



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE AGUASCALIENTES**

CENTRO DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS

TESIS

**MODELOS ESTOCÁSTICOS APLICADOS A LOS PROCESOS DE
PRECIOS Y A LA OPTIMIZACIÓN DE UN PORTAFOLIO DE ACCIONES
DEL MERCADO BURSÁTIL MEXICANO**

PRESENTA

Manuel Delfino Sáinz Fernández

**PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR
EN CIENCIAS ADMINISTRATIVAS**

COMITÉ TUTORAL:

**Dr. Netzahualcóyotl Castañeda Leyva
Dr. Erick Treviño Aguilar
Dr. Carlos Omar Trejo-Pech**

Aguascalientes, Ags., noviembre de 2012

Oficio No. /CCEA / SIP / 047 / 2012

C.P. MARIA ESTHER RANGEL JIMENEZ,
JEFA DEL DEPTO. DE CONTROL ESCOLAR,
P R E S E N T E .

Me es grato comunicarle que el alumno(a) MANUEL DELFINO SAINZ FERNANDEZ Id 122554, ha concluido satisfactoriamente su tesis para obtener el grado de DOCTORADO EN CIENCIAS ADMINISTRATIVAS, con el título "**MODELOS ESTOCÁSTICOS APLICADOS A LOS PROCESOS DE PRECIOS Y A LA OPTIMIZACIÓN DE UN PORTAFOLIO DE ACCIONES DEL MERCADO BURSÁTIL MEXICANO**", este proyecto se realizó bajo la dirección de su Comité Tutorial:

Director de Tesis	DR. NETZAHUALCOYOTL CASTAÑEDA LEYVA
Lector 1	DR. ERICK TREVIÑO AGUILAR
Lector 2	DR. CARLOS OMAR TREJO PECH

El cual se concluyó satisfactoriamente con **VOTO APROBATORIO** de acuerdo a lo señalado por el Art. 175 apartado II del Reglamento General de Docencia, anexando copia de la citada aprobación.

Sin otro particular por el momento quedamos a sus atentas órdenes para cualquier aclaración al respecto.

Atentamente
Aguascalientes, Ags., 07 de noviembre de 2012
" SE LUMEN PROFERRE "



DRA. MARIA DEL CARMEN MARTINEZ SERNA
DECANA DEL CENTRO

c.c.p.- Secretaría de Investigación y Posgrado del CCEA
c.c.p.- Depto. de Apoyo al Posgrado
c.c.p.- Minuta de Sec. Investigación y Posgrado
c.c.p.- Archivo Doctorado

*mchn

Dra. María del Carmen Martínez Serna
DECANA DEL CENTRO DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS

PRESENTE

Por medio del presente, como Tutor designando del estudiante **MANUEL DELFINO SÁINZ FERNÁNDEZ** con ID 122554 quien realizó la tesis titulada: **Modelos estocásticos aplicados a los procesos de precios y a la optimización de un portafolio de acciones del mercado bursátil mexicano**, y con fundamento en el Artículo 175, Apartado II del Reglamento General de Docencia, me permito emitir el **VOTO APROBATORIO**, para que él pueda proceder a imprimirla, y así continuar con el procedimiento administrativo para la obtención del grado.

Pongo lo anterior a su digna consideración y sin otro particular por el momento, me permito enviarle un cordial saludo.

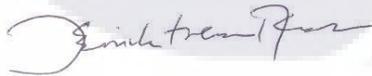
ATENTAMENTE

“Se Lumen Proferre”

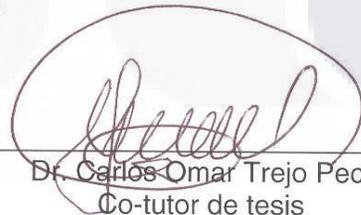
Aguascalientes, Ags., a 15 de octubre de 2012.



Dr. Netzahualcóyotl Castañeda Leyva
Tutor de tesis



Dr. Erick Treviño Aguilar
Co-tutor de tesis



Dr. Carlos Omar Trejo Pech
Co-tutor de tesis

ccp.- Interesado
ccp.- Secretaría de Investigación y Posgrado
ccp.- Jefatura del Depto. de Administración Básica
ccp.- Consejero Académico
ccp.- Minuta Secretario Técnico



Hagan School of Business



SAN FRANCISCO
STATE UNIVERSITY



<http://www.ibec-info.org/2012/>

Co-Conference Chairs:

John Manley
Hagan School of Business
Iona College, New York, USA
jmanley@iona.edu

Bruce Heiman
College of Business
San Francisco State University, USA
heiman@sfsu.edu

Dear **Manuel D. Sáinz-Fernández** (Universidad Autónoma de Aguascalientes, Universidad Panamericana at Aguascalientes, México), **Netzahualcóyotl Castañeda-Leyva** (Universidad Autónoma de Aguascalientes, México), **Erick Treviño-Aguilar** (Universidad de Guanajuato, México), and **Carlos Omar Trejo-Pech** (Universidad Panamericana at Guadalajara, México):

Congratulations! Based on the recommendation by peers, your paper entitled "**AN APPLICATION OF THE MERTON-BLACK-SCHOLES (OSBORNE-SAMUELSON) CONTINUOUS TIME STOCHASTIC MODEL IN THE MEXICAN STOCK EXCHANGE**" has been accepted for presentation at the XI International Business and Economy Conference 2012 to be held in the Hapuna Beach Prince Hotel, Waimea, Hawaii (The Big Island), USA, January 5 - 8, 2012.

Accepted papers presented at the Conference are published in the Proceedings (United States Library of Congress ISSN 1537 2316).

Only those accepted papers presented at the conference will be included in the Conference Proceedings. Please refer to the conference web site for Registration and Payment Options. We encourage you to support IBEC by using the conference hotel.

If you have questions, please do not hesitate to contact us. We look forward to seeing you in Hawaii.

Best regards,

Co-Program Chairs / Editors:

Carlos Trejo-Pech
Universidad Panamericana at Gdl
Mexico
ctrejo@up.edu.mx

Pavel Strach
Škoda Auto University
Czech Republic
strach@is.savs.cz

Agradecimientos

A mis tutores,
Dr. Netzahualcóyotl Castañeda, Dr. Erick Treviño y Dr. Carlos Trejo
por su invaluable ayuda.

A mis amigos, Paco y Rafa por su comprensión y apoyo.

A Cris, Manuel, Juan Pablo, Javier y Bernardo
por su paciencia.

A Manuelito[†] y Lichita por su ejemplo.

Índice General

	<u>Página</u>
Índice de Tablas	3
Índice de Figuras	4
Resumen	5
Introducción	
Antecedentes	8
Planteamiento del problema	9
Objetivo	10
Hipótesis	11
Capítulo I. Marco Teórico	
1.1. La administración de inversiones y los modelos financieros	12
1.2. Modelos econométricos	22
1.3. Modelo de la teoría clásica de portafolio	27
1.4. Funciones de utilidad	40
1.5. El Índice de Precios y Cotizaciones	49
Capítulo II. Planteamiento de los Modelos	
2.1. Modelo de Vasicek de renta fija	55
2.1.1. Estimadores de los parámetros del modelo	58
2.2. Modelo de Black-Scholes-Merton para activos con riesgo	62
2.2.1. Estimadores de los parámetros del modelo	64
2.2.2. Modelo de portafolio de inversión	69
2.2.3. Optimización del portafolio de inversión	72
2.3. Modelos de estructura de correlación	76
2.4. Validación empírica de los supuestos de los modelos	82
Capítulo III. Metodología y Resultados	
3.1. Modelo de Vasicek para la tasa de interés	86
3.1.1. Base de datos	86
3.1.2. Estimación de parámetros del modelo	87
3.2. Modelo Black-Scholes-Merton para precios de acciones	89
3.2.1. Base de datos	89
3.2.2. Estimación de parámetros del modelo	99
3.2.3. Análisis dinámico	101
3.2.4. Pruebas de validación empírica de los supuestos de los modelos	106
3.3. Modelo de Black-Scholes-Merton para portafolios óptimos	120
3.3.1. Base de datos	120
3.3.2. Portafolio del Mercado con venta en corto	123
3.3.3. Línea del Mercado de Capital	125
3.3.4. Portafolios óptimos con función de utilidad potencia	127

3.3.5. Portafolio de Varianza Mínima Global con venta en corto 128
3.3.6. Portafolios con venta en corto con diferente estructura de correlación ... 129
3.3.7. Portafolios sin venta en corto y el Índice de Precios y Cotizaciones 155
3.3.8. Portafolios sin venta en corto con diferente estructura de correlación ... 159

Capítulo IV. Conclusiones 169

Glosario 176

Bibliografía 178

Anexos 185



Índice de Tablas

	<u>Página</u>
Tabla 3.1.	Tasa de interés estimada 87
Tabla 3.2.	Emisoras seleccionadas 94
Tabla 3.3.	Rendimiento y volatilidad de una muestra de 40 acciones y el IPC 100
Tabla 3.4.	Resultados de la prueba estadística de Durbin-Watson 113
Tabla 3.5.	Resultados de la prueba estadística de Jarque-Bera 118
Tabla 3.6.	Ponderaciones (π) de las emisoras que componen el IPC al 16/07/2010, rendimiento, volatilidad y razón de Sharpe (θ) 122
Tabla 3.7.	Ponderaciones (π) del portafolio del Mercado con venta en corto, rendimiento y volatilidad 124
Tabla 3.8.	Portafolios calculados con diferentes ponderaciones del portafolio del Mercado (π) y del bono libre de riesgo 126
Tabla 3.9.	Portafolios con diferentes riesgos (γ) calculados con el modelo BSM formados por el portafolio del Mercado (π) y el bono libre de riesgo ... 127
Tabla 3.10.	Ponderaciones (π) del portafolio de VMG con venta en corto 129
Tabla 3.11.	Regresión del rendimiento de la acción contra el rendimiento del IPC ... 131
Tabla 3.12.	Ponderaciones (π) del portafolio del Mercado con venta en corto calculado con correlación muestral (var-cov) y de índice simple 135
Tabla 3.13.	Ponderaciones (π) del portafolio de VMG con venta en corto calculado con correlación muestral (var-cov) y de índice simple 139
Tabla 3.14.a.	Coefficientes de correlación entre acciones 140
Tabla 3.14.b.	Coefficientes de correlación entre acciones 141
Tabla 3.14.c.	Coefficientes de correlación entre acciones 141
Tabla 3.14.d.	Coefficientes de correlación entre acciones 142
Tabla 3.14.e.	Coefficientes de correlación entre acciones 142
Tabla 3.14.f.	Coefficientes de correlación entre acciones 143
Tabla 3.14.g.	Promedio de correlación de cada acción y promedio general 143
Tabla 3.15.	Ponderaciones (π) del portafolio del Mercado calculado con correlación muestral (var-cov), de índice simple.y correlación constante 145
Tabla 3.16.	Ponderaciones (π) del portafolio de VMG calculado con correlación muestral (var-cov), de índice simple.y correlación constante 147
Tabla 3.17.	Ponderaciones (π) del portafolio del Mercado con venta en corto calculado con cinco diferentes coeficientes de correlación 150
Tabla 3.18.	Ponderaciones (π) del portafolio de VMG con venta en corto calculado con cinco diferentes coeficientes de correlación 154
Tabla 3.19.	Ponderaciones (π) del portafolio del IPC, y de los portafolios sin venta en corto de VMG, tres portafolios Eficientes y el del Mercado 156
Tabla 3.20.	Ponderaciones (π) del portafolio del Mercado sin venta en corto calculado con tres estructuras de correlación 159
Tabla 3.21.	Ponderaciones (π) del portafolio de VMG sin venta en corto calculado con tres estructuras de correlación 161
Tabla 3.22.	Ponderaciones (π) del portafolio del Mercado sin venta en corto calculado con cinco diferentes coeficientes de correlación 164
Tabla 3.23.	Ponderaciones (π) del portafolio de VMG sin venta en corto calculado con cinco diferentes coeficientes de correlación 166
Tabla 3.24.	Portafolio con volatilidad cero 168

Índice de Figuras

	<u>Página</u>
Figura 1.1.	Línea del Mercado de Capital y la Frontera Eficiente 35
Figura 1.2.	Curvas de indiferencia 41
Figura 1.3.	Portafolios óptimos en la LMC y en la Frontera Eficiente 43
Figura 1.4.	Diferentes funciones de utilidad 48
Figura 2.1.	Simulación de la dinámica del CETE utilizando el modelo Vasicek de la ecuación (2.5) y la tasa estimada por el modelo $r_0 = 5.55\%$ 58
Figura 2.2.	Simulaciones de precios de ELEKTRA utilizando el modelo BSM de la ecuación (2.8) y $S_0 = 1$ 64
Figura 3.1.	Rendimiento nominal anual del CETE para diferentes emisiones 86
Figura 3.2.	Precios de cierre diarios de una muestra de 12 emisoras 90
Figura 3.3.	Muestra de acciones con precios escalados 91
Figura 3.4.	Precios escalados a uno de 3 emisoras mostrando alta, media y baja volatilidad 92
Figura 3.5.	Series de log-rendimientos de 6 acciones 96
Figura 3.6.a.	Diagramas de dispersión de series de log-rendimientos 97
Figura 3.6.b.	Diagramas de dispersión de series de precios 98
Figura 3.7.	Rendimiento contra volatilidad de una muestra de 40 acciones y el IPC . 101
Figura 3.8.	Estimadores del rendimiento mediante el intervalo dinámico <i>Forward</i> , <i>Backward</i> y el estimador histórico de intervalo completo 103
Figura 3.9.a.	Estimador de intervalo dinámico ponderado y estimador histórico 105
Figura 3.9.b.	Estimador de intervalo dinámico ponderado y estimador histórico 105
Figura 3.10.	Diagramas de dispersión de log-rendimientos contra su rezago 107
Figura 3.11.	Diagramas de dispersión del cuadrado de residuales contra su rezago .. 108
Figura 3.12.a.	Gráficas de la función de autocorrelación de la serie de log-rendimientos 110
Figura 3.12.b.	Gráficas de la función de autocorrelación de la serie del cuadrado de log-rendimientos 111
Figura 3.13.	Histogramas de series de log-rendimientos y la normal 114
Figura 3.14.	Diagramas Q-Q de las series de log-rendimientos 116
Figura 3.15.	Histogramas bivariados de las series de log-rendimientos 117
Figura 3.16.	Rendimiento contra volatilidad de 31 acciones que componen la muestra del IPC al 16/07/2010 123
Figura 3.17.	Portafolios óptimos con venta en corto 126
Figura 3.18.	Beta y coeficiente de determinación de la regresión de cada acción con el IPC 131
Figura 3.19.a.	Portafolio del Mercado con venta en corto con correlación muestral ... 137
Figura 3.19.b.	Portafolio del Mercado con venta en corto con correlación de índice simple 137
Figura 3.19.c.	Portafolio del Mercado con venta en corto con correlación constante ... 146
Figura 3.20.a.	Portafolio del Mercado con venta en corto con correlación $\rho = 0$ 151
Figura 3.20.b.	Portafolio del Mercado con venta en corto con correlación $\bar{\rho} = 0.35$... 151
Figura 3.20.c.	Portafolio del Mercado con venta en corto con correlación $\rho = 0.7$ 152
Figura 3.21.	Portafolios óptimos sin venta en corto y el IPC 157

Resumen

El importante desarrollo que en las últimas décadas han tenido los modelos econométricos, así como el acelerado crecimiento de la capacidad de cálculo de las computadoras modernas, han propiciado que se justifiquen los esfuerzos para el desarrollo y aplicación de modelos matemáticos para la toma de decisiones en el ámbito de la administración de activos financieros, y en particular, de la gestión de portafolios de inversión de activos con riesgo.

En el capítulo I de esta tesis se hace una revisión de los modelos más importantes y en el capítulo II se plantea el modelo de Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971) también conocido como Osborne-Samuelson (Osborne, 1959 y Samuelson, 1965), para los procesos de precios de acciones y la determinación de portafolios óptimos, y los modelos de Sharpe (1963) y de Elton y Gruber (1973) para dos diferentes estructuras de correlación entre acciones. Se propone también el modelo de Vasicek (1977) o proceso de Ornstein-Uhlenbeck (Ornstein y Uhlenbeck, 1930) para la simulación de la tasa de interés de un bono libre de riesgo. En el mismo capítulo se lleva a cabo la inferencia de los estimadores de los parámetros de los modelos y se propone la metodología para la validación de los supuestos de los modelos.

En el capítulo III se desarrolla la metodología para estimar los parámetros y las soluciones óptimas de portafolios, utilizando como datos las series de precios históricos de las acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores, disponibles en las bases de datos Infosel® y Economatica® y las series de tasas de rendimiento del Certificado de la Tesorería publicadas por Banco de México.

Se reportan los resultados de los rendimientos y volatilidad de una muestra de 40 acciones y el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores y se prueba el estimador de rendimiento mediante un análisis de intervalo dinámico en el que se valida la calidad del estimador. Se llevan a cabo también las pruebas de validación empírica de los supuestos de los modelos, obteniendo, en lo general, su validez.

En la optimización de portafolios se utiliza una muestra de 31 acciones que participan en el Índice de Precios y Cotizaciones. Además de obtener varios portafolios Eficientes, se determina el portafolio del Mercado y el de Varianza Mínima Global, con y sin venta en corto.

Para la optimización de portafolios con venta en corto se utiliza la función de utilidad potencia para considerar los diferentes perfiles de riesgo del inversionista. El Índice de Precios y Cotizaciones se compara con varios portafolios sin venta en corto, incluyendo el portafolio del Mercado y el de Varianza Mínima Global.

Por último, todos los portafolios obtenidos, con y sin venta en corto, se calculan utilizando los dos modelos propuestos de estructura de correlación para comparar los resultados con los obtenidos utilizando la correlación muestral del modelo de Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971). Se recomienda la utilización de estos modelos alternativos de estructura de correlación para la obtención de mejores portafolios y para la simulación de escenarios donde la correlación entre acciones se aproxime o tienda a un valor constante.

Como herramientas de cálculo de la investigación, se utiliza Excel®, el software Statistica® y se desarrolla un programa con el software R¹ para el cálculo de los parámetros y portafolios óptimos, así como para las pruebas analíticas de validación del modelo. Este programa es una herramienta de apoyo para la toma de decisiones de asesores y administradores de carteras de inversión, así como en la enseñanza de modelos cuantitativos para la optimización de portafolios dentro del campo de las finanzas y la econometría.

¹ R es un software de programación de código abierto.

Desde la perspectiva académica, la investigación complementa la escasa literatura referida a la modelación de los rendimientos bursátiles mexicanos. Hasta donde se investigó, no hay estudios que hayan modelado series de precios del mercado bursátil mexicano y obtenido estrategias de portafolio de inversión óptimas con el modelo estocástico de Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971).



Introducción

Antecedentes

Actualmente en el mundo de las finanzas existen tres formas comunes de analizar a las empresas para evaluar y predecir, con información histórica, el futuro comportamiento de las mismas y determinar su valor.

El enfoque de Análisis Fundamental consiste en valorar a la empresa a través de un análisis profundo de los estados financieros, el equipo gerencial, su mercado, competidores, aspectos legales, fiscales, etc. Se trata de llegar a fondo en el conocimiento de la empresa y hacer proyecciones de los estados financieros históricos, suponer escenarios, hacer análisis de sensibilidad, etc.

Este enfoque parece una forma adecuada de modelar una empresa y determinar su valor, sin embargo, hay dos dificultades fundamentales. Primero, se requiere de un alto nivel de información contable y aún así, los aspectos más importantes pueden estar escondidos fuera de los estados financieros. Segundo, y más importante, el hecho de que se pueda modelar financieramente la empresa e inclusive se pueda llegar a un valor de la misma, no significa que ese valor, en ese momento de tiempo, sea el que va a pagar el mercado, ni que la empresa va a generar los flujos futuros de dinero calculados, que pueden ser muy diferentes a los que los inversionistas esperan. En resumen, la empresa no se puede ver como una entidad aislada de los mercados financieros y de todos los factores que influyen en ellos.

El segundo enfoque es el de Análisis Técnico, que es muy diferente al anterior, precisamente en que es muy simple y sencillo. En el análisis técnico no importa nada la información relacionada con la empresa, excepto la información que pueda estar contenida en la serie de datos históricos del precio y del volumen operado de la acción en el mercado de valores. Se basa en descubrir tendencias y patrones específicos en el comportamiento histórico del precio de la acción, y en base a estos, hacer predicciones pertinentes. La evidencia académica sobre este tema sugiere que este tipo de análisis es poco útil.

La última forma de análisis, que es dentro de la que se enmarca el contenido de esta tesis, es el Análisis Cuantitativo, y se puede decir que ha sido la forma más exitosa de los últimos 30 años, dando lugar a una sólida teoría para modelar procesos de precios de acciones y derivados, determinación de portafolios óptimos de inversión y gestión del riesgo.

El Análisis Cuantitativo consiste en considerar a las variables financieras, tales como el precio de la acción o la tasa de interés, como aleatorias, y de esta manera escoger o desarrollar los mejores modelos para manejar la incertidumbre en los mercados financieros en los que se compran y venden diferentes tipos de valores o activos, mercados que incluyen al de acciones e índices, bonos y otros instrumentos de deuda, divisas, bienes o *commodities*, y derivados.

Estos modelos permiten hoy a los gestores de carteras de inversión, simular el comportamiento de activos financieros, bajo diferentes escenarios de riesgo, y optimizar sus portafolios buscando el mejor equilibrio entre rentabilidad y riesgo para los diferentes perfiles de aversión o propensión al riesgo de los inversionistas.

Planteamiento del problema

Esta tesis plantea los siguientes problemas:

- 1°. Obtener una base de datos de calidad de las series de precios de las acciones.
- 2°. Validar los supuestos y fundamentos teóricos de los modelos utilizados.
- 3°. Obtener estimaciones confiables del rendimiento, volatilidad y estructura de correlación de las acciones, a partir de modelar la dinámica de los procesos de precios de las acciones.
- 4°. Obtener un estimador de la tasa de interés o tasa libre de riesgo.
- 5°. Optimizar el modelo de portafolio de acciones y desarrollar recomendaciones para lograr los mejores portafolios de inversión.

Objetivo

El objetivo de la de tesis es modelar los precios de las acciones de empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores, así como un bono líder del mercado de dinero y determinar estrategias óptimas de inversión considerando un portafolio con un activo sin riesgo (bono) y m activos con riesgo (acciones).

Este objetivo se lleva a cabo a través de la estimación y cálculo de los parámetros de los modelos para determinar estrategias óptimas de inversión, considerando un portafolio con las acciones que componen el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, y el bono libre de riesgo modelado a partir de los rendimientos del Certificado de la Tesorería (CETE) emitido por el Banco de México.

La contribución de la tesis es aplicar, utilizando el modelo de Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971), la metodología de optimización de portafolios de inversión en el mercado bursátil mexicano. Se estiman los parámetros de los modelos mediante el estimador de máxima verosimilitud, asumiendo la existencia de datos faltantes, y mediante un análisis exploratorio de los datos históricos se valida la base de datos y se estiman los parámetros del modelo, juzgando su pertinencia y la calidad de la predicción. Para la simulación de la tasa libre de riesgo de un bono se utiliza el modelo de Vasicek (1977) y para determinar estructuras alternativas de correlación entre las acciones se utiliza el modelo de índice simple de Sharpe (1963) y el de correlación constante de Elton y Gruber (1973).

Debido a la importancia que actualmente tiene, dentro de la administración financiera, contar con una herramienta que permita determinar portafolios óptimos, se desarrolla un programa con el software de programación R, tanto para la toma de decisiones en el ámbito de la administración de activos financieros, ya sea en la gestión de patrimonios o en las tesorerías de las empresas, como para fines de la enseñanza de la teoría financiera de portafolios de inversión.

Hipótesis

H1: A partir de las bases de datos Infosel® y Economatica® y mediante un análisis exploratorio y una minuciosa selección de las series de precios de las emisoras que cotizan en el mercado bursátil mexicano, considerado un mercado poco profundo (Alarco-Tosoni, 2008), se obtienen datos de calidad.

H2: Los estimadores de rendimiento y volatilidad del modelo Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971) obtenidos mediante inferencia por máxima verosimilitud, para datos completos y faltantes, se validan empíricamente con estimaciones confiables.

H3: Los supuestos de independencia y normalidad de los rendimientos del modelo Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971) se validan en lo general para las series de precios de acciones que cotizan en el mercado bursátil mexicano.

H4: La estrategia de portafolios del modelo Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971) con función de utilidad potencia permite obtener portafolios óptimos para diferentes perfiles de riesgo del inversionista.

H5: La ponderación del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores en base a la capitalización del mercado no representa un portafolio óptimo y portafolios superiores se obtienen con el modelo Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971).

H6: Estructuras de correlación diferentes a la correlación de la muestra del modelo Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971) aportan información para obtener portafolios superiores.

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

Capítulo I. Marco Teórico

1.1. La administración de inversiones y los modelos financieros

La administración de inversiones, tal como se la conoce hoy, es una disciplina relativamente reciente. Hasta el siglo XVIII, la riqueza era esencialmente riqueza física, asociada a la propiedad o privilegios sobre tierras tales como los derechos de imponer tarifas o explotar recursos naturales (de Roover, 1955).

Durante la Edad Media, en Europa occidental, prestar dinero para obtener un rendimiento era considerado usura y era condenado por la iglesia. Sin embargo, este mismo período sirvió para el desarrollo de bancos importantes, tales como el Peruzzi y el Bardi, establecidos en Florencia. Estos bancos quebraron cuando el rey inglés Eduardo III incumplió el pago de 1 millón de florines de un préstamo en el año 1339 (Stevens, 2011).

El primer mercado donde se operaron contratos financieros abrió en Amberes, Bélgica en el siglo XVI, pero no fue sino hasta la apertura del mercado accionario en París, en 1720, seguido por el de Londres en 1792 y Nueva York en 1801, que se marcó el comienzo de la era de las operaciones financieras y de inversión que hoy conocemos.

Detrás de estos cambios hubo importantes avances sociales, económicos y políticos. La revolución industrial aceleró enormemente el ritmo de la creación y destrucción de valor y trajo la necesidad de un mercado para inversionistas. Mientras que la tierra fue una forma permanente de riqueza, las fábricas tenían que construirse y requerían la reposición continua de maquinaria y equipo, mismos que duraban relativamente poco tiempo. La creación de un orden social y legal relativamente estable e independiente, mismo que se llevó a cabo en los siglos XVIII y XIX, fue a la vez un factor muy poderoso para la creación de riqueza financiera.

