los datos

Se realizó análisis cualitativo de los datos recogidos en donde del análisis preliminar por cada sesión se diseñaron conjeturas y posibles trayectorias de aprendizaje. El análisis tomó como datos aquellos que fueron recogidos mediante las hojas de trabajo por cada uno de los alumnos, de esta fuente se recuperó el tipo de razonamientos llevados a cabo ante la resolución de cada tarea, así como de los registros de las observaciones de cada clase. Como se detallará en el apartado 6.1.1 donde se recoge el conjunto de los datos recabados y analizados, basta mencionar en este punto el proceso de análisis y obtención de la información.

CAPÍTULO 5. Análisis de los resultados de intervención

En este capítulo se presenta el proceso de planificación, desarrollo y análisis de resultados de la intervención. Son siete aparatados que corresponden a cada una de las sesiones de trabajo. Cada apartado se organiza en tres sub apartados: el sub apartado de *Planificación de las Sesión* permitió al investigador docente el (re) diseño de las actividades propuestas en la sesión y de los instrumentos de acopio de datos. En éste se presenta además los objetivos de investigación y de instrucción, así como una descripción de las actividades propuestas en la tarea de inducir la regla general. Posteriormente, en el *Desarrollo* se describe el trabajo de intervención a partir de las observaciones recuperadas en las notas de campo, el registro de las videograbaciones y las hojas de trabajos de los estudiantes. Por último, en el *Análisis preliminar* se analizan las estrategias de generalización observadas en los estudiantes y se contrasta con el logro de los objetivos, tanto de instrucción como de investigación formulados para la clase. El resultado de este análisis constituye la base para construir la síntesis de los resultados del proceso general de intervención y que se presenta en el Capítulo 6 de este documento.

5.1. Primera sesión

5.1.1. Planificación.

En la Tabla 5 se muestran las actividades a realizar por los alumnos, los objetivos de investigación y los instrumentos de acopio de datos. La tarea consistió en obtener el valor de términos cercanos, lejanos e inducir la regla general en tres sucesiones figurales. Dado su carácter diagnóstico, en esta sesión no se planteó objetivo de intervención.

Tabla 5

Planificación de la sesión diagnóstica

Actividades	Objetivos de investigación	Instrumentos de acopio de datos
Actividad escrita Sucesión de puntos. Establecer el valor de a_5, a_{10}, a_{100} y a_n. Sucesión de estrellas. Establecer valores para $a_4, a_{10}, a_{58}, a_{100}, I\ a_{20\ y}\ a_n$ Problema de las baldosas. Determinar el valor de a_{1320}	Identificar las estrategias empleadas en las tareas de generalizaciones y en la habilidad para obtener valores a partir de la variable independiente Detectar dificultades en la generalización de patrones	Prueba escrita con tres sucesiones. Videograbación

Nota: I a_{20} = Operación inversa para calcular la posición del término 20 de la sucesión

Tomando como base los aportes de las investigaciones previas, se conjeturó que los estudiantes podrían con facilidad establecer los valores próximos a los observados y mostrarían dificultad para encontrar términos lejanos y el término o regla general a_n . Además se consideró que las estrategias de tipo aritmético serían utilizadas con mayor frecuencia en la solución de estas tareas en comparación con estrategias de naturaleza visual.

Descripción de la variable tipo de tarea

Se reconoce como aspectos diferenciadores entre las sucesiones los siguientes:

a) Las dos primeras sucesiones presentan tres términos consecutivo de orden creciente. La primera muestra una sucesión de figuras formada por dos filas de puntos. La segunda sucesión sugieren una estructura en forma de T

b) La tercera sucesión presentó un término particular o genérico de la sucesión.

5.1.2. Desarrollo.

La sesión de trabajo se inició con la presentación del investigador por el profesor de asignatura. Por su parte el investigador expuso a los alumnos el proyecto, el tiempo estimado y los objetivos de investigación. Dentro de las consideraciones éticas se mencionó la confidencialidad y anonimato, se recurrió además a la firma del consentimiento informado por cada uno de los participantes y se enfatizó sobre la participación voluntaria y la no afectación (a favor o en contra) de sus calificaciones en la asignatura de matemáticas. Se obtuvo la totalidad de las firmas.

Se repartió a cada uno de los 28 estudiantes las hojas de diagnóstico y se determinó un tiempo de 35 minutos para su resolución. Se indicó responder el instrumento de diagnóstico de forma individual dado el objetivo de explorar las estrategias de generalización, se pidió también que registraran aquellas evidencias que dieran cuenta de la estrategia utilizada. Para la videograbación de esta clase se tuvo el apoyo de la directora de la institución

5.1.3. Análisis preliminar.

5.1.3.1. Categorización y codificación de las respuestas en la prueba diagnóstico.

Este apartado se desarrolló posterior al acopio de información encontrada en la fase de diagnóstico. El análisis de las respuestas permitió identificar y categorizar: a) el logro de la respuesta, b) la estrategia utilizada para obtener los términos y la regla general, y c) el modo de representación de la regla general.

a. Se establecieron dos valores según el tipo de respuesta:
    - Respuesta correcta para el término (RC)
    - Respuesta incorrecta al término (RI).
b. Para el tipo de estrategia(s) utilizadas se establecieron las siguientes:
    - Diferencia entre los términos (Df) consiste en encontrar el valor de la diferencia numérica entre dos términos consecutivos.
    - Conteo (Co) a partir de la estrategia precedente, el estudiante aplica un conteo para encontrar los términos.

- Multiplicativo (Mu) Se establece una relación multiplicativa entre algún elemento de la figura y el valor del término pedido.
- Multiplicativo con ajuste (MA) se centra en construir una función a partir de convertir la representación gráfica de la sucesión en numérica y operar a partir del valor de la diferencia entre dos términos consecutivos, multiplicado este valor por el número del lugar del término y ajustarlo finalmente al valor numérico del término.
- Proporcionalidad (Pr) establece valores numéricos a partir de la relación directa de un valor unitario con el lugar del término buscado.
- Visual (Vi) el estudiante establece relaciones numérico-espaciales, al considerar una estructura común entre los elementos que conforman la figura.
- Gráfica (Gr) en ella el estudiante establece una representación de la figura para obtener la sucesión pedida a partir de la consideración visual descrita en la categoría que precede.
- Tanteo (Ta) en esta estrategia el estudiante hace una estimación aproximada del resultado sin establecer una estrategia clara para el cálculo de la respuesta.
- Inducción ingenua (Ii) se caracteriza por ser un razonamiento que no ha sido posible identificarlo con alguna estrategia de las ya mencionadas y que carece de algún referente para considerarla una estrategia plausible al momento de obtener algún término o la regla general.

c. Respecto del modo de representación, se establecen las siguientes:
   - Verbal (Vb).
   - Simbólica (Si).
   - Gráfica (Gr).
   - Numérica (Nu).

5.1.3.2. Categorización de las variables de los alumnos.

Se establecieron tres aspectos al categorizar las variables contextuales del alumno:

a. Sexo:
    - Mujer (M)
    - Hombre (H)
b. Edad: (número de años cumplidos)
c. modalidad de secundaria de origen:
    - Secundaria general (Sg)
    - Telesecundaria (Ts).

5.1.3.3. Descripción de los resultados de la sesión de diagnóstico.

Este apartado se desarrolla en tres momentos para cada una de las tareas. En el primero se describen las frecuencias de RC obtenidas en relación al término, destacando la estrategia utilizada y el modo de representación de la regla general. En el segundo momento se hace una descripción para los casos de RI, con el mismo análisis del caso anterior. Finalmente, en el tercer momento se plantean a modo de trayectoria los usos de las estrategias para cada una de las tareas de generalización, destacando en esta parte la estrategia utilizada para construir la regla general en cada una de las tareas.

Se hace notar al lector que durante la aplicación de la prueba diagnóstica se presentaron casos en donde el estudiante no reportó respuesta alguna y, por consiguiente, los casos faltantes entre RC y RI y el total de participantes son aquellos alumnos que no presentaron respuesta.

5.1.3.4. Análisis de la primera tarea de diagnóstico.

Estrategias utilizadas para RC y las frecuencias por término.

Esta actividad consistió en la búsqueda de cuatro términos $a_{5,}$ $a_{10,}$ a_{100} y $a_{n.}$ Se aprecia en la Tabla 6 las frecuencias de RC por término en relación al tipo de estrategia utilizada y el tipo de representación de la regla general.

Tabla 6

Respuestas correctas, estrategias y representación de la regla general. Primera tarea

		Estrategias			Representación de a_n	
Término	Frecuencia de RC	Co	Gr	DfMA	Si	Ve
a_5	22	12	2	8		
a_{10}	17	8	0	9		
a_{100}	12	0	0	12		
a_n	10	0	0	10	10	0

Nota: Co = conteo; Gr = gráfica; Df = diferencia; MA = multiplicativo con ajuste; Si = simbólico; Ve = verbal

De los 28 estudiantes, 22 lograron encontrar el valor del término a_5, siendo las estrategias de Conteo (12) y Diferencia multiplicativa con ajuste las de mayor uso. Para el término a_{10} disminuyó el número de casos de RC (17), siendo la Diferencia multiplicativa con ajuste la estrategia que reportó una mayor frecuencia en la resolución de la tarea. Se destaca la disminución en la frecuencia de los alumnos que utilizaron la estrategia de Conteo para obtener el término a_{10}en relación a a_5. Para la obtención del término a_{100} el número de RC disminuyó a 12 casos siendo la estrategia Diferencia multiplicativa con ajuste la única estrategia para encontrar el valor del término. Finalmente, 10 de los 28 estudiantes establecieron una regla general, empleando en la totalidad de los casos la estrategia de Diferencia multiplicativa con ajuste. Todos los casos de RC para a_n recurrieron a la representación simbólica como medio para expresar la regla general.

Se destaca la disminución de RC conforme incrementa el valor del término. Se observa también que la estrategia de Conteo fue eficaz para la obtención de los términos a_5 y a_{10}; no obstante, dejó de ser funcional al momento de obtener los términos a_{100} y a_n. Se encontró que el comportamiento en la estrategia de Diferencia multiplicativa con ajuste incrementó su uso y fue la estrategia preponderante al momento de establecer la regla general. Así también se reconoce la importancia de la representación simbólica entre los estudiantes como la forma de expresar la generalización.

Estrategias utilizadas en los casos de RI y las frecuencias por término

En la Tabla 7 se muestra la frecuencia de RI por término, la estrategia utilizada y el tipo de representación de la regla general.

Tabla 7

Respuestas incorrectas, estrategias y representación de la regla general

Término	Frecuencia de RI	Estrategia				Representación de a_n	
		Co	Mu	Pr	Fi	Si	Ve
a_5	3	2	1	0	0		
a_{10}	6	3	1	2	0		
a_{100}	10	1	1	8	0		
a_n	7	3	0	3	1	1	6

Nota: Co = conteo; Mu = multiplicativo; Pr = proporcional; Fi = falsa inducción; Si = simbólico; Ve = verbal

En la Tabla 7 se aprecia que los casos de RI incrementaron conforme son mayores los términos buscados para la secuencia. La frecuencia de RI para a_5 aumenta el doble al momento de obtener el valor de a_{10}; para a_{100} el número de casos de RI fue de diez, de éstos últimos tres abandonan la tarea y siete alumnos presentaron RI para a_n. Al relacionar el tipo de estrategia con los casos de RI por término, se observa que para a_5 y a_{10} el Conteo fue la estrategia más utilizada pero que reportó mayor número de casos de RI. En la Figura 10 se evidencia un ejemplo en el que el alumno inicia el conteo sin considerar los términos previos observados. En esta estrategia, si bien identifica el valor 2 como constante de la diferencia entre términos, para el alumno a_1 posee un valor de 11 y el valor de a_5 es de 19. En este caso el alumno extiende este razonamiento y presenta el valor de 29 para a_{10}.

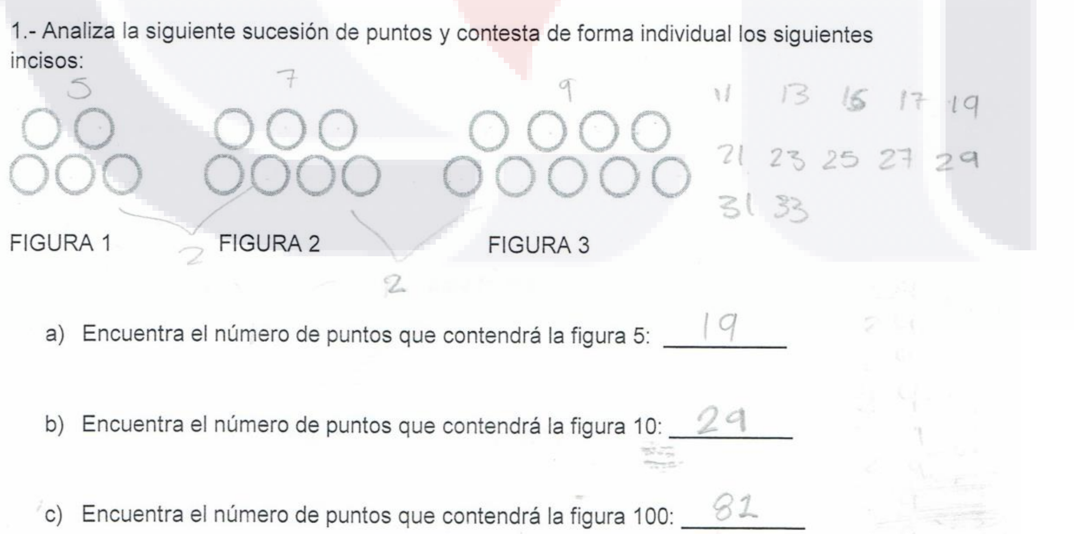


Figura 10. Uso inadecuado de la estrategia de conteo

Por otra parte, el uso de la proporcionalidad apareció en dos ocasiones para encontrar a_{10} y su frecuencia se incrementa al momento de obtener el valor del término a_{100}. Este incremento sugiere que los alumnos, al no ser factible hacer un conteo hasta obtener a_{100}, recurren a estrategias que han sido aprendidas y utilizadas en situaciones matemáticas previas como lo es el trabajo sobre proporcionalidad. En la Figura 11 se observa cómo el estudiante, una vez obtenido el valor para el término a_5, para calcular el término a_{10} multiplica por dos el valor 15 y muestra el número 30 para a_{10}, este razonamiento es aplicado al obtener el valor 300 para a_{100}

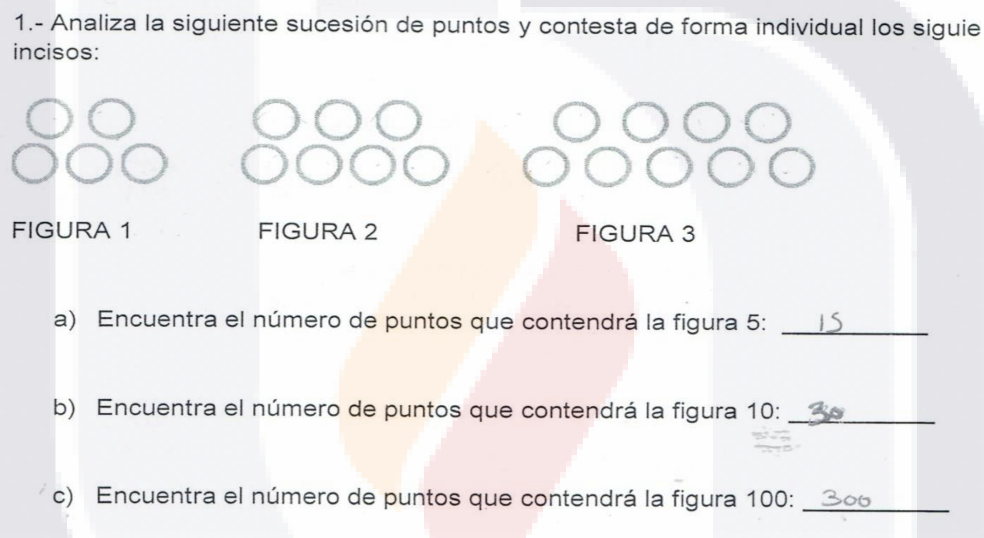


Figura 11. Uso inadecuado de la estrategia de proporcionalidad

Finalmente, se infiere que ante la dificultad de convertir una estrategia y representación numérica a su forma simbólica, los estudiantes recurren a representar la regla general recurriendo a la estrategia de conteo y hacerlo en representación verbal, estos alumnos presentaron la regla general: "*se le suman dos al término anterior*".

Con estos datos se aprecia que en la estrategia de conteo los alumnos han experimentado dificultades incluso al obtener términos cercanos a los observados; además, las estrategias tanto multiplicativa como proporcional fueron los modos de actuación más recurridas para establecer el valor de un término lejano a los observados pero que en la totalidad de los casos presentaron RI al término. Se observa también que, a diferencia de los casos de RC que recurren a la representación de a_n de forma simbólica, en éstos, el modo de representación de a_n fue preponderantemente verbal.

Trayectorias exitosas y estrategias utilizadas para obtener a_n.

La Tabla 8 muestra las estrategias que resultaron en RC. A diferencia de las dos tablas anteriores inmediatas que se han analizado, en ésta se agrega la categoría estudiantes, los cuales son identificados por una etiqueta que inicia con el número del estudiante (01, 02, 03…28), sexo, edad en años cumplidos y modalidad de secundaria de origen. Este análisis se hizo con el propósito de identificar el trayecto delas estrategias usadas en la tarea de obtener la regla general.

Tabla 8

Trayectorias de las estrategias de respuesta correcta utilizada por término

	Estrategia utilizada por término			
Estudiante	a_5	a_{10}	a_{100}	a_n
02 H 15ts	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
04 H 15sg	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
06 M 15sg	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
08 M 15sg	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
20 M 15sg	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
22 H 15ts	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
23 M 15ts	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
19 M 15sg	Co	DfMA	DfMA	DfMA
07 M 15sg	Co	Co	DfMA	DfMA
09 H 14ts	Co	Co	DfMA	DfMA

Nota: Co = conteo; Df = diferencia; MA = multiplicativo con ajuste

Para describir la trayectoria que siguieron los estudiantes que presentaron RC, se observó que siete estudiantes adoptaron la estrategia de Diferencia multiplicativa con ajuste para obtener cada uno de los términos, los tres casos restantes iniciaron con un conteo para obtener los términos a_5 y a_{10}, y modificaron hacia la estrategia de Diferencia multiplicativa con ajuste para inducir a_{100} y el consecuente término general a_n.

Se aprecia que de los diez casos con trayectoria exitosa seis fueron mujeres y cuatro hombres, seis alumnos egresaron de la modalidad de Secundaria general y cuatro de Telesecundaria. La totalidad de alumnos fueron estudiantes con edad de 15 años, esto es, alumnos en la edad correspondiente a cursar el grado escolar.

Trayectorias no exitosas y estrategias utilizadas para obtener a_n

En la Tabla 9 se presentan las trayectorias que presentaron RI para el término general y la descripción de las estrategias por término.

Tabla 9

Trayectoria no exitosas en la obtención de la regla y frecuencia por término

Estudiante	Estrategia utilizada por término			
	a_5	a_{10}	a_{100}	a_n
01H16sg	Co (RC)	Co (RC)	DfMA (RC)	Ii (RI)
10M14ts	Co (RI)	Co (RI)	Pr (RI)	Co (RI)
18M15sg	Co (RC)	Co (RC)	Pr (RI)	Co (RI)
11M17sg	Co (RC)	Co (RC)	Pr (RI)	Pr (RI)
17H15ts	Co (RC)	Co (RC)	___	Co (RI)
25M15sg	Co (RC)	Co (RI)	Co (RI)	Co (RI)
13M15sg	___	___	Pr (RI)	Pr (RI)

Nota: Co = conteo; Df = diferencia; MA = multiplicativo con ajuste; Pr = proporcionalidad; Ii = Inducción ingenua

En lo observado en relación a las trayectorias de los estudiantes que no obtuvieron la regla general, se logró identificar que la totalidad de los casos utilizaron el conteo para obtener a_5 y a_{10}. Al momento de encontrar el término a_{100}, cuatro estudiantes exploraron la estrategia de proporcionalidad obteniendo en todos los casos RI, mientras que un caso reportó RC para a_{100} mediante la estrategia de DfMA. Para a_n los alumnos retomaron el Conteo y la proporcionalidad pero en sus respuestas no mostraron la construcción de una regla general.

Frecuencias de RC y RI según modalidad de secundaria

Las Tablas 10 y 11 muestran un comparativo de los valores de frecuencia relativa de RC y de RI por modalidad de egreso, considerando este valor por cada uno de los términos.

Tabla 10

Frecuencias de RC por modalidad de egreso y representación de la regla

Modalidad	N° de estudiantes	Términos				Representación de a_n	
		a_5	a_{10}	a_{100}	a_n	Si	Ve
Secundaria general	20	16 (0.8)	11(0.55)	8 (0.4)	6 (0.3)	6	
Telesecundaria	8	6 (0.75)	6(0.75)	4 (0.5)	4 (0.5)	4	

En ambas filas se aprecia un descenso en las frecuencias de RC conforme mayor es lugar del término. 16 de los 20 estudiantes de la modalidad de secundaria general lograron con éxito encontrar el valor a_5, de éstos sólo la mitad establecieron el valor para a_{100}, dos abandonaron la tarea y seis obtuvieron el término a_n. De los ocho participantes de Telesecundaria seis logran obtener los términos a_5 y a_{10} y cuatro estudiantes establecieron valor para a_{100} y a_n.

Salvo para el caso del término a_5, que favorece a la modalidad de Secundaria general, en cada uno de los términos se encontraron frecuencias relativas que hace notorio un mejor desempeño en los estudiantes egresados de la modalidad de Telesecundaria. Para el caso particular del término a_n, la diferencia fue de 0.2 a favor de los alumnos de Telesecundaria. Respecto de la representación de la regla general, se encontró que la totalidad de RC uso el lenguaje simbólico. A continuación, la Tabla 11 contrasta los casos de RI por modalidad de egreso.

Tabla 11

Frecuencias de RI por modalidad de egreso y representación de la regla

Modalidad	N° de estudiantes	Términos			
		a_5	a_{10}	a_{100}	a_n
Secundaria general	20	2 (0.1)	5 (0.25)	8 (0.4)	5 (0.25)
Telesecundaria	8	1 (0.125)	1 (0.125)	2 (0.25)	2 (0.25)

Se observa que los estudiantes provenientes de la modalidad de Secundaria general presentaron mayor frecuencia de RI al momento de obtener los términos a_{10} y a_{100} comparado con los alumnos de Telesecundaria. Estas diferencias desaparecen al momento de obtener a_n. La similitud en las frecuencias permite inferir que, independiente de la modalidad de origen los alumnos obtuvieron proporciones similares de RI al obtener la regla general. Se asume que, contrario a lo observado en los casos de RC, las dificultades en obtener la regla general aparecen independientemente de la modalidad de origen. A continuación se describe el tipo de estrategias utilizadas por modalidad en relación a los términos obtenidos, se buscó identificar si la modalidad de origen representó una diferencia en el tipo de estrategia de generalización.

Frecuencias de RC y RI por estrategia utilizada por término según modalidad de secundaria

Las Tablas 12 y 13 recogen la distribución de las frecuencias relacionando RC y RI con el término y la estrategia utilizada para cada uno de los casos de respuesta. La primera de ellas muestra los datos correspondientes a la modalidad de Secundaria General; la segunda expone lo observado en la modalidad de Telesecundaria.

Tabla 12

Frecuencias de RC y RI por término y estrategias para Secundaria General

	Estrategias					
RC y RI por término	Co	DfMA	Gr	Mu	Pr	Ii
RC a_5	9 (.45)	5(.25)	2(.10)			
RC a_{10}	5(.25)	6(.3)				
RC a_{100}		8(.4)				
RC a_n		6(.3)				
RI a_5	1(.05)			1(.05)		
RI a_{10}	2(.1)			1(.05)	2(.1)	
RI a_{100}	1(.05)			1(.05)	6(.3)	
RI a_n	2(.1)				2(.1)	1(.05)

Nota: RC = respuesta correcta; RI = respuesta incorrecta; Co = conteo; Df = diferencia; MA = multiplicativo con ajuste; Gr = gráfico; Mu = multiplicativo; Pr = proporcionalidad; Fi = falsa inducción

El análisis de la Tabla 12 muestra que para las RC en estudiantes egresados de la modalidad de Secundaria general, el conteo se observó como la estrategia más frecuente al obtener el término a_5; en la obtención de a_{10} y términos subsecuentes los estudiantes utilizaron con mayor frecuencia la estrategia de Diferencia multiplicativa con ajuste. La estrategia gráfica mostró un uso marginal al ser empleada sólo en dos ocasiones para la obtención del término a_5 y desapareció en los términos subsecuentes. En relación a las RI, se observa la preponderancia de la estrategia de proporcionalidad la cual aparece a partir de la obtención de los términos a_{10}, y a_{100} y desaparece al obtener el término general. El conteo se manifestó latente a lo largo del trayecto al igual que la estrategia multiplicativa.

Tabla 13

Frecuencias de RC y RI por término y estrategia para Telesecundaria

RC y RI por término	Estrategias		
	Co	DfMA	Pr
RC a_5	3 (.375)	3(.375)	
RC a_{10}	3(.375)	3(.375)	
RC a_{100}		4(.5)	
RC a_n		4(.5)	
RI a_5	1(.125)		
RI a_{10}	1(.125)		
RI a_{100}			2 (.25)
RI a_n	1(.125)		1(.125)

Nota: RC = respuesta correcta; RI = respuesta incorrecta; Co = conteo; Df = diferencia; MA = multiplicativo con ajuste; Pr = proporcionalidad

En los datos que arrojan los estudiantes de Telesecundaria se aprecia (Tabla 13) que las estrategias de conteo y de diferencia multiplicativa con ajuste comparten igual número de frecuencias en uso en la obtención de a_5 y a_{10}, siendo esta última la que permitió a los cuatro estudiantes construir la regla general. Los casos de RI muestran que la estrategia de proporcionalidad se observó como la de mayor uso en este grupo de estudiantes para el cálculo de $a_{100,}$ mientras que la estrategia de conteo junto con el de proporcionalidad registró un caso para obtener $a_{n.}$

Comparando los valores de frecuencias relativas por modalidad de egreso se observa que los estudiantes de Telesecundaria presentaron mayor dominio de la estrategia de diferencias multiplicativas con ajuste en comparación con lo encontrado en la modalidad de Secundaria general que presentó un menor valor de frecuencia relativa. Por otra parte, se encontró que la estrategia de proporcionalidad, en ambas modalidades, fue la que presentó mayor frecuencia relativa y fue usada en mayor medida al obtener el término a_{100}, esto es indicativo de que las dificultades respecto del tipo de estrategia son similares independiente de la modalidad de egreso.

5.1.3.5. Análisis de la segunda tarea de diagnóstico.

Con respecto a la segunda tarea se identificaron cuatro estrategias de resolución, dos de ellas presentan un carácter visual, diferenciadas entre ellas por el uso de la representación gráfica (ViGr) mientas que la otra es de carácter puramente visual (Vi). Las otras dos estrategias son el conteo (Co) y la diferencia multiplicativa con ajuste (DfMA).

Estrategias utilizadas con RC y las frecuencias por término.

La Tabla 14 muestra el comportamiento de los casos RC por término y estrategia utilizada. En ella se logra apreciar el tipo de estrategias utilizadas y las frecuencias de RC por cada término buscado.

Tabla 14

Respuestas correctas, estrategias y representación de la regla. Segunda tarea

Término	Frecuencia de RC	Estrategia				Representación de a_n	
		ViGr	Vi	DfMA	Co	Si	Ve
a_4	24	18	3	2	1		
a_{10}	21	3	6	7	5		
a_{58}	16	1	6	9	0		
a_{100}	16	1	2	13	0		
I a_{20}	20	1	0	19	0		
a_n	15	0	0	15	0	12	3

Nota: Vi = visual; Gr = gráfico; Df = diferencia; MA = multiplicativo con ajuste; Co = conteo; Si = simbólico; Ve = verbal; I a_{20} = operación inversa para encontrar el lugar del término 20

Se observa que los casos de RC disminuyen conforme incrementan los valores del término, de tal forma, para a_4 se observaron 24 casos de RC, se redujo a 21 para a_{10} y 16 para a_{58} y a_{100}. La frecuencia de RC disminuyó a 15 casos para a_n . El valor que rompe con esta tendencia son los casos RC al inciso que presentó un carácter inverso (I_{20}), es decir, aquel que pedía al estudiante obtener el número del lugar del término de la figura (variable independiente) a partir del número de estrellas totales de la figura (variable dependiente).

En relación al tipo de estrategias se identifica que la visualización gráfica fue el modo de actuación más utilizado al encontrar el término a_4, seguida de la estrategia puramente visual que fue utilizada en tres casos. Al obtener el término a_{10} los estudiantes diversificaron el tipo de estrategias: de diferencia multiplicativa, visual y conteo. La obtención de a_{58} representó un cambio significativo en el número de estudiantes que transitaron hacia la estrategia de diferencia multiplicativa, para este momento las estrategias visuales gráficas y visuales presentaron sólo uno y dos caso respectivamente.

En la estimación del valor inverso se encontró que 19 de los 20 alumnos con RC utilizaron la estrategia de diferencia multiplicativa con ajuste y sólo un alumno utilizó una representación visual gráfica para obtener el valor inverso del término a_{20}. Finalmente los 15 alumnos que obtuvieron RC en el término general recurrieron a la estrategia DfMA. Respecto de la forma de representación de a_n se observó la primacía de la representación simbólica $3n + 1$. por sobre la forma verbal.