Los mercados financieros y su habilidad para crear y destruir riqueza empezaron a entusiasmar a los inversionistas y crearon dos puntos de vista opuestos acerca de las operaciones financieras. Por un lado, invertir en activos financieros estaba asociado al

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

juego de azar y a la especulación. Un pensador económico profundamente racional como Keynes (1935) tenía una visión esencialmente especulativa de los mercados financieros, dominada, según él creía, por el espíritu animal. Él mismo fue un inversionista exitoso. Este punto de vista se llegó a reflejar en el lenguaje, y todavía en los años de la década de los setentas, se hablaba de “jugar a la bolsa” cuando se trataba de invertir en acciones.

Por otro lado, existía una visión de que los mercados eran perfectamente racionales, vehículos transparentes que servían para canalizar ahorros a las inversiones más productivas. Los inversionistas estaban entusiasmados con el hecho de que la actividad independiente de miles de inversionistas llevara a descubrir el valor real de un contrato financiero. Esta visión llevó a que se concentraran esfuerzos analíticos para descubrir el estatus financiero de las empresas. El tratado de Graham y Dodd (1934) sobre análisis financiero es tal vez la expresión más completa de este enfoque que permaneció como lectura obligatoria de todo analista financiero hasta hace pocos años.

En un sentido, el desarrollo de la administración de inversiones moderna se debe a la progresiva mezcla de estas dos visiones inicialmente irreconciliables, y hay explicaciones de por qué llevó tanto tiempo llegar a un razonable y completo entendimiento de los mercados financieros. Es interesante seguir brevemente este desarrollo ya que da la oportunidad de entender los componentes clave de la modelación financiera y las técnicas cuantitativas que poco a poco dieron lugar a una buena parte del proceso de administración de las inversiones.

Se pretende describir brevemente los aspectos técnicos y cuantitativos de este desarrollo, pero es importante señalar que una amplia gama de eventos culturales y sociales estuvieron también presentes en paralelo. Esto último influyó profundamente en el pensamiento económico de los siglos XVIII y XIX, que fueron testigos del desarrollo del concepto del libre mercado.

Los mercados son tan viejos como la misma civilización y las rutas del comercio tan largas como la que unía a Egipto con Afganistán, que se estableció alrededor de año 2250 AC. Sin embargo, aquellos intercambios no dieron lugar a un verdadero mercado ya que los precios eran regulados por el templo o el palacio.

No fue sino hasta después del colapso del Imperio Romano de Occidente, hacia finales de la Edad Media, que la actividad económica y el comercio florecieron en Europa y fue hasta finales del siglo XVIII en Inglaterra y en la postrevolucionaria Francia, que el concepto de un estado moderno con un sistema legal, independiente y estable, empezó a desarrollarse.

Este desarrollo trajo reglas que estimularon la actividad económica y el emprendedurismo, y con ello la creación de nueva riqueza, menos dependiente de los privilegios (Temin, 2010). En el siglo XIX estos avances estuvieron asociados a la idea de la libertad personal. Como consecuencia, las virtudes del mercado libre se convirtieron en artículo de fe. Esto se reflejó en las teorías económicas, en las que se oponía el concepto de mercados perfectos al de mercados con defectos e imperfecciones.

Desde el punto de vista científico, los mayores obstáculos para un mejor entendimiento de los mercados financieros fueron:

- La necesidad de los conceptos y las matemáticas de la probabilidad y estadística y de manera más general, de la incertidumbre y el riesgo, los cuales fueron desarrollados mucho más tarde.
- La necesidad de llevar a cabo cálculos muy complejos, que fue satisfecha hasta los recientes avances de las computadoras.

Cualquier fenómeno relacionado con el comportamiento humano es en esencia incierto y ya que la economía y las finanzas son profundamente influenciadas por la conducta humana y los procesos humanos de toma de decisiones, el desarrollo de una teoría de las finanzas dependió de manera crítica del desarrollo de una teoría cuantitativa de la incertidumbre.

Esta tarea fue lograda solamente hasta que se desarrollaron los recientes avances de la teoría de probabilidad. Una formulación rigurosa y lógica se desarrolló hasta las primeras tres décadas del siglo XX.

Cuando Bachelier (1900) presentó su ahora famosa tesis sobre la teoría de la especulación en París, se encontraba adelantado a sus tiempos. Bachelier (1900) introdujo varios conceptos que no fueron entendidos, tales como el movimiento Browniano para describir el comportamiento de los precios de las acciones, o argumentos de arbitraje para valorar opciones. Desafortunadamente para Bachelier (1900) sus razonamientos fueron muy económicos para satisfacer a los matemáticos y muy matemáticos para satisfacer a los economistas. Cuando Albert Einstein introdujo el movimiento Browniano en física en 1905, cinco años después de que Bachelier había introducido el mismo concepto en economía, la teoría de Einstein fue reconocida como un importante avance científico.

La economía tuvo que esperar hasta la segunda mitad del siglo XX para que la teoría de probabilidad fuera aceptada como la corriente principal en cuanto a herramienta de análisis financiero. Su aceptación se llevó a cabo a través de un lento proceso que progresivamente introdujo nociones de probabilidad en la estructura lógica de la teoría económica.

Solamente hasta que la teoría de probabilidad se mezcló con los conceptos de oferta, demanda, utilidad, consumo e inversión y con la teoría de la toma de decisiones financiera, a través de los trabajos de Debreu (1960) y Arrow (1965), fue cuando el razonamiento probabilístico se convirtió en una verdadera herramienta de vanguardia para los economistas. A pesar de este importante salto hacia adelante, el camino hacia la moderna econometría financiera fue aún largo y tortuoso.

Entre 1950 y 1960, tres importantes desarrollos se llevaron a cabo. Primero, en 1952, Markowitz (1952) planteó la teoría de las inversiones como la maximización de un equilibrio entre la rentabilidad y el riesgo, casi simultáneamente a la primera publicación formal sobre la gestión de inversiones de Friederich y Vera Lutz (1951) y la teoría sobre estructura de capital de Modigliani y Miller (1958).

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

Segundo, asumiendo que los inversionistas se comportaban como lo planteó Markowitz (1952) en los sesentas, Treynor (1961), Sharpe (1964), Lintner (1965), y Mossin (1966), de manera independiente, introdujeron la primera teoría de valuación de activos, el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Markowitz, Sharpe y Miller recibieron varias décadas después, en 1990, el premio Nobel de Economía.

Tercero, en 1965, Fama (1970) y Samuelson (1973) introdujeron el concepto de mercados financieros eficientes junto con el concepto de que los precios fluctúan aleatoriamente. Esta idea había sido introducida por Bachelier (1900), siete décadas antes, pero Fama (1970) y Samuelson (1973) pusieron el concepto en un marco más general sobre cómo los mercados financieros procesan información. A partir de éstos conceptos, Black y Scholes (1973) y Merton (1971), premios Nobel de Economía en 1997, desarrollaron modelos estocásticos para la valoración de activos y derivados que se siguen usando en nuestros días y que forman parte de los modelos que se utilizan en la investigación de esta tesis.

Los anteriores hitos en el desarrollo de la administración moderna de activos y de econometría financiera implicaron las siguientes dos conclusiones clave:

- Los mercados muestran un balance entre riesgo y rentabilidad, donde el riesgo tiene que ser calculado tomando en cuenta la correlación entre acciones.
- No hay posibilidad de ganar un rendimiento adicional sin ningún riesgo, en el sentido de que cualquier rendimiento en exceso de la tasa libre de riesgo que ofrezca algún instrumento está determinado por la relación entre rentabilidad y riesgo del mercado para ese instrumento.

Estas conclusiones fueron enormemente importantes para la comunidad de los gestores de carteras de activos. El consiguiente debate se enfocó en dos temas:

- La predicción contra la no-predicción de los precios de activos.

- TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS
- La paradoja introducida por los conceptos que, por un lado, implican que los mercados son eficientes porque los inversionistas pueden anticipar los precios y, por el otro, que la inversión de recursos para adquirir y desarrollar los conocimientos para anticipar precios es inútil ya que no proporciona aparentemente ninguna ventaja.

Se arguyó que si los precios no son predecibles, era difícil justificar la existencia de la industria de la gestión de activos y simplemente no hacía sentido pagar honorarios a los gestores para obtener rentabilidades que podrían ser obtenidas mediante una simple estrategia de comprar y mantener. Para probar si lo anterior era cierto, durante 14 años, entre 1988 y 2002, el *Wall Street Journal* llevó a cabo una competencia entre administradores de activos experimentados y la selección al azar de acciones, realizada mediante el lanzamiento aleatorio de dardos. En promedio los administradores profesionales lograron un 10.2% anual de ganancias sobre la inversión, mientras que los dardos un 3.5% (Atkins y Sundali, 1997).

La comunidad de administradores de portafolios de activos estaba dividida entre aquellos que defendían que, al margen de la teoría de los mercados eficientes, un buen administrador podía lograr rendimientos en exceso usando su intuición, buen juicio o información no disponible a otros participantes del mercado, y por otro lado, aquellos que mantenían que debido a que los mercados son eficientes, la mejor política de inversión era comprar y mantener, es decir una posición pasiva. En retrospectiva, se puede decir que el debate estaba mal concebido. Desaceleró el desarrollo de un enfoque más científico a la administración de activos con riesgo.

Técnicamente, un proceso es predecible si hay alguna relación entre las futuras distribuciones de probabilidad (valores esperados) y los datos históricos. Mucha investigación fue dedicada a probar que, sin descartar el concepto de la eficiencia del mercado, podría haber patrones sutiles que permitieran la predictibilidad. Todo el razonamiento acerca de la eficiencia del mercado es lógicamente correcto pero no toma en cuenta un punto fundamental: cualquier modelo aleatorio es aproximado y hoy en día es

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

muy difícil estimar el futuro, pero si se ve un proceso aleatorio desde el punto de vista de la información histórica que contiene, por ejemplo, el caso multivariado, se encuentra que contiene mucha información en medias, volatilidades y correlaciones.

Esta fue la enseñanza pragmática esencial de Markowitz (1952), pero en esos años hacer estimaciones aproximadas y robustas de medias y matrices de correlación era extremadamente difícil, por no decir imposible. La disputa sobre modelos de predictibilidad y la dificultad de los cálculos, retrasó la aceptación del paradigma, mucho más fundamental, sobre estructuras y relaciones entre riesgo y rendimiento que planteó Markowitz (1952).

Un reporte hecho entre 2000 y 2001 por Fabozzi, Focardi y Kolm (2006) sobre métodos cuantitativos en la administración de inversiones revela que las firmas más importantes de administración de activos aún creían que los beneficios clave del uso de modelos era la disciplina que imponía al proceso de inversión, es decir, que el mayor beneficio de los métodos cuantitativos era que persuadía a los administradores de activos de que la idea de la optimización de la rentabilidad y el riesgo era real. Esto sucede más de medio siglo después de Markowitz (1952).

La última década ha sido testigo de un significativo cambio por el desarrollo de las matemáticas y sus aplicaciones en econometría financiera. Los académicos han abandonado la preocupación de mantenerse dentro de los paradigmas básicos de la no predictibilidad de los precios de activos. Es claro, hasta ahora, que los procesos aleatorios son, en el mejor de los casos, una aproximación. La econometría financiera está tratando de extraer información de distribuciones obtenidas al estimar los parámetros de un proceso aleatorio multivariado a partir de datos de precios reales. La meta de la modelación financiera es proporcionar las herramientas para extraer esta información y usarla en procesos de toma de decisiones.

Tres importantes corrientes de desarrollo han conformado la moderna econometría financiera y la teoría de la administración de activos.

- Primero, la estimación y optimización robustas. Esta línea incluye muchos métodos avanzados de optimización en un marco de multiperíodos o de un solo período.
- Una segunda línea de desarrollo está representada por la búsqueda de predictores o factores. Los predictores son variables de diversa naturaleza, tales como cifras económicas, razones financieras, o los mismos precios. Estos desarrollos han llevado al uso de modelos autorregresivos y a estrategias basadas en factorización dinámica y cointeracción.
- La tercera línea de desarrollo intenta representar estados del mercado utilizando variables ocultas. Este enfoque ha llevado a modelos cuyo interés reside esencialmente en su poder explicatorio. Sin embargo, estas técnicas demandan muchos datos y no son siempre fáciles de implementar.

La adopción de técnicas de modelación por parte de las empresas de administración de activos se ha visto incrementada en los últimos cinco años. En importantes firmas han venido usando modelos para predecir rendimientos esperados. En la mayoría de los casos se trata de modelos relativamente simples basados en factores o en variables predictoras. Sin embargo, los modelos autorregresivos y de cointegración, son también utilizados o se está experimentando con ellos. Los modelos no-lineales tales como redes neuronales y algoritmos genéticos están siendo también implementados pero la falta de transparencia continúa manteniéndolos sin una gran difusión en la industria.

Se puede afirmar que los modelos financieros actualmente están frente a tres grandes retos:

- La necesidad de extraer información valiosa de las series de tiempo.
- La necesidad de llevar a cabo tanto estimaciones como optimizaciones más robustas.
- La necesidad de lograr un proceso correcto de toma de decisiones, a través de la optimización formal.

Actualmente, y afortunadamente, la econometría financiera ha dejado de estar influenciada por el debate sobre la eficiencia del mercado y la capacidad de pronosticar. Hoy está ampliamente aceptado que hay cierta capacidad de pronosticar en el mercado pero que obtener y extraer información para pronosticar mejor es difícil.

La capacidad de pronosticar ya no es considerada una imperfección del mercado, sino más bien el resultado natural de la interacción de múltiples agentes con capacidades y motivaciones diferentes. Al mismo tiempo es claro que los mercados hoy no ofrecen oportunidades fáciles para obtener ganancias; hoy se requiere mucho trabajo y destreza.

Los desarrolladores de modelos saben que los modelos pueden capturar alguna información valiosa pero también saben que los modelos son solo aproximaciones de cualquiera que sea el verdadero proceso de generación de datos. Esto significa que los modelos pueden perder su capacidad de pronosticar si las condiciones del mercado cambian.

Actualmente los modelos se mueven hacia una visión más industrial de la administración de inversiones, tomando a los mismos como herramientas de la maquinaria de la industria. Modelar técnicas de reducción de riesgo se ha vuelto muy importante.

La realidad de distribuciones no normales de rendimientos de activos ya no es cuestionada, sin embargo la premisa de distribuciones *gaussianas* es particularmente importante para la optimización de modelos de predicción.

El campo de la optimización ha sido objeto de cambios importantes. La disponibilidad de computadoras de bajo costo y alto rendimiento hace a la optimización asequible para muchas organizaciones, mientras que los modelos que hacen mejores pronósticos proporcionan datos más confiables. Al mismo tiempo, los avances en las mismas técnicas de optimización han hecho que la implementación de estas técnicas sea más confiable y más robusta.

1.2. Modelos econométricos

El modelo de una variable de un activo financiero es una representación matemática del comportamiento de dicha variable. En la teoría financiera se consideran diferentes tipos de modelos. Hay modelos que representan, por ejemplo, la evolución de los rendimientos en el tiempo y modelos que representan relaciones entre los rendimientos de diferentes activos en determinado momento de tiempo. Los primeros están ejemplificados por modelos aleatorios y los últimos por aquellos que asumen condiciones de equilibrio. Esta distinción es importante porque los modelos que representan la evolución en el tiempo de los activos pueden ser utilizados para hacer pronósticos probabilísticos a partir de condiciones iniciales.

Los modelos financieros son modelos aproximados, no sólo en el sentido de que son modelos probabilísticos sino también en el sentido de que las distribuciones de probabilidad supuestas en los modelos son idealizaciones de la realidad y por tanto nunca podrán ser completamente exactos. Como consecuencia, varios modelos pueden describir los mismos fenómenos con resultados diferentes, mismos que tendrían que valorarse para determinar la robustez del modelo.

Normalmente debe existir un balance entre la exactitud del modelo, por un lado, y por otro, la aplicación del modelo o modelos a los datos disponibles, ya que podrían aplicarse diferentes modelos a las mismas variables en diferentes períodos de tiempo. A la hora de estimar parámetros para modelos que varían en el tiempo, la ventana de tiempo para la estimación tiene que ser determinada con los criterios apropiados.

Una clasificación de modelos financieros tiene que ver con la distinción entre los modelos que están basados en consideraciones económicas teóricas y los modelos que se basan en hipótesis econométricas. En el primer caso se incluyen a los modelos basados en la Teoría General de Equilibrio, como el modelo CAPM que se deriva del modelo clásico de portafolio. Los modelos basados en Teoría de Equilibrio General son modelos matemáticos globales de una economía y se basan en dos principios básicos:

- Equilibrio entre oferta y demanda.
- Comportamiento óptimo de los agentes económicos.

Como ejemplo, se puede suponer una economía en la que los agentes toman decisiones en cada momento de tiempo, deciden en base a sus restricciones presupuestales, a la composición de su portafolio de inversión y a la cantidad que van a consumir.

Suponiendo que los agentes son capaces de hacer pronósticos probabilísticos de dividendos y precios, es decir que cada agente conoce la distribución de probabilidad conjunta de los precios para todos los activos y en todos los momentos futuros, los agentes pueden ordenar sus preferencias, respecto a la cantidad de consumo, mediante una función de utilidad.

Cada agente se caracteriza por tener una función de utilidad. El proceso de decisión del agente se caracteriza por el principio de que cada agente maximiza su utilidad, escogiendo el portafolio que maximice la utilidad derivada de los flujos de consumo.

Los modelos econométricos incluyen a los modelos estocásticos como Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971) utilizado en esta tesis, y a los modelos de factores, entre los que se encuentra, por ejemplo, el de Vasicek (1977), también utilizado en esta tesis, el APT (*Arbitrage Pricing Theory*) (Ross, 1976) y el modelo multifactorial de Fama y French (1992). Cabe señalar que dentro de estos modelos, también conocidos como de índices múltiples, han atraído la atención los desarrollados por Chen, Roll y Ross, (1986).

Los modelos estocásticos son modelos de precios de acciones basados en la suposición de que el mercado es eficiente (Fama, 1970). La idea básica es que los rendimientos pueden ser representados por fluctuaciones impredecibles alrededor de una media del rendimiento. Esta premisa implica que la distribución del rendimiento en un punto de tiempo, es independiente de, o al menos no correlacionado con, la distribución de los rendimientos de momentos de tiempo anteriores.

Por otro lado, los modelos factoriales se clasifican en modelos de un factor y modelos de más de un factor o multifactoriales. La técnica más utilizada para la estimación de parámetros de estos modelos es la de mínimos cuadrados, u OLS por sus siglas en inglés, *Ordinary Least Squares*, y la de inferencia por el método de máxima verosimilitud MLE (*Maximum Likelihood Estimate*), así como el método generalizado de momentos, GMM (*Generalized Method of Moments*) (Gujarati, 2004).

Entre los modelos de series de tiempo, está el promedio móvil exponencialmente ponderado o EWMA por sus siglas en inglés: *Exponential Weighed Moving Average*, ARMA (*Autoregressive Moving Average*) (Alexander, 2008), los modelos factoriales basados en el análisis del componente principal o PCA (*Principal Component Analysis*) (Alexander, 2008), los modelos ARCH, acrónimo de *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, es decir modelos autorregresivos de heterocedasticidad condicional (Engle, 1982), o GARCH, (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic*) (Bollerslev, 1986), que son probablemente los más utilizados y sobre los que se han desarrollado más variaciones. Son también muy utilizados los modelos de análisis de factores que han sido complementados por el análisis de factores dinámico. Los modelos de estado-espacio (Aoki, 1990) y la familia de modelos VAR (*Vector Autoregressive*) (Box y Jenkins, 1970 y Brockwell y Davis, 1987) son también usados con objeto de predecir la rentabilidad esperada con mayor certeza que tomar simplemente el promedio de los rendimientos pasados.

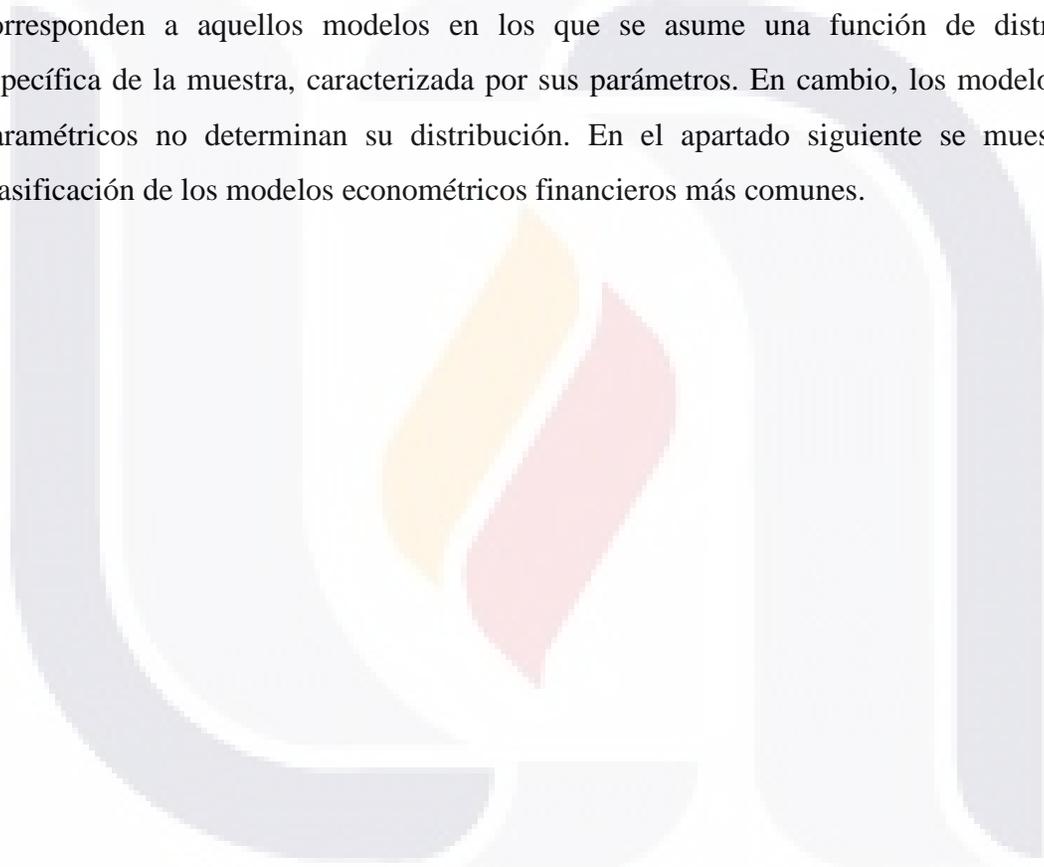
Dentro de los modelos de series de tiempo, las técnicas de cointegración y cópulas (Engle y Granger, 1987) han sido recientemente desarrolladas como herramientas para el análisis de los riesgos del mercado. Engle, junto con otros investigadores recibió el premio Nobel en 2003.

Se está teniendo también una amplia difusión de modelos basados en VaR (*Value-at-Risk*) que permiten determinar la máxima pérdida esperada que puede enfrentar un instrumento financiero en un período de tiempo determinado y con un nivel probabilidad (nivel de

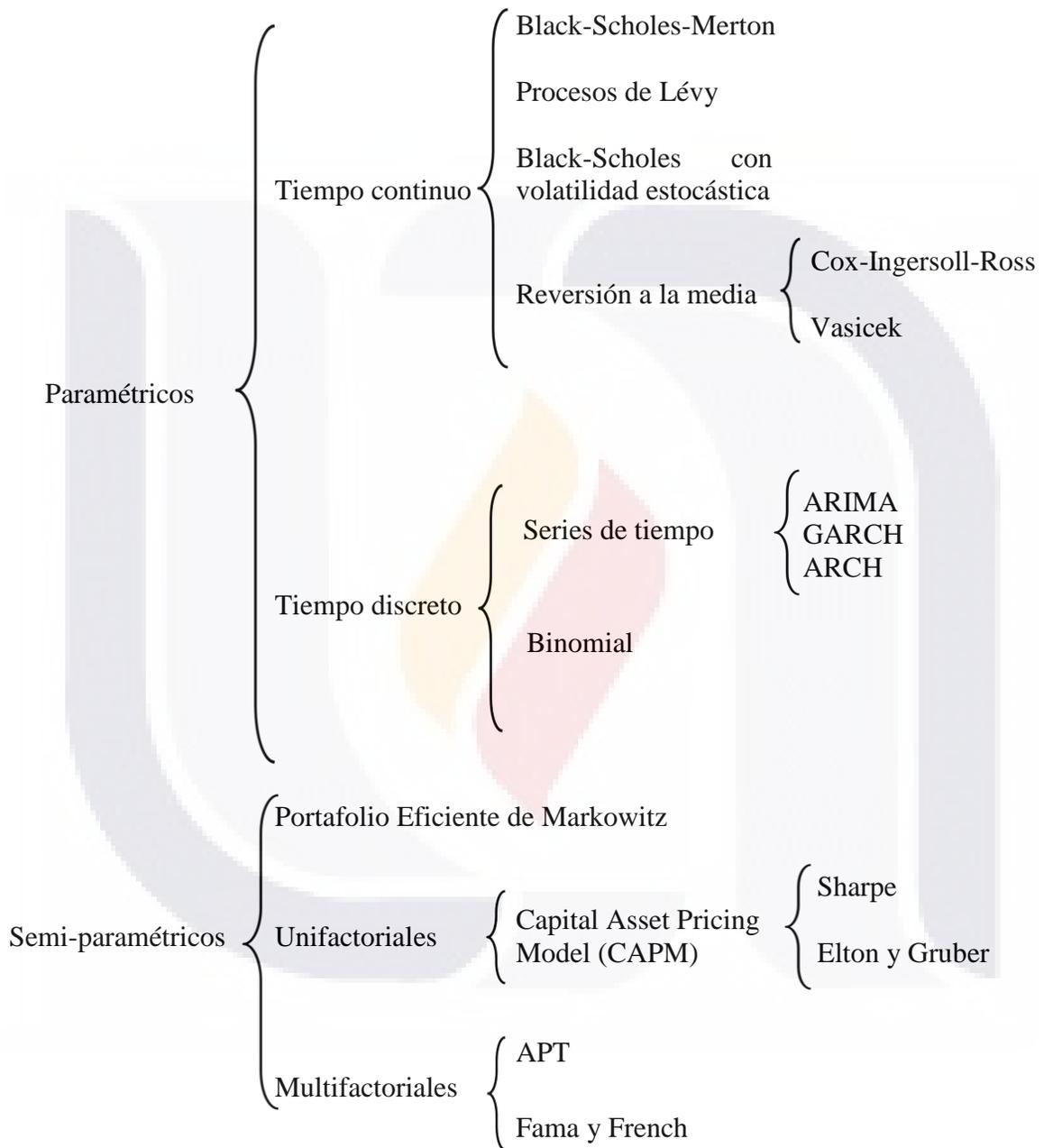
confianza) especificado. Esta técnica fue desarrollada por JP Morgan y su aplicación se hizo a través del software RiskMetricsTM (1966), desarrollado por ellos mismos.

Los modelos econométricos más recientes incluyen técnicas como la regresión cuantil, lineal y no lineal, la regresión no-lineal por mínimos cuadrados y los modelos de regresión de Markov (Alexander, 2008).

Por otro lado, los modelos se clasifican en paramétricos y semi-paramétricos. Los primeros corresponden a aquellos modelos en los que se asume una función de distribución específica de la muestra, caracterizada por sus parámetros. En cambio, los modelos semi-paramétricos no determinan su distribución. En el apartado siguiente se muestra una clasificación de los modelos econométricos financieros más comunes.



Clasificación de algunos modelos econométricos financieros



1.3. Modelo de la teoría clásica de portafolio

Un paso importante en la dirección de la administración cuantitativa de portafolios fue dado por Harry Markowitz (1952) en su artículo "Portfolio Selection" publicado en 1952 en el *Journal of Finance*. Las ideas introducidas en este artículo han venido a construir las bases de lo que hoy se conoce como el análisis media-varianza, optimización rendimiento-volatilidad, y la teoría moderna de portafolios. Inicialmente, el análisis media-varianza despertó poco interés pero con el tiempo, la comunidad financiera adoptó esta tesis. Hoy, más de 60 años después, los modelos financieros basados en aquellos mismos principios están siendo constantemente reinventados para incorporar nuevos descubrimientos que resultan del trabajo original.

Siendo ampliamente aplicado, el análisis de media-varianza ha tenido la mayor influencia en la práctica de la administración de portafolios. En su forma más simple, el análisis media-varianza proporciona un marco de referencia para construir y seleccionar portafolios, basados en el desempeño esperado de las inversiones y en el perfil de riesgo del inversionista. El análisis media-varianza también introduce una nueva terminología, la cual se ha convertido en la norma en el área de administración de inversiones. Sin embargo, más de medio siglo después del trabajo original de Markowitz (1952), parece que la optimización de portafolios mediante media-varianza es utilizado solamente en las firmas más cuantitativas, donde los procesos para la generación automática de pronósticos y el control de riesgo ya se llevan a cabo.

Hoy, en muchas firmas, la administración de portafolios permanece como un proceso basado solamente en juicios y evaluaciones cualitativas, no cuantitativas. Los primeros esfuerzos cuantitativos en la mayoría de las empresas parecen estar enfocados a proporcionar medidas de riesgo a los administradores de portafolios.

Es importante notar que la teoría de selección de portafolios mediante media-varianza es una teoría normativa, es decir, aquella teoría que describe un estándar o norma de comportamiento que los inversionistas deberían seguir al construir un portafolio, en contraste con la teoría positiva, que determina las implicaciones del comportamiento de un

inversionista, y dentro de la que se encuentran todas las teorías de valuación de activos, las cuales han avanzado hasta formalizar la relación que debería de existir entre los rendimientos de los activos y el riesgo, si los inversionistas construyeran y seleccionaran portafolios de acuerdo al análisis media-varianza.

Un ejemplo de una teoría positiva es el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) (Sharpe, 1964), que busca explicar y medir el excedente de rendimiento de un activo en relación al mercado. Específicamente, el CAPM afirma que el excedente de rendimiento de un activo es proporcional al excedente de rendimiento del mercado, donde la constante de proporcionalidad, conocida como β , mide el riesgo del activo respecto al mercado, es decir el riesgo sistemático. Es importante tener presente que, como otras teorías financieras, el CAPM es un modelo y un modelo se sustenta en cierto número de premisas básicas² y por lo tanto debe verse solamente como una descripción ideal del fenómeno o fenómenos bajo estudio.

La sabiduría convencional ha dictado siempre aquello de "no poner todos los huevos en la misma canasta", lo cual en términos más técnicos se refiere a los beneficios de la diversificación. Markowitz (1952) cuantificó el concepto de diversificación a través de cuantificar la covarianza entre valores individuales y la varianza de todo el portafolio. En esencia planteó que no es una estrategia prudente invertir en aquellos activos cuyos rendimientos estén altamente correlacionados ya que de otra manera si un solo activo se desempeña pobremente, es muy probable que los otros van también a comportarse pobremente, originando un mal desempeño del portafolio.

Markowitz (1952) planteó su teoría en base a que los inversionistas deberían decidir el balance entre rendimiento esperado y riesgo, midiendo este último mediante la varianza del rendimiento. Markowitz (1952) planteó que ante cualquier nivel dado de rendimiento esperado, un inversionista racional escogería el portafolio con la mínima varianza entre el

² Por ejemplo: los inversionistas tienen expectativas e información homogéneas, los activos se pueden dividir ilimitadamente, el mercado no tiene fricciones, asume que los costos de transacción e impuestos son irrelevantes, la tasa libre de riesgo es la misma para todos los inversionistas los cuales pueden tanto pedir prestado como invertir y no hay posibilidad de arbitraje.

conjunto de todos los posibles portafolios. Otra posible formulación a este problema es el de definir un nivel particular de riesgo y encontrar una combinación de activos que dé el máximo rendimiento del portafolio.

Marco teórico clásico para la optimización del portafolio

Suponiendo un portafolio con m activos con riesgo, el inversionista buscará la ponderación π_i de cada i -ésimo activo dentro de su portafolio que maximice el rendimiento esperado del portafolio, μ_p , y minimice la varianza, σ_p^2 , del mismo.

La selección del inversionista estará representada por el vector de pesos o ponderaciones m -dimensional³

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)'$$

donde

$$\sum_{i=1}^m \pi_i = 1,$$

permitiendo que π_i pueda ser negativa, es decir que se permita la venta en corto (*selling short*). De manera muy simple, una venta en corto consiste en pedir prestada una acción, venderla y utilizar los recursos para comprar otra u otras acciones más rentables para luego venderlas y reponer la que se pidió prestada con la rentabilidad que haya generado y bajo el riesgo que representa su volatilidad.

Suponga que los rendimientos de los activos tienen rendimientos esperados

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)'$$

³ La comilla denota el transpuesto del vector renglón.

y una matriz $m \times m$ de covarianzas representada por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \cdots & \sigma_{mm} \end{pmatrix}$$

donde σ_{ij} denota la covarianza entre el activo i y el activo j siendo

$$\sigma_{ii} = \sigma_i^2 \quad \text{y} \quad \sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j,$$

donde σ_i^2 es la varianza del activo i y ρ_{ij} es la correlación entre el activo i y el activo j .

Bajo estas premisas el rendimiento del portafolio con ponderaciones de activos π , es una variable aleatoria $\mu_p = \pi' \mu$, con un rendimiento esperado y varianza dadas por:

$$\mu_p = \pi' \mu,$$

$$\sigma_p^2 = \pi' \sigma \pi.$$

Planteamiento del problema mediante la minimización del riesgo

El problema general es maximizar el rendimiento y minimizar su varianza. Sin embargo, matemáticamente no es posible resolver ambos procedimientos de optimización simultáneamente.

Asumiendo que los rendimientos esperados μ de los activos y su matriz de covarianza σ son conocidos, un inversionista puede fijarse un rendimiento μ_o para su portafolio y calcular las ponderaciones que le permitan tener el portafolio con la mínima varianza de manera que el problema del inversionista, de acuerdo a la teoría desarrollada por Markowitz (1952), se plantea como una optimización con restricciones en el sentido que un inversionista debe buscar la mínima varianza,

$$\min_{\pi} \pi' \sigma \pi,$$

sujeto a las restricciones

$$\mu_0 = \pi' \mu,$$

$$\pi' \iota = 1, \text{ donde } \iota' = [1, \dots, 1].$$

Este problema corresponde a un problema de optimización cuadrática sujeto a restricciones de igualdad y se resuelve por el método de multiplicadores de Lagrange (Fabozzi *et al.*, 2006).

Planteamiento del problema mediante la maximización del rendimiento esperado

En este caso el inversionista tendría que fijar un riesgo del portafolio σ_0 y luego maximizar el rendimiento esperado del portafolio:

$$\max_{\pi} \pi' \mu$$

sujeto a las restricciones

$$\pi' \sigma \pi = \sigma_0^2,$$

$$\pi' \iota = 1, \quad \iota' = [1, \dots, 1].$$

Este planteamiento es a menudo utilizado por los gestores de portafolios cuyos clientes les piden no tomar un riesgo mayor, medido por la desviación estándar del rendimiento del portafolio, del fijado por cierta volatilidad previamente definida por el inversionista, como un *benchmark* para el máximo riesgo a asumir.

Planteamiento del problema mediante la aversión al riesgo

Otra alternativa es modelar explícitamente el balance entre rendimiento y riesgo en la función objetivo utilizando un coeficiente de aversión al riesgo λ :

$$\max_{\pi} (\pi' \mu - \lambda \pi' \sigma \pi)$$

sujeta a

$$\pi' \iota = 1, \quad \iota' = [1, \dots, 1], \quad \lambda > 0.$$

El índice de aversión al riesgo λ es conocido también como el índice de aversión al riesgo de Arrow-Pratt (Arrow, 1965, Pratt, 1964). Cuando λ es pequeño, es decir la aversión al riesgo es baja, el impacto del riesgo en el rendimiento es bajo, dando lugar a portafolios más rentables y más riesgosos. Por el contrario, cuando λ es grande los portafolios más rentables y expuestos al riesgo son altamente penalizados. Si λ es gradualmente incrementado desde cero y para cada caso se resuelve el problema de optimización, se obtienen portafolios a lo largo de la Frontera Eficiente. En muchas aplicaciones de gestión de portafolios el índice de aversión al riesgo se encuentra entre 2 y 4.

Portafolios Eficientes y la Frontera Eficiente

Un portafolio Eficiente es aquel portafolio de activos con riesgo que da la mínima varianza del rendimiento de todos los portafolios que tienen el mismo rendimiento esperado. Paralelamente se puede decir que un portafolio Eficiente tiene el máximo rendimiento esperado de todos los portafolios que tienen la misma varianza.

La Frontera Eficiente es el conjunto de todos los portafolios Eficientes. Black (1972) demostró que la Frontera Eficiente es el conjunto de todas las combinaciones convexas de cualquiera dos portafolios (Benninga, 2008). Por tanto, se puede encontrar toda la Frontera Eficiente con dos portafolios Eficientes.

Tobin (1958) demostró que el conjunto de portafolios disponible a inversionistas que utilizan el análisis de rendimiento-volatilidad considerando una combinación de un portafolio Eficiente y un activo libre de riesgo, para invertir o pedir prestado, es superior a aquel conjunto disponible cuando no existe un activo libre de riesgo, entendiéndose por superior, a aquellos portafolios que ofrecen mayor rendimiento con la misma volatilidad. En la Figura 1.1 se puede apreciar que el portafolio π_B es superior al portafolio π_A pues mostrando ambos la misma volatilidad, π_B ofrece mayor rendimiento.

Suponiendo que hay un activo libre de riesgo con rendimiento r y que el inversionista puede pedir prestado o invertir a esta tasa, entonces escogerá un portafolio de m activos con riesgo más el activo libre de riesgo. En este caso π_P no suma uno ya que la parte restante $(1 - \pi_P)$ puede ser invertida en el activo libre de riesgo. Hay que notar que esta proporción de la inversión puede ser positiva o negativa según se invierta o se pida prestado a la tasa libre de riesgo r . En este caso, el rendimiento esperado del portafolio y la varianza del mismo son:

$$\mu_P = \pi'_P \mu + (1 - \pi'_P) r$$

$$\sigma_P^2 = \pi'_P \sigma \pi_P,$$

ya que la varianza del activo libre de riesgo es cero y no está correlacionado con los activos con riesgo.

Fama (1970) demostró que, bajo ciertas suposiciones, el portafolio Eficiente que es tangencial a la recta cuya ordenada al origen es la tasa libre de riesgo, debe consistir de todos los activos disponibles para el inversionista y cada activo debe representar una proporción de su valor de capitalización de mercado en relación al valor de capitalización de mercado de todo el portafolio. Por tanto a este portafolio tangencial suele llamarse el portafolio del Mercado.

En la Figura 1.1 cualquier combinación lineal del activo sin riesgo y el portafolio del Mercado, se presenta en la línea que intercepta el eje vertical a la tasa libre de riesgo y es tangencial a la Frontera Eficiente. Todos los portafolio sobre la línea son factibles para el inversionista y a esta línea se le conoce como la Línea del Mercado de Capital (LMC) o CML por sus siglas en inglés (*Capital Market Line*).

El portafolio del Mercado se puede calcular directamente maximizando el problema de optimización de la razón de Sharpe (Benninga, 2008), donde θ es la pendiente de la curva de la Frontera Eficiente en el punto tangencial a la Línea del Mercado de Capital:

sujeta a

$$\max_{\pi} \theta = \max_{\pi} \frac{\pi' \mu - r}{\sqrt{\pi' \sigma \pi}} \tag{1.1.a}$$

cuya solución es

$$\pi' \iota = 1, \quad \iota' = [1, \dots, 1],$$

$$\pi_P^M = \frac{\sigma^{-1}(\mu - r \iota)}{\iota' \sigma^{-1}(\mu - r \iota)}.$$

La razón de Sharpe para una acción i se calcula con la siguiente ecuación:

$$\theta_i = \frac{\mu_i - r}{\sqrt{\sigma^2}}. \tag{1.1.b}$$

Esta ecuación permite calcular el equilibrio entre rendimiento y volatilidad y se usa frecuentemente para determinar si una acción o un portafolio es superior a otro dependiendo de si su razón de Sharpe es mayor o no, independientemente de la aversión o propensión al riesgo del inversionista.

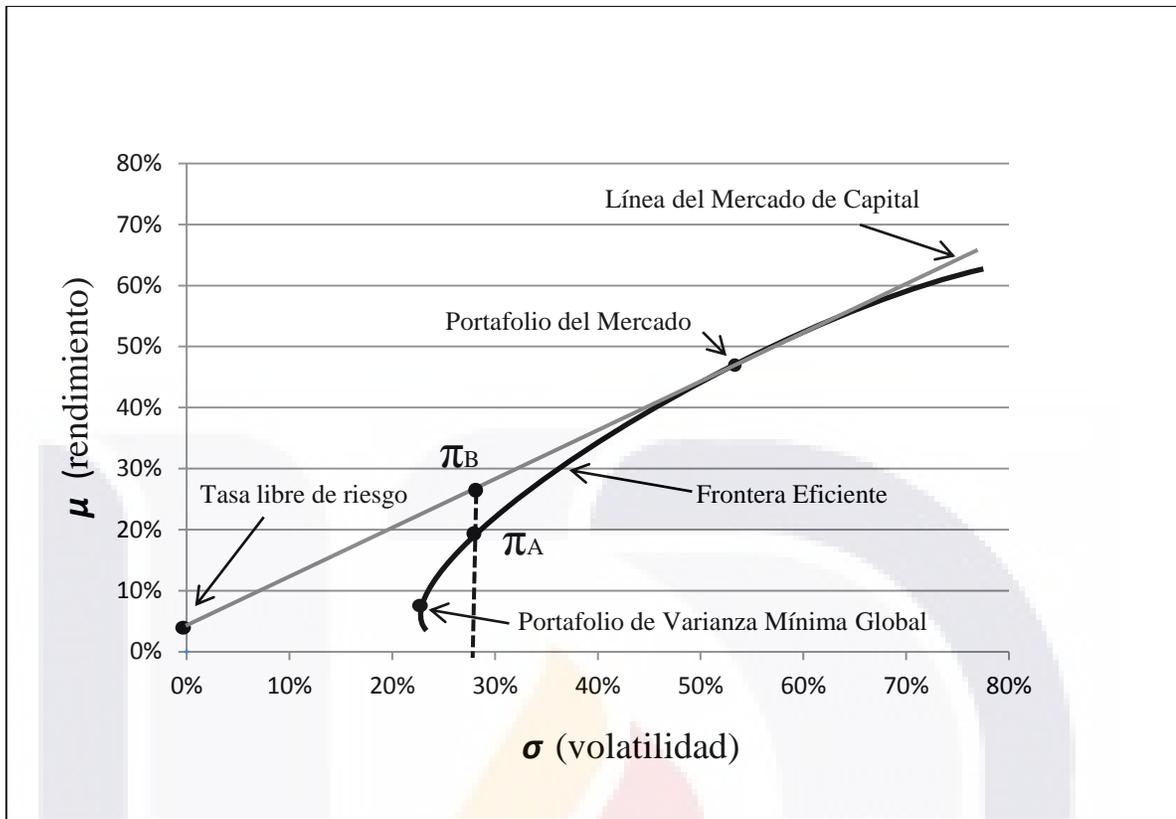


Figura 1.1. Línea del Mercado de Capital y la Frontera Eficiente.

Fuente: elaboración propia.

Con la introducción del activo libre de riesgo, se puede decir que un inversionista selecciona un portafolio a lo largo de la Línea del Mercado compuesto por la combinación del portafolio del Mercado y pide prestado o invierte en el activo libre de riesgo. Esta importante propiedad es conocida como separación. Los portafolios a la izquierda del portafolio del Mercado representan combinaciones de inversiones en los activos con riesgo y el activo libre de riesgo, mientras que los portafolios a la derecha representan activos con riesgo adquiridos con recursos obtenidos de pedir prestado a la tasa libre de riesgo. Estos últimos portafolios son conocidos como portafolios apalancados.

En la práctica, la propiedad de separación es importante ya que generalmente la construcción del portafolio se lleva a cabo en dos etapas, siendo la primera la de decidir cómo asignar el capital del inversionista entre la inversión libre de riesgo y el portafolio

con instrumentos de riesgo. La siguiente etapa es la de construir el portafolio con los activos con riesgo disponibles.

La Línea del Mercado de Capital

Para obtener la expresión que representa la Línea del Mercado de Capital (LMC), se parte de la Frontera Eficiente en la cual se encuentran los portafolios basados en el balance entre rendimiento y riesgo y cuyo óptimo dependerá de las preferencias del consumidor, es decir su aversión al riesgo, el cual se puede cuantificar con la función de utilidad del consumidor.

Asumiendo que todos los inversionistas tienen expectativas homogéneas, pueden crear un portafolio Eficiente que esté formado por una participación π_r en el activo sin riesgo y π_M en el portafolio del Mercado. Por tanto $\pi_r + \pi_M = 1$ y el rendimiento esperado del portafolio sería el promedio ponderado del rendimiento esperado de los dos activos, es decir:

$$\hat{\mu}_P = \pi_r r + \pi_M \hat{\mu}_M$$

donde $\hat{\mu}_M$ es el rendimiento del portafolio del Mercado, y ya que $\pi_r = 1 - \pi_M$ la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\hat{\mu}_P = (1 - \pi_M)r + \pi_M \hat{\mu}_M$$

la cual se puede reorganizar de la siguiente manera:

$$\hat{\mu}_P = r + \pi_M [\hat{\mu}_M - r].$$

Ya que el rendimiento del activo libre de riesgo y el del portafolio del Mercado no están correlacionados y puesto que la varianza del activo libre de riesgo es igual a cero, la

varianza del portafolio formado por el activo libre de riesgo y el portafolio del Mercado está dada por:

$$\sigma_P^2 = \text{var}(\hat{\mu}_P) = \pi_r^2 \text{var}(r) + \pi_M^2 \text{var}(\hat{\mu}_M) + 2\pi_r\pi_M \text{cov}(r, \hat{\mu}_M)$$

$$\sigma_P^2 = \pi_M^2 \text{var}(\hat{\mu}_M)$$

$$\sigma_P^2 = \pi_M^2 \sigma_M^2.$$

En otras palabras, la varianza del portafolio está representada por la varianza del portafolio del Mercado. Sacando raíz cuadrada, la última ecuación se puede escribir también como:

$$\pi_M = \frac{\sigma_P}{\sigma_M}.$$

Si se sustituye y reacomodan términos se llega a una expresión explícita de la línea LMC:

$$\hat{\mu}_P = r + \left[\frac{\hat{\mu}_M - r}{\sigma_M} \right] \sigma_P, \quad (1.2)$$

donde el numerador del segundo término, dentro de los corchetes, es la razón de Sharpe (θ) de la ecuación (1.1.a) y suele llamarse en la literatura el premio por riesgo (Fabozzi *et al.*, 2006).

El significado del segundo término de la ecuación (1.2) se puede interpretar como que el numerador representa el rendimiento esperado, por invertir en el mercado, por arriba del rendimiento de la tasa libre de riesgo, es decir es una medida de la recompensa o premio por invertir en el mercado en lugar de hacerlo solo en el activo libre de riesgo. El denominador es el riesgo del portafolio del Mercado. Por lo tanto, este cociente, es decir, la pendiente de la LMC, mide el premio por cada unidad de riesgo del mercado y cada punto de la LMC representa un punto de equilibrio. La pendiente de la LMC determina el rendimiento adicional necesario para compensar por cada cambio unitario de riesgo por lo

cual también se le conoce como el precio de mercado del riesgo en equilibrio. En otras palabras, la LMC de la ecuación (1.2) nos dice que el rendimiento esperado de un portafolio es igual a la tasa libre de riesgo más un premio por riesgo, donde el premio por riesgo es igual al precio de mercado del riesgo, medido por el premio por unidad de riesgo del mercado, multiplicado por la cantidad de riesgo del portafolio, medido por la desviación estándar del portafolio.

Portafolio de Varianza Mínima Global

El portafolio de Varianza Global Mínima es aquel portafolio, sobre la Frontera Eficiente que presenta la mínima volatilidad o riesgo, es decir es el único portafolio que tiene la menor varianza de todos los portafolios factibles y se localiza en el extremo izquierdo de la curva de portafolios Eficientes. Se puede apreciar su ubicación en la Figura 1.1.

Merton (1972) desarrolló una solución para el portafolio de Varianza Mínima Global (VMG) permitiendo venta en corto. Lo interesante de este portafolio es que es el único portafolio cuyo cálculo no requiere de los rendimientos esperados de los activos.

El portafolio de VMG ha sido tema de recientes investigaciones (Candelon, Hurlin y Tokpavi, 2012 y Kourtis, Dotsis y Markellos, 2012), y su cálculo es una referencia importante para los gestores de inversiones en la conformación de portafolios.

El portafolio de VMG con venta en corto se determina mediante la siguiente ecuación:

$$\pi'_{\text{VMG}} = (\pi_{\text{VMG},1}, \pi_{\text{VMG},2}, \dots, \pi_{\text{VMG},m}) = \frac{i' \sigma^{-1}}{i' \sigma^{-1} i} \quad (1.3)$$

donde $i' = [1, \dots, 1]$ y el rendimiento esperado por el portafolio y su varianza están dados por

$$\mu_{\text{VMG}} = \pi'_{\text{VMG}} \mu \quad \text{y} \quad \sigma^2_{\text{VMG}} = \pi'_{\text{VMG}} \sigma \pi_{\text{VMG}}.$$

1.4. Funciones de utilidad

Dada la Frontera Eficiente o la Línea del Mercado de Capital, que reemplaza a la Frontera Eficiente para el caso de que un activo libre de riesgo sea incluido, la pregunta es cómo se determina el punto óptimo en la Frontera Eficiente o la combinación óptima de las proporciones en el activo libre de riesgo y en el portafolio del Mercado, en donde invertir. La respuesta depende de los inversionistas y sus diferentes preferencias y tolerancia al riesgo.

Para formalizar esto, se debe primero abordar el concepto de función de utilidad y curvas de indiferencia. La teoría económica utiliza las funciones de utilidad para describir la manera en que individuos o empresas toman decisiones cuando se enfrentan a un conjunto de opciones. Una función de utilidad asigna un valor numérico diferente a todas las posibles opciones que se le presentan al individuo o empresa. Estos valores, con frecuencia son referidos como índices de utilidad. Dos propiedades importantes son que la opción A es preferida a B si y solo si la utilidad de A es mayor a la de B , y que a mayor valor de la opción, mayor es la utilidad derivada de ella. La opción que es seleccionada es aquella que resulta de la máxima utilidad, dado un conjunto de ciertas restricciones para el individuo o a la empresa.

La suposición de que el proceso de decisión de un inversionista puede ser representado como el proceso de optimización de una función de utilidad se remonta a Pareto (1935) en el siglo XVIII. Sin embargo, no fue sino hasta 1944 que la teoría de la utilidad fue matemáticamente formalizada por von Neumann y Morgenstern (1947), aunque el primero en promover el concepto de funciones de utilidad fue el matemático suizo Bernoulli en 1738.

Las funciones de utilidad pueden representar un amplio conjunto de preferencias. Las condiciones precisas bajo las que unas preferencias se pueden expresar a través de una función de utilidad han sido ampliamente exploradas en la literatura (Chamberlain, 1983).

En la teoría de portafolios, los inversionistas, sean individuos o empresas, se enfrentan con un conjunto de opciones. Diferentes portafolios tienen diferentes niveles de rendimiento esperado y riesgo o volatilidad. A mayor nivel de rendimiento esperado, mayor nivel de riesgo. Los inversionistas se enfrentan con el problema de escoger un portafolio entre un conjunto de todas las posibles combinaciones de riesgo y rendimiento. Mientras que el rendimiento es atractivo, el riesgo es rechazado. Por lo tanto los inversionistas obtienen diferentes niveles de utilidad dependiendo de las diferentes combinaciones de riesgo (volatilidad) y rentabilidad (rendimiento). La utilidad obtenida por cualquier combinación de rentabilidad y riesgo se expresa mediante una función de utilidad.

Una función de utilidad se puede expresar en forma gráfica como un conjunto de curvas de indiferencia como se muestra en la Figura 1.2. En esta figura, las curvas de indiferencia marcadas como, U_1 , U_2 , y U_3 se muestran en orden de menor a mayor utilidad según se alejan del eje horizontal, es decir, la utilidad (rendimiento) que reciben los inversionistas es mayor si están más arriba, al mismo nivel de riesgo (volatilidad).