En esta tarea fue relevante el encontrar que el tipo de sucesión promovió la diversificación de estrategias, específicamente se hace referencia al uso de la estrategia visual y gráfica. Si bien finalmente la totalidad de alumnos recurrieron a la estrategia DfMA, se infiere que los estudiantes poseen determinadas habilidades no maduras aún de visualizar; fueron capaces de identificar la estructura de la figura mas no de extender el razonamiento a los términos lejanos.

Estrategias utilizadas con RI y las frecuencias observadas por término

La Tabla 15 recoge las frecuencias de RI por término así como el tipo de representación de la regla general.

Tabla 15

Respuesta incorrecta, estrategia y representación de la regla general

Término	Frecuencia de RI	Estrategias utilizada					Representación de a_n	
		ViGr	Vi	Co	Mu	Ii	Si	Ve
a_4	4	2	1	1	0	0		
a_{10}	6	6	0	0	0	0		
a_{58}	9	4	0	0	5	0		
a_{100}	10	3	0	0	7	0		
I a_{20}	6	1	0	0	1	4		
a_n	5	1	0	1	0	3	2	3

Nota: Vi = visual; Gr = gráfico; Co = conteo; Mu = multiplicativo; Ii = Inducción ingenua; Si = simbólico; Ve = verbal; I a_{20} = operación inversa para encontrar el lugar del término 20

En el análisis de los datos se observa que el comportamiento entre el número de RI incrementa conforme es mayor el término. La frecuencia de RI para a_4 fue de cuatro casos, seis para $a_{10,}$ incrementado esta frecuencia a nueve cuando se obtuvo el término a_{58} y 10 para a_{100}. Este comportamiento en las RI parece romperse en el caso de a_n que presentó sólo cinco casos de RI, sin embargo se encontró que ocho estudiantes no presentaron respuesta a la tarea de construir el término general de la sucesión.

Por estrategia utilizada que generó RI, la visual-gráfica observó dos casos de RI para el término a_4, seguidos de la estrategia visual y de conteo con un caso cada una. Para la obtención de a_{10} la estrategia visual-gráfico continuó siendo usada en la totalidad de casos de RI (6). Esta estrategia mal utilizada se caracteriza por el hecho de que el estudiante no representa la figura respetando la relación que se establece entre el recuento numérico de los elementos y la disposición espacial de los elementos en la figura.

En relación a la obtención de a_n basta mencionar que tres respuestas no pudieron ser categorizadas en alguna de las categorías de las estrategias ya mencionadas y se ubicaron en la categoría de Inducción ingenua (Ii), en complemento, se observó que un alumno recurrió a la estrategia de visualización-gráfica para denotar la regla general y un caso para la estrategia de conteo. Es preciso destacar que la estrategia multiplicativa trasciende en el número de casos que la usaron al calcular el término a_{58}. Entre los participantes con RI y que construyeron una regla para a_n dos de ellos presentaron una expresión simbólica y tres en forma verbal.

Trayectorias de RC y estrategias utilizadas para obtener a_n

Este análisis se hace en dos momento; en el primero se mencionan los casos de estudiantes con RC en la totalidad de los términos; posteriormente se describen las trayectorias de aquellos alumnos que presentaron RI en alguno(s) términos pero lograron establecer la regla general en la sucesión.

En la Tabla 16 se exponen los casos de estudiantes que lograron establecer la regla general para la sucesión. Se recogen las estrategias utilizadas por término y el tipo de respuesta.

Tabla 16

Trayectoria de las estrategias utilizadas en respuestas correctas por término

Estudiante	Estrategia utilizada por término					
	a_4	a_{10}	a_{58}	A_{100}	Inv	a_n
22 H 15ts	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
23 M 15tS	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
02 H 15ts	ViGr	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
28 H 15sg	ViGr	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
08M15sg	ViGr	Vi	Vi	DfMA	DfMA	DfMA
06M15sg	Vi	Vi	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
09H15ts	Vi	Vi	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
07M15sg	ViGr	ViGr	ViGr	ViGr	ViGr	DfMA

Nota: Vi = visualización; Gr = gráfico; Df = diferencia; MA = multiplicativo con ajuste

Para esta sucesión, ocho alumnos obtuvieron RC para cada uno todos los términos; dos de ellos recurrieron a la estrategia DfMA desde la obtención del término a_4 hasta el término a_n. Los seis casos restantes presentaron como aspecto común haber iniciado con una estrategia visual o gráfica y posteriormente transitaron hacia la estrategia de DfMA.

La modificación se observa al momento de obtener un término a_{58}. Cuatro casos iniciaron con la estrategia ViGr para obtener a_4, dos de ellos la utilizan sólo para encontrar este término y a partir de a_{10} transitan a la estrategia de DfMA; un caso transita de ViGr a Vi para encontrar el valor de a_{10} y a_{58} para finalmente recurrir a la estrategia DfMA para construir la regla general. El caso restante prolonga el uso de esta estrategia de ViGr para llegar al valor de la operación inversa solicitada y sólo utiliza DfMA para obtener el término general. Finalmente dos casos hacen uso de la visualización para los términos a_4 y a_{10} y el resto del trayecto utilizan la estrategia DfMA.

En la Tabla 17 se recogen los casos que manifestaron alguna dificultad en la obtención de algún término pero lograron construir la regla general.

Tabla 17

Trayectoria de las estrategias de respuesta correcta con dificultades al obtener la regla

Estudiante	Estrategia utilizada por término					
	a_4	a_{10}	a_{58}	a_{100}	I a_{20}	a_n
03 M15sg	ViGr	ViGr (RI)	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
04 M 15sg	ViGr (RI)	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA	DfMA
05 H14sg	ViGr	__	__	DfMA	DfMA	DfMA
13 M15sg	ViGr	Co	DfMA	Pr (RI)	DfMA	DfMA
19 M15sg	ViGr	DfMA	Mu (RI)	DfMA	DfMA	DfMA
26 M15sg	ViGr	Co	Vi	Mu (RI)	DfMA	DfMA
01 H16sg	Vi	Vi	Mu (RI)	Vi	DfMA	DfMA

Nota: Vi = visualización; Gr = gráfico; Df = diferencia; MA = multiplicativo con ajuste; Mu = multiplicativo; Pr = proporcionalidad; RI = respuesta incorrecta; I a_{20} = operación inversa para encontrar el lugar del término 20

Los estudiantes que mostraron alguna dificultad expusieron como aspecto común el haber iniciado con la estrategia de visualización gráfica, experimentaron con estrategias multiplicativas o de proporcionalidad con RI y finalmente corrigen el trayecto mediante la estrategia DfMA. Se presentaron dos casos con uso incorrecta de la estrategia de ViGr y reportaron una RI al encontrar el valor de a_4 y a_{10} respectivamente, en ambos casos el resto del trayecto utilizaron la estrategia de DfMA. En tres casos se recurrió al uso de diversas estrategias para encontrar los términos pedidos, pero en común, el error que cometieron fue la aplicación incorrecta de la estrategia multiplicativa. Finalmente, el total de los alumnos, tras haber explorado con otro tipo de estrategias, adoptaron la estrategia de DfMA para establecer correctamente la expresión del término general.

Trayectorias no exitosas y estrategias utilizadas para obtener a_n

Se describe a continuación aquellas trayectorias en las cuales los estudiantes tras haber obtenido alguna respuesta correcta, o no, expresaron incorrectamente la regla general de la sucesión (Tabla 18).

Tabla 18

Trayectorias no exitosas y estrategias utilizadas

Estudiante	Estrategia utilizada por término					
	a_4	a_{10}	a_{58}	a_{100}	I a_{20}	a_n
11M17sg	ViGr (RI)	ViGr (RI)	ViGr (RI)	Mu (RI)	___	Co (RI)
15H15sg	ViGr (RC)	Co (RC)	Pr (RI)	Mu (RI)	DfMA (RC)	Ii (RI)
17H15ts	Vi (RC)	Vi (RC)	Vi (RI)	Vi (RI)	Vi (RI)	Vi (RI)
18M15sg	ViGr (RC)	Vi (RI)	Mu (RI)	Mu (RI)	Ii (RI)	Ii (RI)
24H15sg	ViGr (RC)	Vi (RI)	Mu (RI)	Mu (RI)	___	Ii (RI)

Nota: Vi = visualización; Gr = gráfico; Co = conteo; Df = diferencia; MA = multiplicativo con ajuste; Mu = multiplicativo; Pr = proporcionalidad; Ii = inducción ingenua; RI = respuesta incorrecta; I a_{20} = operación inversa para encontrar el lugar del término 20

Con respecto de los casos que presentaron RI a la regla general de la sucesión, se observó que para la construcción de los términos a_4 y a_{10} las estrategias fueron básicamente de tipo visual y migraron hacia la multiplicación a partir del término a_{58}, finalmente estos alumnos aplicaron un razonamiento de conteo al obtener la regla general.

Frecuencias de RC y RI según modalidad de secundaria de origen

Enseguida se dan a conocer las frecuencias con que los estudiantes, discriminados por modalidad educativa, lograron establecer RC (Tabla 19) o RI (Tabla 20) a cada uno de los términos en la segunda tarea.

Tabla 19

Frecuencias de respuesta correcta por modalidad de egreso

Modalidad	N° de estudiantes	Términos					
		a_4	a_{10}	a_{58}	a_{100}	I a_{20}	a_n
Secundaria general	20	17 (.85)	13 (.65)	11 (.55)	12 (.6)	16 (.8)	11 (.55)
Telesecundaria	8	7 (.875)	8 (1)	5 (.71)	4 (.5)	4 (.5)	4 (.5)

La Tabla 19 reportó un comportamiento de RC similar a lo observado en la primera tarea. Se destaca el carácter descendente de las RC en relación al incremento del término. Al considerar las frecuencias relativas de RC por modalidad de egreso, se aprecia un comportamiento que favorece a los estudiantes de Telesecundaria en la obtención de los términos a_4, a_{10} y a_{58}. Para a_{100} y el Ia_{20} las frecuencias relativas mostraron un mejor desempeño de los estudiantes de Secundarias generales. Estas diferencias en las frecuencias relativas desaparecen al momento de obtener el término general en donde la mitad de los estudiantes de ambas modalidades lograron establecer el término a_n.

Tabla 20

Frecuencias de respuesta incorrecta por modalidad de egreso

Modalidad	N° de estudiantes	Términos					
		a_4	a_{10}	a_{58}	a_{100}	$I\ a_{20}$	a_n
Secundaria general	20	3 (.15)	6 (.3)	7 (.35)	7 (0.35)	2 (.1)	4 (.2)
Telesecundaria	8	1 (.125)	0	2 (.25)	3 (.375)	4 (.50)	1 (.125)

En la Tabla 20 se observa que las dificultades aparecen desde la obtención del término a_4 y son mayores para los términos a_{58} y a_{100} para Secundaria general y el término Ia_{20}en Telesecundaria. Este dato es relevante pues refleja la incapacidad de los alumnos de establecer estrategias básicas como el conteo para obtener un término próximo, pero o aún más, la dificultad de establecer relaciones espacio-numérica de los elementos que conforman la figura. Se destaca que en total cinco estudiantes de Secundaria general abandonaron la tarea de encontrar una regla general a la sucesión.

Los estudiantes de Telesecundaria mostraron una tendencia en los resultados similar a los alumnos de Secundaria general, se describe como una mayor dificultad para obtener valores distantes a los presentados y el abandono de la tarea. Para el caso de Telesecundaria, tres estudiantes abandonaron la tarea. Al momento de obtener el término general, una frecuencia de 0.2 del total de estudiantes de Secundaria general presentó RI al encontrar a_n, ante una frecuencia de 0.12 para Telesecundaria.

Frecuencias de RC y RI por estrategia utilizada por término según modalidad de secundaria

Las Tablas 21 y 22 recogen las frecuencias en el uso de las estrategias registradas en la obtención de los términos de la segunda tarea. Se encontró un comportamiento similar respecto del tránsito de las estrategias de tipo visual para obtener los términos cercanos hacia el uso de la estrategia DfMA al momento de obtener los términos lejanos y el término general.

Tabla 21

Frecuencias de RC y RI por término y estrategia utilizada para Secundaria General

	Estrategias						
RC y RI por término	Vi	ViGr	Co	Pr	DfMA	Mu	Ta
RC a_4	1 (.05)	16(.8)					
RC a_{10}	2(.1)	3(.15)	4(.2)		4(.2)		
RC a_{58}	5(2.5)	1(.05)			5(.25)		
RC a_{100}	2(.1)	1(.05)			9(.45)		
RC Ia_{20}		1(.05)			15(.75)		
RC a_n					11(.55)		
RI a_4	1(.05)	2(.1)					
RI a_{10}	3(.15)	3(.15)					
RI a_{58}	1(.05)	1(.05)		1(.05)		4(.2)	
RI a_{100}				1(.05)		6(.3)	
RI Ia_{20}							2(.1)
RI a_n				1(.05)			3(.15)

Nota: RC = respuesta correcta; RI = respuesta incorrecta; I a_{20} = operación inversa para encontrar el lugar del término 20; Vi = visual; Co = conteo; Df = diferencia; MA = multiplicativo con ajuste; Gr = gráfico; Mu = multiplicativo; Pr = proporcionalidad; Ta = tanteo

La Tabla 21permiten identificar, para el caso de estudiantes de Secundaria general, un uso preponderante de la visualización gráfica como estrategia eficiente en la obtención del término a_4 y un decremento como estrategia de elección al encontrar el término $a_{10,}$ siendo sólo un caso quien continúa con su uso para la obtención de los términos a_{100} y el término $Ia_{20.}$ Por otra parte es claramente identificable el incremento en las frecuencias de la estrategia DfMA como modo de actuación que permitió a los estudiantes la obtención de la regla general.

Se aprecia que la tendencia y uso de la estrategia multiplicativa generó el mayor número de casos de RI y su aplicación aparece al encontrar los términos a_{10} y $a_{58.}$Esta estrategia desaparece como modo de actuación al derivar el término a_n. La Tabla 22 expone lo observado en los alumnos de Telesecundaria.

Tabla 22

Frecuencias de RC y RI por término y estrategia utilizada para Telesecundaria

RC y RI por término	Estrategias					
	Vi	ViGr	Co	DfMA	Mu	Ta
RC a_4	2(.25)	2(.25)	1(.125)	2(.25)		
RC a_{10}	4(.5)		1(.125)	3(.375)		
RC a_{58}	1(.125)			4(.5)		
RC a_{100}				4(.5)		
RC Ia_{20}				4(.5)		
RC a_n				4(.5)		
RI a_4			1(.125)			
RI a_{10}						
RI a_{58}	1(.125)		1(.125)			
RI a_{100}	2(.25)		1(.125)			
RI Ia_{20}	1(.125)				1(.125)	2(.25)
RI a_n	1(.125)					

Nota: RC = respuesta correcta; RI = respuesta incorrecta; I a_{20} = operación inversa para encontrar el lugar del término 20; Vi= visual; Co = conteo; Df = diferencia; MA = multiplicativo con ajuste; Gr = gráfico; Mu = multiplicativo; Pr = proporcionalidad; Ta = tanteo

Lo observado con los estudiantes de Telesecundaria permite identificar que las estrategias visuales desempeñaron un papel importante al obtener a_4 y a_{10}.Se establece que la mitad de los estudiantes de esta modalidad recurrieron a la visualización de forma efectiva para encontrar el valor de los términos referidos y transitaron al trabajo aritmético para obtener a_{58}, a_{100} y subsecuentes.

Contrastando las frecuencias relativas se aprecia que los estudiantes que provienen de Secundaria general presentaron mayor habilidad y eficacia en el manejo de la visualización como estrategia para obtener el término a_4; tal situación se invierte para el término a_{10} donde la mitad de los estudiantes de Telesecundaria han mantenido esta estrategia de visualización y los estudiantes de Secundaria comenzaron con la aplicación de otras estrategias no visuales. Es demostrativo el hecho de que la mitad de los estudiantes de Secundaria general quienes usaron la visualización para encontrar el término a_4 han migrado a estrategias como conteo y DfMA.

Las variaciones entre las frecuencias en el uso de las estrategias se estabilizan al momento de establecer correctamente la regla general. En ambas modalidades la mitad de los estudiantes recurrieron a la estrategia de DfMA. Lo anterior sugiere que la visualización ha sido empleada sólo como estrategia de exploración inicial de la figura pero no ha representado o permitido al estudiante obtener el término general.

Por tanto, se conjetura que la visualización junto con la estrategia gráfica pueden representar modos de actuación eficaces que permitan al estudiante expresar el término general a partir de hacer objetiva la estructura de los términos mediante la fragmentación y manipulación de los elementos que las forman, estableciendo relaciones entre ellas y desarrollando la habilidad de verbalizar dichas relaciones.

5.1.3.6. Análisis de tercera tarea de diagnóstico.

Estrategias utilizadas para RC y las frecuencias por término

La Tabla 23 corresponde al análisis de las frecuencias de RC para el caso de la tercera tarea que consistió en encontrar el valor del término a_{1320} y argumentar la estrategia que les permitió llegar a esta respuesta. La conjetura fue que el estudiante establecería relaciones numéricas y visuales entre los elementos que conforman la figura y, con ello, establecerían un patrón que le permitiera calcular el término solicitado.

Tabla 23

Frecuencias de respuesta correcta y estrategia utilizada. Tercera tarea

		Estrategia		Representación de a_{1320}	
Término	Frecuencia de RC	ViMA	Vi,Gr,MA	Ve	Nu
a_{1320}	13	12	1	12	1

Nota: Vi = visualización; Gr = gráfico; MA = multiplicativo con ajuste; Ve = verbal; Nu = numérica

Se han identificado dos tipos de estrategias. La primera se caracterizó por el establecimiento de una relación visual entre los elementos y posteriormente aplicar una relación multiplicativa con ajuste en relación a las características de la figura (ViMA). La segunda estrategia se basó en una representación gráfica que apoyó su razonamiento multiplicativo y de ajuste.

La frecuencia de RC para esta tarea fue de 13 alumnos de los 28 participantes, de los cuales 12 presentaron la estrategia de visualización con factor multiplicativo y ajuste (ViMA) y sólo un estudiante usó la estrategia de representación gráfica visual y con elementos multiplicativos para encontrar el valor del término a_{1320}. En esta tarea resultó ser la representación verbal la forma más acogida para justificar el modo de expresar la estrategia para llegar a la respuesta, lo cual sugiere que la visualización promovió un mayor uso de la verbalización como medio para expresar la idea de generalidad. Este dato parece tener relación con las tareas anteriores. Cuando la estrategia utilizada fue de tipo DfMA la forma de representación se asocia con un modo simbólico de la representación de la generalización, por otra parte cuando la estrategia para llegar a la generalización es de tipo visual se recurrió a la representación verbal de la regla.

Estrategias utilizadas para RI y las frecuencias por término

Para el caso de las frecuencias RI se identificaron cuatro tipos de estrategias de generalización (Tabla 24). Dos estrategias comparten un carácter visual, las restantes tienen asociado un carácter recursivo o de tipo multiplicativo.

Tabla 24

Frecuencias de respuesta incorrecta y estrategia utilizada

		Estrategia				Representación de a_{1320}	
Término	Frecuencia de RI	Vi	Co	ViCo	Mu	Verbal	Numérica
a_{1320}	13	4	2	2	5	12	1

Nota: Vi = visualización; Co = conteo; Mu = multiplicativo; Ve = verbal; Nu = numérica

Se presentaron 13 casos con RI. La estrategia con mayor número de casos de RI fue la multiplicativa, este dato ha sido una constante a lo largo de las tres tareas. Al sintetizar tanto la estrategia visual y de conteo, se observa que ocho de los trece estudiantes con RI recurrieron a estos tipos de estrategias. Como modo de representación de las RI al término, se encontró que la representación verbal fue la forma más recurrida y sólo se manifestó una representación de tipo numérico para la justificación del resultado.

El análisis permitió comprender la necesidad de fortalecer las habilidades de visualización pues los estudiantes recurrieron esta estrategia mas no lograron extender este razonamiento y establecer relaciones numérico-espaciales entre los elementos que componen la figura. Se reconoció también la alta proporción de estudiantes que recurrieron a razonamiento multiplicativos al obtener los términos a_{58} y subsecuentes, pero que dicho modo de actuación deriva en casos de RI.

5.2. Segunda sesión

5.2.1. Planificación.

El objetivo de investigación en este episodio de enseñanza se centró en valorar si al modificar la tarea e insertar colores en ella, favorecería en los estudiantes objetivar la estructura en la figura, promoviendo en ellos la habilidad de visualizar. Esta estrategia posibilitaría abstraer, inducir y establecer un patrón y la regla general en la sucesión. Por tanto, la decisión metodológica fue plantear a los estudiantes un formato visual en donde pudieran hacer visible una estructura invariante que serían los tres puntos sombreados y dos líneas horizontales que están en relación al número de figura como elemento variable. (*cfr*. Tabla 4)

El objetivo de instrucción estuvo centrado en desarrollar habilidades visuales como modo de actuación en el proceso de generalización y verbalizar la regla de la sucesión. La conjetura de trabajo se planteó en términos de que, al hacer visible la estructura el estudiante establecería una relación entre los elementos variables, dispuestos por dos filas de puntos dependientes del valor numérico de la figura en donde estaría asociada la expresión $2n$, con una estructura invariante y asociada con el valor constante $+3$, es decir, los tres círculos que forman *la torre*. Se partió entonces del supuesto de que los alumnos al hacer objetiva dicha relación determinarían la regla verbal que generaliza la sucesión. La regla simbólica estaría dada por la expresión simbólica $2n + 3$.

La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje planteaba que el estudiante al promover elementos de análisis visual transitaría de una forma de pensamiento aritmético caracterizado por la estrategia DfMA a una forma de razonamiento visual capaz de establecer la relación de covarianza. La estrategia se encaminó a favorecer la verbalización de la regla. En esta sesión no era de interés el uso de la simbolización de la regla; por tanto, se esperaba que el estudiante construyera una regla apegada al siguiente modelo de respuesta: "*Para la figura n le corresponden n número de puntos en la fila de arriba y de abajo, más tres puntos azules como constantes*".

5.2.2. Desarrollo.

Se inició la actividad con una dinámica de movimiento con la intención de promover por un lado la empatía con los estudiantes y por otro sugerir la idea de patrón como una regularidad predictible y que otorga coherencia a un fenómeno. La organización de grupos fue de cuatro integrantes pues se propuso socializar razonamientos de aquellos quienes mostraran mayor habilidad en obtener la regla general.

Después de diez minutos de análisis de la sucesión, se presentaron los patrones identificados en cada uno de los grupos y se discutió respecto de la validez de cada una de las abstracciones. Se plantearon preguntas que promovieron objetivar la estructura de las figuras, por ejemplo: ¿por qué en la expresión $2n + 3$ se suma el valor tres si acaban de decir que se suman dos a la figura anterior?, ¿Qué representa el número 2 en la regla que presentaron? ¿Qué representa el valor *n?*

En esta sesión se observó que el estudiante 02H15ts, quien había resuelto la actividad en el diagnóstico mediante la estrategia de diferencia multiplicativa con ajuste, afirmó:

> *02H15ts: la expresión para esta sucesión es 2n+3*
> *15H16sg: ¿por qué 2n+3?*
> *02H15ts: porque al multiplicar 2 por n que es el número de la figura (hace una señalización con su lápiz indicando con ello la sucesión entre las figuras, continúa con apoyo de una calculadora haciendo operaciones aritméticas) 2 x 1= 2, 2+3=5; 2 x 2=4, 4+3=7(en esta repetición se observa que lo hace de forma pausada incluso rítmica).*

Esta estrategia ya señalada como una ruta que inicia en lo recursivo, hace uso del razonamiento multiplicativo donde el valor de la diferencia entre términos 2 es usado como factor multiplicativo de la literal *n*, enseguida la expresión obtenida $2n$ la ajusta al valor de entrada de cada uno del número de puntos de las figuras (5, 7, 9, etc). Por ejemplo para la figura 1 se toma el valor 1 para la variable n y al resultado de la multiplicación 2(1) se le suma el valor faltante para obtener el número 5, entonces se suma el valor 3.

Por lo presentado, se asume que el contexto de la tarea ocurre en un dominio de lo numérico y el análisis de la representación figural queda soslayado por el uso de razonamientos algorítmicos. En el siguiente extracto de observación se expone la estrategia en donde el uso posicional del valor de la diferencia junto con la variable n permitió obtener la regla general, no obstante, en dicha estrategia aritmética la noción del término general n no tiene algún otro significado más que un uso posicional.

> *07M15sg: es que cuando va de dos en dos el número dos se pone al principio para multiplicar el número*
> *DI: entonces ¿lo que indica la suma es el dos?*
> *07M15sg: sí, es el dos que se multiplica por el número de la figura*
> *11M17sg: ¿entonces estamos mal?*
> *07M15sg: si hubiera ido de tres en tres en lugar de dos hubiera ido tres*
> *DI: entonces ¿qué representa el valor tres para Ustedes?*
> *07M15sg: ¿El tres? Pues el número que falta para que salga la (inaudible)*
> *DI: ¿el número que falta para que se ajuste 2n al resultado?*
> *07M15sg: sí*

Usando el proyector de imágenes se presentaron y contrastaron los dos formatos de sucesión: la primera sin círculos elementos de color como la trabajada en la fase diagnóstica; la segunda presentó la variante de color que intentó hacer objetiva la estructura del crecimiento: variable y constante. Se pidió a los estudiantes que argumentaran qué representa el número tres en cada uno de los resultados y qué representa el valor 2 en la expresión. Por último se solicitó determinar la regla verbal de la sucesión

El trabajo del investigador docente consistió en generar preguntas encaminadas a abstraer e inducir la estructura. El objetivo de estas preguntas fue identificar tres círculos sombreados como invariantes de la sucesión y como valores de cambio dos líneas horizontales dispuestas espacialmente una debajo de otra y que se encuentran en relación al número de figura. Con esta estructura se solicitó inducir el patrón a los términos lejanos en la tarea y que expresaran la regla general.

> *DI: ¿qué relación encuentras entre la figura uno y los puntos no sombreados?*
> *10M14ts: en la figura uno por ejemplo están en blanco los dos puntos que sería el principio de la fórmula, después están sombreados los tres puntos que se suman a la fórmula.*
> *DI: por favor con la siguiente figura*
> *10M14ts: dos abajo, dos arriba y tres sombreados*

DI: figura tres…
Grupo: tres abajo, tres arriba y tres sombreados…
DI: ¿cómo será la figura cuatro?
Grupo: cuatro abajo, cuatro arriba y tres sombreados.

El razonamiento se induce al término a_{100}

DI: ¿cómo será la figura 100?
Grupo: 100 abajo, 100 arriba y tres constantes.

Se continuó el trabajo sobre términos particulares a fin de inducir el patrón del término a_n.

DI: cómo quedará la figura 25?
15H16sg: 25 abajo, 25 arriba y tres constantes (con su dedo índice hace notar dos líneas horizontales y un círculo que denota el valor de los tres puntos constantes)
DI: ¿cómo será la figura n?
07M15sg: n abajo, n arriba y tres constantes
DI: y al decir n + n ¿cuántas n son?
02H14ts: 2n
DI: 2n ¿estamos de acuerdo?; 2n + 3 de donde salió la expresión ¿coincidimos en el resultado?

Como actividad final, se solicitó verbalizar el patrón que se acabó de inducir.

5.2.3. Análisis preliminar.

5.2.3.1. Categorización y codificación de las respuestas.

Posterior al acopio de las respuestas se analizaron y categorizaron las producciones según el tipo de verbalización, y las cuales a continuación se caracterizan:

VCRA= Verbalización correcta de la regla aritmética. El estudiante transforma la representación simbólica de la expresión $2n + 3$ a su representación verbal.

VCRV= Verbalización correcta de la regla por visualización. El estudiante atendió y reconoció la relación entre los elementos variables y constantes de la figura, tal como se propuso en el objetivo de intervención.

VIRA= Verbalización incorrecta de la regla aritmética. Consistió en errores en la traducción de la representación simbólica a lo verbal.

VIRV= Verbalización incorrecta de la regla por visualización. El estudiante representó sólo una parte de la estructura entre los elementos de la figura, o bien se enfocó en describir términos particulares y no expresó el término general.

NR= No hubo respuesta a la tarea.

5.2.3.2. De la simbolización a la verbalización

La Tabla 25 expone las frecuencias de respuesta a la tarea de verbalizar la regla general.

Tabla 25

Frecuencias de verbalización del término general

Término	Categoría de verbalización				
	VCRA	VCRV	VIRA	VIRV	NR
a_n	10	2	6	3	7

Nota: VCRA = verbalización correcta de la regla aritmética; VCRV = verbalización correcta de la regla por visualización; VIRA = verbalización incorrecta de la regla aritmética; VIRV = verbalización incorrecta de la regla por visualización

Se observa que de los 28 participantes diez de ellos se centraron en traducir la expresión general producto de la estrategia aritmética a representación verbal. Dos lograron inducir la regla a partir del uso de la estrategia visual y representaron de forma verbal el término a_n. Seis estudiantes se centraron en transformar la expresión simbólica $2n + 3$ a su modo de representación verbal pero presentaron inconsistencias en la traducción. Tres casos no lograron establecer la totalidad de las relaciones entre los elementos que conforman la figura. Por último fueron siete alumnos que su repuesta no aportó indicios de alguna estrategia utilizada para representar la regla y fueron ubicados en la categoría de no respuesta (NR).