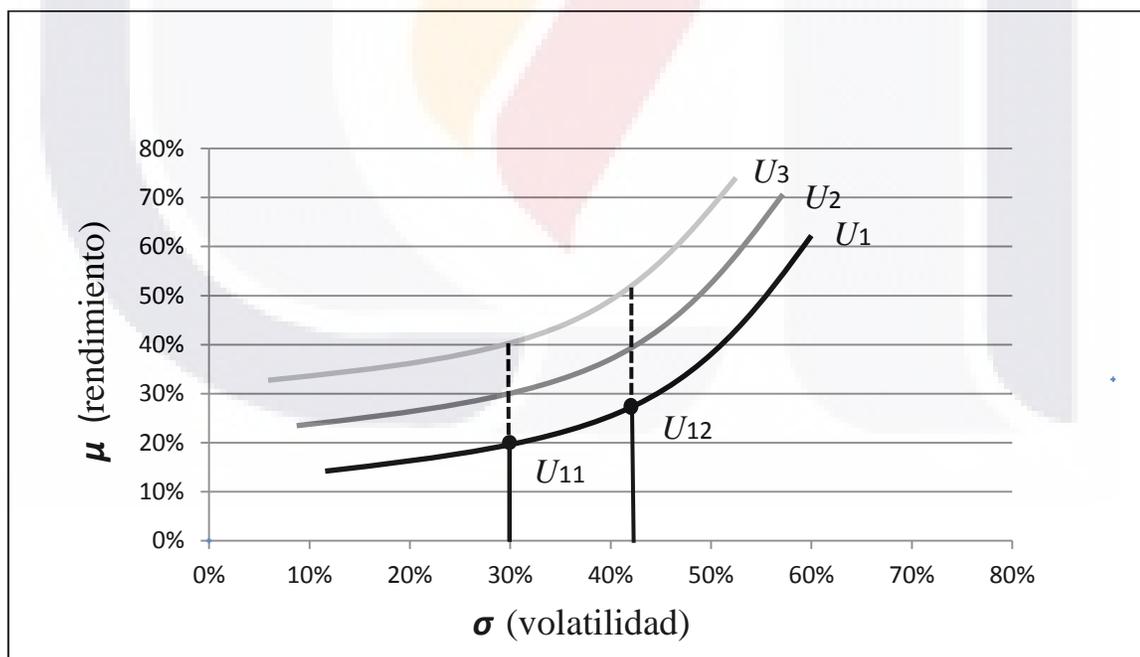


Figura 1.2. Curvas de indiferencia.

Fuente: elaboración propia.

Cada curva representa un conjunto de portafolios con diferentes combinaciones de riesgo y rendimiento. Todos los puntos sobre una curva de indiferencia indican combinaciones de riesgo y rendimiento esperado, que darán el mismo nivel de utilidad a un inversionista dado. Por ejemplo, sobre la curva U_1 hay dos puntos U_{11} y U_{12} teniendo U_{12} mayor rendimiento esperado que U_{11} pero también mayor riesgo.

Debido a que los dos puntos están en la misma curva de indiferencia, el inversionista tiene la misma preferencia (o es indiferente) entre los dos puntos, o entre cualquiera otros puntos de la curva. La forma creciente (pendiente positiva) de las curvas de indiferencia refleja que para obtener el mismo nivel de utilidad el inversionista requiere un mayor rendimiento esperado para poder aceptar un riesgo mayor.

El portafolio óptimo

Una suposición razonable es pensar que los inversionistas son en general aversos al riesgo. Un inversionista averso al riesgo es aquel que cuando se le presenta escoger entre dos inversiones con el mismo nivel de rendimiento esperado pero diferentes riesgos, prefiere la inversión con el menor riesgo.

Al seleccionar portafolios, un inversionista busca maximizar el rendimiento esperado del portafolio dada su tolerancia al riesgo. Ante el conjunto de portafolios Eficientes, el portafolio óptimo es aquel preferido por el inversionista en términos de su función de utilidad, es decir, es aquel portafolio Eficiente que tiene la máxima utilidad.

El portafolio que el inversionista escogerá dependerá de la particular preferencia al riesgo del inversionista. En la Figura 1.3 se muestran las mismas curvas de indiferencia de la Figura 1.2 junto con la Frontera Eficiente y la LMC. El inversionista seleccionará el portafolio P_{LMC} sobre la LMC que es tangente a la curva de indiferencia mayor, U_3 en la Figura 1.3. Notar que sin el activo libre de riesgo el inversionista podría obtener solo U_2 que es una curva de indiferencia tangente a la Frontera Eficiente. Este portafolio se muestra

en el punto P_E en la Figura 1.3. Por tanto la oportunidad de pedir prestado o invertir a la tasa libre de riesgo da lugar a un mercado de capitales donde los inversionistas aversos al riesgo preferirán portafolios compuestos por la combinación del activo libre de riesgo y el portafolio tangencial o de mercado, P_M , sobre la Frontera Eficiente.

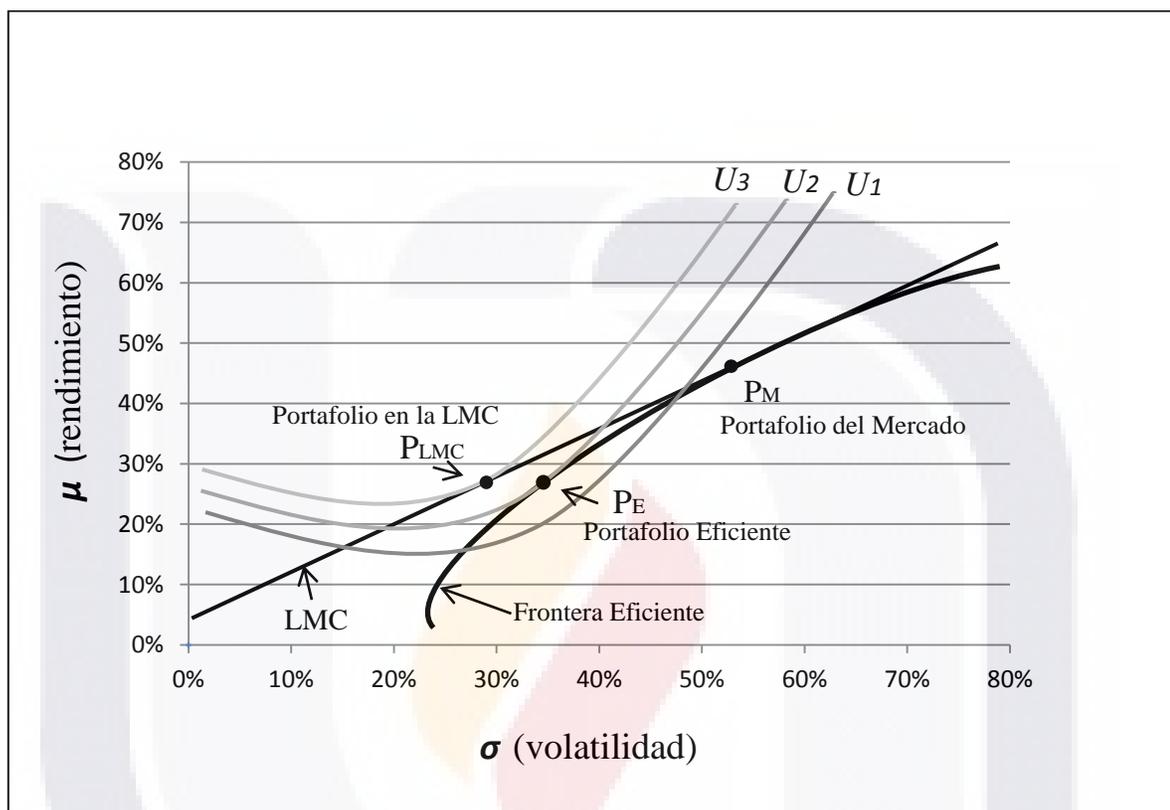


Figura 1.3. Portafolios óptimos en la LMC y en la Frontera Eficiente.

Fuente: elaboración propia.

Diferentes funciones de utilidad

En su trabajo original, Markowitz (1952) no hace referencia a preferencias o funciones de utilidad del inversionista, sin embargo en trabajos posteriores (Markowitz y Levy, 1979) hace referencia a la función de utilidad cuadrática y a la distribución normal de los rendimientos de las acciones. De la suposición de la función de utilidad cuadrática, que tiene la forma

$$U(x) = x - \frac{b}{2}x^2,$$

donde $b > 0$ y suficientemente pequeña para que la función $U(x)$ sea creciente en el intervalo $(0, x_t)$, con $x_t > 0$, se desprende que al inversionista solamente le afecta el primer y segundo momento (esto equivale a la media y varianza) de su riqueza. (Cvitanic, Zapatero, 2004).

El enfoque original de Markowitz (1952) fue, en un principio, referido solamente a un período, aunque más tarde lo extendió a multiperíodos. A pesar de las importantes suposiciones sobre las que se basa el enfoque de Markowitz (1952), su simplicidad lo ha hecho una herramienta popular para medir si una estrategia de portafolio es eficiente.

En el marco teórico clásico de Markowitz (1952) un inversionista busca un balance o equilibrio entre el riesgo y el rendimiento. Como se comentó anteriormente, esta relación de preferencia puede también ser expresada por una función de utilidad.

Las funciones de utilidad permiten generalizar el esquema media-varianza en una clase de problemas mucho más amplios, los problemas de maximizar la utilidad esperada. La teoría sobre funciones de utilidad fue por primera vez fundamentada en los trabajos de von Neumann y Morgenstern (1947).

Para una función de utilidad es común que se requiera que $U' > 0$ y $U'' \leq 0$, esto significa que un inversionista siempre prefiere más utilidad que menos, pero que también la utilidad marginal disminuye cuando aumenta la riqueza. Formalmente, $U(x)$ debe ser estrictamente creciente y cóncava. En este marco, la aversión al riesgo de un inversionista se mide por su aversión al riesgo absoluta y relativa, expresadas respectivamente por

$$\Lambda_A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

$$\Lambda_R(x) = -\frac{x U''(x)}{U'(x)}.$$

Estas medidas expresan la intuición de que si la función de utilidad es mas curvada, en cuanto a su concavidad, el inversionista es más averso al riesgo. A continuación se muestran algunos ejemplos.

Función de utilidad lineal

$$U(x) = a + bx, \quad \Lambda_A(x) = \Lambda_R(x) = 0.$$

Las medidas de aversión al riesgo son cero y por lo tanto la función de utilidad lineal es conocida como de riesgo neutral.

Función de utilidad cuadrática

$$U(x) = x - \frac{b}{2}x^2, \quad b > 0$$

$$\Lambda_A(x) = \frac{b}{1 - bx}, \quad \Lambda_R(x) = \frac{bx}{1 - bx}.$$

Esta función de utilidad satisface $U' > 0$ solamente cuando $x < 1/b$ lo cual implica que hay ciertas situaciones en las que el inversionista escogería menos riqueza que más lo cual representa un problema al utilizar funciones de utilidad cuadrática. Para que esto no ocurra, $1/b$ debe ser suficientemente grande.

Función de utilidad exponencial

$$U(x) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}, \quad \lambda \neq 0$$

$$\Lambda_A(x) = \lambda, \quad \Lambda_R(x) = \lambda x.$$

Esta función de utilidad es frecuentemente llamada de aversión al riesgo absoluto constante o CARA por las siglas en inglés *Constant Absolute Risk Aversion*, ya que el indicador de la aversión al riesgo absoluto $\Lambda_A(x) = \lambda$ es constante, por lo que para esta función de utilidad, λ es conocido como el coeficiente de aversión al riesgo.

Función de utilidad potencia

$$U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma, \quad 0 \neq \gamma < 1$$

$$\Lambda_A(x) = \frac{1-\gamma}{x}, \quad \Lambda_R(x) = 1 - \gamma.$$

Esta función de utilidad es con frecuencia citada como CRRA por sus siglas en inglés *Constant Relative Risk Aversion* ya que el valor de $\Lambda_R(x) = 1 - \gamma$ es constante, por lo que para esta función γ es conocido como el coeficiente de propensión al riesgo. Cabe señalar que la función de utilidad logarítmica es una extensión de la función de utilidad potencia por el límite siguiente:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{x^\alpha - 1}{\alpha} = \ln(x).$$

En la práctica, la selección de una función de utilidad depende de la aplicación que se presente, junto con las consideraciones de cálculo necesarias. Actualmente, con la capacidad de cálculo de que se dispone, es posible, al menos para portafolios no muy grandes, maximizar la utilidad esperada mediante la simulación de cualquiera de las funciones de utilidad descritas anteriormente.

En muchas aplicaciones prácticas de gestión de portafolios hay siempre un punto equilibrio entre la conveniencia y velocidad de cálculo y los errores y precisión del modelo.

Existe una enorme gama de estudios sobre la aplicación del modelo de Markowitz (1952), entre los que destacan Cremers, Kritzman y Page (2004) en donde se comparan portafolios utilizando diferentes funciones de utilidad así como distribuciones de rendimiento empíricas para la optimización de los portafolios, y concluyen que el error y las diferencias resultantes de utilizar solamente el modelo media-varianza con respecto a modelos con otras funciones de utilidad no son relevantes.

Kallberg y Ziemba (1983) compararon diferentes funciones de utilidad y mostraron cómo afectan estas la composición óptima de portafolios. Sus estudios proporcionaron unas bases empíricas para la asignación de portafolios utilizando diferentes funciones de utilidad y parámetros y sus resultados mostraron que portafolios óptimos similares tuvieron similares aversiones al riesgo absolutas. Estos hechos sugieren que el problema de optimización de portafolios es relativamente robusto con respecto a cambios en la función de utilidad, siempre que el nivel de aversión al riesgo absoluto sea el mismo.

Los anteriores resultados muestran que en muchas aplicaciones prácticas, se puede escoger la función de utilidad que permita la solución numérica más eficiente. Siendo la función de utilidad cuadrática la que presenta la solución de cálculo más fácilmente manejable, no sorprende que sea la más comúnmente usada. En esta tesis se utiliza la función de utilidad potencia, ya que permite utilizar diferentes niveles de aversión o propensión al riesgo según los valores del parámetro γ .

Cabe hacer notar que la mayor parte de los estudios citados fueron llevados a cabo utilizando activos cuyas distribuciones de rendimiento no se alejaron mucho de la normalidad. Para las llamadas distribuciones elípticas como la normal, la *t-student* y de Lévy, se ha demostrado que la estimación de la utilidad esperada mediante el modelo media-varianza es exacta para todas las funciones de utilidad (Chamberlain, 1983). Esto ha dado lugar a una posible explicación del buen desempeño del modelo clásico de media-varianza. Se ha demostrado además que momentos superiores no parecen afectar mucho a un inversionista con una función de utilidad potencia. Cuando los rendimientos de los activos, en un portafolio particular, muestran asimetría o sesgo, colas pesadas y alta

correlación, como es el caso de algunas acciones y derivados, los momentos superiores si son relevantes (Cremers *et al.*, 2004).

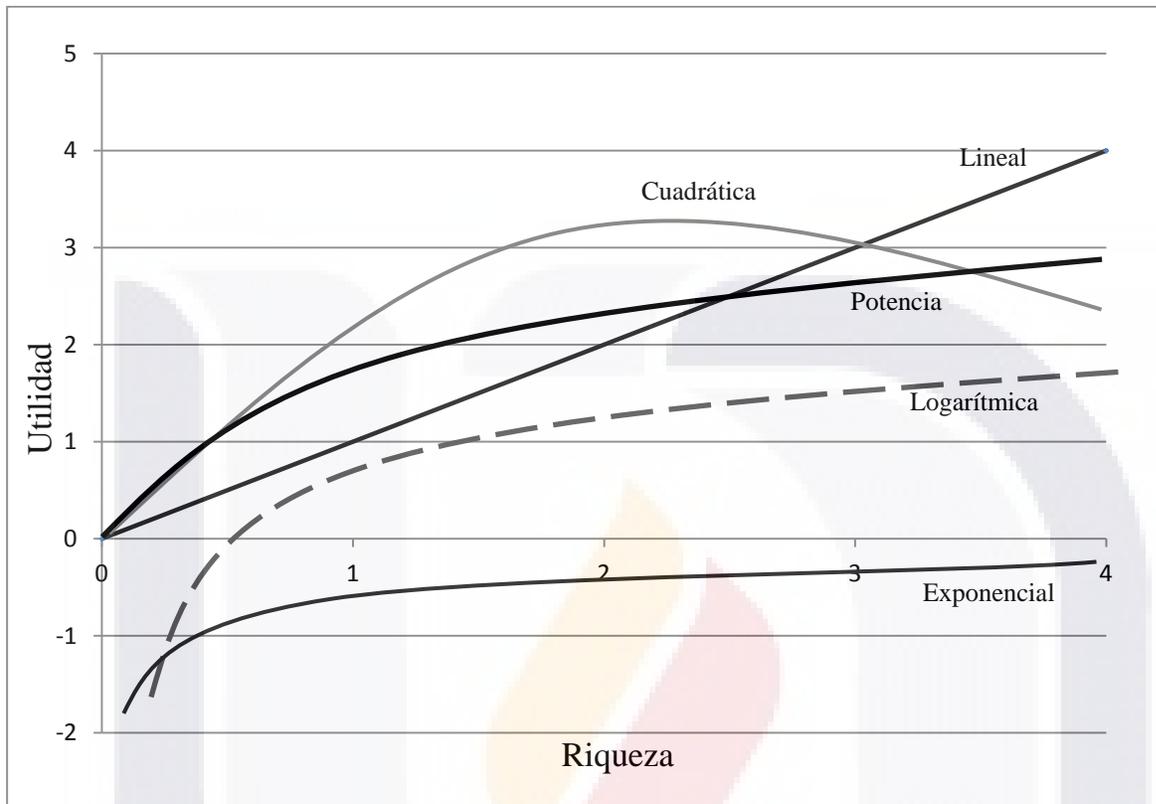


Figura 1.4. Diferentes funciones de utilidad.

Fuente: elaboración propia.

1.5. El Índice de Precios y Cotizaciones

El Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC), tiene como principal objetivo constituirse como un indicador representativo del mercado mexicano y servir como subyacente de productos financieros. El índice expresa el rendimiento del mercado accionario en función de las variaciones de precios de una muestra balanceada, ponderada y representativa del conjunto de acciones cotizadas (Bolsa Mexicana de Valores, 2010a).

El IPC constituye un fiel indicador de las fluctuaciones del mercado accionario, considerando dos conceptos fundamentales:

- **Representatividad:** La muestra que lo compone refleja el comportamiento y la dinámica operativa del mercado mexicano.
- **Invertibilidad (bursatilidad):** Las series accionarias que lo integran cuentan con las cualidades de operación y liquidez que faciliten las transacciones de compra y venta para responder a las necesidades del mercado mexicano.

Mecánica de cálculo

Base: 0.78 el 30 de octubre de 1978.

Fórmula:

$$I_t = I_{t-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^n P_{it} * (Q_{it} * FAF_i)}{\sum_{i=1}^n P_{it-1} * (Q_{it-1} * FAF_i) * f_{it-1}} \right),$$

donde:

I_t = Índice en el día t ,

P_{it} = Precio de la serie accionaria i el día t ,

Q_{it} = Número de acciones inscritas de la serie accionaria i el día t ,

FAF_i = Factor de ajuste por acciones flotantes (en circulación) de la serie accionaria i ,

f_{it} = Factor de ajuste por ex-derechos de la serie accionaria i el día t ,

n = Número de acciones que componen el índice.

Tamaño de muestra

El número de series accionarias que conforma la muestra del IPC es de $n = 35$ series, cantidad que puede variar durante el período de vigencia por movimientos corporativos que obligan a que por algunos días alguna acción salga de la muestra.

Criterios de selección

La selección de las series accionarias que integran la muestra del IPC se basa en dos indicadores: la rotación o bursatilidad diaria y el valor de mercado ajustado por acciones flotantes.

El valor de mercado es el primer requisito que hace elegibles solamente a las series accionarias cuyo valor de capitalización, ajustado por acciones flotantes (utilizando el porcentaje de acciones flotantes redondeado de acuerdo a las bandas definidas por BMV), sea mayor o igual al 0.1% del valor de capitalización del IPC al momento de la selección. En relación a la bursatilidad, son elegibles las series accionarias que ocupen los primeros 45 lugares de acuerdo a su rotación o bursatilidad.

Se denomina bursatilidad a la facilidad que tiene cierto valor para comprarse o venderse, en comparación con el número total de títulos operados en un cierto tiempo. La bursatilidad accionaria se refiere al desempeño que presenta una determinada acción en el mercado, durante un período de 6 meses. La dinámica de las acciones se mide por medio del Índice de Bursatilidad Accionario (IBA). Las variables que intervienen para determinar el IBA se toman de datos acumulados de los últimos 6 meses anteriores a la fecha del cálculo de índice y son dos, el importe de las operaciones y el número de operaciones. El índice calculado va de 0 a 10 y las acciones se clasifican en cuatro niveles o estratos de bursatilidad que son: alta, media, baja y mínima. A partir del 1° de septiembre de 2008, entraron en vigor nuevas regulaciones que asignan un 25% equitativo a cada uno de los

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

niveles. Esto significa que el 25% del total de las acciones con el mayor nivel de bursatilidad pertenecerán al estrato de alta bursatilidad y así sucesivamente.

Las emisoras que hayan pasado los requisitos, se ordenan de acuerdo a su bursatilidad y valor de mercado ajustado, de mayor a menor, y se califican con base en el lugar que ocupen en cada criterio.

No son consideradas para la muestra, aquellas series que, por alguna causa, exista la posibilidad concreta de que sean suspendidas o retiradas del mercado.

Ponderación de las series accionarias

La ponderación se hace considerando el valor de capitalización ajustado por acciones flotantes. Las acciones flotantes son aquellas acciones que se encuentran efectivamente circulando y disponibles para el público inversionista.

No se consideran acciones flotantes aquellas que se encuentran en posesión de:

- Accionistas de control
- Directivos claves y consejeros no independientes
- Acciones en poder de empresas tenedoras
- Fondos de pensiones u opciones de empleados
- Socios estratégicos

La fórmula para determinar la ponderación de cada serie accionaria dentro del IPC es

$$\pi_i = \frac{VMAF_i}{VAMF}$$

donde:

π_i = Peso relativo de cada serie accionaria dentro de la muestra de índice.

$VAMF$ = Valor de Mercado ajustado por acciones flotantes del total de series accionarias de la muestra de índice.

$VMAF_i$ = Valor de Mercado ajustado por acciones flotantes de la serie accionaria i , y se calcula como:

$$VMAF_i = (FAF_i * Q_i) * P_i,$$

donde:

FAF_i = Factor de ajuste por acciones flotantes de la serie accionaria i ,

Q_i = Número de acciones inscritas en Bolsa de la serie accionaria i ,

P_i = Último precio registrado en Bolsa de la serie accionaria i .

Ponderaciones máximas

Para evitar concentraciones en los pesos o ponderaciones de los componentes del IPC y siguiendo las mejores prácticas internacionales, la participación máxima que una serie accionaria puede tener al inicio de la vigencia de la muestra es de 25% y las 5 series accionarias más importantes de la muestra, no podrán tener una ponderación conjunta de más del 60%. En caso de que los límites antes mencionados se rebasen, los ponderadores se ajustarán a estos límites redistribuyendo el o los excesos de ponderación proporcionalmente entre las series que integran la muestra.

Revisión y permanencia de la muestra

La revisión de entrada y salida de series de la muestra del IPC es una vez al año, siempre y cuando no se presente alguna situación especial, ya que de ser así se hacen las modificaciones necesarias de acuerdo al evento corporativo o de mercado que lo propicie.

Se consideran además, restricciones adicionales con el objeto de asegurar la continuidad y buscar la mayor replicabilidad posible del IPC, sobre todo en el caso de aquellas series que tengan algún movimiento corporativo durante su permanencia en la muestra. De presentarse éste, se busca la mayor replicabilidad posible para afectar en forma mínima los productos financieros indexados.

Al finalizar la vigencia de la muestra se normaliza la aplicación de los criterios establecidos para la selección de series en su revisión y selección para el nuevo período. Si por alguna razón una emisora está sujeta a un proceso de oferta pública de adquisición, fusión, o algún otro evento extraordinario que conlleve a la intención formal o implicación de cancelación de su listado en la BMV, las acciones objeto de la oferta de adquisición son retiradas de la muestra el día en que se concrete la misma en la BMV, y su lugar es ocupado por una nueva serie accionaria utilizando los mismos criterios que contienen las reglas para la selección de la muestra. La Bolsa informa al mercado con la mayor oportunidad posible sobre los cambios efectuados en su composición.

Rebalanceo periódico de la muestra

Con el propósito de que el índice represente lo mejor posible el comportamiento del mercado, y al mismo tiempo mantenga una alta replicabilidad, la muestra es rebalanceada de manera trimestral durante el período de vigencia, es decir, en los meses de diciembre, marzo y junio posteriores a la revisión.

Con esto se busca que la desviación de las ponderaciones respecto a los límites establecidos (25% como máximo de una serie accionaria, y 60% como máximo del conjunto de las 5 series accionarias con mayor peso) sea la menor posible, cuando se realice el cambio de muestra en el mes de septiembre.

Ajuste por ex-derechos

Considerando la fórmula seleccionada para el cálculo del IPC, donde el valor de capitalización ajustado por acciones flotantes de cada serie accionaria determina su

ponderación, cualquier cambio en el número de valores inscritos, incidirá en la ponderación de la muestra accionaria. En este sentido, se requiere ajustar el valor de las series accionarias que decreten algún derecho y afecten su valor de capitalización.

Los movimientos que requieren factor de ajuste son, entre otros, los siguientes: recompras, pago de dividendo en acciones, suscripción de acciones, canje de títulos por reestructuración accionaria, *split* y *split* inverso, reembolso o decremento de capital, escisión o reducción de capital, fusión y obligaciones convertibles.

En este capítulo se llevó a cabo una revisión histórica del origen de los modelos econométricos y una breve descripción y referencias de los principales modelos desarrollados a la fecha. Se abordó también el marco conceptual de la teoría clásica de portafolio, las funciones de utilidad y la metodología del IPC. En el siguiente capítulo se plantean los modelos y sus soluciones para obtener los estimadores de rendimiento y volatilidad, la tasa de interés y los parámetros de los modelos de estructura de correlación propuestos. Asimismo, se describen las pruebas estadísticas gráficas y analíticas para la validación empírica de los supuestos de los modelos.

Capítulo II. Planteamiento de los Modelos

2.1. Modelo de Vasicek de renta fija

Existen en la literatura varias clases de modelos que describen el comportamiento de una tasa instantánea (tasa *spot* o tasa corta) con reversión a la media. En particular, si la tasa instantánea sigue un proceso de la forma:

$$dr_t = -\lambda(r_t - \mu)dt + \sigma r_t^\beta dW_t,$$

donde λ, μ y σ son parámetros constantes positivos, $\beta \geq 0$, y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano (M.B.). El parámetro λ se conoce como la velocidad de reversión a la media y μ y σ son la media asintótica o de largo plazo y la volatilidad de la tasa de interés respectivamente.

Esta es una de las familias más importantes de modelos de tasa instantánea con reversión a la media y parámetros constantes. En esta ecuación existe una volatilidad $\sigma^2 r_t^{2\beta}$ al tiempo t , en donde, $\beta \geq 0$. Las situaciones en las que $\beta = 0$ y $\beta = 1/2$ son de particular interés, ya que conllevan a modelos que pueden tratarse analíticamente. En particular, el modelo de Vasicek (1977) se obtiene cuando $\beta = 0$, mientras que el modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985) se obtiene cuando $\beta = 1/2$. Valores de β diferentes de 0 y 1/2 no son muy populares en la literatura debido a la complejidad y dificultad técnica que presentan en su tratamiento analítico.

Es importante mencionar que el modelo Vasicek (1977) puede producir tasas negativas con probabilidad positiva. Esta limitación no aparece en el modelo propuesto por Cox *et al.* (1985) ya que en su modelo las tasas siempre son positivas y la dinámica de la tasa instantánea está representada por la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dr_t = -\lambda(r_t - \mu)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t.$$

Es importante notar que al considerar $\sqrt{r_t}$ en la volatilidad, el proceso de la tasa instantánea deja de tener una distribución normal. Este proceso presenta reversión a la media como el modelo de Vasicek (1977), pero la varianza es proporcional a $\sigma^2 r_t$ al tiempo t . Esto significa que conforme la tasa de interés instantánea aumenta, la desviación estándar o incertidumbre aumenta.

Una de las contribuciones más importantes del trabajo de Vasicek (1977) es la determinación de una ecuación diferencial estocástica que caracteriza el precio de un bono cupón cero en ausencia de oportunidades de arbitraje. Un aspecto curioso relacionado con el artículo de Vasicek (1977) es que en la última sección de su trabajo se analiza un ejemplo específico para ilustrar cómo se obtiene el precio de un bono cupón cero mediante el uso de ecuaciones diferenciales. Lo sorprendente es que el nombre de Vasicek (1977) ha sido asociado más con el ejemplo que presentó en su investigación que con toda la teoría desarrollada a lo largo del artículo. Este ejemplo particular describe la dinámica estocástica de una tasa de interés instantánea que presenta reversión a la media. En dicho ejemplo, el M.B. desempeña un papel fundamental en el modelado del riesgo del mercado. El modelo forma parte de los llamados modelos de equilibrio general debido al uso de condiciones de no arbitraje para caracterizar, en este caso, las tasas de interés instantáneas.

En el modelo de Vasicek (1977) se estudia, como caso particular, la dinámica de una tasa instantánea que presenta reversión a la media hacia un valor constante. Este comportamiento se observa, en muchos casos, cuando se analizan series de tiempo de tasas de corto plazo. La tasa de interés instantánea r_t es simulada por la siguiente EDE:

$$dr_t = -\lambda(r_t - \mu)dt + \sigma dW_t, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

donde λ, μ y σ son constantes positivas conocidas. En este caso, como puede observarse, W_t , la variable aleatoria representada por el M.B., es la única fuente de incertidumbre. En la dinámica estocástica de la tasa instantánea, expresada en la ecuación (2.1), r_t es forzada

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

a moverse, en promedio, hacia un nivel de largo plazo o tasa asintótica μ , a una velocidad de reversión a la media λ . Si la tasa está por arriba de μ , esta es forzada a moverse hacia abajo hasta el nivel μ y viceversa, si la tasa está por debajo de μ , esta es forzada a moverse hacia arriba, al nivel μ .

Los parámetros del modelo pueden ser estimados mediante regresión lineal simple planteando el modelo en términos discretos como una ecuación estocástica en diferencias, o bien asumiendo que es un proceso autorregresivo de orden uno con tendencia y obtener los parámetros mediante inferencia por máxima verosimilitud. En esta tesis se lleva a cabo la estimación por el primer método.

Si en la ecuación (2.1) se hace el siguiente cambio de variable para r_t ,

$$m_t = \lambda(r_t - \mu),$$

entonces el modelo de Vasicek (1977) puede reescribirse como

$$dm_t = -\lambda m_t dt + \lambda \sigma dW_t.$$

Esta ecuación es conocida también como el proceso Ornstein-Uhlenbeck (Castañeda-Leyva, Pérez-Hernández y Rodríguez-Narciso, 2008) uno de los conceptos más importantes en la teoría de procesos estocásticos de tiempo continuo. Como ejemplo del comportamiento de la tasa de interés, en la Figura 2.1 se muestra una simulación del rendimiento del Certificado de la Tesorería (CETE), utilizando los parámetros estimados del modelo Vasicek (1977) con datos históricos del CETE a 91 días y la ecuación (2.5).

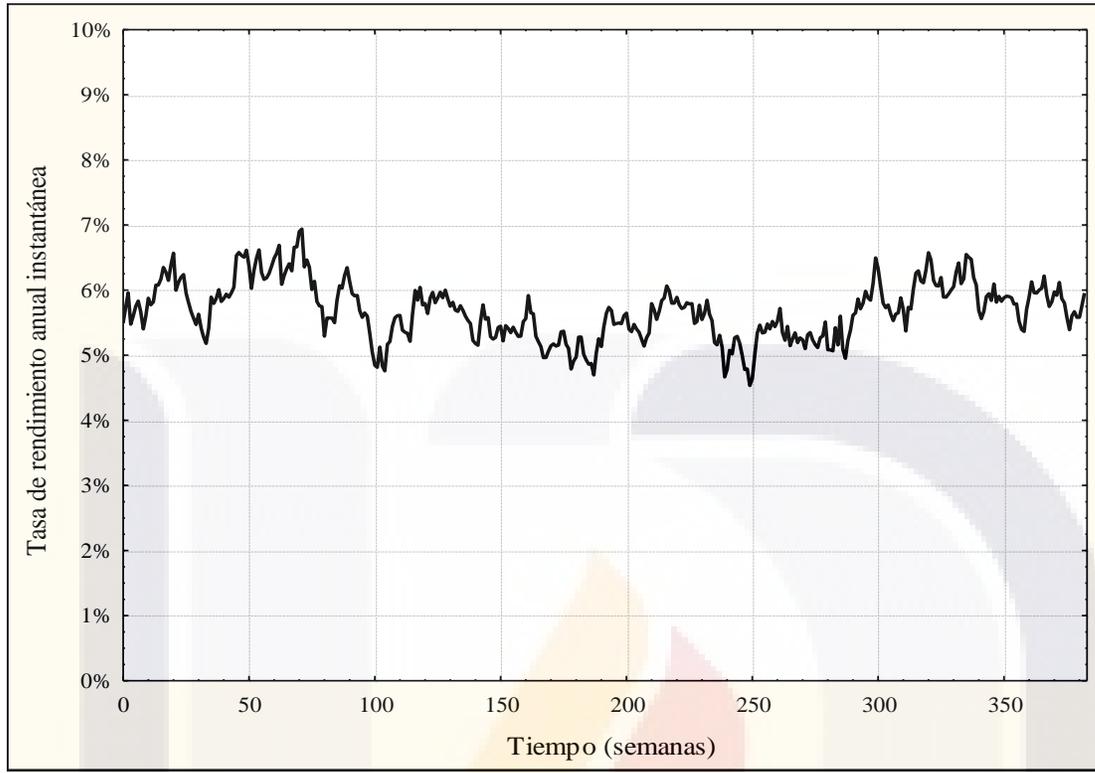


Figura 2.1. Simulación de la dinámica del CETE utilizando el modelo Vasicek de la ecuación (2.5) y la tasa estimada por el modelo $r_0 = 5.55\%$.

Fuente: datos semanales del rendimiento del CETE a 91 días publicado por Banco de México (2010) del 02/01/2003 al 29/04/2010 para estimar los parámetros del modelo. Elaboración propia.

2.1.1. Estimadores de los parámetros del modelo

La dinámica de precios de un bono o una cuenta de ahorros con $r(t)$ rendimiento o tasa de interés instantánea está dada por la EDE

$$dB_t = rB_t dt; \quad t \geq 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{dB_t}{B_t} = r dt$$

y la solución es

$$B_t = B_0 e^{\int_0^t r(s) ds}. \quad (2.3)$$

Los modelos de tiempo continuo de los mercados de renta fija se enfocan en la dinámica de la tasa instantánea r . Mas precisamente, r es modelada como un proceso de difusión. Por lo tanto, el activo libre de riesgo se puede modelar como la tasa de interés de una cuenta de ahorros o la tasa de rendimiento de un bono libre de riesgo.

El modelo de Vasicek (1977) es uno de los modelos de tiempo continuo más conocidos para modelar la dinámica de la tasa de interés dentro de los modelos del tipo de un factor (Cvitanic y Zapatero, 2004).

El proceso estocástico $\{r_t\} t \geq 0$ es Vasicek si satisface la EDE (2.1):

$$dr_t = -\lambda(r_t - \mu)dt + \sigma dW_t, \quad t > 0$$

$$r_0 \in R, \quad \lambda > 0, \quad y \quad \mu \in R, \quad \sigma > 0.$$

Este modelo satisface la propiedad llamada de reversión a la media y el parámetro λ , como se describe arriba, es llamado la velocidad de reversión a la media. La reversión a la media es una propiedad que las tasas de interés muestran en el mundo real. Un inconveniente del modelo Vasicek (1977) es que la tasa de interés puede ser negativa. Para la solución matemática del modelo, ver Castañeda-Leyva *et al.* (2008).

La solución de la ecuación (2.1) es:

$$r_t = e^{-\lambda t} r_0 + (1 - e^{-\lambda t}) \mu + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW_s \quad (2.4)$$

La inferencia de los parámetros (λ, μ, σ) de la solución (2.4) se desarrolla asumiendo que el proceso $r_t \geq 0$ es observado en tiempos equidistantes $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, del intervalo $[0, T]$ con un valor muy pequeño de $h = (T/n) > 0$ por lo que la EDE (2.1) puede escribirse como una ecuación en términos discretos por diferencias:

$$r_{t+h} - r_t \approx -\lambda(r_t - \mu)h + \sigma(W_{t+h} - W_t)$$

o

$$r_{t+h} \approx \lambda\mu h + (1 - \lambda h)r_t + \sigma(W_{t+h} - W_t).$$

Si definimos la serie de tiempo $\{Y_i\}_{i=0}^n$ de la tasa de interés como

$$Y_i = r_{ih}; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

la última ecuación se puede escribir como:

$$Y_i \approx \beta_0 + \beta_1 Y_{i-1} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.5}$$

donde se ha sustituido

$$\beta_0 = \lambda\mu h, \quad \beta_1 = 1 - \lambda h, \quad \sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2 h$$

y $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ es un ruido blanco gaussiano, es decir un conjunto de variables estocásticas independientes e idénticamente distribuidas con una distribución normal estándar

$$\varepsilon_i \sim i. i. d. N(0,1).$$

Ya que la ecuación (2.5) es un modelo lineal, la estimación de los parámetros $(\beta_0, \beta_1, \sigma_\varepsilon)$ se realiza por regresión lineal. Por lo tanto, los estimadores de los parámetros del modelo Vasicek (1977) son:

$$\hat{\lambda}_r = \frac{1 - \tilde{\beta}_1}{h}, \quad (2.6.a)$$

$$\hat{\mu}_r = \frac{\tilde{\beta}_0}{1 - \tilde{\beta}_1}, \quad (2.6.b)$$

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{\tilde{\sigma}_\varepsilon^2}{h}, \quad (2.6.c)$$

donde $\tilde{\beta}_0$, $\tilde{\beta}_1$ y $\tilde{\sigma}_\varepsilon^2$ son las estimaciones de β_0 , β_1 y σ_ε^2 .

2.2. Modelo de Black-Scholes-Merton para activos con riesgo

En este trabajo se asume que la dinámica de m procesos de precios de los activos con riesgo sigue un M.B. m –dimensional, también conocido como un proceso de Wiener (1958).

En $t \in [0, T]$, y tiempo final $T > 0$, se denota:

B_t : valor del bono; $B_0 = 1$,

S_t^1 : precio del activo con riesgo 1,

⋮

S_t^m : precio del activo con riesgo m .

El modelo de precios es una generalización m –dimensional del modelo de Black-Scholes-Merton (BSM), de acuerdo a la siguiente EDE:

$$dS_t^i = S_t^i(\mu_i dt + \sigma_{i1}dW_t^1 + \dots + \sigma_{im}dW_t^m), \quad (2.7)$$

para $i = 1, \dots, m$, donde

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \dots & \sigma_{mm} \end{pmatrix}, \quad W_t = \begin{pmatrix} W_t^1 \\ \vdots \\ W_t^m \end{pmatrix}; \quad t \geq 0$$

son el vector de rendimientos, la matriz de volatilidad y un M.B. m –dimensional, respectivamente.

El vector μ representa la tasa de rendimiento de las acciones, mientras que la incertidumbre, así como la dependencia entre las acciones, está representada por la matriz de volatilidad σ . El vector W_t representa el vector estocástico que aporta el ruido o incertidumbre.

Se asume que los parámetros del modelo permanecen constantes a lo largo del tiempo. La solución de la EDE (2.7) se obtiene a través del lema de Itô (Castañeda-Leyva *et al.*, 2008):

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}; \quad t \geq 0. \quad (2.8)$$

Notar que S_t es siempre positiva, así como la distribución de S_t/S_{t-1} es log-normal de parámetros

$$\tilde{\mu} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \quad \text{y} \quad \tilde{\sigma}^2 = \sigma^2t,$$

denotando como

$$\frac{S_t}{S_0} \sim \text{logN} \left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2t \right)$$

o equivalentemente

$$\text{log} \frac{S_t}{S_0} \sim N \left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2t \right).$$

Esto es porque de (2.8) tenemos

$$\text{log} \frac{S_t}{S_0} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t$$

y W_t tiene distribución normal, media cero y varianza t .

Una ejemplo del comportamiento del modelo se muestra en la Figura 2.2 donde se llevaron a cabo cuatro simulaciones utilizando los parámetros estimados del modelo y la ecuación (2.8) con precios escalados de la acción ELEKTRA. La simulación se hizo en una hoja Excel®. La aleatoriedad mostrada en las simulaciones de la figura muestra el efecto estocástico generado por el M.B. del modelo.

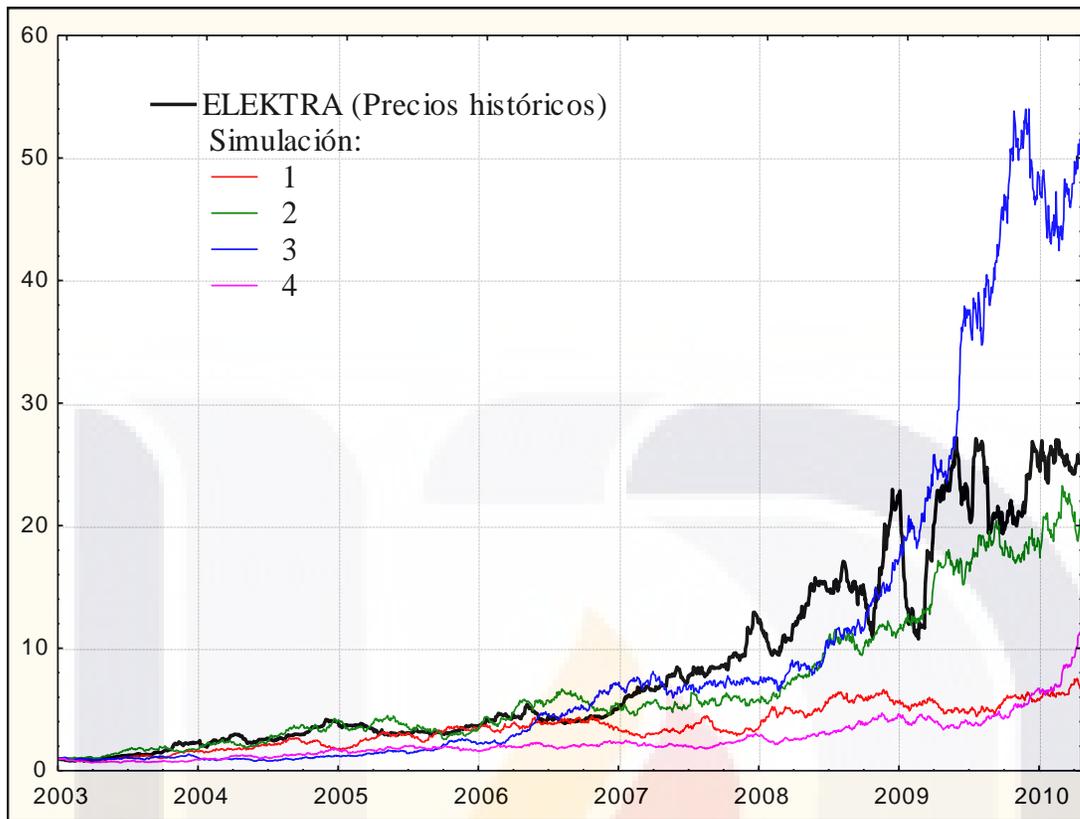


Figura 2.2. Simulaciones de precios de ELEKTRA utilizando el modelo BSM de la ecuación (2.8) y $S_0 = 1$.

Fuente: precios de cierre diarios de ELEKTRA tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010 para estimar los parámetros de la emisora, $\hat{\mu} = 50.3\%$ y $\hat{\sigma} = 35.2\%$, mediante las ecuaciones (2.12) y (2.14). Elaboración propia.

2.2.1. Estimadores de los parámetros del modelo

El modelo de la ecuación (2.7) tiene $m + m(m + 1)/2$ parámetros diferentes correspondiendo m parámetros de $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ y $m(m + 1)/2$ parámetros de $\sigma\sigma'$.

El método de estimación por máxima verosimilitud (EMV) (Casella y Berger, 2002) se utiliza para la inferencia de los parámetros μ y σ a partir de la serie de tiempos $\{S_{t_i}\}_{i=1, \dots, n}$.

Se considera que en el proceso de precios $\{S_t\}_{t \geq 0}$, se observa $n + 1$ tiempos equidistantes:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T,$$

$$t_i = ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad h = \frac{T}{n}.$$

La serie de log-rendimientos (*log-returns*) $\{Z_i\}_{i=1}^n$ se define como:

$$Z_i = \log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} = \log S_{ih} - \log S_{(i-1)h}.$$

De la ecuación (2.9) tenemos que

$$Z_i = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) h + \sigma (W_{ih} - W_{(i-1)h}),$$

para $i = 1, \dots, n$. Esta es una muestra aleatoria de una distribución normal de media $\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) h$ y varianza $\sigma^2 h$:

$$Z_i \sim i. i. d. N \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) h, \sigma^2 h \right)$$

puesto que, como se afirma antes,

$$W_{ih} - W_{(i-1)h} \sim i. i. d. N(0, h).$$

Si se define

$$\alpha = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2,$$

entonces $Z_i \sim i. i. d. N(\alpha h, \sigma^2 h)$; para $i = 1, \dots, n$.

Asumiendo series de precios diarios completas, es decir, que no hay días con datos faltantes, se sabe que en una población normal, la media y varianza muestral son el EMV de la media y varianza poblacional, respectivamente (Anderson y Olkin, 1985), donde αh y $\sigma^2 h$ son la media y varianza muestral de la serie $\{Z_i\}_{i=1}^n$, respectivamente. Además, del principio de invariancia (Sprott, 2000), se obtienen directamente los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ . En este sentido

$$\hat{\alpha}h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} = \frac{h}{T} \log \frac{S_T}{S_0}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T} \log \frac{S_T}{S_0} = \frac{1}{h} \bar{Z}$$

y

$$\hat{\sigma}^2 h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2.$$

Por último, el estimador de μ se resuelve de la ecuación

$$\hat{\alpha} = \hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2,$$

y los estimadores del modelo son

$$\hat{\mu} = \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \tag{2.9}$$

donde

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T} \log \frac{S_T}{S_0} = \frac{1}{h} \bar{Z} \tag{2.10}$$

y

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2. \quad (2.11)$$

Datos faltantes

En ocasiones las series de datos diarios de los precios de las acciones $\{S_{t_i}\}_{i=1,\dots,n}^n$ presentan datos faltantes, por lo cual deben llevarse a cabo las adecuaciones pertinentes de la inferencia de los parámetros que involucra el modelo. Esta situación puede deberse a que las autoridades reguladoras del mercado deciden suspender la cotización de una acción (Bolsa Mexicana de Valores, 2012) debido a anomalías en la información reportada, en la claridad de las operaciones o por problemas entre los accionistas y la dirección de la empresa que puedan afectar el precio de la acción de manera irregular. En el caso de que el dato faltante se deba a que el precio de la acción creció o disminuyó sobrepasando los límites establecidos por las autoridades regulatorias y estas suspenden la cotización de la acción, este dato tiene información paramétrica valiosa y debe ser parte de la muestra y tomarse en cuenta, por ejemplo como un dato censurado (Spratt, 2000).

Los datos faltantes se deben también a errores u omisiones en la recolección de información para las bases de datos, de manera que si el dato faltante se debe al azar, por causas ajenas al mercado, entonces la muestra se reduce a los días observados del precio de la acción.

Afortunadamente, la estimación de máxima verosimilitud se adapta fácilmente al caso de información incompleta (Casella y Berger, 2002). En este sentido, dicha metodología no requiere de realizar procedimiento alguno de imputación o sustitución del o los precios faltantes (Allison, 2002).

El enfoque de verosimilitud es unificado en el sentido de que la inferencia se realiza bajo cualquier circunstancia del esquema de muestreo. Cabe mencionar que esta metodología depende del conocimiento de la estructura distribucional muestral. En ocasiones la

inferencia es sensible a la elección del modelo y puede presentar un gran esfuerzo numérico y computacional. El algoritmo de maximización de la esperanza o EM por sus siglas en inglés (*Expectation-Maximization*) ha sido ampliamente desarrollado y aplicado a una amplia variedad de modelos con datos faltantes (Dempster, Laird y Donald, 1977) y consiste en un algoritmo iterativo disponible en varios paquetes de software comerciales.

En este trabajo se asume que los datos faltantes se deben al azar, por causas ajenas a la dinámica de las acciones. Así que los tiempos de observación de los precios de las acciones podrían no ser equidistantes. Los vacíos de información se pueden dar en días aislados o en conglomerados de días, sin algún patrón aparente.

Se considera que el proceso de precios $\{S_t\}_{t \geq 0}$, se observa en los tiempos

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = T.$$

El total de días observados $n + 1$ puede diferir de acción en acción, es decir que h , el período de tiempo entre dos datos es variable, tomando diferentes valores según el número de datos faltantes entre dos precios. Si no hay datos faltantes, h es equivalente a un día, si hay un precio faltante, h toma el valor de dos días, etc. Por lo tanto h se convierte en h_i , y toma diferentes valores dependiendo del número de precios faltantes entre dos cotizaciones de precios consecutivas. Si la serie de tiempo diaria no tiene datos faltantes, entonces los tiempos de observación son equidistantes y

$$h_i = h = 1 \text{ día.}$$

Notar que ahora

$$h_i = t_i - t_{i-1}$$

y

$$\sum_{i=1}^n h_i = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = t_n - t_0 = T$$

donde n es el número de intervalos entre datos conocidos. En el caso de que no haya datos faltantes, $n + 1$ corresponde al número total de observaciones de la serie.

El desarrollo matemático se muestra en el Anexo A, obteniéndose los siguientes estimadores para los dos casos posibles, en donde $h_i = \frac{T}{n}$ es constante cuando no hay datos faltantes o bien, cuando si los hay, h_i toma valores diferentes.

Para datos faltantes, los estimadores corresponden a las ecuaciones (A.3), (A.4) y (A.5) del Anexo A:

$$\hat{\mu} = \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \tag{2.12}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T} \log \frac{S_T}{S_0} \tag{2.13}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(z_i - \hat{\alpha} h_i)^2}{h_i}. \tag{2.14}$$

Notar que las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14) para el caso de que h_i sea constante, son equivalentes a las ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.11) del apartado anterior.

2.2.2. Modelo de portafolio de inversión

Una inversión en un portafolio conteniendo un activo con riesgo y un activo libre de riesgo o cuenta bancaria es modelado primero para luego considerar el modelo multivariado con más de un activo con riesgo y el bono.

El proceso de precios $\{S_t\}_{t \geq 0}$, y el proceso de tasas de interés $\{r_t\}_{t \geq 0}$, se modelan de acuerdo a las dinámicas descritas en las secciones previas. Por lo tanto, los parámetros del mercado son:

r : tasa instantánea de interés,

μ : rendimiento instantáneo de la acción,

σ : volatilidad de la acción.

Asumiendo que el objetivo del inversionista es maximizar su riqueza, él estará tomando decisiones continuamente para definir en cada instante su estrategia de inversión, ponderando cada activo financiero en cada instante de tiempo t del intervalo $[0, T], T > 0$ y debería ser capaz de reestructurar su portafolio en cada momento $t \in [0, T]$.

Suponiendo que el inversionista tiene un capital inicial positivo $X_0 = x > 0$, $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es el proceso de riqueza en cada momento $t \in [0, T]$, medido en unidades monetarias.

Si π_t es la proporción de riqueza que es invertida en los activos con riesgo, el inversionista asigna $\pi_t X_t$ a los activos con riesgo mientras que el complemento $(1 - \pi_t) X_t$ se deposita en la cuenta de ahorros o se invierte en el bono libre de riesgo:

$$\begin{aligned} \text{Riqueza} &= \text{Inversión activos con riesgo} + \text{Inversión bono} \\ X_t &= \pi_t X_t + (1 - \pi_t) X_t. \end{aligned}$$

El proceso de riqueza $\{X_t\}, 0 \leq t \leq T$, es estocástico porque depende de las condiciones cambiantes del mercado, pero la estrategia es determinada por el inversionista.