Lo siguiente son extractos e interpretaciones de los trabajos en los que se muestra el tipo de argumentaciones dada por los estudiantes como regla verbal

> *01H16sg: "Dos, por cualquier número más tres"*
> *09H14ts: "Fórmula 2n+3 debes multiplicar 2 por el número de figura y 2 representa el patrón y n es el número de la figura y se le suman 3 para completar la figura".*

En el primero se observa una contracción de la regla aritmética, se aprecia que el estudiante opera sobre la representación numérica y la expresa al referirse como *número* y no hace referencia a los elementos involucrados en la figura y sus relaciones; se infiere que su razonamiento no se fundamenta en el análisis de la figura sino que el alumno se enfoca en obtener un resultado numérico particular. Si bien la segunda regla hace referencia al "*número de figura",* al igual que en el caso anterior no se analiza la estructura ni la relación entre los elementos, el soporte sigue siendo la representación y operación, con sobre y sobre números.

Las siguientes son registros que presentan una diferencia cualitativa en contraste a las dos respuestas anteriores. En estas construcciones la regla general se sustenta en la habilidad de visualizar y establecer relaciones teniendo como soporte el análisis de las figuras. Se mencionan dos casos en los cuales lograron establecer una regla verbal mediante la visualización.

> 08M15sg: "*Todas las figuras tienen un círculo más del de su figura y tres constantes, es decir, la figura uno tiene dos círculos y después tres constantes, así sucesivamente. Es como n arriba, n abajo y tres constantes".*
> 20M15sg: "*Debes localizar, al principio de la figura, el número de serie (n) abajo y (n) arriba, más deben sobrar tres puntos"*

En el primer caso se identifican tres momentos en la construcción de la regla. En un inicio se menciona que "*Todas las figuras tienen un círculo más del de su figura*"; esta afirmación representa sólo una relación particular del término a_1, esto supone el análisis de casos particulares como el primer paso del razonamiento inductivo; sin embargo en la expresión no se aprecia aún la relación espacial "arriba" "abajo". Con la expresión "…y así sucesivamente" se interpreta que la estudiante extender la construcción de su enunciado, dando constancia de una noción de regularidad predictible para cada uno de los términos, pero aún no se ha logrado inducir la relación que dé coherencia al término general de la sucesión. Hasta el tercer momento la participante sintetiza la regla general y hace evidente la relación espacial entre los elementos, logrando establecer la idea de n como el valor general de la sucesión, reconociendo además la estructura constante de los tres puntos como elemento de la estructura.

> *"Es como n arriba, n abajo y tres constantes*".

La segunda respuesta que se presenta en esta categoría expone una síntesis de la regla general y con ello de las relaciones que subyacen en la regla, resulta válida porque se relaciona el número de término "*número de serie*" con la estructura espacial, se completa la regla con los tres puntos constantes.

En los casos de estudiantes con verbalización incorrecta de la regla, se aprecian dificultades al momento de expresar el orden en la jerarquía de las operaciones aritméticas de la regla simbólica en su modo verbal. Se presentan ejemplos de estos casos.

> 18M15sg: "*El 3 se obtiene porque sumando por el número de la figura y multiplicado por dos se obtiene el resultado"*
> 19M15sg: "*La fórmula 2n+3, el tres se obtiene porque sumando por el número de la figura multiplicando por dos se obtiene el resultado"*

El análisis sugiere la dificultad del estudiante para determinar cuál es el valor numérico que se busca. Se infiere que la participante intenta obtener un valor preciso y refiere al número tres como el valor buscado y expone una serie de argumentaciones a partir de la expresión $2n + 3$ pero que el estudiante no ha logrado comprender en relación a la estructura de la figura.

En relación a la segunda respuesta, el estudiante muestra confusión en la traducción de la regla verbal y sobrepone dos operaciones aritméticas, suma y multiplicación, al señalar la expresión "*porque sumando por el número de la figura".* La simbolización que sugiere esta regla de sumar tres al número de figura y multiplicar por dos se apega a la siguiente expresión $2(n + 3)$, que al aplicarla a la sucesión numérica 5, 7, 9 no corresponde.

Los casos de verbalización visual incorrecta se caracterizaron por reducir la regla al análisis de términos particulares. El siguiente ejemplo permite apreciar la producción de la regla.

> 03M15sg: "*Todas las figuras tienen un círculo más que otro y tres constantes"*

En esta respuesta, a diferencia de los casos correctos ya presentados, el estudiante no atiende a la relación entre espacio número como estructura y existe además la dificultad de apreciar la dimensión espacial “arriba”, “abajo” de cada número de puntos de la fila con el lugar que ocupa el término y sumar a esta expresión $2n$ con los tres puntos invariantes.

5.2.3.3. De lo aritmético a lo visual como modo de razonamiento.

La Tabla 26 muestra los estudiantes que en la primera tarea de diagnóstico lograron establecer la regla general y en esta sesión han modificado, o no, la estrategia para obtener la regla general. Cabe recordar dos aspectos en relación a los resultados de la tarea. Primero, el modo de actuación preponderante en la obtención del término general consistió en utilizar la estrategia aritmética (DfMA). Segundo, que en la totalidad de los casos la representación de la regla se hizo de forma simbólica.

Tabla 26

Tránsito de estudiantes con RC en diagnóstico hacia la estrategia de visualización

	Categoría de verbalización				
Estudiante	VCRA	VCRV	VIRA	VIRV	NR
02 H 15ts	*				
04 H 15sg	*				
06 M 15sg					*
08 M 15sg		*			
20 M 15sg		*			
22 H 15ts	*				
23 M 15ts					*
19 M 15sg			*		
07 M 15sg			*		
09 H 14ts	*				

Nota: VCRA = verbalización correcta de la regla aritmética; VCRV = verbalización correcta de la regla por visualización; VIRA= verbalización incorrecta de la regla aritmética; VIRV= verbalización incorrecta de la regla por visualización

En la tabla se aprecia que la habilidad de establecer una regla general mediante la estrategia aritmética no asegura la verbalización de dicha regla, es decir, se han observado dificultades en la traducción entre la representación simbólica y verbal (*cfr*. Rodríguez-Domingo & Molina, 2013). De igual forma se encontraron dificultades al establecer la estructura general de las relaciones mediante la exploración visual de la sucesión. Además, se observó que a pesar de haber modificado el formato de las figuras y haber insertado elementos de color, continuó la preponderancia de la estrategia DfMA, en contraste, la frecuencia de casos de RC que recurrieron a la visualización no fue la esperada.

La Tabla 27 recoge los casos de estudiantes con RI en la sesión diagnóstico para el término a_n. El modo de actuación de estos estudiantes consistió en el conteo como estrategia inicial para los términos cercanos y el uso de la proporcionalidad o multiplicación al obtener la regla general.

Tabla 27

Tránsito de estudiantes con RI en diagnóstico hacia la estrategia de visualización

	Categoría de verbalización				
Estudiante	VCRA	VCRV	VIRA	VIRV	NR
01H16sg	*				
10M14ts	*				
18M15sg			*		
11M17sg			*		
17H15ts			*		
25M15sg					*
13M15sg					*

Nota: VCRA = Verbalización correcta de la regla aritmética; VCRV = Verbalización correcta de la regla por visualización; VIRA = Verbalización incorrecta de la regla aritmética; VIRV = Verbalización incorrecta de la regla por visualización

Se observó que dos estudiantes con RI en diagnóstico lograron hacer una traducción correcta de la regla simbólica al modo verbal, mientras que tres de los siete casos intentaron hacer esta misma traducción pero su respuesta resultó inadecuada. Se identificó que ningún estudiante intentó establecer o al menos recurrir a la visualización como estrategia para la obtención de la regla. Este desinterés por explorar lo visual se interpreta a la luz de la poca familiaridad que el estudiante tiene ante el trabajo y análisis de sucesiones de figuras, tal y como ha quedado manifiesto en los planes de estudio en Educación Básica en México. Otra lectura posible, y que no se contrapone a la anterior, puede ser que el estudiante está habilitado para encontrar valores numéricos como respuesta tal y como lo sugieren los casos de estudiantes que mencionan que lo que se busca es un valor numérico: "*multiplicando por dos se obtiene el resultado*". Lo anterior hace suponer la imagen de un alumno en busca de una respuesta numérica para un caso particular y no centrado en establecer una regla que generalice las relaciones en las figuras.

En la Tabla 28 se observan los casos de los estudiantes que no presentaron respuesta para el término general y en esta sesión lograron establecer la respuesta para el término a_n. El tipo de estrategias mostrada por estos alumnos en el diagnóstico se centró en el conteo o el medio gráfico para obtener los términos cercanos, pero al momento de establecer los valores de a_{100} y a_n, o bien recurrieron a la proporcionalidad como medio para construir su respuesta o abandonaron la tarea.

Tabla 28

Uso de la visualización por estudiantes que no respondieron en tarea diagnóstico

	Categoría de verbalización				
Estudiante	VCRA	VCRV	VIRA	VIRV	NR
03M15sg				*	
05H14sg	*				
12M14ts	*				
14M15sg				*	
15H15sg	*				
16M14sg				*	
21H14sg	*				
24H15sg					*
26M15sg					*
27M14ts					*
28H15sg			*		

Nota: VCRA = Verbalización correcta de la regla aritmética; VCRV = Verbalización correcta de la regla por visualización; VIRA = Verbalización incorrecta de la regla aritmética; VIRV = Verbalización incorrecta de la regla por visualización

Se observa que cuatro de estos estudiantes lograron hacer una traducción correcta entre la regla simbólica y verbal. Tres casos intentaron mediante la visualización establecer la regla pero, como se informó en el apartado 6.2.1 no lograron abstraer e inducir la estructura general de las figuras o términos en sucesión.

5.3. Tercera sesión

5.3.1. Planificación.

Como antecedente de esta fase se consideró la preponderancia de la estrategia aritmética como medio para obtener la regla general; además, se observó que dos estudiantes utilizaron con éxito la estrategia de visualización para abstraer e inducir un patrón en la sucesión. Se encontró que en la fase diagnóstica tres estudiantes no presentaron respuesta a la tarea de obtener la regla general y en esta primera sesión lograron establecer un patrón, que si bien no fue válida su construcción, en estos casos se pudo avanzar respecto del establecimiento parcial de relaciones generales entre los elementos.

La decisión metodológica en este segundo episodio de enseñanza fue mostrar a los alumnos una sucesión de figuras con un término oculto. La modificación en la tarea se justificó con base en los argumentos de autores como Lannin, Barker y Townsend (2006) y Samson (2012) quienes plantean que el tipo de sucesiones que muestran términos no consecutivos promueven en los estudiantes la habilidad de abstracción e inducción de relaciones de generalidad algebraica como la señalada por Radford (2010).

El objetivo de investigación para este episodio se centró en determinar la forma en cómo al introducir una variable en la tarea (ocultar un término de la sucesión) se modificaría el tipo de estrategia de generalización, desde una centrada en el cálculo aritmético (DfMA) hacia la visualización como heurístico.

La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje suponía que, al limitar la tendencia en el uso de la recursividad entre los términos el estudiante exploraría e induciría las relaciones entre los elementos que conforman un término particular de la sucesión, por ejemplo, como modelo de respuesta se propuso: las líneas de base corresponde con el número de figura y por cada línea de base está asociado un triángulo, entonces el número de triángulo es igual al número de figura; además, las líneas superiores están en relación con número de figura menos uno.

La expresión asociada sería $3n+(n\text{-}1)$, misma que al ser reducida quedaría expresada en la regla simbólica $4n-1$.

El objetivo de instrucción fue desarrollar las habilidades de visualización para abstraer e inducir un patrón en la sucesión. La conjetura de trabajo partió del supuesto que, al presentar al estudiante una sucesión con términos ocultos, éste modificaría sus modos de actuación y exploraría la visualización como estrategia de generalización

5.3.2. Desarrollo.

Se inició la actividad con la resolución individual de la tarea disponiendo de un tiempo de 10 minutos. Posteriormente, se organizó el trabajo en parejas con el propósito de socializar, argumentar las estrategias usadas y validar el patrón obtenido en esta actividad. La labor del investigador fue rescatar, dentro del trabajo de los grupos, las estrategias y dificultades observadas en la tarea; así como modificar en el transcurso de la fase de implementación la estrategia didáctica y que se enfocara a los estudiantes en el logro del objetivo de instrucción propuesto.

Una de las modificaciones ocurridas al momento de la intervención sucedió cuando los alumnos 02H15ts y 09H14ts presentaron como respuesta el número de líneas para el término a_{100}. La indicación para ellos fue que, además de calcular el número de líneas para el término, debían describir cómo estructurarían las 399 líneas. Esta indicación les obligó a encontrar la estructura que les permitiera dar un orden a las relaciones que entre las líneas se establecen. La modificación fue favorable al objetivo pues permitió que la actividad se encaminara no en la obtención de un valor numérico sino en re contextualizar una respuesta obtenida mediante el cálculo aritmético a un razonamiento de análisis visual de la figura.

En la discusión de clase se cuestionó sobre la viabilidad de una estrategia recursiva en la construcción de la regla general, por ejemplo, si el patrón encontrado es “la sucesión va de 4 en 4”, ¿este patrón permite establecer el número de líneas de cualquier término lejano a los observados? Se cuestionó además sobre la representación de los valores simbólicos y numéricos que componen la expresión $4n-1$: ¿qué representa el número -1 en dicha expresión que ellos construyeron a partir de la estrategia aritmética DfMA? ¿Qué representa el valor n dentro del análisis de la figura?

Con la presentación grupal se analizaron las estrategias utilizadas al obtener los términos $a_7, a_{10}, a_{100} y\ a_n$, es decir, la tarea implicó obtener el valor de términos tanto cercanos como lejanos en la sucesión.

5.3.3. Análisis preliminar.

El análisis se centró en el tipo de estrategia utilizada en la tarea de obtener RC para los términos $a_7, a_{10}, a_{100} y\ a_n$ de la sucesión con términos ocultos. Se destaca en primer momento el tránsito de aquellos estudiantes que en la tarea de diagnóstico desarrollaron estrategias de tipo aritmético (DfMA) y en esta sesión exploraron la visualización como modo de razonamiento para inducir la regla general. Posteriormente se recogen los casos de aquellos estudiantes que en las fase de diagnóstico no mostraron dominio de alguna estrategia y en esta última sesión han acogido la visualización para obtener el término a_n y establecido la regla mediante la representación verbal.

5.3.3.1. Trayectoria hacia la visualización como alternativa. Avances y desafíos.

La Tabla 29 expone las frecuencias de RC observadas en relación al término buscado y el tipo de estrategia usada.

Tabla 29

Respuesta correcta y estrategia por término

Término	Estrategia			
	Co	Gr	Vi	DfMA
a_7	1	2	2	23
a_{10}	1		2	26
a_{100}			7	19
a_n			7	19

Nota: Co = conteo; Gr = gráfico; Vi = visual; Df = diferencia; MA = multiplicativo con ajuste

El análisis permite identificar la preponderancia de la estrategia aritmética aun habiendo modificado la consecución de los términos. 23 de los 28 estudiantes con RC recurrieron a la estrategia DfMA para obtener a_7 y finalmente 19 de los participantes desarrollaron la estrategia aritmética para obtener la regla general. Se observó que siete alumnos recurrieron a la estrategia visual para obtener los términos a_{100} y a_n.

En el siguiente extracto de las transcripciones de clase se recoge un proceso visual de construcción de la regla para a_{100} en donde el alumno 09H14ts logró abstraer e inducir un patrón a partir de estructurar la figura en triángulos. En este proceso el estudiante identificó el número total de líneas para el término, pero el objetivo de la sesión buscaba además hacer explícita la relación entre los elementos de la sucesión:

> *09H14ts*: *"…la figura tres tiene tres triángulos y la figura cinco tiene cinco"*
> *DI*: *La figura 100 ¿cuántos triángulos tendrá?*
> *09H14ts*: *399*
> *DI*:*¿399 triángulos?, ¿La figura 100 tendrá 399 triángulos?* (se *enfatiza la respuesta a fin de que el estudiante escuche su afirmación*)
> *09H14ts*: *no (corrige) serían 100*
> *DI*: *Entonces Usted encuentra una relación entre el número de triángulos con el número de figura ¿con eso se construye toda la figura, se encuentran todas las líneas de la figura)?*
> *09H14ts*: *no, las líneas se obtienen con esta fórmula 4n-1*

En este punto fue interesante el conflicto en el cual el estudiante se encontraba pues la expresión $4n - 1$ que los alumnos habían obtenido de forma aritmética supuso una restricción para explorar de forma visual la figura. Con la expresión $4n - 1$ el estudiante pudo calcular el número de líneas, pero la indicación consistió en estructurar el total de líneas.

Hasta este momento había quedó incompleta la construcción de la regla planteada pues sólo se logró reconocer una parte de la estructura total de la figura. El estudiante se retira a su lugar y en un lapso de cinco minutos regresa y presentó la siguiente abstracción:

> *09H14ts*: *por ejemplo sería poner tres triángulos abajo y dos líneas arriba… para la figura tres se ponen tres triángulos abajo y dos líneas arriba…para la figura 5 son 5 triángulos abajo y 4 líneas arriba…si quiere saber por ejemplo la figura 100 son 100 triángulos abajo y 99 líneas arriba; es que el número de triángulos y el número de figuras es igual*.

Como se mencionó en el apartado del desarrollo, una de las decisiones didácticas implementadas en el transcurso de la sesión fue dirigir el razonamiento de los estudiantes hacia el establecimiento de reglas generales y verbalizar la estructura del término a_{100}. Esta decisión fue tomada en respuesta a que los alumnos presentaron solamente el valor numérico 399 como el número de líneas para el término que se refiere pero no refleja el proceso de analizar la estructura en la figura.

La respuesta que se mostró en el extracto anterior representó un avance en el logro del objetivo de intervención pues dio cuenta de la capacidad de establecer abstracciones visuales y de inducir una regla general de las relaciones entre los elementos de la figura. Esta respuesta representa un modelo de visualización y del establecimiento de una generalización algebraica.

No obstante el logro observado en el alumno 09H14ts, el reto estuvo en términos de lograr que un mayor número de alumnos desarrollaran esta habilidad. Como se mostró en la Tabla 29, fueron siete alumnos quienes lograron resolver la tarea de abstraer una estructura e inducir la regla general. Por otra parte, se identificaron 19 casos que llegaron a la obtención de a_n usando la estrategia DfMA. Se observó que nueve de estos últimos hicieron una verbalización de la regla general traduciendo de la regla simbólica, pero sin evidenciar, hasta este momento, razonamientos de tipo visual.

Los diez casos restantes sólo lograron establecer una verbalización incompleta de la estructura para el caso del término a_{100} mediante la visualización, pues consideraron sólo una parte de las relaciones de la figura, por consiguiente no se consideró como RC, sin embargo, sus respuestas son muestra del avance en la habilidad para establecer relaciones encaminadas a la generalización. Se presenta el siguiente extracto de respuesta incompleta:

> *14M15sg*: "*el número de la figura y número de triángulos son los mismos*"

En esta verbalización se observó que el estudiante no consideró el número de líneas de la parte superior, las cuales estaban en función de las líneas de base menos uno $(n - 1)$.

Continuando con la descripción de los datos de RC en esta sesión y contrastándolos con los resultados del diagnóstico, se observó que en términos absolutos se incrementó el número de casos de RC para a_n y que la estrategia que se ha mantenido como modo de actuación es la DfMA. Se encontró también que cinco de los siete estudiantes que utilizaron la estrategia visual en esta sesión (02H15ts, 06M15sg, 08M15sg, 23M15ts, 09H14ts), fueron casos que desde la sesión anterior mostraron un dominio consistente en la estrategia aritmética y en ésta recurrieron a la estrategia de visualización como forma de inducción de la regla. Este hallazgo se confirma con el análisis de la Tabla 25.

La Tabla 30 exponen los casos con RC para el término general en al menos una de las tareas de diagnóstico y el modo de verbalización de la regla desarrollado en la segunda tarea. Estos datos de RC se confrontan con el uso de la estrategia visual en la tarea de La Viga utilizada en esta sesión.

Tabla 30

Trayectoria de estudiantes con RC en diagnóstico hacia el uso de la visualización

	RC en diagnóstico				
	Primer tarea	Segunda tarea	Tercer tarea		
Estudiante	a_n	a_n	a_{1320}	Verbalización de a_n en segunda tarea	Verbalización de a_n en tercer tarea
02 H 15ts	DfMA	DfMA	ViMa	VCRA	Vi
04 H 15sg	DfMA	DfMA	ViMa	VCRA	DfMA
06 M 15sg	DfMA	DfMA	ViMa	NR	Vi
08 M 15sg	DfMA	DfMA	ViMa	VCRV	Vi
20 M 15sg	DfMA		ViGrMA	VCRV	DfMA
22 H 15ts	DfMA	DfMA	ViMa	VCRA	DfMA
23 M 15ts	DfMA	DfMA	ViMa	NR	Vi
19 M 15sg	DfMA	DfMA	ViMa	VIRA	DfMA
07 M 15sg	DfMA	DfMA		VIRA	DfMA
09 H 14ts	DfMA	DfMA	ViMA	VCRA	Vi
03 M15sg		DfMA		VIRV	NR
05 H14sg		DfMA		VCRA	DfMA
13 M15sg		DfMA	ViMA	NR	DfMA
26 M15sg		DfMA			NR
01 H16sg		DfMA		VCRA	DfMA
14M15sg			ViMA	VIRV	DfMA
28H15sg		DfMA	ViMa	VIRA	DfMA
21H14sg				VCRA	DfMA

Nota: Co = conteo; Gr = gráfica; Df = diferencia; MA = multiplicativo con ajuste; Si = simbólico; Ve = verbal.

Respecto de los cinco de los siete estudiantes que lograron verbalizar la regla general mediante la estrategia visual (02 H 15ts, 06 M 15sg, 08 M 15sg, 09 H 14ts, 23 M 15ts) estos alumnos presentaron en común el dominio de la estrategia DfMA y que, particularmente en la tercera tarea de diagnóstico (El problema de las baldosas) presentaron indicios en la habilidad de establecer relaciones en la estructura. En esta sesión los alumnos en cuestión lograron establecer una regla general algebraica. Se presentan extractos de respuesta de las hojas de trabajo de uno de estos alumnos.

> 02H15ts: "*Según el número de figura eran las líneas que tenía abajo y el número de figura menos uno era el número de líneas que tenía arriba la figura y el número de líneas de en medio es el doble que el número de líneas de la base*".

En este caso se encontró que la visualización representó una estrategia que le permitió al estudiante explorar otras habilidades de pensamiento centradas en relacionar y generalizar relaciones a partir del análisis de la figura. En el siguiente sub-apartado se mencionan aquellos estudiantes que evidenciaron dificultades y obstáculos en la obtención de la regla general y que en esta tarea y mediante la visualización les fue posible desarrollar la habilidad de abstraer e inducir un patrón. Fueron casos que su modo de actuación se centró en establecer relaciones de proporcionalidad o multiplicativa.

5.3.3.2. La estrategia visual como descubrimiento en la tarea de generalización.

En este sub apartado se destaca la eficacia de la visualización como estrategia para generalizar. La Tabla 31 recoge aquellos casos de estudiantes que en la tarea de diagnóstico presentaron RI al obtener a_ny en esta sesión lograron inducir la regla general.

Tabla 31

El uso de la visualización en estudiantes con RI en diagnóstico

	RI en diagnóstico				
Estudiante	Primer tarea a_n	Segunda tarea a_n	Tercer tarea a_{1320}	Verbalización de a_n en segunda tarea	Verbalización de a_n en tercer tarea
10M14ts	Co	__	Vi	VCRA	DfMA
11M17sg	Pr	Co	Mu	VIRA	DfMA
12M14ts	__	Co	__	VCRA	DfMA
15H15sg	__	Fi	Vi	VCRA	Vi (parcial)
16M15sg	__	__	Mu	VIRV	Vi
17H15ts	Co	Vi	Co	VIRA	NR
18M15sg	Co	Fi	ViCo	VIRA	Vi
24H15sg	__	Fi	Mu	NR	Vi (parcial)
25M15sg	Co	__	Co	NR	DfMA
27M14ts	Co	__	Vi	NR	DfMA

Nota: Co = conteo; Pr = proporcionalidad; Vi = visualización; Mu = multiplicativo; Fi = falsa inducción.

En el análisis se destaca en particular los casos de los estudiantes (16M15sg y 18M15sg) que en la sesión de diagnóstico carecieron de una estrategia que les permitiera la obtención de la regla que determinara a_n. Se destaca como aspecto que significó un cambio en el tipo de razonamiento, el solicitarles a estas alumnas que atendieran la forma en cómo estaba estructurado el número de líneas de la figura. Esta indicación les permitió abstraer la estructura, oculta para ellas hasta ese momento. Resulta pertinente entonces referir lo expuesto por Barbosa y Vale (2015) quienes reconocen que el tipo de preguntas y la modalidad de la tarea propuesta son factores que influyen en el modo de razonamiento que los estudiantes emplean ante la tarea de generalización. Se encontró que la tarea de estructurar el término, junto con el uso de la estrategia visual, permitieron que un número mayor de casos lograra exitosamente inducir un patrón en la sucesión y establecer la regla verbal adecuada.

5.3.3.3. Retos de la visualización como tarea didáctica.

En la sesión de trabajo grupal se detectaron básicamente dos estrategias, una aritmética caracterizada como DfMA y la otra visual. De esta última se obtuvieron dos patrones: una referida en términos del número de triángulos y líneas superiores; y una segunda a partir de fragmentar la figura en líneas superiores, inferiores e internas.

Cuando se solicitó a los estudiantes presentar ante el grupo sus estrategias, la estudiante 08M15sg expuso el siguiente razonamiento de naturaleza aritmética:

> *08M15sg*: *primero conté las líneas de la figura tres: primero éstas (base) y luego las de arriba…tenía 11; después hice lo mismo con esta figura y son 19 pero como tenía que encontrar la figura 4 primero, resté estos dos y salió 4. Entonces pensé que va de 4 en 4, puse en la fórmula (inicia escribiendo el número 4 en el pizarrón)… así que por ejemplo la figura 1 debía tener nada más uno y como no sé la figura que quiero le puse n y le resté 1.(Transcripción tercera sesión)*

Sobre esta misma naturaleza en la estrategia aritmética, la alumna 07M15sg, expresó:

> *07M15sg: "me di cuenta que la sucesión va de 4 en 4 por lo tanto el primer número de la expresión debe ser 4 y luego ya multiplicado por el número de la figura, el resultado lo tenemos que acoplar al número de líneas"*

Estos modos de razonamientos son cualitativamente similares: la diferencia como factor multiplicativo con un ajuste final. Para estos casos, la modificación de la tarea no resultó ser una variable de cambio sino una tarea que se pudo adecuar al razonamiento de DfMA. Como se señaló en párrafos anteriores, para los estudiantes el reto intelectual comenzó cuando debieron detectar la estructura de la figura y organizar el total de líneas encontradas para el término a_{100}. A partir de esta indicación se detectaron dos tipos de patrones visuales. El siguiente extracto de transcripción da cuenta del proceso seguido por el alumno 06M15sg quien presentó el siguiente patrón.

> *06M15sg: "Según el número de la figura era el número de líneas en la base de la figura y el mismo número menos uno era el número de líneas de arriba y las líneas de en medio son el doble de las de la base"*

Se observó en este razonamiento la descomposición de la figura en tres elementos y su abstracción ocurre cuando se establece la relación entre cada una de ellos: las líneas de base y superiores y las líneas de en medio. De esta relación se pudo obtener la siguiente expresión simbólica:

$$n \qquad + \qquad (n-1) \qquad + \qquad 2n$$

Líneas de base + líneas superiores + líneas intermedias

15H15sg retoma esta idea y encuentra validez al someter esta abstracción encontrada por 06M15sg e induce la regla en los demás términos buscados en la tarea.

> *15H15sg: por ejemplo que aquí son tres y aquí son dos, aquí son cinco y aquí son cuatro, la diferencia va a ser de una; entonces son 100 abajo (señalando con su lápiz las líneas de base) 99 arriba (señalando las correspondientes líneas inferiores) y 200 las que van a ir así (señalando las líneas diagonales).*

En el desarrollo de la sesión 23M15ts presentó un razonamiento basado en el análisis visual de la figura y planteó una generalización contextual donde existe contracción semiótica en relación a la regla verbal que ella presentó. La construcción refleja la noción de una regularidad que predice el crecimiento de la sucesión al hacer uso de la expresión "la figura", con esto no hace referencia a casos concretos sino a términos generales; además aparece la notación simbólica con la expresión n, que a decir de Radford (2006) representa la forma más sofisticada de expresar la idea de generalidad y que se ha hecho objetiva a través de este proceso de visualización. La estudiante hace una síntesis de su representación verbal y expresa la siguiente regla

> *23M15ts*: *puede ser n por tres más dos*. *Es que por decir, si vamos a pasar los triángulos abajo y van a ser lo mismo de la figura, cada triángulo tiene tres líneas entonces el número de la figura por tres más dos*

La desatención en que incurre la alumna es que toma como valor constante las líneas superiores cuando éstas son variables en relación al número de la figura, tal y como se señaló en líneas anteriores.

Esta evidencia en cuanto a la construcción de la regla permitió identificar aspectos particulares que el profesor debe considerar al momento de la verbalización de la regla. Los hallazgos permiten también reflexionar que la propuesta estuvo en función de un patrón institucionalizado $3n + (n-1)$ para trabajar en clase; sin embargo, los estudiantes lograron abstraer y generalizar otras relaciones $n + (n-1) + 2n$ que en su momento no fueron atendidas ni previstas por el profesor- investigador y que al no ser consideradas previamente no fueron tomadas en cuenta y enriquecer el trabajo en clase.