La estrategia de portafolio $\{\pi_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es admisible si el correspondiente proceso de riqueza es no negativo, es decir

$$X_t \geq 0; \quad 0 \leq t \leq T.$$

En el caso en que $X_t(\omega) = 0$ el proceso de riqueza se encuentra en un estado absorbente y cualquier tipo de inversión se suspende.

La estrategia de portafolio en el tiempo t es el vector columna:

$$\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^m); \quad t \in [0, T]$$

y

$$X_t = \pi_t^0 X_t + \pi_t^1 X_t + \dots + \pi_t^m X_t,$$

donde π_t^i es la proporción de la riqueza total X_t invertida en el i -ésimo activo con riesgo para cada activo $i = 1, \dots, m$.

Para estrategias autofinanciables el capital en cualquier tiempo t es la suma de todas las inversiones en cada activo más la inversión en el bono, es decir,

$$\pi_t^0 + \pi_t^1 + \dots + \pi_t^m = 1,$$

donde π_t^0 es la proporción del capital invertido en el bono o en la cuenta de ahorros del banco. Esto significa que durante $[0, T]$ el capital ganado es reinvertido solamente en los $m + 1$ instrumentos financieros disponibles. Al inversionista no le es permitido retirar o consumir fondos del portafolio o llevar a cabo inyecciones de capital nuevo al portafolio durante el período de inversión del mismo.

Aunque esta condición parece restrictiva para la conveniencia y mejor toma de decisiones del inversionista, es un premisa importante que ayuda a cuantificar y comparar la eficiencia de las estrategias de portafolio. Además, el modelo permite venta en corto, $\pi_t^i < 0$, y pedir

prestado, $\pi_t^0 < 0$, asumiendo que el costo de financiamiento es r , es decir que no existe un *spread* entre la tasa de préstamo y la tasa de ahorro.

Considerando las premisas y ecuaciones anteriores, el proceso de riqueza puede expresarse como una EDE

$$dX_t = \pi_t X_t \frac{dS_t}{S_t} + (1 - \pi_t) X_t \frac{dB_t}{B_t}.$$

Substituyendo las ecuaciones (2.2) y (2.7)

$$dX_t = X_t(r + (\mu - r)\pi_t)dt + \dots + \pi_t \sigma dW_t.$$

La solución es (Castañeda-Leyva *et al.*, 2008):

$$X_t = X_0 e^{rt + ((\mu - r)\pi_t - \frac{1}{2}\sigma^2\pi_t^2)t + \sigma\pi_t W_t}; \quad t \geq 0. \quad (2.15)$$

2.2.3. Optimización del portafolio de inversión

El objetivo de un inversionista es maximizar la función de utilidad esperada $EU(X)$, siendo $U(x)$ una función de utilidad. Se usará la función potencia y logarítmica:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} x^\gamma & x > 0, \quad 0 \neq \gamma < 1, \\ \log x & x > 0, \quad \gamma = 0 \end{cases},$$

donde γ es el coeficiente de propensión al riesgo del inversionista. Si $\gamma \ll 1$ el inversionista es averso al riesgo y $\gamma \approx 1$ si el inversionista es propenso al riesgo.

En esta tesis se considera tanto el control determinista como el estocástico implicando el primero proporciones constantes de riqueza y en el segundo, aplicando el principio de

programación dinámica, se obtiene la solución del problema de optimización de forma dinámica, utilizando la función de utilidad referida y considerando estrategias admisibles.

En relación al control estocástico el modelo se desarrolla para múltiples acciones.

Control determinista

Se asume que la estrategia de portafolio π_t es constante, es decir. $\pi_t = \pi$, $0 \leq t \leq T$ y la solución (2.15) es entonces

$$X_t = x e^{(r+\pi(\mu-r)-\frac{1}{2}\pi^2\sigma^2)t+\pi\sigma W_t} \quad (2.16)$$

y el inversionista determinará su estrategia de portafolio maximizando la función de utilidad

$$J(\pi, x) = EU(X_T) = E \left\{ \frac{1}{\gamma} X_T^\gamma \right\}; \quad \pi \in R, \quad x > 0,$$

donde la dinámica del proceso de riqueza está dado por (2.15) con riqueza inicial X_0 , donde $X_0 = x > 0$ y $\pi \in R$ es una constante. La función objetivo es:

$$J(\pi) = EU(X_T) = \frac{1}{\gamma} EX_T^\gamma.$$

Substituyendo (2.16)

$$J(\pi) = \frac{x^\gamma}{\gamma} e^{\gamma r T} \times e^{[(\mu-r)\pi - \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma^2\pi^2]\gamma T}.$$

Resolviendo para maximizar la función

$$\tilde{J}'(\pi) = 0$$

la solución óptima es

$$\hat{\pi} = \frac{\mu - r}{(1 - \gamma)\sigma^2} \tag{2.17}$$

y como

$$\tilde{J}''(\hat{\pi}) = -(1 - \gamma)\sigma^2 T \tilde{J}(\hat{\pi}) < 0$$

es decir, π en (2.17) es el único máximo global.

La solución (2.17) implica, por ejemplo, que el portafolio óptimo contenga mayormente activos con riesgo si:

$$\mu \gg r, \quad \sigma \approx 0 \quad \text{o} \quad \gamma \approx 1,$$

lo cual es congruente con la racionalidad de un inversionista propenso al riesgo.

En contraste, la inversión en el activo con riesgo es reducida, incrementando la inversión en el bono cuando:

$$\mu \approx r, \quad \sigma \gg 0 \quad \text{o} \quad \gamma \ll 1.$$

Además, el modelo vendería en corto en el caso poco común en el que $\mu < r$.

Control estocástico

A partir de (2.15) y para $0 \neq \gamma < 1$, la función objetivo es ahora

$$J(t, \pi, x) = E \left\{ \frac{1}{\gamma} X_T^\gamma \mid X_t = x \right\}; \quad x > 0,$$

donde $\{\pi_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es una estrategia de portafolio admisible.

Como se está buscando una representación dinámica de la solución, es decir dependiente del tiempo t , la solución única que se obtiene (Castañeda-Leyva *et al.*, 2008), es:

$$\hat{\pi}_u = \pi^*(u, X_u) = \frac{\mu - r}{(1 - \gamma)\sigma^2}; \quad u \in [t, T]. \quad (2.18)$$

Notar que esta estrategia de portafolio óptima es la misma estrategia de proporción constante (2.17) bajo control determinístico, por lo que la interpretación es similar.

Portafolio con activos múltiples

Para el caso multivariado, es decir cuando se tienen múltiples activos con riesgo y el bono libre de riesgo, el desarrollo es similar y el óptimo es:

$$\hat{\pi}_u = \pi^*(u, X_u) = \frac{1}{(1-\gamma)} (\sigma\sigma')^{-1} (\mu - r); \quad u \in [t, T]. \quad (2.19)$$

Esta estrategia óptima implica una asignación constante de una proporción de la riqueza a cada activo con riesgo S_i . Regularmente la estrategia óptima favorece a aquellos activos con tasas de rendimiento altas, en tanto que el índice de aversión, $1 - \gamma$, así como la incertidumbre, representada por la matriz cuadrada $\sigma\sigma'$, inhiben la inversión en los activos con riesgo, canalizándola al bono libre de riesgo.

2.3. Modelos de estructura de correlación

A pesar de que la teoría de portafolios clásica data desde las primeras publicaciones de Markowitz (1952), las aplicaciones han sido relativamente recientes, debido a la complejidad tanto por la cantidad y tipo de datos o estimadores necesarios para el análisis de portafolios como por la complejidad de las metodologías de cálculo de los portafolios óptimos.

Los modelos para estimar estructuras de correlación entre rendimientos se desarrollan ante las limitaciones del modelo, ya que con frecuencia se obtienen resultados de portafolios no factibles.

Los modelos se clasifican en dos categorías, los que usan índices y los que utilizan técnicas de promedio. Para el caso de los primeros se implementa una de las simplificaciones usadas para la estructura de correlación del portafolio que es el modelo de índice simple, desarrollado por Sharpe (1963). Con objeto de ver los resultados del segundo tipo, se implementa el modelo de estructura de correlación constante de Elton y Gruber (1973).

Las técnicas más ampliamente utilizadas son las de índice simple (Bodie, Kane y Marcus, 2011) y asumen que el movimiento común entre los precios de las acciones se debe a una sola influencia o índice. Este modelo de estructura de correlación de índice simple es usado no solo en estimar la matriz de correlación sino también en pruebas de mercados eficientes, pruebas de equilibrio y modelos de valuación de activos, como es el caso del CAPM (Sharpe, 1964).

Cabe añadir que recientemente se han desarrollado otros modelos basados en la reducción de la matriz de correlación pero cuya aplicación se ha limitado a portafolios de varianza mínima global (VMG) (Candelon *et al.*, 2012, Kourtis, *et al.*, 2012, y Disatnik, y Benninga, 2007).

Modelo de índice simple

La estimación de los rendimientos de cada acción $\hat{\mu}_i$, utilizando el modelo BSM, que es una de las aportaciones de esta tesis, nos permite determinar el rendimiento esperado del portafolio de acuerdo a la ecuación siguiente, en notación algebraica:

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^m \pi_i \hat{\mu}_i, \quad (2.20)$$

donde $\pi_i = (\pi_1, \dots, \pi_m) \in \mathbb{R}^m$, mientras que la volatilidad o desviación estándar del rendimiento de un portafolio puede expresarse algebraicamente como:

$$\hat{\sigma} = \left[\sum_{i=1}^m \pi_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \pi_i \pi_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \right]^{1/2}, \quad (2.21)$$

donde ρ_{ij} es el coeficiente de correlación entre los activos i y j .

Estas ecuaciones definen los parámetros necesarios para llevar a cabo un análisis de portafolio. En la ecuación (2.20) se requiere de la estimación de los rendimientos de cada acción que forme parte del portafolio. Para la ecuación (2.21) se requiere de las estimaciones de la varianza de cada acción así como la estimación del coeficiente de correlación entre cada par posible de las acciones consideradas.

Como se puede apreciar, la estimación del rendimiento mediante la ecuación (2.12) y de la varianza mediante la ecuación (2.14), son relativamente simples en comparación con el cálculo de las correlaciones. El problema radica en que para el cálculo de las correlaciones se requiere analizar cómo el comportamiento de una acción en determinada industria o sector puede afectar el rendimiento de otra acción en otra industria totalmente diferente, ya que al conformar un portafolio, este no se limita a una industria pues se perdería el objetivo

de la diversificación para reducir el riesgo no-sistemático (idiosincrático o específico). De hecho, es trivial conocer el tipo de estructura que permita el cálculo de manera directa de las correlaciones entre pares de rendimientos de acciones de diferentes sectores o industrias. Los modelos, incluyendo el BSM, lo plantean generalmente a través de la matriz varianza-covarianza de la muestra.

Por otro lado, el comportamiento de los precios de las acciones en el mercado muestra que cuando el mercado sube (medido por cualquiera de los índices del mercado de valores), la mayoría de las acciones tiende a incrementar su precio, y cuando el mercado va a la baja, la mayor parte de las acciones tiende a disminuir su precio. Esta observación puede sugerir que una razón por la que el rendimiento de una acción esté correlacionado es debido a una respuesta común a los cambios del mercado y una medida útil de esta correlación puede obtenerse relacionando el rendimiento de la acción al rendimiento de un índice del mercado de acciones. El rendimiento de una acción puede entonces escribirse como:

$$\mu_i = a_i + \beta_i \mu_M, \quad (2.22)$$

donde a_i y μ_M son variables aleatorias que corresponden al componente de la acción i que es independiente del desempeño del mercado y al rendimiento del índice del mercado respectivamente, y β_i es la constante que mide la sensibilidad del cambio esperado de μ_i dado un cambio en μ_M . Es pertinente señalar que el coeficiente β_i , es equivalente a la β del modelo CAPM (Sharpe, 1964, Lintner, 1965, Mossin, 1966 y Treynor, 1961).

La β de un portafolio se determina como el promedio ponderado de las β_i , según la participación π_i de cada acción en el portafolio:

$$\beta_P = \sum_{i=1}^m \pi_i \beta_i. \quad (2.23)$$

El término a_i que es insensible al rendimiento del mercado puede desglosarse en dos componentes. Sea α_i el valor esperado de a_i y sea e_i la parte aleatoria de a_i . Entonces,

$$a_i = \alpha_i + e_i$$

donde e_i tiene un valor esperado igual a cero.

La ecuación del rendimiento de la acción (2.22) puede escribirse entonces como

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_M + e_i. \quad (2.24)$$

Como ya se dijo, e_i y μ_M son variables aleatorias. Cada una tiene una distribución de probabilidad y una media y una desviación estándar. Es conveniente que e_i no esté correlacionada con μ_M pues de esa manera la ecuación (2.24) describe el rendimiento de la acción independientemente de lo que suceda con el rendimiento del mercado. Formalmente esto significa que

$$\text{cov}(e_i, \mu_M) = E[(e_i - 0)(\mu_M - \bar{\mu}_M)] = 0.$$

Mediante análisis de regresión se pueden estimar α_i , β_i y $\sigma_{e_i}^2$ de la ecuación (2.24).

Una premisa de este modelo que es la característica de los modelos de índice simple que los diferencia de otros modelos utilizados para describir la estructura de covariancia, es la suposición que e_i es independiente de e_j para todos los valores de i y de j o, mas formalmente, $E(e_i, e_j) = 0$. Esto implica que la única razón por la que las acciones varían a la vez, sistemáticamente, es por un movimiento común con el mercado. No existen efectos más allá de los del mercado (i.e. efectos de la industria o sector) que expliquen los movimientos comunes entre las acciones.

Dada las dos suposiciones anteriores, se tiene la siguiente expresión para la covarianza cuando el modelo de estructura de correlación de índice simple se utiliza para representar los movimientos conjuntos de las acciones.

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \beta_i \beta_j \sigma_M^2, & i \neq j \\ \sigma_i^2, & i = j \end{cases}, \quad (2.25)$$

donde σ_M^2 es la varianza de μ_M y σ_i^2 es la varianza de μ_i . La demostración del resultado anterior se muestra en el Anexo B.

Modelo de correlación constante

La idea de promediar o suavizar algunos de los datos en la matriz de correlación de la muestra, ha sido ya probada empíricamente (Elton, Gruber, Brown y Goetzmann, 2010). El tipo de promedio que puede estimarse, agregando la mayor información de todas las acciones, consiste en usar el promedio de todas las correlaciones de pares de acciones del pasado para utilizarse como correlación para pronosticar el futuro. Esto es equivalente a asumir que la matriz de correlación histórica contiene información sobre el promedio de correlación futura pero no contiene información sobre diferencias individuales respecto a este promedio.

Un modelo de promedio sería aquel que asumiera que hay una correlación media dentro de, y entre, las acciones de un grupo, como sería el caso de la idea tradicional de agrupar las acciones por industrias o sectores. Para los fines de esta tesis se usa el promedio agregado global pues se están analizando portafolios óptimos que incluyen acciones de cualquier tipo de sector o industria.

El modelo de estructura de correlación constante calcula la matriz varianza-covarianza asumiendo que las varianzas de los rendimientos corresponden a las varianzas de la muestra pero las covarianzas están todas relacionadas por el mismo coeficiente de correlación ρ , constante, el cual es calculado tomando el promedio de las correlaciones entre todas las parejas de acciones consideradas en el portafolio, de modo que si asumimos que

$$\text{cov}(\mu_i, \mu_j) = \sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j,$$

y que $\rho_{ij} = \rho$, es una constante, en el modelo de estructura de correlación tendríamos que:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \rho\sigma_i\sigma_j, & i \neq j \\ \sigma_i^2, & i = j \end{cases} \quad (2.26)$$

2.4. Validación empírica de los supuestos de los modelos

Bajo el modelo BSM, la serie de tiempos de los log-rendimientos $\{Z_i\}_{i=1}^n$, es una muestra aleatoria independiente y con distribución normal

$$Z_i \sim i.i.d. N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)h, \sigma^2h\right); i = 1, 2, \dots, n,$$

donde los tiempos de observación del proceso son equidistantes: $t_{i+1} - t_i = h$, con $h > 0$, esto es porque

$$Z_i = \log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} = \log \frac{S_{ih}}{S_{(i-1)h}} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)h + \sigma(W_{ih} - W_{(i-1)h}); i = 1, 2, \dots, n.$$

Por lo anterior, las pruebas que se llevan a cabo para validar los modelos de precios y portafolios, son la de independencia de los log-rendimientos y la de distribución normal o pruebas de normalidad de los mismos. La validez de los modelos que asumen la distribución normal de rendimientos ha sido tema de investigación y discusión por varias décadas (Walter, 2000 y Grabchak y Samorodnitsky, 2010).

En relación al modelo de Vasicek (1977), este asume también normalidad asintótica de la tasa de interés, sin embargo, el problema para validarlo es que las series de datos del rendimiento del CETE, son resultado de políticas del Banco de México, ya que el CETE es usado como instrumento de política monetaria para promover el desarrollo económico, y en particular para regular la inflación.

Las pruebas de validación se llevan a cabo generalmente mediante métodos gráficos y en algunos casos se validan mediante pruebas analíticas utilizando pruebas de hipótesis de estadísticos que específicamente aplican al tipo de prueba que se lleva a cabo.

Pruebas de independencia de log-rendimientos

Se consideran las siguientes pruebas gráficas para la independencia de los log-rendimientos:

1. Diagrama de dispersión de la serie de log-rendimientos contra su rezago.
2. Diagrama de dispersión del cuadrado de los residuales contra su rezago.
3. Gráfica de la función de autocorrelación de la serie de log-rendimientos.
4. Gráfica de la función de autocorrelación de la serie del cuadrado de log-rendimientos.

Una prueba analítica que se lleva a cabo para probar la no autocorrelación de los log-rendimientos es la del estadístico de Durbin y Watson (1951). Esta prueba es una de las más populares para determinar correlación serial y se basa en determinar el estadístico d según la fórmula siguiente:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (Z_i - Z_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n Z_i^2}.$$

La hipótesis nula es que no hay autocorrelación entre log-rendimientos sucesivos, es decir que la autocorrelación es igual a cero. En el caso de que el *valor - p* calculado sea suficientemente bajo, lo cual sucede si d es muy diferente de 2, que es el valor que toma el estadístico cuando no hay autocorrelación, se puede rechazar la hipótesis de que la autocorrelación es cero.

Pruebas de normalidad de la serie de log-rendimientos

Las pruebas gráficas que se llevan a cabo en esta tesis son las siguientes:

1. Histograma de las series de log-rendimientos de cada acción con ajuste de distribución normal.
2. Papel de probabilidad (Q-Q) de las series de log-rendimientos.
3. Histograma bivariado de las series de log-rendimientos.

La prueba analítica que se selecciona para determinar la normalidad de la serie de log-rendimientos es la de Jarque y Bera (1987), la cual es una prueba asintótica o de muestras grandes. Esta prueba determina el sesgo o asimetría S , y la curtosis K , y utiliza el siguiente estadístico que se basa en el sesgo y la curtosis muestrales:

$$JB = n \left[\frac{S^2}{6} + \frac{(K - 3)^2}{24} \right].$$

Para una distribución normal se espera que $S \approx 0$ y $K \approx 3$. Por tanto, la prueba JB de normalidad es una prueba de hipótesis conjunta de que S y K toman dichos valores respectivamente. En este caso, se espera que el valor del estadístico JB sea cercano a cero. Bajo la hipótesis nula de que los datos están normalmente distribuidos, si el *valor - p* es razonablemente alto, el estadístico JB se aproxima a cero y no se rechaza la hipótesis de normalidad.

En este capítulo II se han planteado los modelos y se ha llevado a cabo la inferencia estadística y deducción matemática de sus parámetros, según el caso. Se han definido también las pruebas estadísticas de los supuestos de los modelos, tanto gráficas como analíticas.

En el capítulo siguiente se desarrolla la metodología de cálculo y se obtienen los valores de los parámetros a partir de las bases de datos, las cuales son seleccionadas mediante un proceso de análisis exploratorio. Se prueba la calidad de los estimadores mediante un análisis dinámico y se prueban empíricamente los supuestos del modelo mediante un análisis estadístico gráfico y analítico. Finalmente se obtiene la composición de los portafolios óptimos y se analiza su sensibilidad a cambios en la estructura de correlación.



Capítulo III. Metodología y Resultados

3.1. Modelo de Vasicek para la tasa de interés

3.1.1. Base de datos

Respecto a las tasas de interés, la base de datos se toma de las estadísticas de los Certificados de la Tesorería (CETE) publicadas por el Banco de México (2010) desde el 02/01/2003 hasta el 29/04/2010. El rendimiento del CETE es una de las tasas de referencia más ampliamente usadas en México.

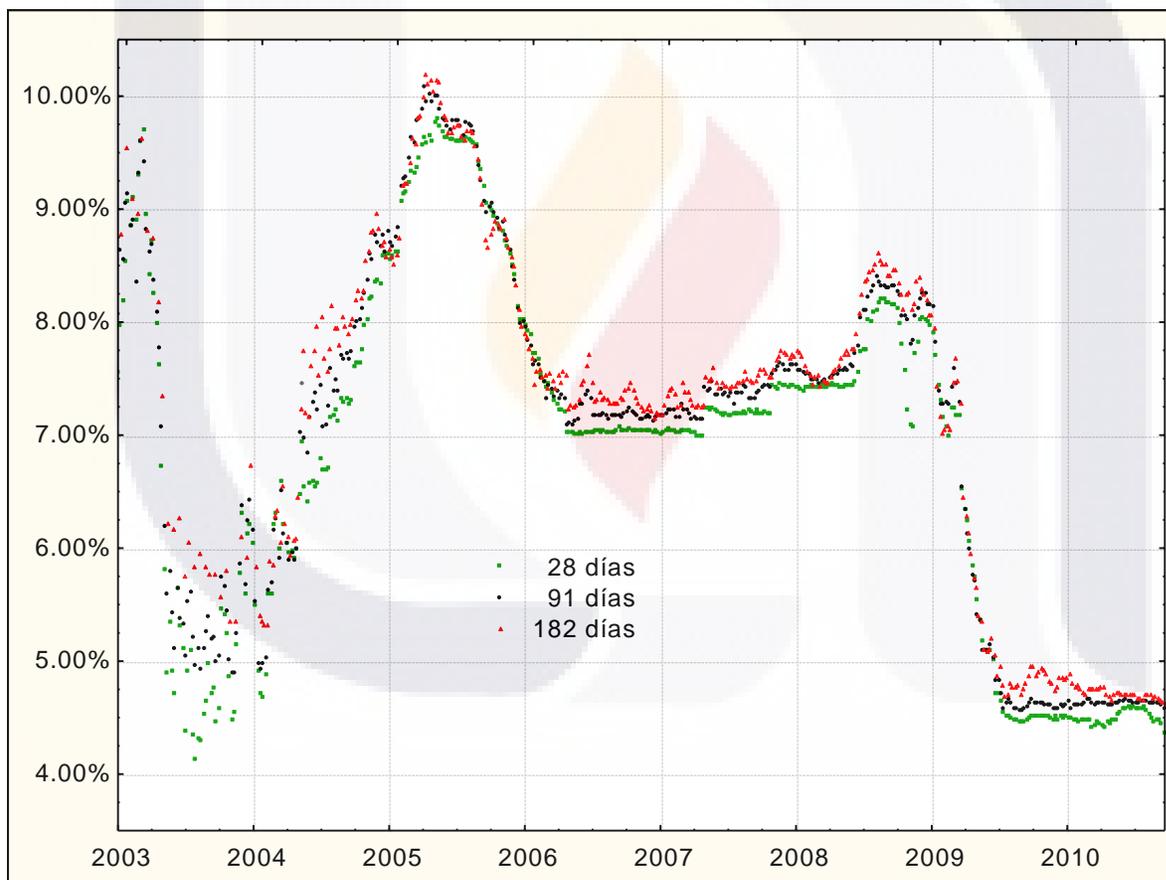


Figura 3.1. Rendimiento nominal anual del CETE para diferentes emisiones.

Fuente: datos semanales publicados por el Banco de México (2010) del 02/01/2003 al 29/04/2010.

El Banco de México (2010) ofrece el CETE a través de una subasta cerrada cada semana. Las emisiones son generalmente a 28, 91, 182 y 364 días. Para esta investigación se elimina la emisión a 364 días ya que se subasta una vez al mes y su rendimiento es muy volátil y se selecciona la emisión a 91 días debido a que muestra el mayor rendimiento con volatilidad estable y el mayor volumen emitido en la serie de tiempo considerada, cuyas fechas inicial y final son las más cercanas a las del intervalo de tiempo de las series de precios de las acciones (ver sección 3.2.1). La Figura 3.1 muestra los datos históricos del rendimiento nominal anual del CETE para diferentes plazos y en el Anexo D se muestran los parámetros de estadística descriptiva de la serie de rendimientos de las tres emisiones analizadas.

3.1.2. Estimación de parámetros del modelo

Para aplicar la metodología de estimación de parámetros, se requiere convertir las series de datos discretos de las tasas de rendimiento del CETE a su tasa equivalente instantánea, lo cual se lleva a cabo mediante la siguiente relación de equivalencia entre tasa nominal y tasa continua:

$$e^r = \left(1 + \frac{R_n}{n}\right)^n, \quad r = \ln\left(1 + \frac{R_n}{n}\right)^n.$$

La estimación de los parámetros β_0, β_1 y σ_ϵ de la ecuación (2.5) se llevó a cabo utilizando el módulo de regresión del paquete Statistica®, y el estimador de la tasa $\hat{\mu}_r$ y de su volatilidad $\hat{\sigma}_r$, se calcularon con las ecuaciones (2.6.b) y (2.6.c) respectivamente.

Tabla 3.1. Tasa de interés estimada.

	Tasa instantánea	Tasa nominal
$\hat{\mu}_r$	5.55%	5.70%
$\hat{\sigma}_r$	1.43%	

Fuente: datos semanales publicados por el Banco de México (2010) del 02/01/2003 al 29/04/2010. Elaboración propia.