5.4. Cuarta sesión

5.4.1. Planificación.

La sesión cuatro tuvo como objetivo de investigación valorar el impacto de la manipulación de objetos concretos en el proceso de abstraer e inducir la regla general. Se consideró esta estrategia como una forma compatible con la visualización pues el hecho de fragmentar y analizar una figura. Al identificar los elementos y las relaciones subyacentes en la figura, el alumno podría objetivar un patrón de crecimiento. Por consiguiente, la decisión didáctica fue trabajar con materiales (palillos de dientes), los cuales debían estructurarse según la sucesión denominada *La viga,* misma que se retomó de la sesión anterior. (Véase Tabla 4)

A partir de lo observado en el episodio anterior, se encontró indicios de visualización como estrategia de inducción de la regla general. Sin embargo se identificaron dos aspectos: i) la dificultad por parte de los estudiantes en expresar los razonamientos sobre la abstracción de crecimiento de las figuras; y ii) la tendencia a operar sobre cálculos de tipo aritmético en la obtención de regla general.

Como Trayectoria Hipotética de Aprendizaje se planteó que la manipulación de objetos concretos permitiría al estudiante hacer objetiva la estructura entre los términos. En consecuencia, el objetivo de instrucción fue que el estudiante desarrollara la habilidad de inducir y verbalizar la regla general a partir del trabajo con materiales concretos. De este proceso el estudiante daría cuenta, ya no sólo de casos particulares, sino que le será posible describir la estructura de cualquier figura, es decir, lo general.

Resumiendo, el planteamiento de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje supuso que el estudiante transitaría de una forma de pensamiento aritmético (DfMA) a una forma de razonamiento visual, que le habilite para establecer relaciones entre el número de figura y el número de triángulos y/o líneas como elementos y determinar el patrón de crecimiento en la sucesión.

5.4.2. Desarrollo.

Al inicio de la clase se presentó la intención de no participar por algunos estudiantes. Su inquietud fue saber si al declinar les traería consecuencias adversas en sus calificaciones. La respuesta por parte del investigador-docente ante esta situación fue invitarles a participar, pero, si su decisión se mantenía no habría repercusiones de ningún tipo. Se enfatizó, en cambio, que la dirección de la institución estaría comunicada de esta situación a fin de destinarles otra actividad mientras ocurría el trabajo de intervención con el resto del grupo. Los estudiantes optaron permanecer en el salón de clase pero finalmente no se tuvo registro de sus trabajos.

Posterior a esta situación, la primera actividad fue conformar los equipos de trabajo de 3 a 5 integrantes por criterio de afinidad y hacer entrega del material de trabajo. Se indicó el hacer la reproducción de las figuras en la sucesión utilizando el material. Posteriormente se pidió fragmentar la figura y abstraer una estructura que les permita encontrar un patrón. Enseguida cada grupo eligió llevar a cabo la actividad en algún lugar externo al aula pues el tipo de mobiliario no facilitaba el trabajo. Unos grupos hicieron la tarea en el inmueble que ocupan los comedores de la escuela y otros trabajaron sentados en el suelo del aula de clase.

Esta forma de organizar al grupo en equipos de pocos integrantes permitió recoger mayor evidencia del trabajo. La tarea del investigador fue observar el tipo de abstracción lograda, al igual que identificar las dificultades en la determinación del patrón. En el proceso de abstraer la regla el profesor planteó preguntas que sugirieron posibles formas de fragmentar y reorganizar la estructura de la figura a partir de relacionar los elementos identificados en el análisis.

Con el primer grupo de trabajo se retomó la abstracción que al final de la sesión pasada ellos habían presentado: relación entre número de triángulos con el número de figura más las líneas superiores en relación al número de figura menos uno. En este primer acercamiento 30H16ts logró abstraer lo siguiente:

> *30H16ts:"el número de triángulos es el mismo número que el de las líneas de arriba y abajo".*

Al no comprender la explicación el investigador solicitó al alumno que una vez más externalizara su idea. Por segunda ocasión el estudiante hizo un conteo del número de palillos de base y los palillos de la fila superior y efectuó un conteo con el número de triángulos formados. Una vez comprendida la idea se reconoció el error en su abstracción, ésta radicó en que el alumno duplicó el número de líneas o palillos para formar un triángulo. La retroalimentación fue indicarle que de esa manera doblaba el número de palillos ocupados para formar un triángulo.

> *DI: …lo que queremos conocer es el número de líneas de la figura 20…*
> *30H16ts: las que tuviera la figura 20, tendría 20 abajo (hace un nuevo conteo en la figura cinco para validar su abstracción a partir de las figuras pequeñas). Entonces tendría 20 triángulos y arriba siempre tiene dos menos, creo, no (corrige) uno menos. Entonces tendría 20, 19 (reflexiona) tendría 39 triangulitos.*

El alumno continuó con la relación de que al sumar las líneas superior e inferior obtenía el número de triángulos, con la observación de que este patrón es equívoco pues traslapa la cantidad de líneas que se requieren para formar un triángulo.

DI: 39 triángulos, pero esto te sirve para conocer
15H15sg: (irrumpe) los palitos que tiene…
30H16ts: ¿en total?
15H15sg: lo que tenemos que saber es el número de los palitos que tiene

Los extractos reflejan un dilema en la labor docente: ¿hasta qué punto se puede sugerir u orientar la respuesta sin que ello implique limitar la posibilidad de descubrimiento en el estudiante? En el caso del estudiante 30H16ts su razonamiento era que se debía encontrar el número de triángulos y posteriormente obtener el número de líneas, su percepción estuvo centrada en observar triángulos, pero esta identificación fue desorganizada respecto de la figura.

Se continuó con este proceso de construcción de la regla. Labor del investigador - docente se enfocó en que el equipo construyera la regla general de la figura. Se sugirió identificar líneas de base y líneas superiores, siendo las primeras igual en número a la figura.

DI: me queda claro lo que dice 30H16t , a la figura 20 le corresponden 20 líneas abajo y 19 arriba.
30H16ts: entonces con eso podemos conocer el número de triángulos sólo nos falta conocer el número de líneas, las de en medio (líneas) es el problema
DI: porque si contáramos nada más los palitos que están adentro…los que están fuera son éstos, ¿no?

En este punto se fragmentó la figura ya no en disposición de triángulos sino en estructuras de líneas: base, superiores y de en medio

30H16ts: a ver, creo que ya encontré, encontré también otra cosa: que el número de palitos que están en medio siempre es uno menos que el total de los que están abajo y arriba…como aquí son: 1,2,3,4, 5 (cuenta las líneas de base), 6,7,8,9 (sumando las líneas superiores)…y acá son 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10…digo uno más…..y aquí también (refiriendo la figura 3 y con el fin de validar su abstracción) 1,2,3,4,5 (suma las líneas inferiores y superiores) 1,2,3,4,5,6 (cuenta los palillos de en medio o zigzag).

La abstracción que el estudiante logró objetivar le permitió avanzar en la inducción de la relación entre los elementos. Ahora, para 30H16ts la figura ya no era un conjunto de líneas sin estructura, sino que visualizó el término como elementos articulados y que establecen una relación entre ellos: las líneas de en medio siempre es una más que la suma de las líneas inferiores y superiores, y que el número de la figura siempre es igual a las líneas de base. Además, fue particularmente interesante su razonamiento de validar e inducir esta abstracción en los otros términos observados. Con esta estrategia el estudiante no recurrió a establecer pensamientos de recursividad para obtener la regla, sino que a partir del análisis los términos particulares que observó, él extendió su razonamiento al conjunto de los términos que integraron la sucesión.

Se plantea a lector la siguiente experiencia en relación al doble rol de docente-investigador. El patrón que detectó el estudiante me fue incomprensible al momento de presentarla y generó confusión pues era una abstracción que no se había considerado en la fase de preparación de la intervención. Se le solicitó al estudiante que expresara de nueva cuenta esta relación y, por segunda, vez no fue comprensible la abstracción que él había establecido. Se requirió al equipo tiempo para asimilar la idea y se solicitó indicaran la relación para la figura 50. 15H15sg expuso:

> *15H15sg: abajo tendría 50 arriba 49 y en medio tendría 51*
> *DI: otra vez. La figura 50*
> *30H16ts: tendría 50 abajo, 49 arriba y 51 en medio.*

Este proceso de construcción de objetos mentales permite considerar dos reflexiones. Por un lado la dificultad que implicó el comprender los procesos cognitivos de aprendizaje en los alumnos; por otro la riqueza que trae consigo el analizar posterior de lo ocurrido en clase. Las experiencias ocurridas en este proceso de experimentación permitieron comprender la regla hasta el momento de hacer las transcripciones de la observación. Se reconoce que la imposibilidad de comprender la regla que el alumno planteó, condujo a limitar al estudiante a centrarse en el patrón que se había previsto al momento de la planificación de clase. Esta experiencia puede representar para futuros trabajos un factor a considerar al momento de la preparación del experimento: reconocer y prever la multiplicidad de abstracciones que el alumno puede generar en el análisis de la sucesión. Posteriormente el profesor encaminó a la siguiente fragmentación y análisis de la figura:

> *DI: si levanto estas dos líneas (separo los palillos superiores de la figura). Para la figura tres yo veo aquí tres triángulos, si lo ampliáramos a la figura 4…*
> *15H15sg: entonces puede ser tres (líneas) por el número de la figura más*
> *DI: tres por número de figura*
> *15H15sg: más*
> *DI: ¿más? La expresión tres por el número de la figura corresponde a sólo identificar los tres triángulos y para cada triángulo tres líneas más dos (señalando las líneas superiores que son los faltantes para conformar la estructura) pero, ¿siempre va a ser más dos?*
> *15H15sg: no*
> *09H14ts: más x*
> *DI: ¿más x?*
> *15H15sg: no, no puede ser más x, porque no va a ser un número fijo.*

Para la investigación, este comentario es importante pues refleja que para *09H14ts* es evidente que existe una relación de variabilidad entre el número de figura con el número de palillos en la parte superior y que el alumno identificó con la literal x. Lo que a este alumno le ha faltado asimilar es que, si tomamos el número de la figura con la variable x, la relación para las líneas superiores sería de $x - 1$.

> *DI: si no va a ser un número fijo, entonces ¿qué relación hay entre la figura tres con el dos?*
> *15H15sg: será el número de la figura menos uno ¿no?...que sería* $n - 1$
> *DI: ¿lo comprobamos con la figura 4? (en ese momento propuso inducir a la figura cuatro a fin de validar este patrón)*
> *15H15sg: sería 3 por 4…*
> *DI: le correspondería a tres por el número de figura, en este caso el número de figura es 4¿cuántos triángulos le corresponden?*
> *15H15sg: 4*
> *DI: ¿y de las línea sueltas o de arriba?*
> *15H15sg: le tendríamos que sumar, le sumaríamos el número de la figura menos uno*
> *DI: esta es una forma ¿habrá algún otro patrón distinto al que ya encontramos? (en este momento se fragmentó la figura según el primer acercamiento, encontrado por 30H17ts, a partir del cual él lo explica de la siguiente manera)*

30H17ts: aquí hay uno más: en medio siempre va a haber un palito más que la suma de los de arriba y abajo…que por ejemplo la figura 50 abajo va a tener 50 abajo en medio 51 y arriba 49…

Si bien 30H16ts ha detectado y verbalizado correctamente el patrón, en el sentido de afirmar que el número de líneas internas de la figura será uno más que la suma de las líneas externas, lo que el alumno no ha consolidado aún es extender esta regla a los términos distantes de los que él observa.

El segundo equipo con el cual se trabajó planteó una traducción de la regla $4n-1$ a la representación verbal. Se considera que esta expresión, si bien se es consciente que son expresiones equivalentes de las que surgieron de los diferentes patrones encontrados, la expresión 4n-1 está ligada directamente al resultado de la estrategia aritmética (DfMA). Al intentar generar discusión respecto del significado de los valores 4 y -1 dentro de la estructura, 10M14ts mencionó que el valor 4 representa la figura que falta en la sucesión, es decir es el término oculto. Este tipo de razonamientos y de respuesta son los mencionados como inducciones ingenuas (*näive induction)* expuesto este término por Radford (2006).

En el siguiente extracto se refleja el desarrollo de esta observación:

DI: ¿cuál fue el patrón que ustedes encontraron?
01H16sg: bueno primero nos basamos en lo que habíamos hecho en clases anteriores con la expresión $4n-1$, con eso decimos que multiplicamos 4 por el número de la sucesión en el que va: 2,3, cualquiera y saldría el resultado
DI: pero cómo podríamos reflejar ese: $4n-1$ aquí en la figura, es decir ¿qué representa el 4? Y ¿por qué tendríamos que restarle 1?,
10M14ts: 4 porque es la figura que falta y porque es el número de triángulos…
DI: ¿entonces es $4\,n$ porque es el número de la figura que falta?
10M14ts: sí y porque es el número de triángulos que falta; porque la figura 3 tiene 3 triángulos y la figura 5 tiene 5 triángulos, entonces la que falta es la figura 4
DI: ¿usted qué opina? A la figura 3 le corresponden 3 triángulos, a la 5 le corresponden 5, entonces como al figura que falta es el 4 por eso va el 4 en la expresión $4n-1$¿está de acuerdo?
01H16sg: bueno por eso va el 4 en la fórmula…porque es la figura que nos está preguntando

Esta inducción es ingenua pues es sólo una coincidencia que el valor resultante 4 en la expresión $4n - 1$ concuerda con el término oculto en la sucesión, bien hubiera sido el término 7 el término oculto. Sin embargo, se identificó que una parte de su abstracción sí es correcta, no obstante es parcial: el número de la figura es igual al número de triángulos del término.

Se presentó al grupo lo siguiente:

> *DI: si yo sumo, estamos en la figura tres, si yo sumo los tres palitos que están en la base de la figura 3 y los dos palitos de arriba ¿qué relación hay entre los palitos de base con los de arriba?*
> *10M14ts: que le falta uno*
> *DI: ¿a cuál siempre le va a faltar uno?*
> *01H16sg: a los de arriba*
> *DI: (refiriéndome a la abstracción de 30H17ts se les señaló) si yo sumo la base más los de arriba, 3+2= 5 y que los palitos que van adentro ¿qué relación van a tener con los externos?*

15H15sg que se agregó a la sesión de este grupo y señaló:

> *15H15sg: los palitos de en medio son el doble de los palitos de base*

En este punto de la discusión, y como 15H15sg formó parte del grupo que se ha descrito, me percato que en este lapso de tiempo los alumnos fueron capaces de abstraer otra relación válida: el número de líneas de en medio están en relación dos a uno con las líneas de base.

> *DI: 30H17ts mencionó otra cosa…si yo sumo los de afuera siempre va a ser uno menos que las líneas que van adentro…esta es en la figura 3…vamos ampliando, ¿cómo quedaría la figura 50? Siguiendo este patrón*
> *01H16sg: 51 adentro y 50 afuera*
> *10M14ts: 49 arriba*
> *15H15sg: no, tienes que sumar los dos de acá (señala los palillos externos con sus dedos medio e índice) son 90…sí se tienen que sumar éste de base más éste superior y te iba a dar uno menos que los de en medio…*
> *01H16sg: (con su cabeza baja y en voz baja repite la palabra 50)*

Esta abstracción, si bien reconocemos su validez, generó dificultades para asociar que la suma de las líneas externas dan como resultado una línea menos que las líneas de en medio;

es decir, para la figura 50 serían 50 líneas de base más 49 líneas superiores y que la suma de 50+49 es 99, entonces el número de líneas de en medio es 100, por consiguiente, la figura 50 estaría conformada por un total de 199 líneas. Analizado con la regla que acababa de comentar el estudiante 15H15sg, en relación a que el número de filas de en medio está en relación dos a uno con las de base, la figura se entendería de esta forma para el caso del término a_{50}: 50 líneas de base (n), más el doble de 50 $(2n)$ que son 100 para las líneas de en medio y una línea menos de 50 $(n-1)$ para las líneas superiores, dando un total de 199 líneas.

Al continuar con esta descripción del proceso abstracción e inducción de la regla, se observó que el alumno 15H15sg, quien se mostró interesado e implicado en la tarea agregó:

> *15H15sg: el número de la figura siempre va a ser abajo (entendiendo que la relación se establece entre el número de la figura con el número de líneas de base)*
> *DI: si en la base son 50, ¿cuántos irán en la parte de arriba?*
> *01H16sg: 49*
> *DI: y ¿en medio cuantos irán?*
> *10M14ts: se tiene que sumar 100, no (corrige) 50+49 y luego (reflexiona)*
> *01H16sg: porque siempre va a ir uno más adentro que afuera (señala la estructura de adentro y afuera con su mano)*
> *15H15sg: lo que nosotros encontramos es que a la base debemos sumarle la misma cantidad, bueno multiplicarlo por dos, por ejemplo en la figura 50, sería 50+50 y serían los palitos que van aquí (señala los palitos que van en la parte interna, o de en medio como se ha citado de forma indistinta en esta transcripción)*

Se han descrito entonces dos procesos de abstracción que parten del reconocimiento de las relaciones de variabilidad que guarda la estructura (líneas superiores, de base y de en medio) de la figura. A continuación se presenta otra forma de fragmentación que consideró la descomposición no sobre líneas externas, medias e internas, sino desde la formación de triángulos relacionados con el número de figura

> *DI: ¿qué número de figura es esta?*
> *10M14ts: la 3*
> *DI: si a la figura 3 le levanto estos palitos (superiores) cuántos triángulo observan?*
> *10M14ts: 3*
> *DI: entonces a la figura 3 cuántos triángulos le corresponden?*

Grupo: 3
DI: Entonces ¿qué relación observan entre el número de figura y esos dos palitos sueltos?
15H15ts: restarle uno
DI: el número de figura es igual a la base, y para saber el número de palitos superiores le resto uno al número de la figura. La figura 10 cuántos triángulos tiene
Grupo: 10
DI: Y ¿cuántos palitos arriba tiene?
Grupo: 9
DI: La figura 20 ¿Cuántos triángulos tendrá?
01H16sg: 20 abajo y 19 arriba
DI: la figura 1000?
01H16sg: 1000 abajo y 999 arriba
DI: ¿y la figura n? ¿Cuántos triángulos tendrá la figura n?
01H16sg: dependiendo el número de la sucesión…
DI: sí, pero la figura n cuántos triángulos tendrá…
15H15sg: x triángulos
DI: la figura x, ¿cuántos triángulos tendrá?
15H15sg: ¿3,2,4?
DI: muy bien, la figura 1 millón, ¿cuántos triángulos tendrá?
Grupo: 1 millón
DI: y cuántas líneas arriba tendrá?
15H15sg: 999,999
DI: yo lo diría más fácil, 1 millón menos…
Grupo: menos 1
DI: la figura m…cuántos triángulos tendrá?
15H15sg: tres triángulos…no, dos triángulos y nada más uno arriba
DI: pero bueno estás diciendo que la figura m es la figura dos, pero estamos tratando de explicar la figura m; la figura m, tiene m triángulos, la figura p tiene
15H15sg: p triángulos
DI: la figura q?
01H16sg: q triángulos y q-1 (refiriendo a la líneas superiores)

Ante la dificultad de reconocer una literal como el valor que representa el término general, fue necesario explicar al estudiante que a la figura n le corresponden n triángulos. Se pudo entonces observar que los estudiantes fueron capaces de dar cuenta de la estructura para el término $a_{1000000}$. Al hacer objetiva esta relación de n figura con n triángulos, los estudiantes pudieron razonar ya no sobre términos particulares, sino que lograron hacer cálculos y operar con letras. Esta capacidad para operar con literales es lo que denota el término de *analiticidad,* como aquel componente del pensamiento algebraico.

A continuación se presenta el análisis preliminar de los datos obtenidos en la sesión. Se expone las frecuencias observadas en relación al tipo de verbalización de la regla general, considerando las dos categorías de respuestas: visual y aritmética, en ellas se destacan los casos de respuestas completas e incompletas en la representación de la regla general.

5.4.3. Análisis preliminar.

La Tabla 32 recoge las estrategias de generalización mediante las cuales los estudiantes pudieron establecer la regla en la sucesión con término oculto.

Tabla 32

Estrategias de generalización en sucesión con término oculto

Término	Estrategia de generalización		
	Vi	DfMA	NR
a_n	22	2	6

Nota: Vi = visual; DfMA = diferencia multiplicativa con ajuste; NR = no respondió

Del total de alumnos que asistieron a la sesión, 22 de ellos recurrieron a la estrategia visual como recurso para establecer las relaciones estructurales en las figuras e inducir el patrón de crecimiento. Dos casos continuaron con el uso de razonamiento aritmético para establecer el valor de la regla y seis alumnos no respondieron la tarea.

En el contexto de la generalización aritmética DfMA, los alumnos encontraron que si bien no eran consecutivos los términos, entre el término a_3 y a_5 existía una diferencia de ocho líneas, por deducción, el valor de la diferencia entre ambos términos sería de 4. Este valor fue tomado como factor multiplicativo, generando la expresión 4_n, siendo n el lugar del término. el resultado de la multiplicación se ajustó al número total de líneas de cada figura o término; por ejemplo, para la figura tres se multiplicaron los valores $4 \times 3 = 12$, entonces, el ajuste consistió en restar 1 al resultado de la multiplicación anterior, dando como respuesta la expresión $a_n = 4_n - 1$.

Como resultado de la estrategia visual se establecieron dos tipos de abstracciones. La Tabla 33 muestra las categorías emergentes de análisis que representan aquellos razonamientos producto de la intervención didáctica junto con las frecuencias con las que los alumnos establecieron, total o parcialmente, el patrón de crecimiento.

Tabla 33

Abstracción visual de la regla general

	Abstracción visual del patrón en sucesión con término oculto			
	Patrón completo		Patrón incompleto	
Término	ARF	FRB	IARF	IFRB
a_n	3	12	2	5

Nota: ARF = Agrupada en relación a la figura; FRB = Fragmentada en Relación a la Base; IARF = Incompleta Agrupada en Relación a la Figura; IFRB = Incompleta Fragmentada en Relación a la Base

De los 15 estudiantes con una regla general completa mediante la visualización, doce desarrollaron una fragmentación de la figura en líneas (base, de en medio y superiores) e indujeron una relación entre el número de figura con el número de líneas de base (n), líneas superiores en relación $(n-1)$; y líneas de en medio en variación $(2n)$. Los tres casos restantes establecieron una fragmentación agrupada de la figura, en dicha abstracción se identificó una estructura con base en triángulos que están en relación al número de figura $(3n)$ y con líneas superiores que varían en relación $(n-1)$ con el número de figura.

Estos datos reflejan el avance respecto de las frecuencias de casos que han recurrido a la visualización como estrategia de abstracción e inducción de patrones. Se destaca la importancia que representó la manipulación de objetos, la cual permitió mejorar la habilidad de identificar y establecer relaciones entre los elementos. Como se mencionó en el apartado del desarrollo, en el trabajo se logró inducir otro patrón que aquí no fue registrado y que estaba dado en relación a que la suma de las líneas de base y superiores era una línea menos que el número de líneas de en medio.

En los siete casos de respuestas incompletas, se observó que cinco de estas siete respuestas partieron de la fragmentación de la figura en relación a la base y dos establecieron la relación de número de triángulos con la figura, pero en tales casos no se consideró las líneas superiores como parte de la estructura, por consiguiente, la regla obtenida resultó incompleta.

5.5. Quinta sesión

5.5.1. Planificación.

El trabajo en la quinta sesión consistió analizar una figura genérica de la sucesión. Se planteó como objetivo de instrucción que el alumno lograra establecer relaciones de variabilidad entre los elementos que conforman la figura, potenciando con ello la habilidad de inducir el término general de la sucesión con término genérico. La decisión de modificar el tipo de sucesión se fundamentó en el trabajo de Lanin, Barker y Townsend (2006) quienes afirman que las sucesiones no sucesivas promueven la habilidad de establecer relaciones y variabilidad, limitando el uso de estrategias recursivas o de tipo aritmético como estrategias para determinar la regla. El objetivo de investigación planteó valorar el impacto respecto del tipo de estrategia que los estudiantes emplearían al trabajar con una figura genérica de la sucesión.

Como patrón de esta figura se pensó establecer la relación de igualdad entre el número de cuadros "sombreados" que conforman el perímetro interno de la figura con el número de cuadros "grises" que representan el perímetro externo, más cuatro cuadros "grises" de las esquinas como valores constantes. El número de cuadros "grises" necesarios para cubrir un cuadrado de longitud n está representado por la regla: cuatro veces el valor de longitud del cuadrado interno más cuatro cuadros como valor constante. A esta regla se asocia la expresión simbólica $4n + 4$ (La figura se presentó en la Tabla 4). A los alumnos se les solicitó obtener los términos $a_6, a_{10}, a_{20}, a_{47}, a_{139}\ y\ a_n$ de la sucesión

Partiendo de los hallazgos del episodio anterior, en esta sesión se planteó como conjetura de trabajo que los estudiantes podría establecer la relación de variabilidad entre los elementos que estructuran la figura genérica, dado que habían expresado dicha habilidad de identificar un patrón de crecimiento

A diferencia de la sesión anterior, en esta no se recurrió a elementos manipulables, sino que se propuso que el estudiante lograra abstraer y establecer relaciones de covarianza en ausencia de la manipulación de materiales concretos. Como Trayectoria Hipotética de Aprendizaje se expresó que los participantes quienes habían mostrado la habilidad de establecer relaciones, ahora, con el análisis puramente visual, serían hábiles para abstraer e inducir el patrón de crecimiento de la figura.

5.5.2. Desarrollo.

La sesión inició con la presentación de la tarea y los objetivos propuestos. Se conformaron los equipos y se entregó la hoja de trabajo. Se optó por trabajar en el espacio del comedor escolar. Al igual que en la sesión anterior los estudiantes manifestaron la posibilidad de no participar y al contrario de la respuesta dada en la sesión anterior, en esta se les notificó que su participación era obligatoria. Este día faltaron siete estudiantes a clases y la participación fue de 23 estudiantes en la sesión.

Con el primer equipo de trabajo se hizo la lectura de la tarea y se apoyó al grupo a identificar los elementos involucrados: cuadros sombreados, grises. Se observó en este grupo la dificultad para establecer la relación y se decidió dejar que los estudiantes analizaran la figura y esperar a que ellos llegaran a la abstracción del patrón e inducir a los demás términos. Sobre la descripción en el desempeño de este grupo, se aborda a detalle en la parte del análisis preliminar de la sesión.

El siguiente grupo con quien se trabajó, mostró fluidez y eficacia en el manejo de la estrategia visual, lograron determinar con prestancia la relación entre los elementos de la figura y mediante la abstracción fueron capaces de construir una expresión simbólica que constituye la regla general y fueron capaces de obtener los valores de los términos.

El tercer equipo logró inducir la regla y expresarla en forma simbólica. Este grupo hizo un manejo pre estructural de la simbología, lo cual expresa una narrativa del proceso de visualización, aquí la expresión construida: $n(4) + 4$. En este equipo se observó también una tendencia hacia la analiticidad; esto es, la estrategia visual les permitió construir la expresión simbólica, sin embargo, en el cálculo de los términos ya no recurrieron a la visualización sino que optaron por hacer estimaciones aritméticas a partir de la expresión simbólica.

El equipo cuarto presentó una simbolización de la regla sin hacer ninguna anotación en sus hojas de trabajo. Al indagar acerca del razonamiento que les permitió construir la regla general el equipo comentó haber recurrido al tanteo. Los equipos quinto y sexto mostraron en común el haber planteado estrategias de tipo multiplicativo y proporcional y por consecuencia no lograron establecer el valor correcto de los términos ni tampoco la regla general. Con ellos se planteó de forma explícita la visualización. Se observó en las transcripciones de clase que posterior a la explicación del proceso de hacer objetiva la estructura, los alumnos lograron abstraer las relaciones y dar cuenta de la totalidad de los términos sin necesidad de recurrir a algún cálculo aritmético.

5.5.3. Análisis preliminar.

Se presentan las frecuencias de RC y RI para los términos pedidos en esta sesión, así como el tipo de estrategias usadas en la obtención de éstos y de la regla general. Estos datos fueron los obtenidos antes de la fase de intervención. La Tabla 34 expone los casos de RC y RI por término de la tarea.

Tabla 34

Frecuencias de respuesta correcta en tarea de figura genérica

Repuesta	Término					
	a_6	a_{10}	a_{20}	a_{47}	a_{139}	a_n
RC	11	10	10	7	2	10
RI	9	9	10	12	17	9
NR	2	3	2	3	3	3

Nota: RC = respuesta correcta; RI = respuesta incorrecta; NR = no respondió

Las frecuencias de RC fueron constantes para los términos $a_6, a_{10}\ y\ a_{20}$; disminuye a siete casos para a_{47}; para el término a_{139} sólo dos casos obtuvieron RC. No obstante la tendencia decreciente, diez alumnos lograron inducir a_n. Los casos de RI mostraron una tendencia creciente conforme mayor el término, se comenzó con frecuencias de entre nueve y diez para a_6, a_{10} y $a_{20,}$ incrementando a 12 para a_{47} y 17 casos para $a_{139.}$ Se encontró una frecuencia de nueve casos de RI para a_n.

A diferencia de las sesiones anteriores, las frecuencias de RI para los términos cercanos a_6y a_{10} fue mayor, esto hace inferir que los alumnos no recurrieron a la estrategia de conteo para obtener los términos cercanos y, para la obtención de estos términos fue preciso abstraer previamente la estructura del término analizado. Por otra parte, lo observado en RC hace suponer que quienes lograron identificar los elementos de la figura y sus relaciones lograron con éxito establecer la regla general y con base en ella obtener los términos $a_6, a_{10}\ y\ a_{20}$, sin embargo es preciso destacar que sólo dos casos lograron RC para el término a_{139}.

Entre los casos de RC para $a_{n,}$ la Tabla 35 expone las frecuencias respecto del tipo de estrategia que permitió a los participantes abstraer e inducir la regla general. El análisis de las respuestas evidenció un uso preponderante de la estrategia visual.

Tabla 35

Estrategias de generalización de la regla y modo de representación

	Estrategia			Representación de a_n	
Estudiante	Vi	Gr	DfMA	Ve	Si
10	7	3	3	3	9

Nota: ViGr = visualización; Gr = gráfica; DfMA = Diferencia multiplicativa con ajuste; Ve = verbalización; Si = simbólico

Las frecuencias señalan que el modo de actuación predominante fue la visualización (Vi); en tres casos esta estrategia fue acompañada de recursos gráficos como apoyo a la abstracción (Gr). En tres casos se construyó la regla utilizando los medios aritméticos de ajuste; al no haber diferencia entre términos los estudiantes estimaron n y lo multiplica por 4 y el producto lo ajustan al valor de salida, en este caso, 16.

Con respecto a los modos de representación de la regla, nueve de los diez estudiantes presentaron un patrón en forma simbólica; en tres casos se observó la verbalización del patrón de crecimiento. Se observó que dos casos presentaron tanto verbal como simbólicamente la regla general.

5.5.3.1. Intervención didáctica en la tarea de figura genérica.

El primer equipo estuvo conformado por tres estudiantes. Este grupo inició con el establecimiento de una estrategia multiplicativa y cuyos factores fueron el número de cuadros sombreadas (3) por el total de cuadros grises del perímetro (5). Esta abstracción, si bien de base multiplicativa, pudo haber progresado y mediante la visualización haber abstraído la siguiente relación: dos veces el número de cuadros más dos (expresa las líneas superior en inferior de la figura), más dos veces el número de cuadros grises (con esta relación se expresa las columnas de los costados de la figura). De forma simbólica quedaría representada la siguiente estructura:

$$2 \quad (n+2) \quad + \quad 2n$$

Parte superior e inferior + costados de la figura

El estudiante15H15sg mostró incertidumbre al reconocer los cuadrados según fueran grises y sombreados. La observación revela que al ser las hojas de trabajo impresas en formato blanco y negro las tonalidades de grises dificultaron al alumno definir de forma adecuada los elementos en cuestión. Esto hace suponer que el color representar un factor que favorece la identificación visual de elementos. Como se observó en la sesión anterior, el manejo de lo concreto representó un recurso valioso en la abstracción de la regla.

A este grupo se le proporcionaron pistas que orientaran su estrategia, una de ellas fue señalar el tamaño de la figura y con ello se aportó información acerca del número de la figura.

> *DI: esta figura representa un piso de tamaño tres, los azulejos grises son los que rodean a los que están en el centro del piso. Ampliemos esta figura, ¿cuántos azulejos grises vamos a ocupar para que en lugar de ser tres sean seis en el centro? ¿Crece o decrece la figura?*
> *15H15sg: crece*
> *DI: entonces ¿si en el centro crece, vamos a necesitar más o menos en el perímetro?*
> *15H15sg: más*
> *DI: la idea es conocer cuántos azulejos sombreados se necesitan cuando el centro es de seis y cuántos cuadros se necesitan cuando en el centro hay diez…*

En este momento se observó que el alumno 01H16sg hizo una anotación en su hoja de respuesta y subrayó los tres cuadros sombreados e intentó relacionarlo con los cinco cuadros grises que representan la variable dependiente. Pero, su razonamiento se enfocó hacia la multiplicación y expresó en voz baja “cinco por tres”. Continúa la transcripción.

*DI: ¿cinco por tres? ¿Dónde obtienes el cinco? (los estudiantes rayan la línea horizontal que mide cinco unidades y la línea de uno de los lados del centro que mide tres) ¿por qué por tres? (no hay respuesta) el estudiante hace las siguientes operaciones aritméticas: 5*3=15-6=9. ¿Qué relación encuentran entre el 15-6?*
01H16sg: para que me den los cuadros que van adentro (esto indica que el estudiante se le dificultó comprender el contexto de la actividad. El estudiante calculó el número de cuadros que expresan el área del cuadrado del centro y no se centró en relacionar el perímetro de la figura que son los elementos que están involucrados en el problema)

01H16sg planteó que los valores buscados son el área de la figura interna, la cual obedece a una sucesión cuadrática. De ahí la dificultad que expresó este estudiante Esta observación evidencia que el tipo y presentación de una figura puede generar confusión y errores en la comprensión del problema.

DI: entonces lo que vamos a buscar ¿son los cuadros que van en el centro o los del perímetro?
10M14ts: son los de afuera
DI: buscamos la relación de los que están adentro con los que están afuera
01H16sg: yo pienso que buscando los que están adentro más o menos puedo darme una idea porque da lo mismo y sólo le agregas uno aquí para que te dé el contorno.

Se dejó a este grupo explorando la figura e intentando hacer objetiva la relación que les permitiera obtener la estructura y la regla general.

En el segundo equipo de trabajo participaron dos alumnos y lograron abstraer e inducir el patrón de la figura. Al indagar acerca del razonamiento que los condujo a esta solución, 06M15sg expone:

06M15sg: n digamos que es el número de cuadritos (señala que n puede ser el cualquier término) y ya nada más le sumamos los cuadritos de las esquinas.
DI: ¿n representa esto? (La alumna señala con seguridad que n representa la línea conformada por los cuadros sombreados) y ¿solamente representa esta línea o todos los cuadros del área?
06M15sg: no, sólo la línea (subraya los tres cuadros que conforman la longitud del cuadrado interno)
DI: ¿por qué cuatro?

06M15sg: porque digamos que estoy tomando los tres de aquí, los tres de aquí, los tres de cada lado
DI: ¿pero este cuatro qué significa? (refiriendo el valor constante en la expresión)
06M15sg: los cuatro cuadritos que faltan para completar la figura.
DI: y para una figura con base 10 ¿cuántos cuadros se ocuparán?
06M15sg: el número de cuadritos que es diez, por cuatro y luego más cuatro
DI: ¿y para una longitud de 20?
06M15sg: pues 84
DI: esta regla la podemos transformar en forma verbal
06M15sg: pues sería el número de la longitud por cuatro más cuatro

El tipo de razonamiento desarrollado por esta alumna permitió caracterizar la habilidad visual para abstraer un patrón; ella logró identificar los elementos involucrados y establecer la relación de variabilidad y constantes entre ellos. Además, se aprecia que la estrategia visual permitió, sin necesidad de basarse en la expresión simbólica, obtener el valor de términos lejanos de forma eficiente. Se comprende que la alumna operó también otro tipo de habilidades, como la multiplicativa, pero este razonamiento de naturaleza aritmética se encuentra respaldado por el establecimiento previo de un patrón de tipo pensamiento algebraico que denota las relaciones descritas en la estructura.

El tercer equipo estuvo integrado por seis estudiantes y derivaron la expresión $n(4) + 4$. Este grupo presentó una singularidad respecto del equipo anterior, ellos presentaron una trayectoria que partió de lo visual como base del razonamiento pero se apoyaron en algoritmos numéricos para llegar a la expresión de generalidad.

DI: Hola ¿qué han encontrado en esta figura?
08M15sg: el cuatro son los lados
DI: ¿qué significa n?
09H14ts: el número de….
21H14sg: la longitud de n
DI: entiendo que son cuatro lados, pero ¿por qué más cuatro?

Esta pregunta tuvo como objetivo potenciar la habilidad argumentativa en relación al análisis de la estructura en la figura. Si bien se comprendió que n representa el número de la longitud de la variable independiente y son cuatro los lados de la figura, se buscó el significado de +4 en el contexto de la figura, que para el caso del equipo anterior quedó clara la relación entre los elementos que conforman la figura y el valor 4 como constante que representa las esquinas de la figura.

> *19M15sg: por ejemplo en este caso son tres por cuatro (señala los cuatro lados del perímetro) más cuatro que son de aquí (señalando las esquinas)*
> *09H14ts:* $n(4)\ +4$ *es como un patrón que se ocupa para que dé el resultado*
> *19M15sg: es que si multiplicamos esto por esto sale un número pero necesitamos sumarle otro para que nos dé el que necesitemos, entonces buscamos un número que sumando nos dé el que en verdad es.*
> *DI: ¿la estrategia fue multiplicar tres que es el número del caso que analizamos por cuatro igual a 12 y sólo ajustamos al número de cuadros que están alrededor que es 16?*
> *19M15sg: sí que son cuatro más*

Se encontró en este grupo una combinación entre estrategias de tipo visual y numérico; su razonamiento de dar sentido a los valores dentro de la figura fue importante para los objetivos de la investigación pues permitió reconocer que la visualización se ha constituido como un medio para abstraer patrones, aunque persiste la idea de la necesidad de ajustar la expresión para que dé un resultado y queda fija la estrategia de DfMA, aun en figuras que teóricamente limitarían este tipo de estrategia. De tal forma, se observó que los estudiantes transitaron de un pensamiento estructural a uno de tipo aritmético donde el foco de la estrategia estuvo centrado en el análisis visual de la figura, pero, finalmente optaron por establecer y operar sobre valores numéricos.

El equipo siguiente estuvo conformado sólo por dos estudiantes. Este grupo presentó en su hoja de respuesta la expresión $n(4) + 4$. Al indagar acerca de la estrategia utilizada para llegar a la expresión de la regla, se observó:

> *DI: ¿Cómo llegaron Ustedes a esta expresión* $n(4) + 4$*?*
> *29H15sg: viendo según la cantidad de azulejos de los que tengan alrededor*
> *DI: y esta figura ¿cuántos tiene alrededor?*
> *29H15sg: esta tiene 16*
> *DI:¿de dónde surge entonces la expresión* $n(4)$*?*
> *29H15sg: busqué un número que multiplicado por tres diera 16, pero, como no encontré, puse 4 y después le sumé lo que faltara y le puse cuatro*
> *DI: pero ¿por qué más cuatro? (La pregunta intentó generar reflexión en torno a la estructura y no centrarse en el carácter aritmético del problema)*

> *29H15sg: porque con cinco se pasa, pudiera ser n por 5 más uno pero ya con la de seis ya no la haría…*

Este alumno consideró el número tres como el valor del término, lo cual indica que reconoce este número como variable independiente y un valor sobre el cual los demás valores están en referencia. El número tres, como se ha señalado, representa el valor de cuadros sombreados y de los que dependen el número de cuadros grises. Este alumno centró su razonamiento hacia el cálculo aritmético con ajuste.

La respuesta por parte de este grupo señala que exploraron también con la expresión $5n + 1$, que en el caso del término 3 se ajusta al valor de salida, pero no se ajustó al calcular los demás términos; por consiguiente este grupo presentó $n(4) + 4$ como la expresión que corresponde a la generalización de la figura que se ha presentado. A diferencia de los dos equipos anteriores, se observó en este grupo un predominio hacia lo aritmético y la figura representó una condición de ajuste a partir del valor numérico de la variable dependiente y no una posibilidad a través de la cual se haya podido establecer la regla general.

Posteriormente, el investigador presentó al grupo la estrategia visual como heurístico para encontrar la regla general. Se les presentó la siguiente relación entre los elementos.

> *DI: pienso que el cuatro representa los cuatro lados que forman la figura, ¿qué relación encontramos entre este número de la figura (centro) con este (perímetro)*
> *29H15sg: que son iguales*
> *DI: entonces una figura de longitud tres va a tener tres cuadros. ¿Uno de longitud seis?*
> *29H15sg: seis*
> *DI: sí, sería 6+6+6+6; pero ¿cuáles cuadros nos están faltando?*
> *29H15sg: los de las esquinas*
> *DI: ¿cuántos cuadros hay en las esquinas?*
> *29H15sg: cuatro*
> *DI: Por eso aquí aparece el cuatro en la expresión $n(4) + 4$ que son los cuatro cuadros de las esquinas. Una figura de longitud seis ¿cuántos cuadros va a tener?*
> *29H15sg: 28*

DI: 6 por cada lado más 4 de las esquinas.

Este tipo de actuaciones en la enseñanza representa una posibilidad de hacer objetiva la estructura de la figura, promoviendo en los estudiantes la habilidad de relacionar y hacer generalizaciones algebraicas a partir de inducir propiedades de casos particulares.

El siguiente equipo de trabajo estuvo conformado por tres estudiantes. Este grupo estableció una estrategia de tipo proporcional para construir la regla. Las respuestas presentadas para el término a_6 fue de 10 cuadros grises, para a_{10} le asignaron el valor 20 como respuesta, para a_{20} calcularon el valor 40; para el resto de los términos no presentaron solución. Se indagó sobre el razonamiento que les permitió llegar a los resultados.

DI: ¿cómo llegaron a las repuestas de los términos?
13M15sg: si aquí son tres (a_3) entonces cuando sean seis (a_6) va a ser el doble

Ante la inadecuación de la estrategia aplicada, la decisión del investigador fue presentar de forma visual la relación entre los elementos que se plantean en la abstracción e inducción de la generalización algebraica.

DI: (basando la explicación en la señalización deíctica) ¿qué relación hay entre estos cuadros sombreados con estos cuadros grises? (no hubo respuesta inmediata por los estudiantes. Se planteó la siguiente pregunta)¿tres es igual tres?
13M15sg: sí
DI: ubiquen los otros cuadros que conforman el perímetro. Ya consideramos estos tres cuadros, tres cuadros, tres cuadros y tres cuadros, ¿cuáles nos faltan?
13M15sg: los de las esquinas
DI: indíquelos (con prestancia la alumna señaló los cuadros constantes). Entonces la figura tres tiene 3,3,3,3 (señalo los lados del perímetro),¿cuántos cuadros llevamos hasta ahorita?
13M15sg: 12
DI: ¿cuántos nos faltan?
13M15sg: cuatro
DI: entonces la figura tres tiene 16 cuadros de perímetro…ahora consideremos la figura seis; si la figura tres tenía tres cuadros, la figura seis cuántos cuadros grises tendrá como perímetro

*C*on apoyo de las señales deícticas y del ritmo, el investigador-docente junto con el grupo identificó el número de cuadros para el término a_6. Con estas señalizaciones, las estudiantes veían ya no el número de cuadros sino que cada línea estaba representado el valor del término buscado, lo importante no era el valor numérico, sino la estructura representada y las relaciones abstraídas entre ellos. Así y sin dificultad aparente los alumnos de este equipo lograron inducir el número de cuadros para a_6.

> *DI: 6+6+6+6, entonces 6 por 4*
> *07M15sg: 24*
> *DI: pero cuáles nos faltan*
> *13M15sg: los cuatro, no, pero ya van a ser más*
> *DI: ¿estos cambian?, ¿los de las esquinas cambian?*
> *07M15sg: no.*
> *DI: si la figura crece cuáles lados son los que crecen (en el video la alumna señaló con su lápiz los lados del perímetro asociados al lado de la figura)*
> *DI: ¿las esquinas crecen?*
> *13M15sg: no*
> *DI: entonces si estamos en la figura seis son: 6, 12, 18, 24, 25, 26, 26 28…los dejo para que respondan las demás preguntas…*

El último equipo con quien se trabajó fue el conformado por 4 cuatro participantes. Este grupo presentó estrategias de tipo multiplicativo donde se tomó el valor 16 como valor unitario y éste fue usado para el cálculo de los término, pero dentro de la misma actividad recurrieron a la proporcionalidad para el cálculo de los términos a_{10} y a_{20}. La estrategia usada por el investigador fue básicamente igual al mostrado con el grupo anterior. Se partió de hacer objetiva la relación entre los lados sombreados y establecer la igualdad con el lado de cuadros grises.

Las estrategia de visualización fomentada en esta sesión, como modo de hacer generalizaciones algebraicas resultó ser un medio potente en el proceso de abstraer e inducir un patrón; que el rango de razonamiento es generalizable una vez abstraído, inducido y validado el patrón. Referido a la enseñanza de estas habilidades, ésta requiere familiarizar al estudiante con este tipo de actividades y con orientación a la posibilidad de establecer relaciones generales, delimitando la recursividad y el uso de razonamientos de tipo multiplicativo o proporcional.

5.6. Sexta sesión

5.6.1. Planificación.

Para la sexta sesión se presentaron dos tareas que evaluaron las habilidades desarrolladas por los estudiantes en esta fase de intervención (Véase Tabla 4). La conjetura fue que los estudiantes lograrían establecer relaciones generales de variabilidad entre los elementos que constituyen una figura dentro de una sucesión. El objetivo de investigación fue valorar el impacto de la estrategia visual ante la tarea de hacer generalizaciones algebraicas en el contexto de sucesiones figurales.

A diferencia de las sesiones anteriores, en esta última se resolvieron las tareas en forma grupal, procurando la intervención de todos los estudiantes. El interés fue exponer a los 22 participantes ante la tarea de abstraer e inducir los elementos de las figuras y establecer relaciones generales a partir de la estrategia de visualización.

5.6.2. Desarrollo.

La primera tarea fue retomada de la sesión dos de esta fase de intervención. Se pidió a los estudiantes copiar las figuras proyectadas en el pizarrón y verbalizar las relaciones generales. En la figura analizada, la alumna expuso

> *08M15sg: podría ser el número de la figura más dos porque por ejemplo en la figura uno son tres abajo y entonces sería la figura uno más dos abajo*.

La estudiante 08M15sg mencionó una relación en la figura que no fue trabajada en la segunda ni en la tercera sesión donde se planteó el formato en color como estrategia de intervención. En este momento se estableció una relación por líneas (inferior y superior) en donde el número de la figura estuvo asociada a la expresión $n + 2$, que corresponde a la línea inferior de la figura. Al expresar la frase, el número de *la figura* más dos, se infiere que su razonamiento expresa la relación, no delimitada a un término particular, sino que refiere al término n de la sucesión. No obstante, se identificó que su respuesta fue incompleta pues sólo había abstraído la relación para la línea de base, faltaría entonces identificar la relación con la línea superior y finalmente establecer la regla que exprese la totalidad de las relaciones entre los elementos, la estructura. La decisión del investigador-docente fue centrar la atención de los estudiantes hacia esta primera relación expuesta por la estudiante, pero identificar que sólo se obtuvo sólo una parte del patrón.

DI: ¿qué relación encuentras entre esta base con el número de la figura?
15H15sg: más dos
DI: ¿qué relación encuentran entre el número de la figura con esta línea?
02H15ts: que uno más dos nos da la base

El estudiante 02H15ts recurrió a la observación de un término particular. Se intervino a fin de retomar la idea de generalización ya expuesto por la estudiante 08M15sg

DI: número de la figura más dos nos da la base, ¿aplica esta regla también para estas otras figuras (refiriendo a los términos dos y tres de la sucesión)?
Grupo: sí
DI: muy bien ya obtuvimos la primera parte de este patrón y ¿para la línea de arriba?
08M15sg: ¿tiene que estar relacionado con el número de la figura?
DI: sí porque, con $n + 2$, *encontramos la base pero falta la línea de arriba*
08M15sg: entonces sería número de la figura más uno
DI: entonces, si complemento las dos oraciones (esta indicación es estructurar la totalidad de la regla mediante la verbalización)
15H15sg: los puntos de abajo menos uno da el resultado de los de arriba
DI: esa es otra forma. Entonces número de la figura más dos para la base
28H15sg: y número de la figura más uno para la de arriba y una forma general para toda la figura sería 2n+3
DI: bien ahora escriban en su cuaderno ese patrón

En este momento de la clase se intentó hacer la traducción de la verbalización lograda de la regla a su forma simbólica y la obtención de términos distantes a los observados a partir de la regla mediante visualización.

DI: ¿con qué expresión ubico la línea de base en relación a la figura?
Grupo: $n + 2$
15H15sg: n más dos menos dos para la de arriba
DI: ¿para la línea de arriba?
15H15sg: no, número de la base menos uno
DI: a ver estoy tratando de entenderlo
15H15sg: para la línea de arriba es el número de bolitas de la base menos uno
01H16sg y 10M14ts: $n + 2 - 1$

DI: bien, esta es la base$(n + 2)$ *y para la línea superior*$(n + 2 - 1)$.

Se observa que los estudiantes lograron establecer una regla general a partir de analizar e identificar los elementos a partir de la visualización. Merece destacar el hecho de que en esta construcción los números cumplen una función de establecer relaciones y cambia su función respecto de la forma de generalización aritmética en donde éstos son utilizados como referentes posicionales para generar una respuesta numérica de salida, pero desarticulados del contexto del análisis de la figura. Se aprecia que en este proceso de abstracción-inducción requiere de un trabajo cognitivo complejo el cual demanda familiaridad por parte del estudiante con este tipo de tareas.

El trabajo con la segunda sucesión se centró en analizar e identificar una estructura que permitiera establecer una regla que determinara el crecimiento de la sucesión. Se solicitó a los alumnos la lectura de las indicaciones y relacionar el número de la figura con alguna estructura que los estudiantes lograran abstraer.

Al no presentar respuesta entre los estudiantes, se indicó que reflexionaran sobre las siguientes ideas: ¿Conforme la figura crece aumenta el número de cerillos?, ¿cuál es la estructura que permanece igual en cada una de las figuras aunque éstas sigan creciendo? ¿Qué parte de la figura (estructura) cambia al aumentar el número de figura?
Al orientar la observación, la estudiante 20M15sg identificó una estructura constante dentro de la figura que ella nombró *el triángulo*. Las preguntas estuvieron en función de poder asociar esta parte invariable con el concepto de valor constante.

DI: A este valor que no cambia ¿se le conoce como variable o constante?
15h15sg: es una constante
DI: si separo la parte constante ¿qué relación encuentro entre el número de la figura con…?(se interrumpe la pregunta)
20M15sg: que los cuadrados son iguales al número de la figura
DI: que el número de cuadros se relaciona con el número de la figura, ¿qué más observan?
15H15sg: pero si se quitan los triángulos no van a ser cuadros
20M15sg: es que no se quitan los triángulos, nada más se quitan dos (señalando los cerillos de punta de la figura)

En esta parte de la clase resulta importante mencionar el diálogo que se estableció entre los estudiantes pues fue a partir de lo que ellos observaron que se lograron organizar las ideas y comunicarlas al compañero y al grupo en general, además de desarrollar la capacidad de argumentar sus razonamientos. La observación que hace 15H15sg es importante porque, efectivamente, al separar los valores constantes, aquel elemento que se encuentra como valores de cambio son tres cerillos que forman lo que más adelante se denominaría como una estructura de *canasta,* las cuales estaban en relación al número de la figura. De esta forma, el término a_1 está conformado por una canasta y un triángulo; la figura dos serían dos canastas y un triángulo y así sucesivamente.

Se estableció a continuación un conflicto al momento de discernir sobre el número de cerillos necesarios si la lógica fuera tener dos cerillos como valores constantes.

> *15H15sg: porque si le quita el triángulo ya no va a ser cuadros va a ser medio cuadrado…*
> *DI: ¿la constante van a ser sólo dos palillos?, entonces ¿cuantos palillos se ocupan para formar el primer cuadro?*
> *15H15sg: cuatro*
> *DI: 10M14ts ¿para formar el segundo cuadro se van a ocupar 8 palillos?*
> *24H15sg: sí*
> *DI: ¿los contamos?*
> *24H15sg: no se ocupan siete*
> *DI: se ocupan siete…entonces quiere decir que para formar el primer cuadro se ocupan cuatro y para el segundo siete…no se ocupan ocho*
> *15H15sg: pero ¿por qué cambia?*

Se encontró que para la totalidad del grupo se dificultó establecer de forma visual la estructura de la figura: los estudiantes duplicaron las cantidades. Lo anterior se puede observar en la respuesta de 10M14ts, quien de inmediato recayó en la idea de, si para el primer cuadro se requieren cuatro cerillos para el segundo cuadro se necesitarían el doble, o bien, sumarle otros cuatro lo cual nos situaría en un contexto de recursividad. Por eso la importancia de identificar una estructura en la figura, pues ésta permite hacer de forma organizada el manejo analítico de los elementos y a partir de las relaciones abstraídas inferir la regla a los demás términos. La labor del investigador-docente fue reencauzar el análisis de la figura a partir de fragmentar y encontrar subestructuras (canastas y triángulo) que den coherencia a la figura.

DI: regresamos, si retiro los tres constantes
20M15sg: la fórmula sería 3n+3

La estudiante 20M15sg, de forma contundente expresó esta fórmula que es correcta para la sucesión; sin embargo, el interés radicó en argumentar la regla en relación a la figura, hacerla objetiva en y a partir de la expresión dada.

DI: A la figura uno le corresponde tres palillos, ¿cuántos palillos a la figura 2?
E (no identificable en el audio): seis
DI: a la figura 3
E: 9 palillos
DI: entonces, ¿al número de la figura cuántos palillos le corresponden?
20M15sg: tres
09H14ts: depende
DI: ¿de qué?
09H14ts: del número de la figura

El participante 09H14ts mostró habilidad para encontrar expresiones de forma aritmética, en cambio, se observó que le había sido complicado establecer la lógica de que por cada figura están asociados tres cerillos.

DI: depende del número de la figura ¿al número de la figura lo vamos a multiplicar por cuántos?
02H15ts: por tres
DI: entonces, ¿cuántos cerillos voy a asociar por el número de la figura?
02H15ts: tres
DI: estamos de acuerdo, relaciono el número de figura por tres cerillos, sin contar la punta de la figura. Para la figura 5 cuantos cerillos le corresponden
28H15sg: 5 por 3…quince
02H15ts: 15 más 3…18
09H14ts: entonces es "n por el número de la figura más tres"
DI: ¿n por número de figura?
20M15sg: no, es 3n más tres
DI: es 3n más 3; al número de la figura lo multiplico por tres más tres…el patrón resulta de asociar el número de la figura con tres cerillos, pero ese patrón me dice hasta aquí, para completar tengo que agregar tres cerillos que son constantes ¿cuál es la regla general?
20M15sg: 3n+3

Una vez establecida la generalización algebraica de forma visual, se hizo la inducción de la regla para los términos distantes a los observados, reconociendo para cada término la validez de la expresión.

DI: 14M15sg para la figura 60
14M15sg: no sé no la anoté

El alumno 15H15sg desde el inicio de la intervención se mostró participativo y a pesar de observar dificultades en la construcción de patrones, evidenció avance en la habilidad de visualizar e ir consolidando su capacidad de organizar sus ideas a partir de observar los elementos puestos en juego en una figura. 15H15sg contesta de forma correcta

15H15sg: es 183
DI: ¿la figura 1000?
22H15ts: 3003
PI: 17H15ts: ¿y la figura n?
17H15ts: 3n+3

Con esta respuesta para el término general dada por 17H15ts, se encontró que los estudiantes fueron capaces de establecer la noción de n para referir cualquier término de la sucesión y la capacidad analítica derivada de establecer cálculos a partir de las relaciones establecida entre los elementos de la figura. Lo anterior se afirma a partir de que las respuestas para los términos de la sucesión fueron dadas sin necesidad de recurrir a algoritmos aritméticos. Por otra parte, los estudiantes mostraron la habilidad ya desarrollada en cursos anteriores sobre el manejo del simbolismo algebraico, aunque también se observaron dificultades en la traducción entre los sistemas de representación matemática, particularmente el manejo entre lo verbal y lo simbólico.

5.6.3. Análisis preliminar.

A continuación se analizan los resultados de las frecuencias respecto de la habilidad, o no, de establecer la regla general mediante la estrategia de visualización para cada una de las sucesiones abordadas en esta sesión; se detallan también la habilidad de construir reglas verbales o simbólicas como medio de expresar la regla general (ver Tabla 36).

Tabla 36

Frecuencias de visualización y representación de la regla general por tarea

Problema	Visualización completa	Visualización incompleta	Simbolización completa	Simbolización incompleta	Verbalización Completa	Verbalización Incompleta
Primera tarea	19	1	15	0	11	1
Segunda tarea	4	16	18	0	4	16

Los datos mostrados en la tabla exponen que 19 estudiantes lograron establecer un patrón en la primera tarea utilizaron la estrategia visual. Un caso presentó una regla incompleta en donde se estableció sólo una parte de la estructura. Por el modo de representación de la regla general, 15 expresaron el término general haciendo uso del simbolismo algebraico y 11 recurrieron a la verbalización. Se observó que en esta tarea que cinco alumnos hicieron uso correcto de ambas formas de representación (simbólica y verbal) de la regla general.

Los datos sugieren que los alumnos, al haber trabajado con esta tarea tanto en la fase de diagnóstico y en una de las sesiones de intervención, lograron un mayor dominio en la abstracción e inducción de la regla general y con ellos fueron capaces de establecer una generalización algebraica. Para sustentar esta afirmación sirva recordar que en la fase de diagnóstico (*cfr*. Tabla 6) se presentaron 10 casos de RC en la obtención de la regla general, siendo la estrategia de tipo aritmético el modo de actuación con mayor recurrencia. En contraste, en esta sesión de cierre 19 estudiantes lograron la inducción correcta del patrón mediante la estrategia visual. El comparativo entre las frecuencias de RC y los modos de actuación evidencian un mejor desempeño en las frecuencias al obtener la regla general; pero además, se logró demostrar que el tipo de estrategia se modificó, de un razonamiento de tipo aritmético a la visualización como modo de actuación al obtener la regla.

Para el caso de la segunda tarea se observó que cuatro alumnos establecieron de forma completa la regla general mediante la estrategia de visualización y el resto de los participantes lograron establecer sólo parte de las relaciones de la estructura. Se resaltan los 18 alumnos que expresaron la regla general en su representación simbólica. Cabe destacar también la asociación entre visualización completa con la construcción completa de la regla verbal, es decir, el estudiante que no logró establecer una abstracción e inducir las relaciones generales entre los elementos de la figura, presentó una regla verbal parcial y adoptaron la estrategia DfMA para construir la regla simbólica.