Los resultados de la estimación de la tasa de interés instantánea y su volatilidad se muestran en la Tabla 3.1. Se estima también, con la ecuación (2.6.a), el parámetro de la velocidad de reversión a la media, $\hat{\lambda}_r = 0.299$ que expresado en días es $1/\hat{\lambda}_r h = 174.43$ días, para $h = 7/365.25$



3.2. Modelo de Black-Scholes-Merton para precios de acciones

3.2.1. Base de datos

Los precios diarios de las acciones que se utilizan en esta investigación se obtiene de la base de datos Infosel®, una base de datos mexicana ampliamente utilizada por las casas de bolsa. Las series de datos se contrastaron con las obtenidas en la base de datos Economatica® y no se encontraron diferencias ya que comparten los mismos datos faltantes y las diferencias de precios son nulas, confirmándose la calidad de la información de Infosel®.

Se procura extraer la mayor información posible de los datos, por ejemplo, los datos faltantes no fueron imputados, que es una práctica común en muchas áreas de investigación. En muchos casos, de manera incorrecta se imputa el dato incompleto por el dato del día inmediato anterior, o mediante un promedio del día anterior y el día siguiente. Otro ejercicio frecuente pero incorrecto, es eliminar los datos de un día de cotización de todas las series cuando falta un dato del mismo día en una de ellas. Estos ejemplos de prácticas incorrectas hubiesen invalidado la base de datos así como las sucesivas inferencias y aplicaciones, por lo que en la sección 2.2.1 se desarrollan los estimadores de los parámetros del modelo tomando en cuenta la existencia de faltantes en la serie de datos.

Un primer análisis exploratorio de los datos se llevó a cabo de manera visual, utilizando el software Statistica® para graficar los datos y eliminar del estudio aquellas acciones con baja o nula bursatilidad así como aquellas conteniendo datos discrepantes o series de datos con muchos faltantes. Se analizaron los precios diarios históricos de los últimos 20 años. A partir de este análisis se seleccionaron 54 acciones de un total de 247 que es el número total de acciones que cotizaron en el período citado. Un segundo escrutinio de los datos que incluyó el análisis del volumen diario de operaciones redujo la muestra a 40 acciones y el IPC.

El número total de observaciones que se tomaron fue de 1,843 datos del precio diario de cada acción y del IPC que corresponden al período del 02/01/2003 al 23/04/2010, equivalente a 7.3 años. Este período de tiempo es interesante en sí mismo en términos de modelación de precios porque abarca momentos de relativa calma e inestabilidad en la economía global (Kiechel, 2011).

El período de tiempo incluye también un cambio de sexenio del poder ejecutivo mexicano (2006) lo que enriquece la información contenida en las series de datos por las implicaciones económicas de un proceso político de esta naturaleza y su incidencia en el mercado bursátil.

En la Figura 3.2 se tiene una muestra de doce acciones que ilustran la diversidad de precios de cierre y desempeño de las mismas, y la dificultad para compararlas.

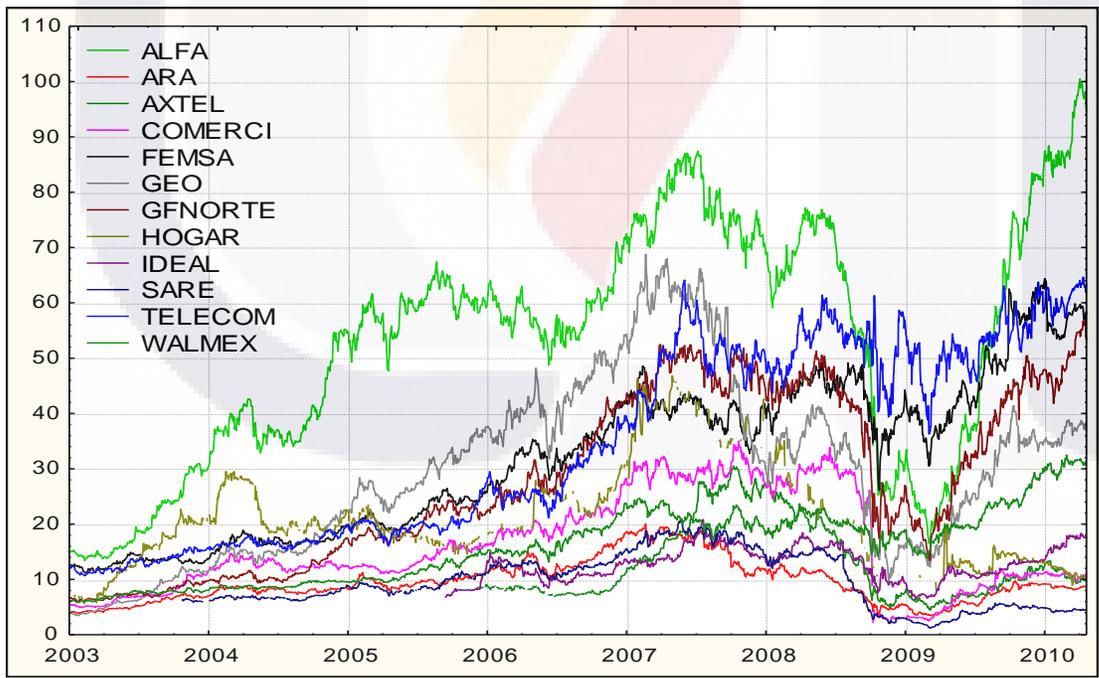


Figura 3.2. Precios de cierre diarios de una muestra de 12 emisoras.

Fuente: precios de cierre diarios de las emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

La escala de precios de la Figura 3.2 es en pesos mexicanos pero esta puede modificarse arbitrariamente. En particular, para tener un comparativo del desempeño entre las acciones, se recomienda que tengan un nivel común de precios en un día específico, por ejemplo, que todas las acciones inicien con un valor de la unidad el día 02/01/2003. En este caso, las nuevas series de precios son relativas.

Para aquellas acciones que no cotizaron al inicio de la serie de datos, la nueva escala puede empatarse en cualquier otro día en que coticen todas las acciones. Por ejemplo, se puede tomar el precio relativo máximo del tiempo final. En este caso, se toma el precio de la emisora GMEXICO el día 23/04/2010 con un precio relativo de 28.76. En la Figura 3.3 se muestran cuatro acciones, dos con precio escalado a uno, al inicio de la serie, y dos con precio escalado a 28.78 en el último dato de la serie.



Figura 3.3. Muestra de acciones con precios escalados.

Fuente: precios de cierre diarios de las emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

A través de una revisión de las series de datos seleccionadas, las emisoras pudieron separarse en dos grupos, las que cotizan desde la primera observación, 02/01/2003, que son 28 acciones y aquellas que tuvieron su oferta pública inicial (OPI) después de esa fecha. Esta clasificación se muestra en la Tabla 3.2.

Con objeto de hacer una comparación sobre la volatilidad de las acciones, estas se clasificaron mediante inspección visual en tres grupos: baja, media y alta volatilidad, utilizando los precios escalados para compararlas sobre la misma base. La Figura 3.4 muestra estas diferencias con tres acciones representativas.

Una clasificación final se lleva a cabo con objeto de identificar aquellas acciones que cotizaron de manera ininterrumpida desde la primera hasta la última observación y aquellas que presentaron datos faltantes, la cual se muestra también en la Tabla 3.2.

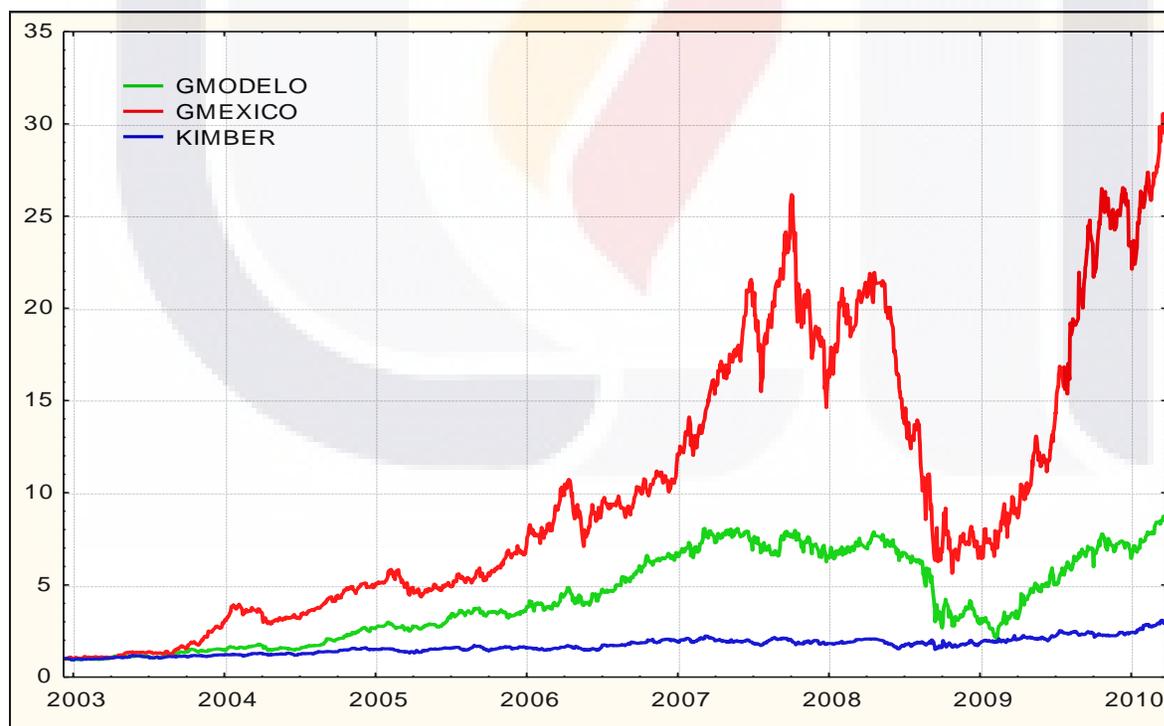


Figura 3.4. Precios escalados a uno de 3 emisoras mostrando alta, media y baja volatilidad.

Fuente: precios de cierre diarios de las emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Este detallado proceso de análisis exploratorio y escrutinio de datos es particularmente importante por dos razones. La primera es que el mercado mexicano es en general un mercado poco profundo¹ comparado con otros mercados más desarrollados (Alarco-Tosoni, 2008), por lo que los datos no siempre son de alta calidad o no existen en algunos casos, como se establece en el párrafo anterior.

En segundo lugar, dado que en esta tesis se pretende modelar portafolios óptimos a partir de modelos que arrojen resultados consistentes con el comportamiento de los precios y las tasas de interés, es muy importante que los resultados obtenidos obedezcan al modelo y no se vean afectados por errores metodológicos de los estimadores.

En el Anexo C se muestra una tabla con las emisoras seleccionadas clasificadas por sectores con su clave de cotización y serie, así como el nombre de la razón social y los productos y servicios de su giro.

¹ Se mide por el tamaño, la liquidez y la concentración del mercado.

Tabla 3.2. Emisoras seleccionadas.

Acción	Desde 02/01/2003	Después de 02/01/2003	Cotización diaria		
1 ALFA	Cotiza	Cotiza	Sin datos faltantes	Con datos faltantes	
2 ALSEA					
3 AMX	Cotiza		Sin datos faltantes		
4 ARA	Cotiza		Sin datos faltantes		
5 ARCA	Cotiza			Con datos faltantes	
6 ASUR			Cotiza	Con datos faltantes	
7 AXTEL			Cotiza	Con datos faltantes	
8 BIMBO	Cotiza			Sin datos faltantes	
9 CEMEX	Cotiza			Sin datos faltantes	
10 COMERCI	Cotiza			Con datos faltantes	
11 CONTAL	Cotiza	Cotiza		Con datos faltantes	
12 ELEKTRA	Cotiza			Sin datos faltantes	
13 FEMSA	Cotiza			Sin datos faltantes	
14 GAP			Cotiza	Sin datos faltantes	
15 GCARSO	Cotiza			Sin datos faltantes	
16 GEO	Cotiza			Sin datos faltantes	
17 GFAMSA			Cotiza		Con datos faltantes
18 GFINBUR	Cotiza			Sin datos faltantes	
19 GFNORTE	Cotiza			Sin datos faltantes	
20 GMEXICO	Cotiza			Sin datos faltantes	
21 GMODELO	Cotiza	Cotiza	Sin datos faltantes	Con datos faltantes	
22 GRUMA					
23 HOGAR	Cotiza			Con datos faltantes	
24 HOMEX			Cotiza	Con datos faltantes	
25 ICA	Cotiza			Sin datos faltantes	
26 ICH			Cotiza	Con datos faltantes	
27 IDEAL			Cotiza	Con datos faltantes	
28 KIMBER	Cotiza			Sin datos faltantes	
29 KOF	Cotiza			Con datos faltantes	
30 PE			Cotiza	Con datos faltantes	
31 SARE		Cotiza		Con datos faltantes	
32 SIMEC	Cotiza	Cotiza		Con datos faltantes	
33 SORIANA	Cotiza			Con datos faltantes	
34 TELECOM	Cotiza			Sin datos faltantes	
35 TELMEX	Cotiza			Sin datos faltantes	
36 TLEVISA	Cotiza			Sin datos faltantes	
37 TVAZTCA	Cotiza			Sin datos faltantes	
38 URBI			Cotiza		Con datos faltantes
39 VITRO	Cotiza			Con datos faltantes	
40 WALMEX	Cotiza			Sin datos faltantes	

Fuente: precios de cierre diarios de las 40 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

El análisis exploratorio de los datos se complementó llevando a cabo un análisis gráfico de las series de log-rendimientos diarios de las acciones y diagramas de dispersión de log-rendimientos y precios entre todas las emisoras seleccionadas incluyendo el IPC. A continuación se muestran solamente los resultados del análisis exploratorio de una muestra representativa de emisoras de diferentes sectores y el IPC.

En la Figura 3.5 se aprecia la mayor volatilidad de la acción PE, seguida por CEMEX y COMERCI. Contrasta con estas acciones la menor volatilidad de ARCA, el IPC y TELMEX. En la misma figura, se observa que, salvo ARCA, cuya volatilidad parece ser bastante uniforme a lo largo del intervalo de tiempo entre 02/01/2003 y 23/04/2010, las otras acciones muestran un aumento importante de volatilidad durante el año 2008, lo cual se relaciona directamente con la crisis crediticia originada en Estados Unidos en 2007, que se convierte en unos meses en una crisis global (Kiechel, 2011).

En particular, en la serie de log-rendimientos de la emisora PE de la Figura 3.5, que corresponde a la minera Industrias Peñoles, se aprecia la presencia de varios *clusters* de volatilidad, es decir períodos de alta volatilidad seguidos por períodos de relativa calma.

Se puede observar también que algunas acciones como CEMEX y el IPC muestran cierta volatilidad en el año 2006, lo cual está relacionado con incrementos, a nivel internacional, de los precios del petróleo y de algunos *commodities* como el maíz (Mitchell, 2008).

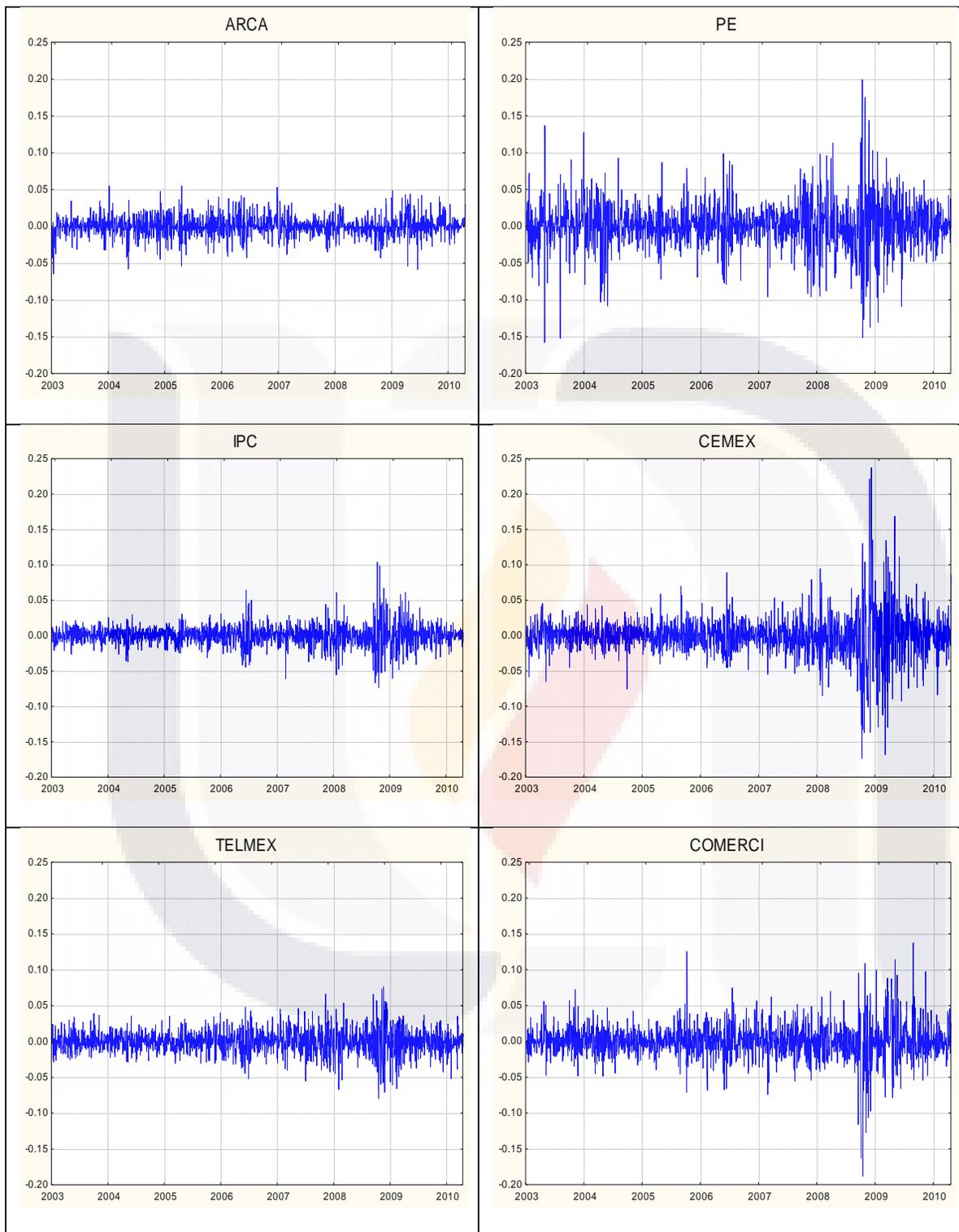


Figura 3.5. Series de log-rendimientos de 6 acciones.

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las emisoras y el IPC, tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Del análisis exploratorio de las series de log-rendimientos entre siete acciones y el IPC de la Figura 3.6, se aprecia en general una dependencia, desde casi nula hasta ligeramente positiva entre los log-rendimientos, destacando la formación más compacta en el caso de AMX, CEMEX y TLEVISA contra el IPC.

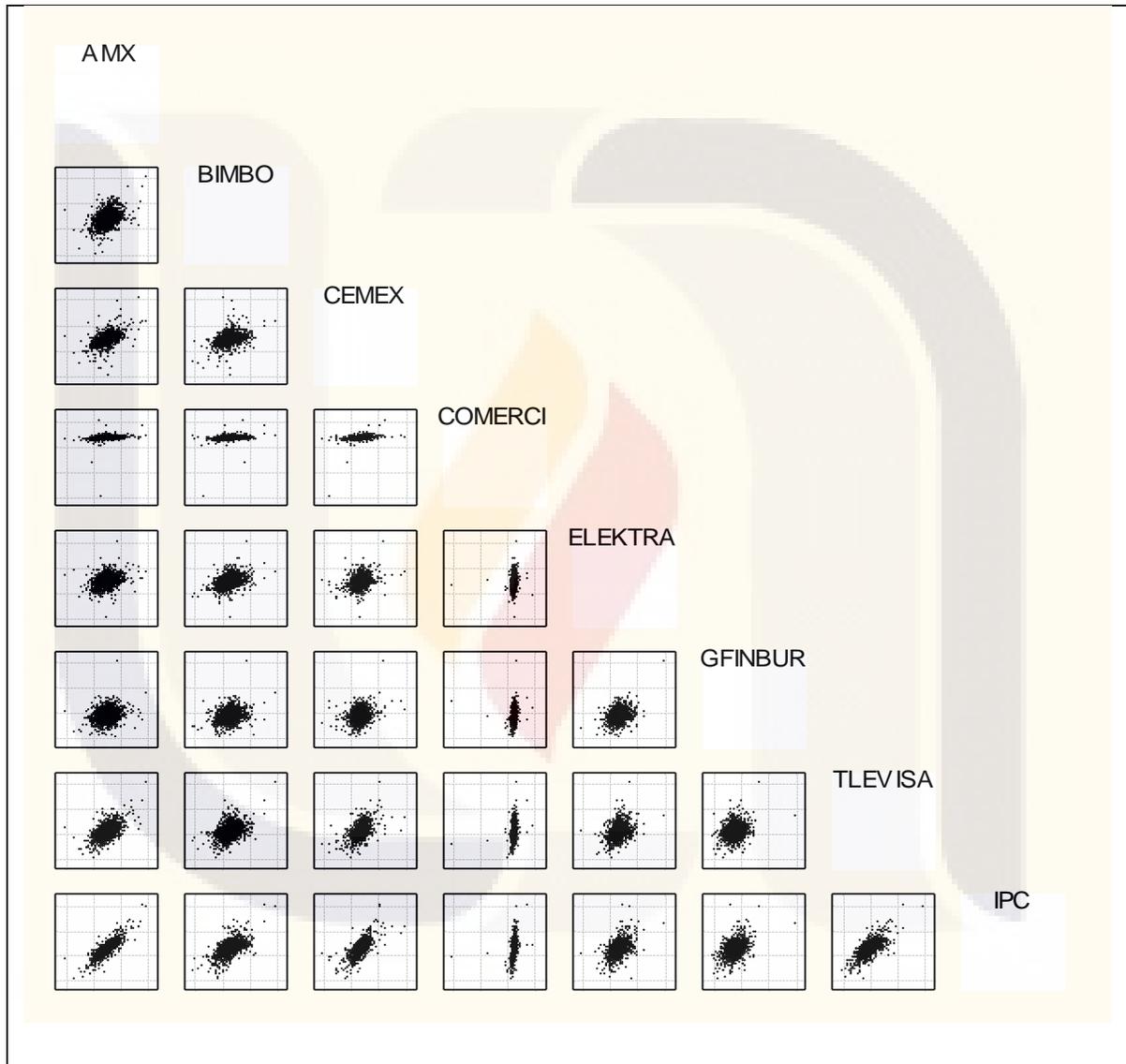


Figura 3.6.a. Diagramas de dispersión de series de log-rendimientos.

Fuente: log-rendimientos de los precios de cierre diarios de las emisoras y el IPC, tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

No se aprecia ninguna formación o concentración atípica por lo que los datos seleccionados son de calidad. Los diagramas de COMERCI contra las otras acciones son diferentes por la presencia de observaciones discrepantes debidas a la alta volatilidad de la acción en ciertos días pero la formación es normal mostrando fuerte linealidad.

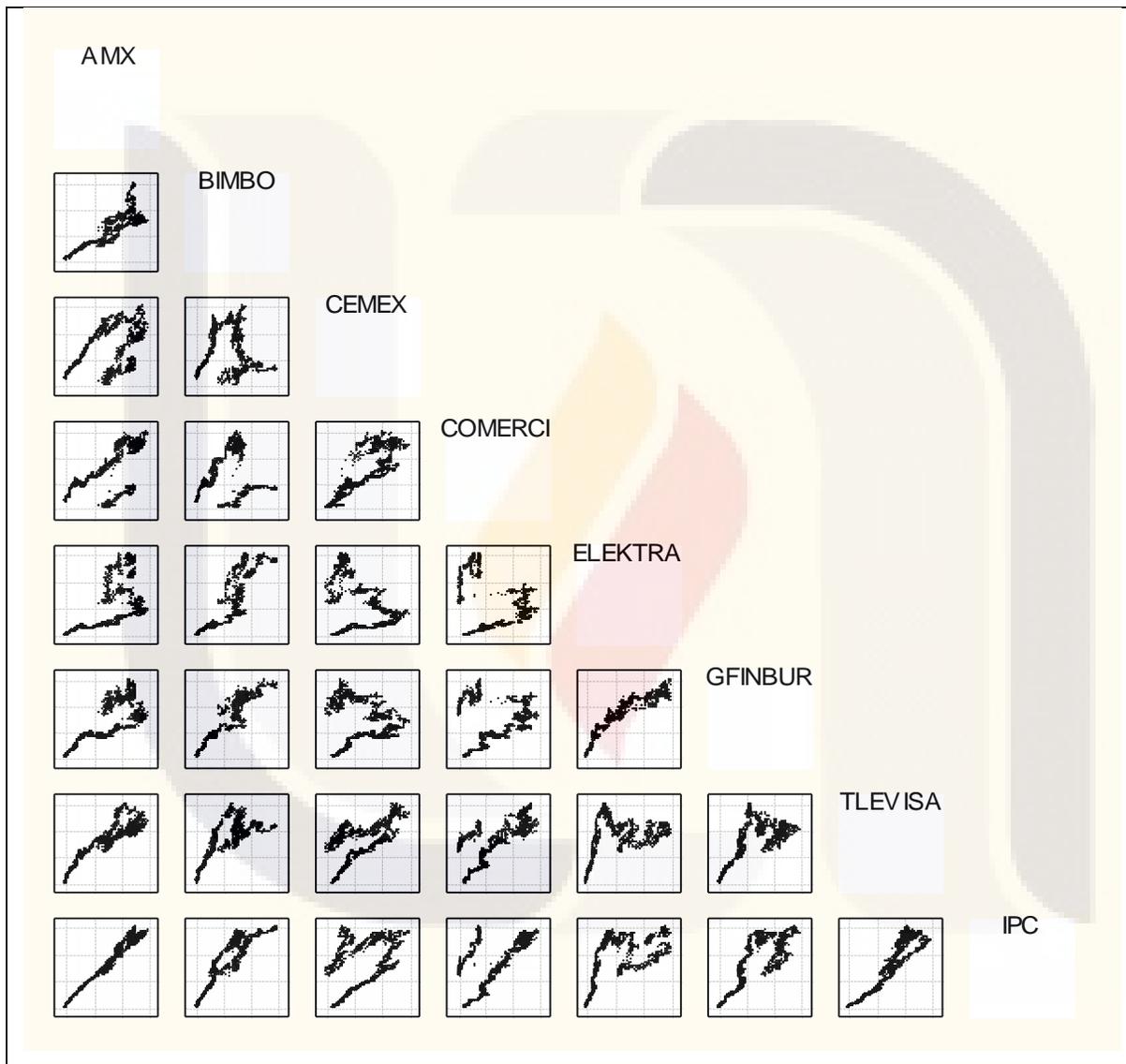


Figura 3.6.b. Diagramas de dispersión de series de precios.