En dos casos se observó que los estudiantes expresaron la regla general simbólica, sin embargo no se encontró en sus producciones escritas evidencia de haber establecido algún tipo de recurso visual para inducir la expresión general del término. En los cuatro casos de quienes visualizaron la estructura general de la figura y elaboraron una generalización algebraica, éstos recurrieron tanto a la verbalización como al simbolismo para expresar la regla general. Lo anterior sugiere que los estudiantes, quienes lograron desarrollar la habilidad de analizar, abstraer, inducir y sintetizar el patrón en la sucesión, fueron capaces de usar ambas formas representación de la regla: verbal y simbólico.

Las frecuencias de RC en la obtención de la regla advierten sobre la necesidad de un tipo de enseñanza que promueva la habilidad de abstraer e inducir relaciones en las estructuras mediante la visualización y cuyo logro requiere de tiempos prolongados de trabajo. Como se advirtió en la primera tarea, los estudiantes lograron mayores frecuencias de RC entre la fase de diagnóstico y esta sesión. La tarea fue analizada en tres momentos y el resultado fue que los estudiantes tuvieron mayor habilidad al abstraer relaciones y el patrón de la sucesión. Se infiere entonces la necesidad de una mayor exposición por parte de los alumnos ante este tipo de tareas y que, tal como se indicó en la propuesta de *early algebra,* el estudiante debería tener mayor familiaridad con el enfoque de elaborar generalizaciones algebraicas. En la Tabla 37 se muestra cada uno de los desempeños de los participantes en estas dos tareas.

Tabla 37

Trayectoria del desempeño por estudiantes en tarea de visualización

	Primera tarea				Segunda tarea			
Estudiante	Vi	Simb	VbC	VbI	Vi	Simb	VbC	VbI
01H16sg	*		*					*
02H15ts	*	*	*			*		*
04H15sg		*				*		
05H14sg	*		*					*
07M15sg	*	*						*
08M15sg	*	*	*			*		*
09H14ts	*		*			*		*
11M17sg	*	*				*		*
13M15sg		*				*		*
14M15sg	*		*			*		*
15H15sg			*	*		*		*
17M15ts	*	*	*		*	*	*	
18M15sg	*	*				*		*
19M15sg	*	*	*		*	*	*	
20M15sg	*	*	*		*	*	*	
21H14sg	*		*					*
22H15ts	*	*				*		*
23M15ts	*		*			*		
24H15sg	*	*				*		*
25M15sg	*	*				*		*
26M15sg	*	*			*	*	*	
27M14ts	*	*				*		*

Nota: Vi = visualización, Simb = simbolización, VbC = verbalización completa, VbI = verbalización incompleta

De la tabla se destaca la estrecha relación entre la estrategia de visualización con la habilidad de establecer reglas generales de modo verbal y simbólico. Se encontró que 57% de los alumnos participantes que identificaron el patrón mediante la estrategia visual, éstos lograron verbaliza correctamente la regla; en tanto, 78% establecieron la regla simbólica a partir de la estrategia visual. Este comportamiento se incrementó en la segunda tarea, los cuatro estudiantes que establecieron visualmente construir la totalidad de las relaciones, éstos lograron verbalizar la regla general. Por otra parte, los casos de alumnos que establecieron una regla verbal incompleta y construyeron una regla simbólica, supone en ellos el haber establecido razonamientos de tipo aritmético DfMA.

5.7. Sesión de entrevistas

5.7.1. Planificación.

En esta sesión se entrevistó a dos participantes. Se planteó como objetivo de investigación caracterizar el proceso que los entrevistados siguieron para abstraer las relaciones entre los elementos del término e inducir la regla general, entendiendo con ello la habilidad para establecer generalizaciones algebraicas.

Como criterio de selección, se consideró trabajar con un alumno cuyo desempeño haya mostrado dificultades en la fase de diagnóstico pero que haya evidenciado avances en la fase de intervención didáctica respecto de la obtención de la regla general. Igualmente, se consideró entrevistar a un alumno con alto desempeño en la fase diagnóstico y de intervención.

Se determinó un período de 20 minutos para la realización de la entrevista, misma que fue video grabada y transcrita a efectos del análisis y presentación de los resultados. Las entrevistas tuvieron lugar en el área de comedores de la institución y en el aula de cómputo. Las grabaciones se realizaron con apoyo de una persona externa a la investigación.

5.7.2. Desarrollo.

Se solicitó a los estudiantes su autorización para grabar la entrevista. Al presentar la sucesión de figuras se les requirió que observaran e identificaran aquellos elementos constantes y variables en las figuras, posteriormente, debían determinar las relaciones generales para cada una de los términos. El desarrollo de la entrevista partió sin un guión previo, pero consideró como eje de entrevista valorar el impacto de la estrategia visual, abstraer e inducir las relaciones entre los elementos de la figura y sintetizar dichas relaciones en una regla verbal.

5.7.3. Análisis preliminar.

La alumna 07M15sg mostró en la fase de diagnóstico habilidades visuales para generalizar como el desarrollo de razonamientos de tipo aritmético, mientras que en la tercera sesión no logró determinar el valor del término a_{1320}. La modificación visual propuesta en la segunda sesión no generó un cambio en su modo de actuación y continuó realizando operaciones aritméticas al momento de establecer la regla general, en consecuencia su verbalización se centró en transformar la expresión simbólica al tipo verbal. En la tercera sesión la estudiante se centró en encontrar el valor mediante la estrategia DfMA. Para la cuarta y quinta sesión la alumna no presentó trabajo. En la sexta sesión la alumna desarrolló respuestas de tipo visual para la primera tarea y para la segunda no logró obtener la expresión de la regla general.

Al presentar la tarea, se solicitó centrar sus observaciones en los elementos que se mantienen constantes a pesar del crecimiento de la figura y de los variables observar qué relación guardan con el término en la sucesión.

> *DI: Iniciaría pidiendo que encontraras aquellos elementos que permanece igual aunque cambie la figura*
> *07M15sg: todo lo de alrededor (la alumna hace una serie de determinaciones deícticas de los elementos invariantes en la figura 1 y extendió a la figuras 2 y 3)*
> *DI: ¿hay otros que no cambien?*
> *07M15sg: ¿este no cambia? (señala tres cuadros que forman una línea superior)*
> *DI: estos cuadros ¿a cuáles les correspondería en esta figura? (indico los tres cuadros que forman la línea superior)*
> *07M15sg: a estos (señala este elemento constante en las tres figuras analizadas). Le hago unas tachitas, ¿siempre va a haber tres arriba?*

Esta última pregunta es particularmente importante pues refleja la necesidad de los alumnos de comprender una situación de cambio; desarrollar la noción de que en los fenómenos existen elementos variables y elementos constantes, donde finalmente estos conceptos están incrustados en las figuras, en otras palabras, el análisis se centró en la posibilidad de comprender y aprehender dichos conceptos de variabilidad. Esta habilidad de comprender procesos de variabilidad es fundamental pues está presente en los distintos campos de la matemática: estadística, geometría, aritmética.

La estudiante requirió hacer uso de los recursos gráficos para hacer objetiva esta estructura. Una vez identificados los valores constantes (cuatro líneas formadas por tres cuadros cada una y que están en los extremos de la figura) se dio paso a identificar los elementos variables y reconocer la relación que éstos guardan con el número de la figura.

DI: ahora nos quedan estos cuadros que se observa van a cambiar (aprecio empatía con la actitud de trabajo de la estudiante, se mostró interesada y participativa. La alumna, en el trabajo grupal estuvo distraída y algo distante. Con el trabajo individual se percibió un cambio de actitud favorable pues participó y avanzó en la habilidad de detectar los elementos de las figuras)
07M15sg: aquí son ocho (hace el conteo de la fig.2) y en la figura 3 son 16
PI: qué relación hay del 2 con el 8 y del 3 con el 16?

Este conteo tuvo como antecedente el haber hecho uso de una tabla y representó una estrategia para establecer las relaciones numéricas entre los elementos. Se reconoció que por medio de la estrategia aritmética (DfMA) la alumna obtuvo la expresión simbólica en la sucesión, pero el interés fue obtener la regla por medio de la visualización.

DI: mira había visto la posibilidad de establecer lo siguiente: Aquí hay cuatro brazos. Estos tres cuadros se relacionan con la figura (se amplía esta relación a los elementos homólogos en la misma figura). También hay cuatro brazos pequeños. ¿Qué relación tienen estos brazos pequeños con la figura?
07M15sg: que es menos uno
DI: ahora, en la figura 2, identifica los elementos que cambian en relación a los que observamos en la figura tres (la alumna realizó la actividad mostrando seguridad al extrapolar los valores identificados y los aplica a los demás términos de la sucesión)

En seguida, y una vez abstraídos los elementos constantes y variables y las relaciones establecidas entre ellos, se verbalizó la expresión que representó la inducción de la regla general.

DI: ahora vamos a construir el patrón. "El patrón en esta figura es, vamos a llamarle brazos, esta figura tiene cuatro brazos ¿de cuántos cuadros?
07M15sg: de tres cuadros cada uno
DI: ¿constantes o variables?
07M15sg: constantes y que son el número de la figura
DI: ya tenemos los constantes ¿Cuáles nos faltan?
07M15sg: estos que son variables
DI: ¿qué relación tienen con la figura?
07M15sg: que son un número menos al número de la figura.

Lo anterior evidenció la habilidad de la alumna de identificar elementos en una estructura y establecer relaciones que le permitieron construir la regla general. Se observó que la actividad didáctica se centró en identificar los elementos, de establecer relaciones y sintetizarla en una expresión. El interés no se enfocó en representar las relaciones en lenguaje simbólico sino en objetivar la estructura y comprender las nociones de variabilidad, esencial en el pensamiento algebraico.

El segundo de los entrevistados fue el alumno 02H15ts. En lo observado respecto de las estrategias usadas por este alumno en la sesión de diagnóstico, se encontró tanto la habilidad de establecer la regla general por medio de la estratega de DfMA así como el uso de razonamientos basados en la visualización. En la segunda sesión el alumno continuó desarrollando razonamientos de tipo aritmético DfMA. En él se apreció que las sucesiones con términos ocultos trabajados en las sesiones tres y cuatro le permitieron modificar los modos de actuación pues sus argumentos se enfocaron en establecer de forma visual aquellas relaciones entre los elementos que conformaron la sucesión. En la sesión cinco el alumno mostró también el uso de estrategias visuales al momento de analizar, fragmentar, abstraer relaciones, inducir y expresar la estructura de la figura.

A lo largo del trabajo de campo el alumno manifestó disposición al trabajo, aunque en ciertas ocasiones, al manejar con solvencia procedimientos aritméticos, expresó cierta apatía por explorar la estrategia de visualización. No obstante, en la entrevista el estudiante reconoció la eficacia de la estrategia visual.

> *DI: ¿te ayudó en algo el trabajar con esta otra forma de encontrar relación entre el número de figura con el número de líneas y con ellos generalizar la sucesión?*
> *02H15ts: sí*
> *DI: ¿en qué forma crees que te haya beneficiado?*
> *02H15ts: facilitó porque tenía como un paso más sencillo, era hacerlo más fácil que hacer toda la expresión.*

Al presentarle la sucesión a trabajar, al igual que en el caso de la alumna de la entrevista, se pidió que identificara los elementos constantes y variables de la figura.

> *DI: voy a mostrarte la sucesión. La tarea consiste en observar cuáles son los elementos que cambian y cuáles son los elementos constantes. ¿Cuáles cuadros permanecen aun cuando la figura haya crecido?*
> *02H15ts: estos tres*
>
> *02H15ts: aquí también siempre son tres.*

Una vez identificados los valores constantes, se indicó identificar los elementos variables:

DI: Ahora ¿qué relación hay entre los valores que cambian con el número de la figura?, es decir, observa los valores que cambian y los vas a identificar de otro color
02H15ts: que el número de cuadritos que cambian siempre es igual al número de la figura
DI: ¿puedes colorearlos?

En la figura estudiante determinó los valores de cambio y los identificó con color rojo

DI: estos elementos que podemos nombrar como brazos, están en relación al número de la figura. Ahora ¿qué relación encuentras entre estos brazos pequeños que falta considerar con el número de la figura?

02H15ts: es el número de la figura menos uno

En la Figura 12 se observa la forma en que el alumno logró establecer el proceso de abstracción e inducción de la regla que le permitió dar cuenta de la estructura de la sucesión

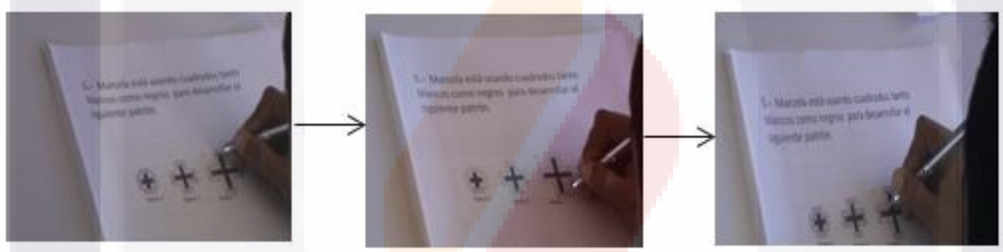


Figura 12. Proceso de abstracción-inducción de la regla general

Un aspecto que se debe considerar al trabajar con la generalización de patrones es advertir que algunos elementos variables son visibles sólo en términos de mayor tamaño, por ejemplo, en el primer término de la sucesión presentada fue posible identificar los elementos constantes que el alumno identificó con color azul, los brazos que estuvieron en relación al número de figura, pero fue imperceptible el elemento de los brazos pequeños que se relacionaron con el número de figura menos uno. Este aspecto debe ser previsto en la planificación de clase a fin de fortalecer la habilidad de identificar los elementos de la estructura, De esta forma se justificaría que los brazos pequeños que están en relación de $n-1$; al ser el término uno y restarle uno, los elementos brazos pequeños no existen para el primer término, pero sí son observables en los términos siguientes.

Al haber establecido las relaciones entre variables e identificado los valores constantes, se planteó construir la expresión general.

> *DI: vamos a expresar el patrón de forma escrita. ¿Cómo construiríamos este patrón? (sugiero basarnos en la figura 3 pues en ella se logran visualizar cada uno de los elementos que estructuran la figura y sus relaciones)*
> *02H15ts: el patrón en esta sucesión*
> *DI: iniciemos con las variables, ¿esta sucesión se conforma de cuantos brazos?*
> *02H15ts: cuatro*
> *DI: ¿qué relación tienen con la figura?*
> *02H15ts: están en relación a la figura*
> *DI: ¿qué más?*
> *02H15ts: cuatro brazos que tienen relación con la figura pero son uno menos; entonces es: más cuatro brazos pequeños que siempre están en relación a "uno menos que el número de la figura".*
> *DI: entonces ya contemplamos las variables. ¿Qué faltaría?*
> *02H15ts: los constantes y que son iguales en todas partes…*
> *DI: bien, más (espero que el alumno continúe con la construcción de la regla) (se genera pausa). ¿Los valores constantes están en relación al número de la figura?*
> *02H15ts: sí (pausa), no (corrige) siempre son tres en todas.*
> *DI: entonces no están en relación con el número de la figura; podemos decir que son 12 como valor constante o cuatro brazos constantes de tres cuadros cada uno.*

En lo siguiente, se intentó trasladar la expresión verbal a su forma simbólica.

> *DI: cómo expresarías en forma simbólica: cuatro brazos en relación con el número de la figura.*
> *02H15ts: ¿4n?*
> *DI: sí, 4n*
> *02H15ts: más cuatro brazos*
> *DI: Sí, cuatro brazos que son en relación a la figura?*
> *02H15ts: cuatro que multiplica a $(n-1)$*
> *DI: bien, $n-1$ entre paréntesis, entonces vamos hasta aquí (señalando con ellos las estructuras variables que han sido consideradas en la regla simbólica). Más cuatro brazos*
> *02H15ts: más cuatro (hace una pausa, se toca su cara) por tres.*

Con lo presentado se evidencia la capacidad de establecer relaciones generales y la habilidad por parte del alumno de trasladar las representaciones verbales a su forma simbólica. La entrevista permitió, por otra parte, generar pistas didácticas que se constituyen como un procedimiento eficaz al momento de establecer la inducción de la regla: enfocarse en los elementos de variabilidad, así como los constantes para cada uno de los términos.

5.8. Síntesis de la fase de intervención

A continuación se presenta la síntesis de los datos analizados que permitieron identificar las estrategias, las frecuencias de éxito y las dificultades al obtener cada uno de los términos en la tarea de generalizar sucesiones figurales; además, se sintetizan los cambios ocurridos en los modos de actuación como resultado del proceso de intervención didáctica en estudiantes que participaron en la investigación.

Para la sesión de diagnóstico se encontró que en promedio 8 de cada 10 participantes lograron obtener los términos cercanos a la sucesión, siendo la recursividad la estrategia de mayor recurrencia. Se observó que las frecuencias de respuesta correcta disminuyeron conforme incrementaba el valor de los términos. Para la obtención de la regla general en la primera tarea, un total de 10 de los 28 alumnos logró obtener la regla general mientras que 15 del total de participantes obtuvo la regla general en la segunda sucesión mostrada. Con respecto al tipo de estrategia usada en la obtención de la regla general se encontró que la totalidad de los casos recurrió al razonamiento aritmético de DfMA. Para el caso de la sucesión con término genérico se encontró que 13 de los 28 alumnos lograron inducir correctamente a_n. Al promediar las frecuencias de respuesta correcta en cada una de las tareas en diagnóstico se obtuvo que 44% de los participantes establecieran de forma correcta la regla general.

Para los casos de respuesta incorrecta, éstas incrementaron conforme era mayor el valor del término. Siete alumnos presentaron RI al obtener la regla general en la sucesión de puntos, siendo mayor la proporción de estudiantes que abandonaron la tarea. En la segunda sucesión cinco alumnos presentaron RI para a_n. Las estrategias de proporcionalidad y multiplicativa fueron las que generaron errores al obtener la regla general. Se observó que los alumnos con RI transitaron de la estrategia visual a las de tipo multiplicativo y proporcional, en tanto que los casos de RC transitaron de la visualización y el conteo como estrategias de inicio al uso de la estrategia aritmética.

En relación a la tercera tarea, los estudiantes con RC emplearon la visualización en complemento con razonamientos de tipo multiplicativo y ajuste al obtener el valor del término $a_{1320.}$ Los casos de RI desarrollaron una estrategia con carácter visual y multiplicativo pero dicha estrategia no estuvo contextualizada en relación al análisis de la figura.

Con lo anterior se logró reconocer lo determinante de la estrategia aritmética de diferencia multiplicativa con ajuste DfMA como el razonamiento matemático más eficaz para establecer una relación funcional que representa el término general de la sucesión, no obstante, dicha estrategia fue del dominio de sólo una parte de los estudiantes. En las formulaciones del marco conceptual Kieran (2004) advertía del hecho de que los estudiantes, al situarse en tareas de generalización de sucesiones figurales, operaban preponderantemente en un marco aritmético de referencia tendiente a no observar el aspecto relacional y funcional de las operaciones o elementos puestos en juego, y sólo estarían centrados en un proceso de cálculo unidireccional. Este señalamiento se hizo evidente tras lo recogido en esta fase de diagnóstico.

El análisis condujo a la necesidad de retomar la estrategia de visualización como el modo de actuación pertinente al propósito de desarrollar habilidades de pensamiento algebraico de abstracción e inducción de patrones en sucesiones figurales y el establecimiento de la regla general. Este modo de actuación haría posible el desarrollo de las habilidades cognitivas relacionadas con la tarea de generalización de patrones como medio de desarrollo del pensamiento algebraico en el medio escolar.

Al inicio de la fase de intervención se conjeturó que al introducir recursos visuales como el color, el estudiante sería capaz de hacer abstracciones de los elementos constante y variables, y con ello podría objetivar la estructura en la figura; no obstante, los resultados obtenidos en la primera sesión evidenciaron que los alumnos continuaron usando la estrategia aritmética en la obtención de a_n y que en la actividad de verbalizar la regla general se centraron en traducir la regla simbólica $2n + 3$ a la regla verbal y desatendieron a la actividad cognitiva de abstraer visualmente los elementos y sus relaciones.

Se reconoció que la visualización implicó un reto didáctico dado la experiencia previa de los participantes en el manejo de la estrategia aritmética en los alumnos. Por consiguiente, la modificación didáctica para el episodio de enseñanza siguiente fue el análisis de figuras que intentaron movilizarse desde la estrategia DfMA a la estrategia visual y con ello desarrollar el proceso de abstracción-inducción.

Para la segunda sesión, si bien se reconoció que la estrategia aritmética se consolidó como un modo de actuación eficaz que le permitió a prácticamente la totalidad de los participantes encontrar el valor de los términos requeridos en la tarea y de la regla general; en esta sesión se percibió una mayor disposición al trabajo visual. En siete casos se logró que los estudiantes establecieran mediante la estrategia visual y de forma correcta un patrón para la sucesión presentada.

Respecto a la variable introducida en la tarea (sucesión con términos ocultos) se menciona que no reflejó una modificación en el modo de razonamiento ni en las frecuencias en el uso de la estrategia aritméticas; en la sucesión con término ocultos los estudiantes obtuvieron el valor de la diferencia a partir del valor de los términos observados y finalmente lograron determinar el valor decrecimiento de la sucesión y con ella aplicar la DfMA.

Lo que representó en los estudiantes un cambio en sus modos de razonamiento fue la indicación hecha por el investigador docente de estructurar el valor del término lejano a_{100}, es decir, a partir del número de líneas calculadas con la expresión $4n-1$ se pidió al alumno estructurar ese número de líneas con base en la regularidad de crecimiento que presentó la figura. Esta indicación dirigió el razonamiento hacia el abstraer, inducir y verbalizar cómo organizaría las 399 líneas que obtuvieron como respuesta para a_{100}.

Se identificó que cinco estudiantes exploraron la visualización como estrategia de generalización y logaron establecer correctamente la regla que dio coherencia y orden a los términos de la sucesión. Se destaca, además de los anteriores, dos casos en los cuales al no presentar respuestas para a_n en la fase de diagnóstico, para esta sesión les resultó eficaz la estrategia de visualización y lograron abstraer e inducir de forma correcta el patrón para la sucesión.

Lo observado en la tercera sesión permitió identificar la importancia de la manipulación de objetos concretos como estrategia para establecer relaciones entre los elementos que estructuran la figura. Esta forma de abordar la tarea permitió que la mayoría de los estudiantes abandonaran los modos de actuación de tipo aritmético y, en cambio, exploraran la estrategia de visualización: el análisis-síntesis de la figura. Como producto de este proceso, lograron abstraer e inducir las relaciones que subyacen en la figura.

La abstracción-inducción de patrones resultó ser un proceso complejo en la articulación de la regla. Además de los 15 casos con RC para a_n, hubo siete casos que lograron establecer sólo una parcialidad de la regla. Se observó en estos últimos la necesidad de mayor familiaridad con este tipo de razonamientos visuales junto con la capacidad de expresar de forma verbal la regla. El planteamiento sugirió que los procesos de abstracción-inducción de patrones son una tarea que requiere de una constante exposición por parte de los alumnos ante este tipo de tareas.

Se consideraron dos implicaciones didácticas de esta experiencia. La primera relacionada con la necesidad de que los estudiantes tengan un mayor acercamiento a la estrategia visual desde los niveles de educación básica en donde, gradualmente, se fomente en el estudiante la capacidad de abstraer relacionar, expresar y validar una regla de la sucesión figural, más que abordar el tema de sucesiones a tareas que se reducen a construir una expresión derivada de un razonamiento aritmético. La segunda implicación estuvo relacionada con la solvencia por parte del docente en el manejo de los distintos patrones que pueden surgir en el proceso de abstracción, tal reconocimiento de la diversidad de abstracciones le permitirá al profesor identificar el razonamiento llevado a cabo por los alumnos y atender aquellas dificultades en el proceso.

Al sintetizar los datos de la cuarta sesión se encontró que el trabajo sobre figuras genéricas representó mayor dificultad para establecer la regla general en comparación con las sucesiones con términos consecutivos. Contrastando con las tareas previas, esta forma de presentar la sucesión obligó al estudiante a establecer una relación entre los elementos involucrados, es decir, esta forma de presentar la sucesión limitó el uso de la estrategia de recursividad y proporcional. Se observó que los diez casos con RC para la regla general recurrieron a la estrategia de visualización de la figura. Este heurístico consistió en relacionar el elemento identificado como variable independiente, la dependiente y reconocer los constantes. En los casos de RI se observó que éstos no lograron establecer el patrón entre los elementos. Como se observó en el apartado de desarrollo de la cuarta sesión, 12 estudiantes lograron establecer el patrón e inducir la regla a los términos a_{139} y a_n de la sucesión como resultado de la enseñanza por parte del investigador-docente.

Lo que sugiere este hallazgo es la necesidad de reforzar las habilidades docentes en cuanto a la enseñanza que promueva en los estudiantes la habilidad de establecer ideas de relación y cambio en las figuras, fortaleciendo el proceso de abstraer e inducir con base en el análisis visual de la figura. Esta implicación es más pertinente aún debido a que en el caso de figuras genéricas es preciso orientar el razonamiento de los estudiantes hacia la visualización.

En la sesión dedicada a evaluar el impacto de la estrategia visual se puede sintetizar los siguientes aspectos: a) la exposición continua por parte de los alumnos en tareas de visualizar sucesiones figurales incrementó las frecuencias de respuesta correcta al inducir y representar simbólica y verbalmente la regla general; b)los estudiantes que lograron establecer una expresión simbólica del patrón, fueron también quienes establecieron una verbalización completa de la regla con el uso de la visualización; c)se observó que un número importante de estudiantes, quienes no obstante el haber explorado la visualización, establecieron una regla verbal incompleta. Este hallazgo sugiere la necesidad de enfatizar en la enseñanza la habilidad de inducir las reglas generales y desarrollar la capacidad de expresar verbalmente los razonamientos generados en la tarea con el propósito de potenciar razonamientos que estructuren y den coherencia a las ideas en torno a las relaciones generales.

En la sesión de entrevistas fue posible valorar la eficacia de la estrategia visual como recurso para inducir la regla general en la sucesión. Se observó la habilidad de identificar elementos constantes y variables en cada uno de los términos, siendo mayormente perceptibles dichos elementos en aquellos términos que ocupan un lugar mayor en la sucesión (se recuerda al lector que en la fase de análisis se argumentó acerca de que en algunos términos no fueron perceptibles algunos elementos y su relación dentro de la estructura). En estas tareas los estudiantes mostraron con solvencia la habilidad de establecer las relaciones generales entre los elementos con el número de la figura.

La implicación didáctica en estas tareas con sucesiones radica en centrar el análisis de las figuras en este proceso de identificar, abstraer e inducir aquellos elementos y el establecimiento de las relaciones, además de desarrollar la habilidad de sintetizar este proceso en una expresión verbal o simbólica que denote el patrón en la sucesión de figuras, pero atendiendo en todo momento al significado de las variables en torno a la estructura. Se considera que con el desarrollo de este proceso de generalización se estaría logrando fomentar las habilidades de pensamiento algebraico.

A diferencia de las sesiones grupales, se apreció un mejor desempeño de los estudiantes en el trabajo individual; sin embargo, como se destacó en el apartado de la naturaleza metodológica de la investigación, esta intervención pretendió implementar la propuesta didáctica de generalización visual en la totalidad del grupo, lo cual implicó mejorar y optimizar la organización del trabajo en grupo a fin de mejorar el desempeño en la mayor proporción de estudiantes del grupo.

Con respecto de las estrategias, esta sesión permitió valorar la importancia de la visualización; sin embargo, también se logró identificar que los alumnos recurrieron a estrategias gráficas y de conteo como recursos previos al establecimiento de las relaciones visuales entre los elementos, no se identificaron estrategias recursivas. Por otra parte, aunque se propuso dar primacía a la estrategia visual, la estrategia de DfMA resultó intermitente en su aparición en diversos momentos de la entrevista, particularmente en el caso de la alumna entrevistada.

CAPÍTULO 6. Discusión de los resultados (Análisis retrospectivo)

En este capítulo se presenta la discusión de los resultados y corresponde al análisis evaluativo de la intervención. Como se mencionó en la descripción del Análisis Didáctico, en este análisis se consideran tres tipos de categorías: a) criterios e instrumentos para diagnosticar y valorar los aprendizajes; b) interpretación de los rendimientos y resultados alcanzados, y c) toma de decisiones para la revisión del proceso de enseñanza y aprendizaje que se infiere de los logros alcanzados.

En el primer apartado de este capítulo se presenta un análisis de la situación observada en el diagnóstico y cuyo desarrollo responde a la pregunta de investigación que planteó como objetivo conocer las estrategias y dificultades observadas en los estudiantes al momento de establecer la regla general en sucesiones lineales con elementos figurativos. Posteriormente se analiza el desarrollo de las habilidades de pensamiento algebraico logrado en los participantes como resultado de la fase de intervención; con ello se responde a las preguntas de investigación en las cuales se dispuso comprender el proceso mediante el cual los estudiantes logran abstraer e inducir la regla general de patrones, así como los medios de representación de la misma. En el último de estos apartados se consideran las implicaciones didácticas en la tarea de inducir la regla general como vía en el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato.

6.1. Estrategias y uso de Pensamiento algebraico en la obtención de la regla general en sucesiones

Las evidencias analizadas en la fase diagnóstica permitieron identificar que los casos de respuesta correcta en la obtención de los términos disminuyeron conforme incrementó el valor del término solicitado en la tarea. En la Figura 13 se muestra el desempeño promedio en las frecuencias de respuestas correcta o incorrecta en las tareas de la fase de diagnóstico; así como los casos que no contestaron a la actividad de obtener alguno de los términos.

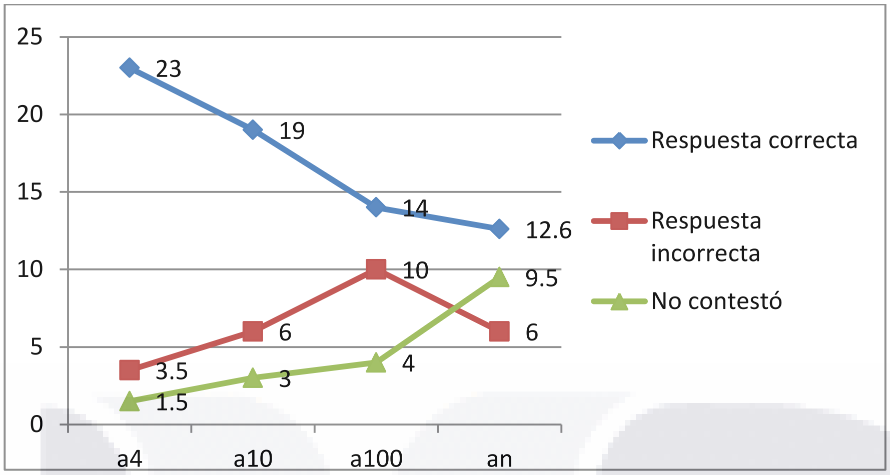


Figura 13. Tendencias en la respuesta por término en diagnóstico

Fuente: Elaboración propia con base en los datos obtenidos

En términos generales, de un total de 28 participantes en la fase diagnóstica 23 obtuvieron correctamente el término próximo a los observados, sin embargo cuatro no lograron encontrar el término a_{10} de la sucesión; en promedio de las tres tareas 14 estudiantes calcularon correctamente al término lejano a_{100} y sólo 12.6 alumnos del total lograron construir la regla general.

Con relación al tipo de estrategia de generalización, un hallazgo destacable fue que la totalidad de alumnos con RC para la regla general lograron resolver la tarea mediante la estrategia aritmética (DfMA). Se observó que en la primera sucesión de la fase de diagnóstico los alumnos recurrieron a la estrategia de recursividad para obtener los términos cercanos, sin embargo, la efectividad de esta estrategia fue nula al momento conseguir el término a_{100}, momento en que los alumnos transitaron hacia la estrategia aritmética. En la segunda tarea (sucesión de estrellas en T) los estudiantes dieron indicios de establecer relaciones entre los elementos a partir del análisis visual. No obstante, esta estrategia visual fue usada sólo para encontrar el término cercano a las figuras observadas y a partir del término a_{10} los alumnos migraron hacia el establecimiento de razonamientos de generalización aritmética DfMA.

De este análisis se estableció que los participantes, en la fase de diagnóstico, mostraron en sucesiones con términos consecutivos una tendencia a establecer generalizaciones aritméticas. No así en la sucesión con un término genérico (tercera tarea). En ella, los estudiantes se centraron en establecer relaciones cuantitativas entre los elementos mediante la estrategia visual. En la sucesión con término genérico, la tarea modificó la tendencia aritmética y centró la estrategia en la visualización.

Con respecto a las frecuencias de repuesta incorrecta, al promediar el desempeño en las tareas de diagnóstico, se observó que los casos aumentaron cada vez que incrementó el término buscado. Esta tendencia que se menciona disminuyó al obtener el término general, pero se incrementan los casos de estudiantes que abandonaron la tarea. En promedio, hubo seis estudiantes con RI para el término general, ante nueve casos de estudiantes que abandonaron la tarea

En el análisis de las frecuencias de respuesta incorrecta en relación al tipo de estrategia se encontró que las dificultades aparecieron cuando el estudiante aplicó de forma inadecuada la estrategia de conteo o recursividad; esto es, el no poder establecer relaciones espacio numéricas entre los elementos y dibujar de forma imprecisa el término siguiente de los observados. Estos errores fueron observados al momento de obtener términos cercanos en la sucesión. Para los términos lejanos y la regla general, se observó que los errores se centraron en establecer razonamientos de tipo multiplicativo y de proporcionalidad de forma inadecuada y no considerar el contexto figural de la sucesión; por ejemplo, en la primera tarea 8 de los 10 casos con respuesta incorrecta para el término a_{100} se debieron a una aplicación incorrecta de la estrategia multiplicativa; siete de los 10 casos de respuesta incorrecta en la segunda tarea fueron por causa de la aplicación equívoca de la estrategia multiplicativa.

Al contrastar los modos de actuación entre las sucesiones se identificó que en la segunda los estudiantes exploraron un mayor número de estrategias en comparación con la primera tarea en la que se centraron en hacer cálculos aritméticos. En la resolución de la sucesión de estrellas en forma de T se observó la emergencia de la visualización, la cual permitió que tres cuartas partes de los alumnos tuvieran una respuesta correcta al término a_4. La estrategia de visualización se manifestó mediante realización de dibujos que continuaron a los términos presentados. Estas figuras atendieron a una disposición numérica y espacial lógica existente entre los elementos que conformaron los términos. No obstante, se observó que la estrategia que finalmente les permitió a los estudiantes obtener la regla general fue la DfMA. En consecuencia, se puede aseverar que las habilidades de pensamiento algebraico se manifestaron de forma incipiente; y sólo un caso logro extender la estrategia al grado poder inducir las relaciones en términos distantes.

La Figura 14 permite reconocer la estrategia llevada a cabo por el caso único mencionado y que se presentó en la alumna 07M15sg. A diferencia de la estrategia de naturaleza aritmética, la alumna logró abstraer las relaciones numéricas y de espacio. Al extender la sucesión con figuras, ella identificó una estrella central como valor constante; más tres brazos, cada uno conformado por un número de estrellas en relación al número de la figura menos uno; más una estrella al final de cada brazo como valor constante. Esta lógica la extendió en su dominio para obtener los valores del término a_{58}, a_{100} y el valor inverso del término a_{20}.

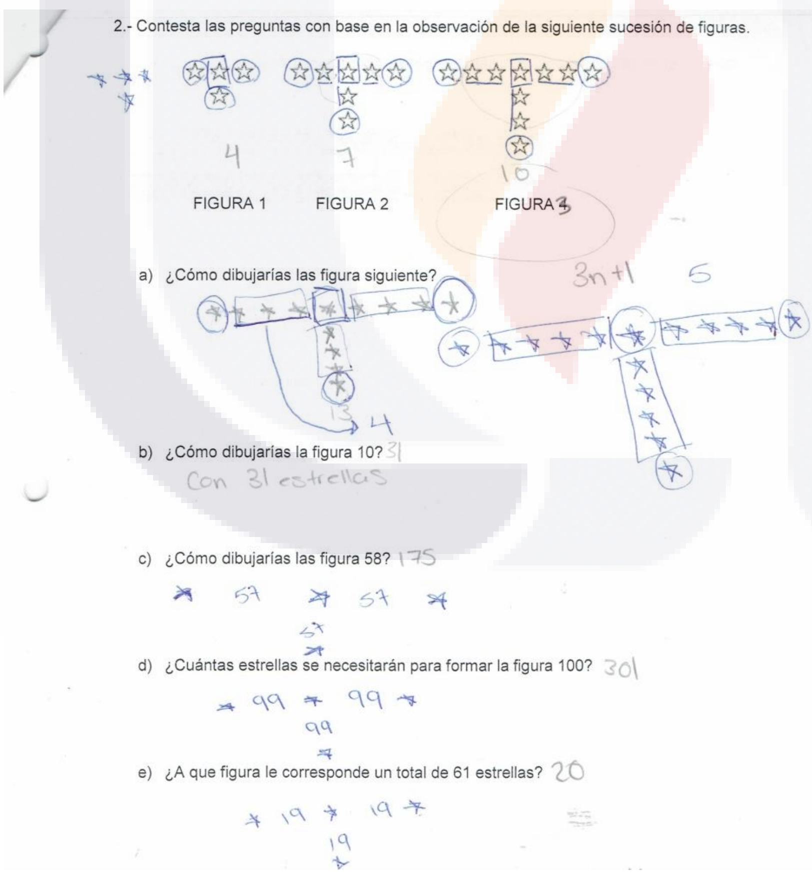
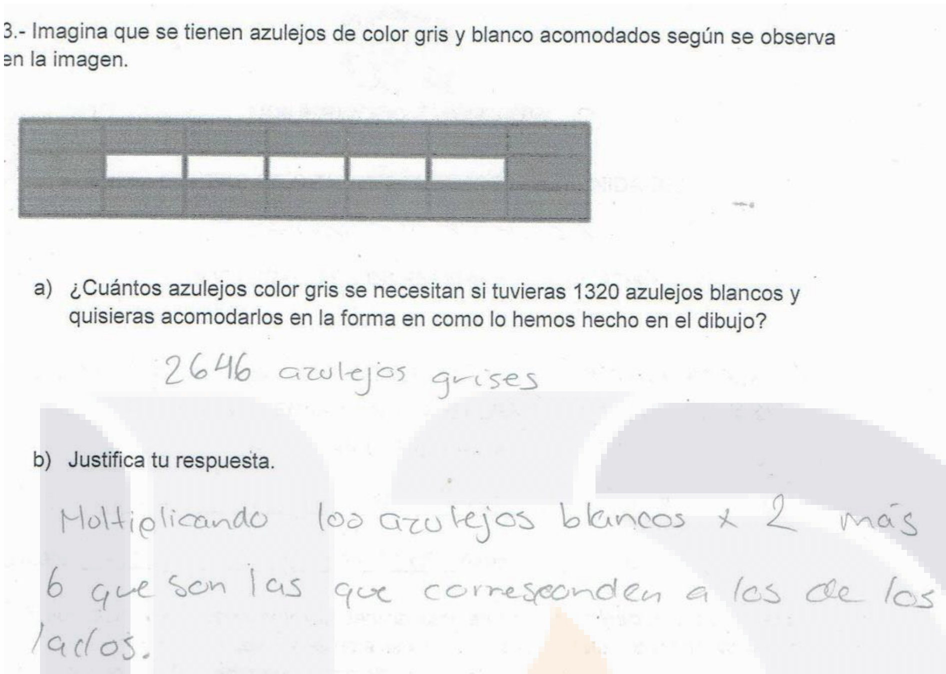


Figura 14. Caracterización de una generalidad algebraica

Por ejemplo, para la construcción del término a_{58} la alumna representó esta figura con una estrella en el centro y agregó el número 57 por brazo (como resultado de la relación general $n-1$ para la figura 58), más una estrella al final como valor constante. Esta abstracción la logró inducir tanto para los términos cercanos como lejanos. Con ello se pudo evidenciar la forma en como la estudiante estableció las relaciones generales en la estructura; no existen cálculos con base aritmética, sino que la figura desempeña un papel central en los razonamientos. Otro aspecto importante es el hecho de que la alumna logró expresar la posibilidad de comprender las relaciones inversas: establecer el número de lugar del término a partir del número total de estrellas, atendiendo la estructura mencionada.

En lo observado en la tercera tarea, 13 de los 28 estudiantes lograron establecer la regla general. La estrategia de generalización se centró en establecer relaciones entre los elementos involucrados en la tarea (azulejos blancos y grises). En esta forma de actuación, el alumno, ante la imposibilidad de ejecutar estrategias de tipo recursivo como los encontrados en las tareas anteriores, se vio forzado a recurrir a la visualización de la figura.

La Figura 15 muestra el modo de actuación puesto en juego por la alumna 06M15sg en la obtención del término a_{1320}. En la resolución se observa que, si bien la alumna recurrió a la multiplicación, la estrategia de fondo radicó en establecer relaciones que dieron cuenta de cualquier término en la sucesión. Para la participante fue además posible expresar la regla en modo verbal y encontró que: "*multiplicando los azulejos blancos por dos más seis, son los que corresponden a los de los lados (azulejos grises)*"



3.- Imagina que se tienen azulejos de color gris y blanco acomodados según se observa en la imagen.

a) ¿Cuántos azulejos color gris se necesitan si tuvieras 1320 azulejos blancos y quisieras acomodarlos en la forma en como lo hemos hecho en el dibujo?

2646 azulejos grises

b) Justifica tu respuesta.

Moltiplicando loo azulejos blancos x 2 más 6 que son las que corresponden a los de los lados.

Figura 15. Verbalización de la regla general algebraica

A diferencia de las estrategias aritméticas, la visualización no implicó el establecer procesos de recursividad sino que al establecer relaciones estructurales en la figura fue posible inducir el valor de cualquier término en la sucesión. Este modo de actuación se puede considerar como propio del pensamiento algebraico.

En síntesis, se observó una preponderancia en la estrategia aritmética como medio de generalización. Las sucesiones con términos consecutivos promovieron una mayor tendencia a la recursividad y tránsito hacia la estrategia DfMA en la obtención de términos lejanos y el término general. La sucesión con término genérico requirió de la estrategia visual como modo de generalización. Las estrategias multiplicativa y de proporcionalidad generaron mayor número de casos de respuesta incorrecta. Los alumnos presentaron mayor eficacia al obtener términos cercanos y mostraron mayores dificultades y respuestas incorrectas en los términos lejanos y el término general.

6.2. Desarrollo del pensamiento algebraico mediante la generalización visual

Con respecto a la importancia de la estrategia visual como heurístico en la resolución de tareas de generalización en sucesiones figurales, se confirmó la efectividad de ésta en la habilidad de abstraer e inducir un patrón. A partir de la sesión dos, donde se comenzó con la fase de intervención, se introdujeron recursos como el color y la manipulación de objetos cuyo propósito fue apoyar el proceso de visualización y el objetivar la estructura de la sucesión de figuras.

En este apartado se analiza el desarrollo de las habilidades de pensamiento algebraico logrado en los participantes; con ello se aporta una caracterización y comprensión del proceso de abstraer e inducir, así como los medios mediante los cuales los alumnos expresaron la regla general de patrones en sucesiones figurales a partir de la estrategia de análisis visual.

La síntesis acerca de las estrategias de generalización permitió identificar una amplia variedad de modos de actuación destacando en particular la estrategia de DfMA, pero que si bien su reconoce su eficacia, tal como se ha mencionado en líneas anteriores, ésta fue del dominio de sólo la mitad de los alumnos. Por otra parte y sustentado en los supuestos epistemológicos que caracterizan el pensamiento algebraico, con mayor detalle la afirmación hecha por Radford (2006) quien sustenta que esta forma de actuación aritmética dista del tipo de generalización algebraica y con ello del tipo de habilidades de pensamiento requeridas. En esta propuesta de intervención se propuso desarrollar la habilidad de inducir relaciones generales a partir del análisis visual de las figuras como modo de actuación propio del pensamiento algebraico más que al cálculo aritmético de valores numéricos.

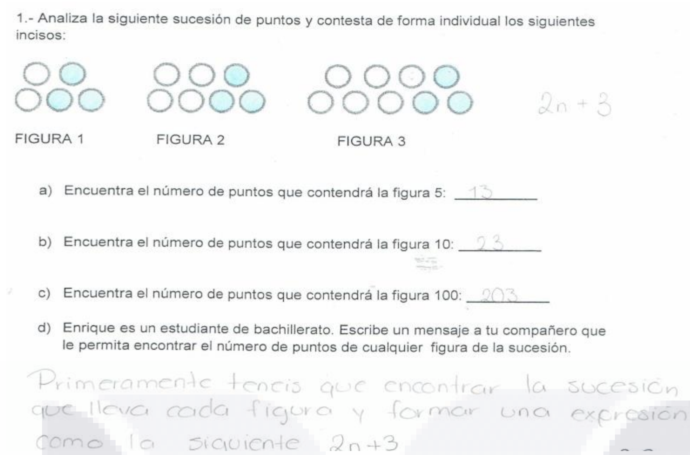
Los objetivos de investigación propuestos en esta fase de intervención fueron: a) desarrollar habilidades del pensamiento algebraico con alumnos de bachillerato basados en el proceso de generalización algebraica de patrones; y b)explorar la evolución en la habilidad para inducir patrones y su generalización como tareas potenciales al desarrollo del pensamiento algebraico.

6.2.1. La eficacia del recurso color en la abstracción-inducción de la regla.

El objetivo de la segunda sesión radicó en expresar verbalmente la expresión general como resultado del proceso de abstraer e inducir relaciones entre los elementos, comprendiendo con ello la habilidad de establecer la estructura en la figura. Esta actividad de expresar verbalmente la regla general fue retomada del estudio de Vergel (2015), en donde se reconoció la habilidad observada en niños de nivel primaria de expresar verbalmente la regla general en una sucesión figural. Por consiguiente, se planteó como trayectoria de aprendizaje que los estudiantes al percibir visualmente la estructura de la figura serían capaces de establecer un patrón en la sucesión y lograrían comunicar la regla para el término $a_{n.}$

El análisis de las respuestas mostró que la incorporación de recursos como el color no resultó eficaz pues sólo 2 de los 28 estudiantes logró verbalizar las relaciones en la sucesión. Como se describió en el análisis de la sesión dos, 16 de los 28 alumnos efectuaron una traducción verbal a partir de la regla simbólica obtenida de la estrategia DfMA.

La Figura 16 expone la habilidad observada por parte de la alumna 08M15sg de abstraer e inducir la regla general en representación verbal. En esta imagen se evidencia además que la alumna recurrió al conteo como estrategia de inicio en el proceso de abstracción e inducción de la regla general. En la parte superior de las figuras agregó los números 5,7 y 9 para cada una de los términos, reconociendo con ello la necesidad de trabajar sobre valores numéricos.



1.- Analiza la siguiente sucesión de puntos y contesta de forma individual los siguientes incisos:

FIGURA 1 FIGURA 2 FIGURA 3

2n + 3

a) Encuentra el número de puntos que contendrá la figura 5: 13

b) Encuentra el número de puntos que contendrá la figura 10: 23

c) Encuentra el número de puntos que contendrá la figura 100: 203

d) Enrique es un estudiante de bachillerato. Escribe un mensaje a tu compañero que le permita encontrar el número de puntos de cualquier figura de la sucesión.

Primeramente tenes que encontrar la sucesión que lleva cada figura y formar una expresión como la siguiente 2n+3

Figura 16. Representación verbal de la regla general mediante visualización

Particularmente se destaca la habilidad con que la alumna logró establecer un orden espacial y señaló que la figura está compuesta por un número de puntos que conforman una fila "abajo" y "arriba", y que entre ellos existe un número de puntos en igualdad y relacionados con el número de la figura; además, usó la expresión n para denotar el término general de la sucesión: "*Todas las figuras tienen un círculo más del de su figura y tres constantes, es decir, la figura uno tiene dos círculos y después tres constantes y así sucesivamente. Es como n arriba, n abajo y tres constantes"*

En lo observado, se evidenció que la modificación de la tarea mediante la incorporación de elementos como el color no favoreció en que un número considerable de participantes pudieran hacer objetiva la estructura de la figura. Además, se apreció que los estudiantes presentaron dificultades para establecer una generalización discursiva que justificara el rol de las variables dentro del contexto de la sucesión con figuras, es decir, mediante la estrategia DfMA los valores simbólicos tuvieron sólo un papel posicional y generador de resultados numéricos, razonamientos propios de la aritmética. Sin embargo, se consiguió que dos casos hicieran uso de la visualización y lograran establecer valores lejanos de los términos e indujeran la regla general

6.2.2. Manifestaciones de pensamiento algebraico desde la manipulación de objetos concretos.

Durante la tercera y cuarta sesión se presentó lo que se considera fue el modelo de estrategia y diseño didáctico que favoreció el uso de razonamientos de tipo relacional que condujera a la inducción de las relaciones generales. La modificación en cuanto al tipo de tarea consistió en mostrar a los alumnos una sucesión con términos ocultos. La conjetura de aprendizaje supuso que al presentar término no consecutivos se limitaría la tendencia a realizar cálculos aritméticos a partir de la diferencia multiplicativa y con ajuste entre términos; en cambio, los estudiantes se orientarían a razonamientos visuales en donde se establecerían las relaciones generales entre los elementos. Otro factor de cambio en la forma de abordar el tema consistió en el trabajo con material concreto.

En la tercera sesión y sin hacer uso aun del material concreto, se planteó al alumno el problema de identificar la estructura con la cual acomodar el total de 399 líneas que correspondían al término a_{100} y que el 73% de los alumnos obtuvo mediante la estrategia DfMA. Se encontró que esta indicación produjo un cambio sustancial en la forma de enfrentar la tarea y generó razonamientos enfocados en la necesidad de establecer un patrón en los términos figurales. Al final de la sesión, siete de los 28 participantes lograron establecer una generalización algebraica mediante la estrategia visual.

Para la cuarta sesión se recurrió al uso de material concreto el cual fue manipulado y se esperó que un número mayor de estudiantes lograra objetivar la estructura de las figuras e inducir las relaciones generales en la sucesión. Se observó que la manipulación de objetos generó un cambio sustantivo en el número de alumnos que manifestaron la habilidad de inducir la regla general a partir de relacionar los elementos de la figura y generar un patrón que representó la estructura de las figuras en sucesión.

En la Figura 17 se observa la forma en cómo el alumno 30H16ts planteó la disposición numérico espacial de los elementos de la figura. Se resalta en esta imagen la importancia de la actividad motriz (señalización) como recurso que apoya en la tarea de fragmentar y objetivar la estructura de una figura particular. Mediante este proceso de análisis-síntesis el alumno pudo inducir las relaciones que estructuran la figura y posteriormente logró hacer una generalización algebraica.

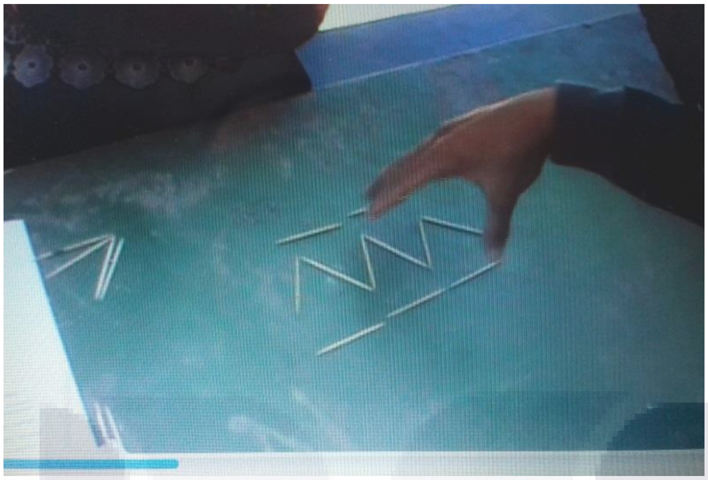


Figura 17. Proceso de inducción de las relaciones mediante visualización

Para esta sesión, 15 de los 30 participantes lograron inducir la regla general algebraica. Este hallazgo permitió reconocer la eficacia del trabajo visual en la tarea de abstraer e inducir la regla general y del desarrollo de las habilidades de pensamiento algebraico. Se encontró también que siete alumnos lograron abstraer una parte de la estructura, ello sugiere la necesidad de fortalecer desde la enseñanza elemental la habilidad de inducir y verbalizar un patrón.

Por otra parte, se resalta que seis alumnos no presentaron respuesta a la tarea. Este aspecto fue reportado en el apartado 5.4.2 de esta tesis. Este aspecto no considerado, supuso desinterés por parte de los estudiantes ante este tipo de actividades. Finalmente dos alumnos no mostraron un cambio en el razonamiento desde lo aritmético a lo visual y resolvieron la tarea mediante la generalización aritmética.

6.2.3. Evolución de las habilidades de pensamiento algebraico desde una experiencia didáctica.

La conjetura de aprendizaje planteó que los estudiantes al haber mostrado habilidades en la construcción de relaciones generales mediante la manipulación de materiales concretos, serían hábiles para abstraer un patrón en una figura. Los resultados obtenidos mostraron correspondencia con los hallazgos de Cañadas, Castro y Castro (2008) quienes señalan que, como aspecto previo a la tarea de generalización, es indispensable el identificar o inducir previamente un patrón de la figura analizada.

Con lo observado se pudo establecer que la habilidad de abstraer relaciones generales mediante la visualización fue posible a partir del análisis de los términos y sus elementos particulares involucrados, esta síntesis quedó representada mediante una expresión verbal como simbólica, dichas representaciones de la regla desempeñaron una narrativa del análisis sobre las relaciones inducidas.

Sintetizando, los alumnos que lograron objetivar la estructura de las figuras en sucesión desarrollaron un proceso que inició en la fragmentación de la figura en sus elementos, posteriormente efectuaron un conteo analítico y lograron abstraer las relaciones cuantitativas entre cada uno de estos elementos, después establecieron la inducción de las relaciones encontradas a los demás términos para finalmente validar la ley general construida para los n términos de la sucesión.

Con lo anterior se responde al objetivo de investigación donde se propuso documentar una experiencia didáctica centrada en el desarrollo de las habilidades involucradas en el desarrollo del pensamiento algebraico vía la generalización de patrones en sucesiones figurales. Se mostró también la evolución en término de frecuencia de la habilidad para abstraer e inducir relaciones generales mediante la visualización. Esta mejora en el desarrollo permitió valorar positivamente el avance y logro en los objetivos de instrucción que se propusieron.

Con la intervención didáctica se logró que una proporción considerable de participantes transitaran de los razonamientos preponderantemente aritméticos hacia el desarrollo y maduración de la habilidad de inducir la regla general mediante la estrategia de visualización. Por lo observado, la estrategia de conteo de los elementos sugiere ser el inicio en la resolución de la tarea de inducir una regla general; no obstante, el análisis de los modos de actuación indican la siguiente distinción: el conteo representó la estrategia que precede a la transformación de los elementos de la figura a valores numéricos, la distinción ocurre cuando el conteo, o bien permite abstraer e inducir relaciones numérico espaciales sobre la estructura de las figuras y su generalización algebraica, o bien es la base sobre la cual se realizan cálculos aritméticos donde se formula una expresión que resulta de ajustar variables en un contexto multiplicativo y donde queda establecida una generalización aritmética. Esta distinción se expone mediante el siguiente esquema representado en la Figura 18

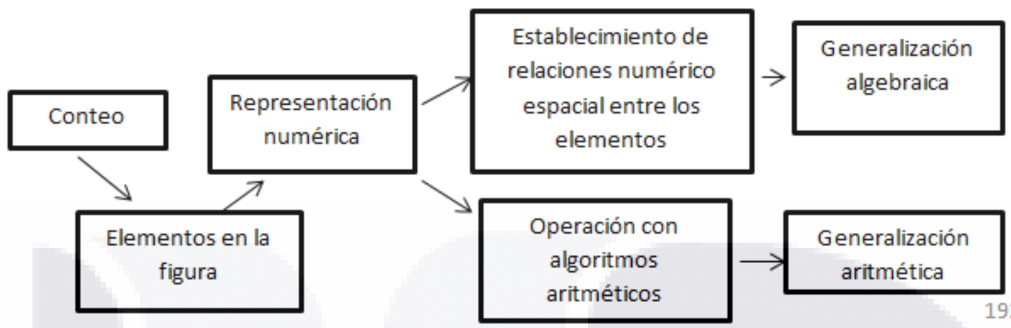


Figura 18. Distinción entre trayectorias de generalización aritmética y algebraica

Por otro lado, se observó la habilidad desarrollada por los alumnos de representar la generalización mediante el lenguaje verbal y simbólico. Esta habilidad quedó manifiesta en las relaciones generales inducidas y la cual permitió que los participantes mejoraran su habilidad de argumentar las relaciones y no sólo expresar mediante una simbología un objeto matemático que denotan operaciones aritméticas pero en donde se soslaya la importancia del análisis de la figura. Quedó evidenciada esta habilidad a lo largo de la sesión de intervención. Al comienzo de esta fase los alumnos mostraron resistencia y dificultades al verbalizar la regla, para la cuarta y quinta sesión se observó que los casos que lograron construir la regla expresaron ésta de forma verbal y posteriormente tradujeron de lo verbal a lo simbólico.

6.3 Implicaciones didácticas

Parafraseando las ideas de Romberg y Kaput (1999) respecto de la matemática necesaria en este siglo 21, los autores sostienen la pertinencia de una enseñanza que promueva aprendizajes basados en el análisis estructural de patrones como un vía para comprender el mundo en que vivimos. Dentro de las consideraciones didácticas, Blanton y Kaput (2011) señalan como medio para el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático, al cual se aspira en este siglo 21, la experiencia y el trabajo con patrones, en donde se conjeture, generalice y justifiquen relaciones matemáticas entre cantidades.

> "…La comprensión de las matemáticas complejas del siglo 21 requiere que los niños tengan un tipo de experiencia escolar que vaya más allá de lo aritmético y la fluidez en los cálculos que atiende a una comprensión profunda relacionada con las estructuras matemáticas. Esta demanda requeriría de experiencias de aprendizaje que ayuden al niño a aprenderá reconocer y articular estructuras matemáticas y sus relaciones y usar estas ideas de razonamiento matemático como objetos de razonamiento matemático" (Blanton & Kaput, 2011, p. 6).

En el objetivo último de esta investigación se propuso caracterizar un modelo de enseñanza enfocado en el desarrollo del pensamiento algebraico desde el enfoque de la generalización de patrones. En esta tarea de generalización estuvo involucrada tanto la habilidad de establecer visualmente las relaciones generales entre los elementos en la figura, al igual que la capacidad de representar externamente el patrón general, fuera en forma verbal o simbólica.

La caracterización de las estrategias de obtención de la regla general permitió identificar la preponderancia de los modos de generalización aritméticos como resultado de un currículo escolar centrado en razonamiento de cálculos numéricos unidireccionales; se advirtió en ello el detrimento de las habilidades de pensamiento algebraico.

En respuesta, el planteamiento didáctico en esta investigación estuvo encaminado a fortalecer habilidades visuales como estrategia de generalizaciones algebraicas. Como resultado de la intervención se pudo caracterizar las implicaciones de orden cognitivo y didácticas en la resolución de la tarea de establecer una generalización algebraica. Además, con respecto a los modos de representación se observó que la verbalización de la regla favoreció e implicó en el estudiante la capacidad de justificar la generalización inducida.

En la Figura 19 se sintetiza lo que se considera para esta investigación representa el aspecto fundamental del proceso didáctico en el trabajo sobre la generalización algebraica de sucesiones con elementos figurales.

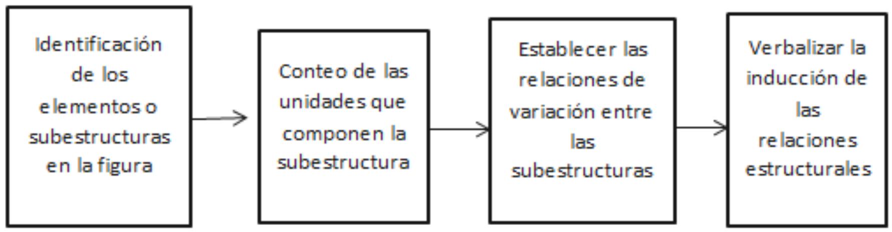


Figura 19. Proceso de inducción de las relaciones generales

En este esquema se propone sintetizar el proceso mediante el cual los alumnos acceden a la generalización algebraica de sucesiones figurales. El proceso de representación interna inicia con la identificación de los elementos que también podemos nombrar como subestructuras de una estructura general. Posteriormente se realiza un conteo, no como base de estrategias de recursividad figura a figura, ni tampoco como base para razonamientos de tipo multiplicativo o proporcional, proclives éstos a generar dificultades en la obtención de la regla aritmética que como se ha visto no potencia los razonamientos de tipo relacional que se buscan. Este conteo representaría un paso en el proceso de establecer las relaciones necesarias entre las subestructuras para, finalmente, hacer objetiva la estructura de la figura. Respecto del proceso de representación externa o semiótica, es importante reconocer el valor de las representaciones verbales en el reconocimiento de la generalidad. En el segundo caso observado es importante situar el manejo simbólico y la narrativa en este proceso de construcción. No es la forma canónica de expresar la regla, su naturaleza representa el proceso de establecer las relaciones variables y constates en la figura, pero que, potencialmente esta expresión daría lugar al manejo simbólico e identificación estructural de las expresiones. En síntesis es un manejo con significado del simbolismo algebraico el cual hace manifiesto un proceso de generalización mediante el análisis de los elementos de la figura en sucesión.

Dentro de las consideraciones de lo observado, se externa la necesidad de una propuesta metodológica enfocada en la habilidad de hacer visible al estudiante los elementos que estructuran la figura. No es suficiente para el logro de los propósitos de aprendizaje de estos contenidos el limitarse a la realización de operaciones aritméticas que suponen una mecanización de los algoritmos; en cambio, es deseable que en la enseñanza se promueva la habilidad de inducir relaciones generales a partir de la manipulación de material que permita al estudiante enriquecer su comprensión de las situaciones de variabilidad. Respecto del factor tarea, se evidenció que las sucesiones con términos ocultos no generaron *per se* modificación en la forma de solucionar la tarea pues lo alumnos generaron los razonamientos para llevar a cabo estrategias de tipo aritmético.

CAPÍTULO 7. Conclusiones

La investigación que aquí presentamos aporta una comprensión en el desarrollo del pensamiento algebraico a través de los procesos de generalización de sucesiones figurales en el contexto de educación de nivel bachillerato. En los resultados se identificó la variedad de estrategias mediante las cuales los alumnos lograron obtener la regla general y los términos de la sucesión. Para los términos cercanos se identificó la preponderancia de estrategias como el conteo o gráficas; para la obtención de la regla general y términos lejanos se observó el predominio de la generalización aritmética. Por otra parte y como resultado de la intervención didáctica se reconoció la eficacia de la estrategia visual como heurístico en la inducción de la regla general y con ello el logro en el desarrollo del pensamiento algebraico.

Con el propósito de desarrollar las habilidades de pensamiento algebraico se consultaron estudios teóricos y empíricos que permitieron problematizar y construir las preguntas y objetivos de investigación. Para la organización de la propuesta de intervención se retomó la herramienta de Análisis Didáctico. En términos generales:

- El análisis de contenido permitió definir los conceptos involucrados en esta investigación con el propósito de esclarecer su naturaleza y su aporte en el desarrollo de las habilidades de pensamiento algebraico: sucesión, término general, patrón, estructura y la elección de sucesiones figurales como el contenido matemático abordado en la intervención.
- En el análisis cognitivo se caracterizó el constructo pensamiento algebraico y las habilidades de pensamiento relacional y funcional como aspectos implicados en el proceso de inducir la regla general en una sucesión de figuras.
- En el análisis de instrucción se describió el proceso de generalización algebraica como ruta en el desarrollo del constructo que nos ocupó; además y con la constante revisión de la literatura en el campo, fue posible definir la estrategia de visualización como el modo de actuación que favoreció el desarrollo del pensamiento algebraico.

- El análisis de evaluación permitió interpretar el avance logrado respecto del proceso de inducción de una generalización algebraica y destacar el tipo de decisiones didácticas que permitieron lograr los avances mencionados. En conjunto, en esta fase se logró identificar y enriquecer aquellas implicaciones didácticas en el trabajo con sucesiones figurales en la construcción de una generalización algebraica como medio en el desarrollo del pensamiento algebraico; además se planteó un trayecto en cuanto a las posibles estrategias y dificultades que los alumnos pueden experimentar ante esta tarea y la necesidad de atender el aspecto de la abstracción e inducción de regla generales entre los elementos que integran una figura en sucesión.

En relación al método de Experimento de Enseñanza, éste permitió diseñar, implementar y rediseñar una intervención didáctica integrada por un conjunto de episodios de enseñanza matemática basada en conjeturas de investigaciones relacionadas del proceso de generalización algebraica de patrones en sucesiones figurales. Estas conjeturas fueron puestas en práctica y se evaluó la precisión y eficacia de éstas durante el trabajo de campo. Posterior a la implementación de cada uno de los episodios de enseñanza fue posible analizar el rendimiento de los participantes ante las tareas y los recursos implementados en cada sesión; de cada análisis se efectuó la toma de decisiones y se rediseñaron las actividades y recursos que permitieron alcanzar los objetivos de instrucción propuestos. Este método mostró ser pertinente pues fue posible implementar una propuesta didáctica que pretendió dar respuesta a problemas en la enseñanza y aprendizaje de un contenido específico y en contextos de aula. En particular, en esta investigación permitió generar conocimiento teórico y empírico en relación a los procesos de generalización de patrones como vía en el desarrollo del pensamiento algebraico.

El Experimento de Enseñanza permitió ampliar aquellos estudios que se centraron en investigar el proceso de generalización en contextos de laboratorio, en cambio y con base en su naturaleza metodológica se logró que un número considerable de participantes desarrollara la habilidad de establecer generalizaciones algebraicas a partir de la estrategia de visualización. Este avance representó el resultado del proceso continuo de análisis, diseño, rediseño de las actividades.

Con base en el análisis de la fase de diagnóstico y las sesiones de intervención se identificaron las estrategias y dificultades de generalización utilizadas por los participantes. En este trabajo empírico se promovió en los participantes el desarrollo de las habilidades para generalizar algebraicamente relaciones en elementos figurales; además, fue posible reconocer la representación verbal como forma de representar el producto de inducir la regla. En torno a estos pilares se articuló el análisis de los resultados del trabajo empírico de la investigación.

Por último en el apartado de análisis retrospectivo se evaluó en conjunto la intervención, se destacó en éste el avance respecto de las habilidades de pensamiento relacional y funcional para inducir la regla general a partir de la visualización de los elementos. Además se caracterizó el proceso que permitió inducir el término general en el análisis de figuras en variación.

7.1. Aportes del trabajo

Esta investigación contribuye a ampliar la comprensión del proceso de generalización algebraica. Se logró mostrar la eficacia de la estrategia visual como medio para objetivar la estructura de las figuras en sucesión y con ello inducir una regla general que permitió desarrollar las habilidades de pensamiento algebraico. Entendemos que los resultados obtenidos en esta investigación aportan a replantear los objetivos y rediseñar el currículo escolar en México, en cuanto al desarrollo del pensamiento algebraico y dimensionar el contenido de sucesiones figurales como el medio pertinente para el fortalecimiento de habilidades algebraicas. Si bien entendemos que en la fase diagnóstico hubo evidencia de inducir relaciones mediante la visualización, inferimos que éstas no responden a un trabajo pedagógico sino son el resultado de una habilidad espontánea.

Este trabajo atiende una de las recomendaciones hechas por Molina (2009), pues en éste se exploró el desarrollo de habilidades de pensamiento relacional (como una dimensión del algebraico) en un contexto matemático distinto al trabajo sobre sentencias numéricas y el significado del signo igual. Así pues se amplió el contexto de tarea ya que en esta investigación se logró evidenciar el desarrollo de este tipo de pensamiento a partir del proceso de generalización de patrones en sucesiones con representación figural.

Por otra parte, en relación al proceso de pensamiento inductivo esta investigación replica el estudio de Castro, Cañadas y Molina (2010) en donde se retoma la inducción como modo para construir reglas generales en el trabajo con sucesiones, no obstante, esta investigación representa una mirada intensiva al proceso cognitivo de inducción de la regla. En este sentido, la estrategia visual permitió inducir el tipo de relaciones que promovieron las habilidades propias del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato, atendiendo a la característica fundamental de establecer una regla general a partir del análisis de términos o casos particulares, dando idea además de la comprensión de nociones de variabilidad en contextos cuantitativos.

Consideramos que esta investigación amplía los aportes de Radford (2006) pues si bien fueron considerado recursos semióticos como el ritmo y la señalización como conceptos que pertenecen a la teoría de la objetivación, en esta trabajo se ha reportado el proceso de generalización partiendo del reconocimiento de otras estrategias y se propuso transitar desde la generalización aritmética a la algebraica, por tanto, fue necesario considerar como referente la categorización de estrategias expuestas por Barbosa y Vale (2015)

Con lo anterior se aporta información para los investigadores en didáctica de la Matemática y para los docentes desde los niveles básicos hasta el bachillerato en relación a esta habilidad que se detalla, conocer los modos de actuación y sus limitantes, comprender la evolución ante la tarea de establecer relaciones generales y la forma de comprender contextos de variación y generalización.

Una vez analizado el estado de las investigaciones previas, este trabajo presume ser un aporte original al campo de la didáctica matemática pues evidencia desde el contexto de aula el desarrollo de habilidades de pensamiento algebraico. Se aporta con ello una comprensión fundamentada de los procesos de adquisición de habilidades de establecer relaciones generales de varianza y la inducción de dichas relaciones a la regla general, aunada a esta habilidad fundamental, se logró el manejo con significado del lenguaje verbal y algebraico como medio de representación de la regla.

Lo producido en este trabajo resulta potencialmente útil para los profesores de educación matemática pues permite comprender y valorar la importancia de las actividades de generalización de sucesiones en el desarrollo del pensamiento algebraico y tomar decisiones respecto de las orientaciones didácticas. La metodología aplicada permite que los resultados sean replicables en la práctica toda vez que han sido recogidos en situaciones de trabajo en aula. En tal sentido, esta aportación atiende a lo señalado por Blanton y Kaput (2011) quienes plantean que “la mayoría de los maestros tienen poca experiencia con el tipo de pensamiento algebraico que se necesita sea la norma en las escuelas y en su lugar, producen el tipo de instrucción matemática que necesitamos reemplazar” (p. 7).

Investigaciones de este tipo conducen a valorar la riqueza en cuanto las habilidades y modos de actuación desarrolladas por los alumnos. Coincidimos con Molina (2006) al pensar en que el conocimiento por parte de los profesores sobre el desarrollo del pensamiento matemático ayuda a mejorar su práctica educativa, teniendo efectos positivos en el aprendizaje de sus alumnos.

7.2 Perspectivas y líneas de investigación

A partir del trabajo realizado, se consideran como perspectivas abiertas para investigaciones aquellos trabajos que ubique como objeto de estudio el proceso de generalización algebraica en los niveles de formación básica en México, toda vez que los resultados que aquí presentamos se situaron en el contexto de formación de nivel medio superior. Además, por lo consultado, fue evidente la escasez de investigaciones en los niveles de educación primaria y secundaria. ¿Qué alcances tiene la propuesta de generalización de patrones mediante la estrategia visual con estudiantes de nivel básico en México? ¿El trabajo sobre la manipulación de objetos posibilitaría en los alumnos de nivel básico establecer relaciones generales en figuras, toda vez que este tema forma parte de los contenidos de educación básica? Por otra parte y reconociendo el papel de la enseñanza como una práctica intencionada ¿Qué estrategias utilizan los docentes de educación básica al trabajar los contenidos de sucesiones figurales? ¿Qué estrategias y dificultades presentan los profesores de educación básica al resolver tareas de generalización de patrones?

Con respecto a la presumible falta de precisión en el Programa de estudio de matemáticas en el nivel de educación básica del constructo pensamiento algebraico ¿cuál es el planteamiento conceptual y didáctico de los diseñadores de los libros de texto en México en cuanto al aporte de las sucesiones figurales en el nivel de educación básica?

En un contexto más amplio y que trasciende el contexto regional, otras posibles líneas que abre esta investigación es ¿se puede ajustar esta perspectiva de pensamiento algebraico en el trabajo transformacional con productos notables, es decir, vincular la propuesta de generalización con el enfoque del manejo transformacional de estructuras algebraicas, por ejemplo, vincular el método acadio con la visualización y el establecimiento de las relaciones generales como medio para promover habilidades de pensamiento algebraico en otro contexto de tarea?

7.3. Limitantes del estudio

Los resultados obtenidos no son generalizables pues no provienen de un diseño estadístico. La investigación representa un acercamiento intensivo de un proceso de aprendizaje, por tal motivo son producto de un proceso interpretativo del grupo de investigadores, por consiguiente es preciso dar continuidad a este tipo de acercamientos a fin de robustecer la replicabilidad de los resultados.

Un aspecto que cabe resaltar fue el número considerable de estudiantes que a lo largo de la intervención mostraron desinterés hacia el trabajo. Este problema que se menciona abre perspectivas de investigación acerca de conocer las razones que desmotivaron a los participantes hacia estas actividades que pudieran parecer lúdicas a los alumnos o profesores.

Por último, el tipo de representación verbal de la regla puede generar ruptura ante aquellas posturas tradicionales que valoran y se centran en el aspecto del manejo simbólico como elemento esencial del estudio tradicional del álgebra.

GLOSARIO

Abstraer. Operación intelectual consistente en separar una cualidad para analizarla en su esencia

Estrategia. Procedimiento o modo de actuación que regula y asegura decisiones en la resolución de una tarea

Estructura. Disposición de los elementos a partir de una relación

Generalizar. Habilidad que moviliza razonamientos generales a partir del análisis de los términos particulares observables en una sucesión

Inducción. Modo de pensamiento que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares

Patrón. Refiere a toda situación repetida con regularidad a partir de una estructura determinada

Regla general. Es la expresión algebraica que expresa la estructura de los términos en un conjunto ordenado

Sucesión. Es un conjunto ordenado de objetos matemáticos, generalmente números naturales

Término. Refiere a cada uno de los elementos que constituyen el conjunto ordenado de la sucesión

BIBLIOGRAFÍA

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathemathics, 52*, 215-241.

Aspinwall, L., Shaw, K., y Presmeg, N. (1997). Uncontrollable mental imagery. Graphical connections between a function and its derivate. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 301-317.

Barab, S. y Squire, K. (2004). Design-Based Research: putting a stake in the ground. *The Journal of the learning science, 13*(1), 1-14.

Barbosa, A., Vale, I., & Palhares, P. (2009). Exploring generalization with visual patterns: tasks developed with pre-algebra students. *Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática*, 137-149.

Barbosa, A., Vale, I., & Palhares, P. (2012). Pattern tasks: thinking processes used by 6th grade students. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15*(3), 273-293.

Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: potential and challenges. *Journal of the European Teacher Education Network*, *10*, 57-70.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning highschool algebra students. En H.L. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, (Vol. 4, pp. 121-128).

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders´ figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. En *Proceeding of the 28th anual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 95-101).

Becker, J., & Rivera, F. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(2), 140-155. En: http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.001 .

Blanton, M., & Kaput, J. (2001) Algebrafying the elementary mathematics experience. En *The future of the teaching and learning of algebra*. *Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol. 1, pp. 344-352).

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mthematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M., y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. *International reviews on mathematical education*. *37*(1), 34-42. DOI: 10.1007/BF02655895.

Butto, C., y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno Logo. *Educación matemática*, *22*(3), 55-86.

Callejo, M.L., García-Reché, A., & Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de investigación en matemática educativa*. *10*, 5-25.

Cañadas, M.C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Cañadas, M., Castro, E., & Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *2*(3), 137-151.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of research on Mathematics teaching and learning*, (pp. 669-705). Charlotte: Information Age Publishing.

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. *Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Castro, E., & Castro, E. (1997). Representación y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, (pp. 95-124).

Castro, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO Competencia numérica y cálculo mental*, *54*, 55-67.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García, L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). ISBN 978-84-695-4466-2; ISSN: 1888-0762.

Chalé, S., & Acuña, C. (2013). El desarrollo del pensamiento algebraico: la visualización en el caso de los patrones.

Chambers, D. (1994) The Right Álgebra for All. *Educational Leadership, 51*(6), 85-86.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology, en Sawyer, R.K. (ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). Nueva York, NY: University Press.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos*. *Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Paidós. Barcelona

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 61-85). Springer Netherlands.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: a guide for teachers*. *Grades 6-10*. Heinemann 361 Hanover Street, Portsmouth, NH 03801-3912.

Euler, D. (2014). Design Research-a paradigm under development.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathemethics, *Educational studies in mathematics, 61*(1), 103-131.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221-262.

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The mathematics teacher*, *91*(2), 166.

García, F. (2005). *Matemática discreta*. Madrid: Thompson.

Gravemeijer, K., & Cobb, p. (2013). Design research from the learning design perspective. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), Educational Design Researcher (72-113). Consultado en línea: http://international.slo.nl/publications/edr/

Güner, P., Ersoy, E., y Témiz, T. (2013). 7 and 8 grade students generalization strategies patterns. *International journal of global education-2013*, *2*(4), 38-45.

Hernández -Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista L. (2003). Metodología de la investigación. *La Habana: Editorial Félix Varela*, *2*.

Hershkowitz, R., Arcavi, A. y Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning - The case of the matches. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(2), 255-265.

Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., y Vinner, S. (1989). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition*. *(ICMI Study Series)* 70-95. Cambridge: University Press.

Hiebert, J., y Carpenter, T. (1992) Handbook of research on mathemathics teaching and learning, National Council of Teachers of Mathemathics, Reston, VA, 65-97.

Hsien, C. (2015). Calculus students´visual thinking of definite integral. *American journal of educational research, 3*(4), 476-482.

INEE. (2006). El aprendizaje del Español y las Matemáticas en la educación básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria.

INEE. (2013). Estructura y dimensión del sistema educativo nacional. México. En http://www.inee.edu.mx

Janet, A., Wilson, K., & Bills, L. (2003). Generalising the Context and Generalising the Calculation. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 9-16.

Kaput, J. (1995). Lomg term algebra reform: Democratizing acces to big ideas. En *The algebra initiative colloquium* (Vol. 1, pp. 33-49).

Kaput, J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. *Algebra in the early grades*, 5-17.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En F. K. Lester (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-417) Ontario: Macmillan.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it?. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of research on Mathematics teaching and learning*, (pp. 707-750). Charlotte: Information Age Publishing.

Küchemann, D. (2010). Using patterns generically to see structure. *Pedagogies: an international journal*, *5*(3), 233-250.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 3-28.

Lesley, L., & Freiman, V. (2004). Tracking primary student´s understanding of patterns. In *Proceeeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 415-422).

Lesley, L., & Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through pattern exploration. National Council of Teachers of Mathematics, *11*(9), pp. 428-433.

Liang, B., y Hoyles, C. (2014). Generalisation of linear figural patterns in secondary school mathematics. *The Mathematics Educator*, *15*(2), 1-30.

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is* (Tesis doctoral). Recuperada de http://eprints.nottingham.ac.uk/13227/1/316414.pdf

Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En *Análisis didáctico en educación matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 81-102). Comares

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds), *Approaches to algebra,* pp. 65-86. Dordrecht: Kluwer.

Mason, J., Stephens, M., y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Mason, J., Graham, A., y Johnston-Wilder, S. (2012). *Developing thinking in algebra*. Londres, Inglaterra: SAGE-Publicaciones.

Mayer, R. E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Paidós. Barcelona.

McKenney, S., & Reeves, T. C. (2014). Educational design research. In *Handbook of research on educational communications and technology* (pp. 131-140). Springer New York.

Molina, M., Castro, E., y Ambrose, R. (2006) Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. PNA, *1*(1), 33-46.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2007) Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary social Sciences, 2*(4), 435-440.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011) Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los Experimentos de Enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

Morales, R., Cañadas, M.C., Brizuela, B., & Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales. En *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 365-375).

Mulligan, J., Mitchelmore, M., Kemp, C., Marston, J., y Highfield, K. (2008). Encouraging Mathematical Thinking through pattern and structure. An intervention in the first year of schooling. Australian Primary Mathematics Classroom, *13*(3), 10.

Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M. (2009) Awareness of pattern and structure in early mathematics development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). Professional Standards for Teaching Mathematics. Reston, VA: NCTM

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Executive Summary.

Nieveer, N., y Folmer, E. (2013) Formative evaluation in education design research. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds). *Educational Design Researcher* (152-169). Consultado en línea: http://international.slo.nl/publications/edr/

Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational studies in mathematics*, *33*(2), 203-233.

Papic, M. (2007) Promotting repeating patterns with Young children-more than just alternating colours. *Australian Primary Mathemathics Classroom, 12*(1), 8.

Pólya, G. (1973). How to solve it. Princeton, NJ: Princeton University.

Programa para la Evaluación Internacional de alumnos (PISA) (2012).Consultado en: https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-mexico-ESP.pdf

Plomp, T., & Nieveen, N. (2013). Educational design research: Introduction and illustrative cases.

Presmeg, N. (2006). Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future. Sense publishers, Rotterdam, 205-235.

Programa Sectorial de Educación 2013-2018 (2013). Secretaría de Educación Pública.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective En *Proceedings of the 28th anual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, pp. 1-20).

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts, *ZDM, 40*(1), 83-96.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA, 6*(4), 117-133.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática*. *Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Comares.

Ramírez, R., Ramírez, I., Flores, P., & Castro, E. (2013). Análisis de las capacidades de visualización espacial e intelectual en los alumnos con talento matemático. *Revista Mexicana de Psicología, 30*(1), 267-299.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 15-38). Barcelona: Horsori.

Rico, L. & Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En *Análisis didáctico en educación matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Comares.

Rico, L. Castro, E., & Romero, I. (2000) Sistemas de representación y aprendizajes de estructuras numéricas. En Intervención Psicopedagógica y Currículum Escolar. (Coord) J.A. Beltrán, L.F. Pérez, D. Vence, V. Bermejo, M. D. Prieto y R. González. (153-182). España.

Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics*. *Psychological and pedagogical considerations*. California: Springer. DOI: 10.1007/978-94-007-2712-0

Rivera, F. (2015). The distributed nature of pattern generalization. *PNA, 9*(3), 165-191.

Rodríguez-Domingo, S., & Molina, M. (2013). De lo verbal a lo simbólico: un paso clave en el uso del álgebra como herramienta para la resolución de problemas y la modelización matemática. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática*. *Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 111-118). Granada, España: Comares.

Romberg, T. A., & Kaput, J. J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. *Mathematics classrooms that promote understanding*, 3-17.

Samson, D. (2012). Encouraging meaningful engagement with pictorial patterning tasks. *Australian Mathematics Teacher*, *68*(2), 4-10.

Sánchez, A. y Andrade, E. (2009). El aprendizaje en tercero de secundaria en México. Informe sobre los resultados del Excale 09, aplicación 2008. Español, matemáticas, biología y formación cívica y ética. México, D.F.: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

SEP (2002). Pensamiento algebraico. Licenciatura en Educación Secundaria. Especialidad: Matemática. Programa de Estudio. Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académico de las Escuelas Normales.

SEPa. (2011). Programa de estudio. Matemáticas. Guía para el Maestro. Segundo grado. Educación Básica. México.

SEPb. (2011). Programa de estudio. Matemáticas. Guía para el Maestro Sexto grado. Educación Básica. México.

Shavelson, R. J., Phillips, D. C., Towne, L., & Feuer, M. J. (2003). On the science of education design studies. *Educational researcher*, *32*(1), 25-28.

Stacey, K., Chick, F. y Kendall, M. (2004). The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study. Springer:Kluwer.

Steen, L.A. (1988). The science of Patterns. *Science,* New series, 240, 611-616.

Suwarsono, S. (1982). Visual imagery in the mathematical thinking of seventh grade students. Tesis doctoral. Monach University: Melbourne.

Tanisli, D., & Ozdas, A. (2009). The strategies of using the generalizing patterns of the primary school 5th grade students. *Educational Science: Theory and Practice*, *9*(3), 1485-1497.

Valverde, G. (2012). Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, *9*(3), 193-215.

Wagner, S., & Parker, S. (1993). Advancing algebra. *Research ideas for the classroom: High school mathematics,* 119-139.

Walkowiak, T. A. (2014). Elementary and middle school students´ analyses of pictorial growth patterns. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 56-71.

Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: Supporting the process in the early years. En *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 417- 424).

Zazkis, R., y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.

Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a study of students´ understanding, *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 435-437.

APÉNDICES

APÉNDICE A

Contenidos y aprendizajes esperados en el contexto del trabajo con sucesiones figurales en el currículo de matemática escolar en México

Eje: sentido numérico y pensamiento algebraico			
Tema : Patrones y ecuaciones			
Grado	Bloque	Contenido	Aprendizaje esperado
2	IV	Identificación y descripción del patrón en sucesiones construidas con figuras compuestas	Describe, reproduce y crea sucesiones formadas con figuras
3	IV	Identificación de la regularidad en sucesiones con figuras con progresión aritmética, para continuar la sucesión o encontrar términos faltantes	Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética
4	V	Identificación del patrón en una sucesión de figuras compuestas, hasta con dos variables	Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones
6	V	Identificar y aplicar la regularidad en sucesiones con figuras, que tengan progresión aritmética o geométrica, así como sucesiones especiales	Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética.
1 ES	I	Construcción de sucesiones de figuras a partir de una regla dada en lenguaje común. Formulación en lenguaje común de expresiones generales que definen las reglas de sucesiones aritméticas de figuras	Representa sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada y viceversa
2 ES	IV	Construcción de sucesiones de números enteros a partir de las reglas algebraicas que las definen. Obtención de la regla general (en lenguaje algebraico) de una sucesión con progresión aritmética de números enteros	Representa sucesiones de números a partir de una regla dada y viceversa

Nota: ES = Educación Secundaria

Apéndice B

Organización y descripción general de las sesiones de intervención

Sesión	1a	2a	3a	4a	5a	6a
Fecha	7/9/2016	15/9/2016	23/9/2016	28/9/2016	05/10/2016	12/10/2016
No.de alumnos	28	28	30	30	25	28
Duración (min)	50´	50	50	50	50	50
Objetivos de intervención	1. Reconocer las estrategias de generalización cercana y lejana. 2.Detectar dificultades encontradas en la tarea de generalización	1. Discusión de las estrategias utilizadas en la tarea anterior. 2. Promover el desarrollo del pensamiento algebraico a partir del establecimiento de estrategias visuales de variabilidad entre los elementos y su generalización 3. Promover la verbalización como representación externa que dé cuenta del patrón de la sucesión.	1. Promover el pensamiento funcional, detectando valores de cambio independiente y dependiente. 2. Promover el establecimiento de la generalización en su forma verbal. 3. Detectar las dificultades para detectar la relación de covarianza y el establecimiento de la generalización de la relación y sucesión.	1. Promover el uso de estrategias visuales y discutir la amplitud de patrones observados. 3. Evaluar el ajuste entre la estructura de la sucesión y el patrón detectado por los estudiantes	1. Promover el uso de representación verbal y simbólica de la generalización	1. Evaluar la comprensión de pensamiento funcional. 2. Identificar la eficacia de estrategias visuales en la generalización.
Actividades realizadas	1. Prueba escrita sobre tarea de generalización	1. Discusión acerca de las estrategias en generalización. 2. Prueba escrita empleada en la sesión anterior	1. Prueba escrita sobre patrones de covarianza. 2. Discusión y análisis de estrategias de solución de tareas de variabilidad 3. Entrevista sobre estrategias cognitivas	1. Prueba escrita 2. discusión sobre el análisis de los patrones 3. Evaluar el ajuste de la expresión de generalidad	1. ejercicio de transición de representación verbal a simbólica	
Técnicas de recolección de datos	Grabación en video Hojas de trabajo	Grabación en video Hojas de trabajo	Grabación de video Hojas de trabajo Grabación de audio			