Fuente: precios de cierre diarios de las emisoras y el IPC tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Los diagramas de la Figura 3.6.b de las series de precios, muestran conglomerados de puntos agrupados en forma lineal en ciertos períodos de tiempo. En lo general, se aprecia en la figura una dependencia lineal entre los precios de las emisoras. De manera particular, los diagramas entre CEMEX, COMERCI y ELEKTRA parecen mostrar la menor correlación en comparación con las otras acciones. También se aprecia una fuerte dependencia lineal en ciertos intervalos de tiempo que posiblemente, por cambios bruscos del mercado, tanto la pendiente como el intercepto se ven perturbados. Esta gráfica merece ser analizada con mayor profundidad en trabajos futuros.

Finalmente se revisan los resultados de un resumen de parámetros de estadística descriptiva de los log-rendimientos diarios, mismos que se muestran en el Anexo D, estimados con el paquete Statistica®. En general se aprecia que los valores de los parámetros están dentro de rangos razonables, sin embargo algunas estadísticas descriptivas se ven fuertemente perturbadas por observaciones discrepantes, por ejemplo cuando el precio de una acción baja o sube drásticamente en un día, como los casos de las emisoras COMERCI y GRUMA, que se seleccionan por su bursatilidad y pocos datos faltantes pero que mostraron rendimientos anormales en un día de -140.24% y -189.38% respectivamente, y valores de sesgo y curtosis atípicos.

3.2.2. Estimación de parámetros del modelo

Los parámetros $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$, rendimiento y volatilidad, de las 40 emisoras y el IPC se determinan utilizando los estimadores del modelo de las ecuaciones (2.12) y (2.14). Los valores de los parámetros obtenidos se muestran en la Tabla 3.3, ordenados de mayor a menor rendimiento y se grafican en la Figura 3.7 en la que se muestra también la línea de regresión.

Tabla 3.3. Rendimiento y volatilidad de una muestra de 40 acciones y el IPC.

Acción	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	Acción	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
20 GMEXICO	56.4%	45.8%	17 FEMSA	25.6%	30.4%
12 ELEKTRA	50.3%	35.2%	6 ASUR	24.8%	33.7%
30 PE	48.8%	50.0%	37 TVAZTCA	22.9%	29.7%
16 GEO	40.7%	43.0%	24 HOMEX	22.3%	47.2%
3 AMX	39.9%	33.2%	36 TLEVISA	21.0%	29.0%
19 GFNORTE	38.0%	43.0%	23 HOGAR	20.8%	58.2%
2 ALSEA	35.3%	37.9%	26 ICH	19.1%	35.0%
32 SIMEC	34.2%	58.1%	28 KIMBER	18.4%	26.4%
1 ALFA	31.4%	35.6%	4 ARA	18.2%	37.8%
8 BIMBO	31.2%	30.4%	21 GMODELO	17.8%	27.7%
18 GINBUR	30.9%	32.7%	14 GAP	17.0%	37.3%
27 IDEAL	30.0%	42.4%	17 GFAMSA	15.7%	52.9%
15 GCARSO	29.9%	35.6%	11 CONTAL	15.1%	31.0%
25 ICA	29.8%	44.0%	7 AXTEL	14.5%	45.5%
33 SORIANA	29.2%	32.4%	9 CEMEX	14.3%	45.4%
34 TELECOM	28.6%	34.0%	22 GRUMA	14.2%	42.7%
10 COMERCI	28.5%	61.0%	5 ARCA	14.0%	20.8%
40 WALMEX	27.0%	29.3%	39 VITRO	13.3%	47.0%
38 URBI	26.7%	45.0%	35 TELMEX	12.3%	25.6%
29 KOF	26.0%	33.0%	31 SARE	4.7%	44.4%
IPC	25.8%	22.8%	Promedio	26.0%	38.3%

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 40 emisoras y el IPC tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Los resultados de la Figura 3.7 muestran que la relación de linealidad es muy débil, por lo que este resultado empírico es solo una aproximación al marco teórico entre rendimiento y volatilidad (Markowitz, 1952). Se aprecian también en la figura ciertos datos discrepantes o *outliers*, como los obtenidos en las emisoras ELEKTRA, GMEXICO, PE y SARE, que se encuentran alejados de la nube de datos y cuya relación rendimiento-volatilidad es atípica.

La mayoría de las emisoras, sin embargo, muestra una relación rendimiento-volatilidad dentro de la nube de datos. Algunas emisoras como SARE, GRUMA, CEMEX, AXTEL, VITRO y GFAMSA se desempeñaron pobremente en cuanto a rendimiento y mostraron volatilidad media y SIMEC, COMERCI y HOGAR, mostraron rendimientos medios y bajos y alta volatilidad.

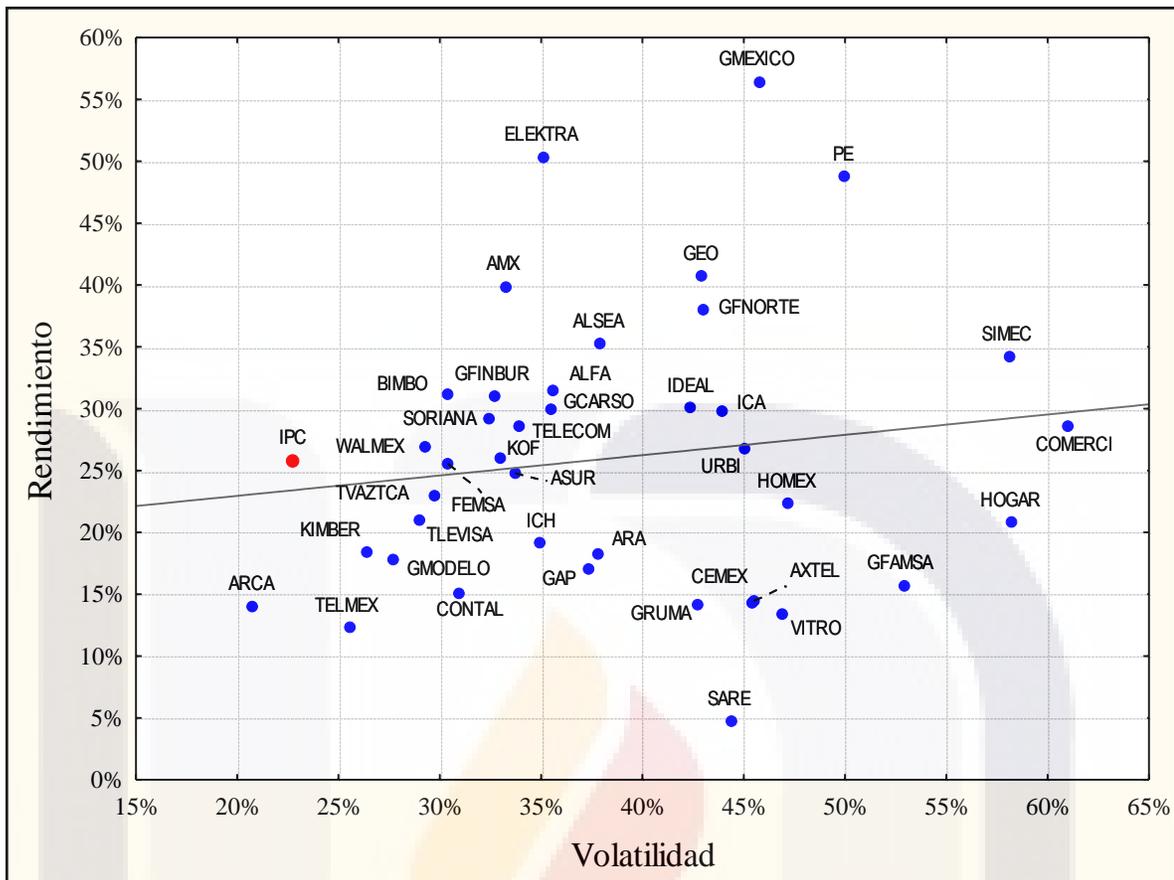


Figura 3.7. Rendimiento contra volatilidad de una muestra de 40 acciones y el IPC.

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 40 emisoras y el IPC tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010 para estimar los parámetros $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ mediante las ecuaciones (2.12) y (2.14). Elaboración propia.

Es importante señalar que el IPC mostró un rendimiento cercano al promedio de las 40 acciones y una muy baja volatilidad, lo que muestra el efecto de la diversificación en la reducción del riesgo. Cabe mencionar también que solo en las emisoras GMEXICO, ELEKTRA, AMX, BIMBO y el IPC, la volatilidad fue menor al rendimiento.

3.2.3. Análisis dinámico

Se lleva a cabo un análisis de intervalo de tiempo dinámico para obtener una prueba empírica de la calidad de estimación del parámetro de rendimiento.

La metodología consiste en utilizar bases de datos dinámicas. Con ello se obtienen dos series de estimaciones de la tasa anual de rendimiento. La primera serie, que identificamos como tasa de rendimiento *Forward* $\hat{\mu}_i^F$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, es la estimación de la tasa $\hat{\mu}$ con los primeros i log-rendimientos. Similarmente, la segunda serie de tasas de rendimiento *Backward* $\hat{\mu}_i^B$, para $i \in \{0, \dots, n - 1\}$, es la estimación de la tasa $\hat{\mu}$ con los últimos $n - i$ log-rendimientos. Se comparan ambos rendimientos con $\hat{\mu}$, el estimador histórico calculado con el intervalo completo de tiempo en la sección 3.2.2. Cabe señalar que tanto $\hat{\mu}_i^F$ como $\hat{\mu}_i^B$ son estimadores independientes pues se calculan para intervalos de tiempo ajenos, además de que son estimadores consistentes pues ambos convergen al valor del estimador $\hat{\mu}$ (Casella y Berger, 2002).

El análisis se lleva a cabo graficando primero las tres tasas para comparar $\hat{\mu}$ con $\hat{\mu}_i^F$ y $\hat{\mu}_i^B$. La Figura 3.8 muestra los resultados para tres acciones de diferentes sectores y el IPC. Se puede observar que las tasas de rendimiento del intervalo dinámico, $\hat{\mu}_i^F$ y $\hat{\mu}_i^B$ se aproximan, igualan o cruzan en varios intervalos con la tasa $\hat{\mu}$, estimada para el intervalo completo, especialmente cuando los intervalos se alejan de los extremos (primera y última observación), donde la volatilidad de los rendimientos es mayor debido al tamaño pequeño del intervalo, tanto en el caso *Forward* como en el *Backward*.

En general, el estimador $\hat{\mu}_i^F$ acota al estimador $\hat{\mu}$, particularmente para valores de i grandes. En cambio, el estimador $\hat{\mu}_i^B$ se aproxima a $\hat{\mu}$ para valores de i pequeños. Este análisis no refleja la consistencia del modelo en el tiempo ya que la tasa de rendimiento varía en el tiempo. En los casos del IPC y ALFA, se aprecia que los estimadores, tanto *Forward* como *Backward* de la tasa de rendimiento muestran variaciones importantes. Por ejemplo, en el caso de ALFA las estimaciones del rendimiento anualizado se alejan hasta 60% del estimador histórico.

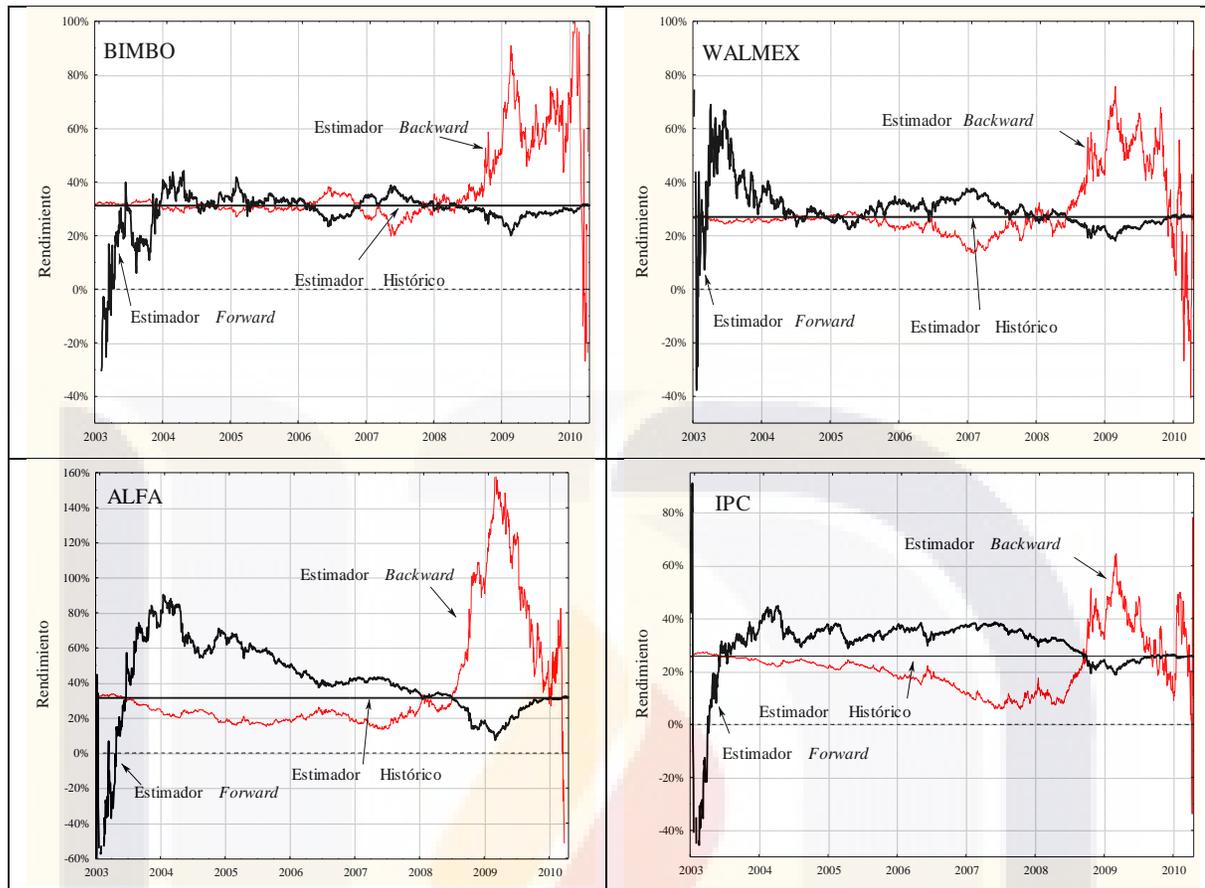


Figura 3.8. Estimadores del rendimiento mediante el intervalo dinámico *Forward*, *Backward* y el estimador histórico de intervalo completo.

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010 para estimar el parámetro $\hat{\mu}$ mediante las ecuaciones (2.12), (2.14) y (3.1). Elaboración propia.

Se propone un estimador dinámico que resulte de ponderar μ_i^F and μ_i^B , en algún punto de tiempo o índice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, utilizando δ como factor de peso de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$\hat{\mu}_i = \delta \hat{\mu}_i^F + (1 - \delta) \hat{\mu}_i^B; \quad 0 \leq \delta \leq 1. \tag{3.1}$$

Casos particulares de este estimador son:

$$\hat{\mu}_i = \hat{\mu}_i^B, \quad \text{para } \delta = 0$$

y

$$\hat{\mu}_i = \hat{\mu}_i^F, \text{ para } \delta = 1.$$

Cabe mencionar que $\hat{\mu}_i$ representa la ponderación de dos estimadores independientes de μ . Para la determinación de índice i y el factor de ponderación δ , se propone darle a δ diferentes valores o bien considerar como factor de ponderación el peso en función de la longitud del intervalo de tiempo considerado. Es decir, tomar

$$\delta = \delta_i = \frac{i}{T}; \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

En el caso particular de $i = 0$ e $i = n$,

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_0^B = \hat{\mu}_0 \quad \text{y} \quad \hat{\mu} = \hat{\mu}_n^F = \hat{\mu}_n.$$

En las Figuras 3.9.a y 3.9.b se muestra el estimador dinámico ponderado y el histórico de intervalo completo. Se aprecia que el estimador dinámico se aproxima con mucha exactitud al histórico, teniendo variaciones no mayores de 0.08%, para la acción WALMEX, lo que representa un error máximo de 0.3%. En el caso de ALFA, el error no excede de 0.2%. Lo anterior demuestra que $\hat{\mu}$ es un estimador de buena calidad, reflejando adecuadamente el rendimiento histórico de la acción en cada momento de la serie de tiempo.

El estimador dinámico ponderado se utiliza en esta tesis para comparar el estimador del modelo, y aunque se señalan las propiedades de independencia y consistencia del mismo se propone como tema de otro trabajo profundizar en sus propiedades estadísticas.

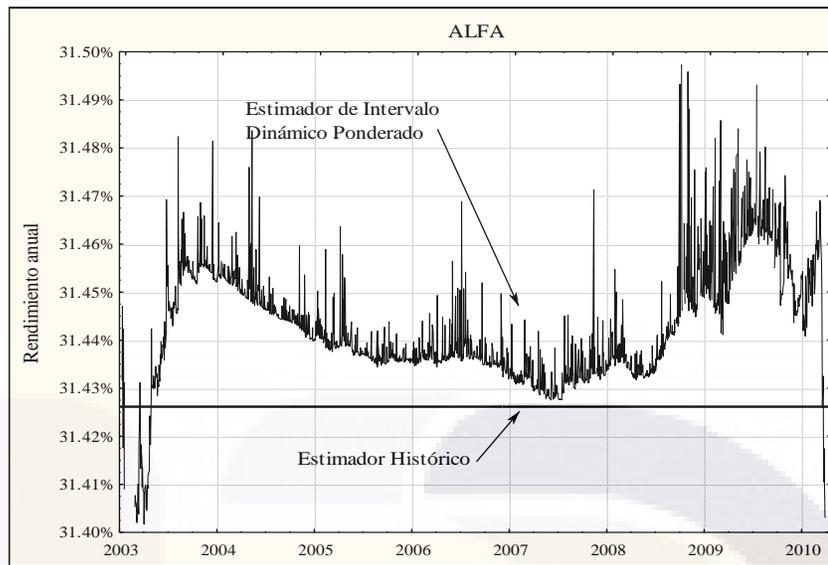


Figura 3.9.a. Estimador de intervalo dinámico ponderado y estimador histórico.

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre de las emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010 2010 para estimar el parámetro $\hat{\mu}$ mediante las ecuaciones (2.12), (2.14) y (3.1). Elaboración propia.

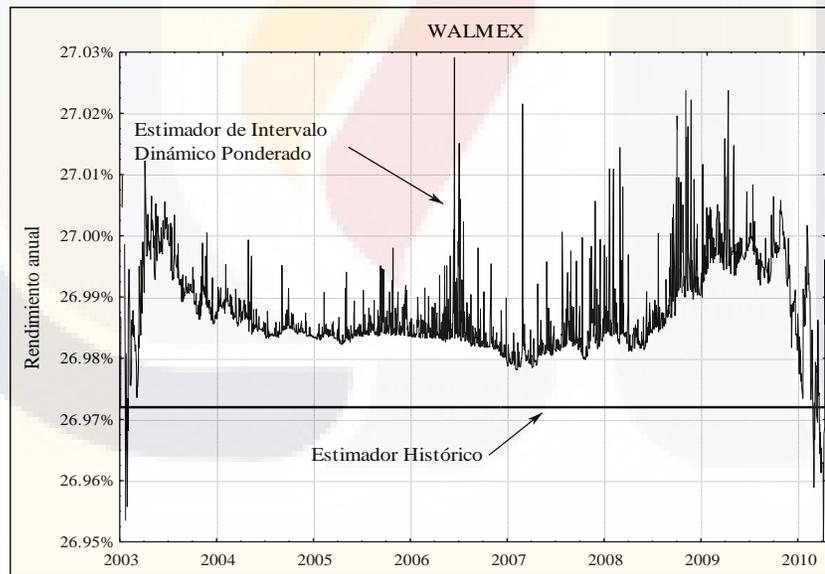


Figura 3.9.b. Estimador de intervalo dinámico ponderado y estimador histórico.

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010 2010 para estimar el parámetro $\hat{\mu}$ mediante las ecuaciones (2.12), (2.14) y (3.1). Elaboración propia.

3.2.4. Pruebas de validación empírica de los supuestos de los modelos

Las pruebas empíricas de los supuestos de los modelos se llevan a cabo para toda la muestra (40 acciones) y para reportar los resultados se seleccionan solamente algunas acciones representativas de diferentes sectores, y se incluye el IPC. En el Anexo C se muestra una tabla con todas las acciones de la muestra, de las que se seleccionan las siguientes: AMX del sector telecomunicaciones, BIMBO del sector alimentos procesados, CEMEX del sector cementeras, ELEKTRA del sector distribución al detalle y GFINBUR del sector financiero.

La base de datos utilizada para estas pruebas es la misma que se usó para la metodología de estimación de parámetros de la sección 3.2.2 y corresponde a la serie de tiempos de precios de cierre diarios que va del 02/01/2003 al 23/04/2010 y contiene 1,843 observaciones.

Pruebas de independencia de log-rendimientos diarios

Pruebas gráficas

1. Diagramas de dispersión de la serie de log-rendimiento contra su rezago.

Los diagramas de dispersión y su coeficiente de correlación se muestran en la Figura 3.10 para las acciones AMX, BIMBO, CEMEX, ELEKTRA, GFINBUR y el IPC. En todos los casos es evidente la concentración de los puntos en una nube circular. Se aprecia que la correlación es muy baja (cercana a cero).

En el caso de ELEKTRA, también se verifica la independencia en este sentido, aun cuando su correlación muestral es del orden del 20%. Esto puede deberse a algunas observaciones discrepantes relacionadas con subidas o bajadas consecutivas durante varios días.

Se aprecia también que en el caso de GFINBUR, la correlación es baja y negativa. Esto se debe a cambios frecuentes de signo de los log-rendimientos a lo largo de la serie de datos.

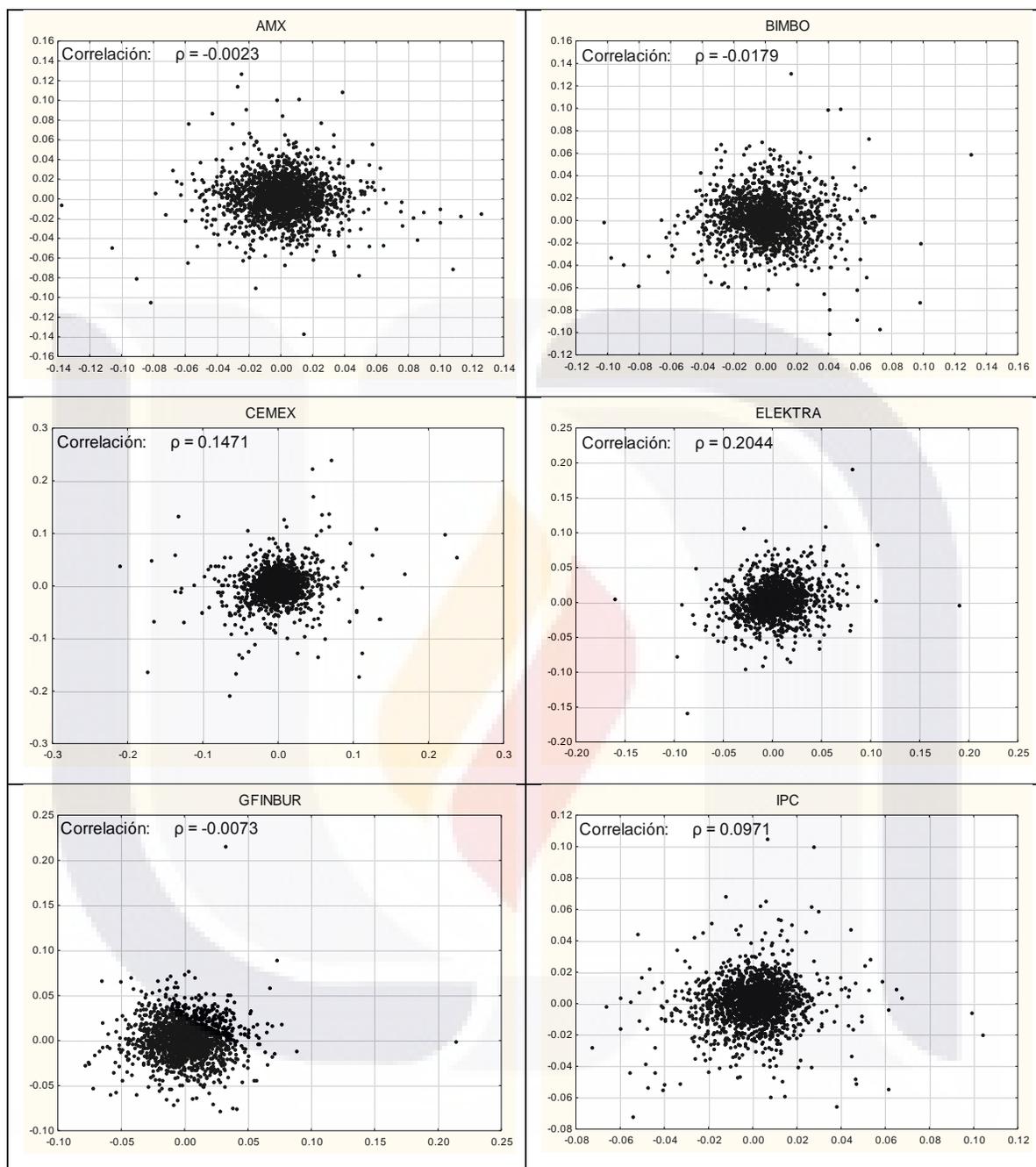


Figura 3.10. Diagramas de dispersión de log-rendimientos contra su rezago.

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las emisoras y el IPC tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

2. Diagramas de dispersión del cuadrado de los residuales contra su rezago.

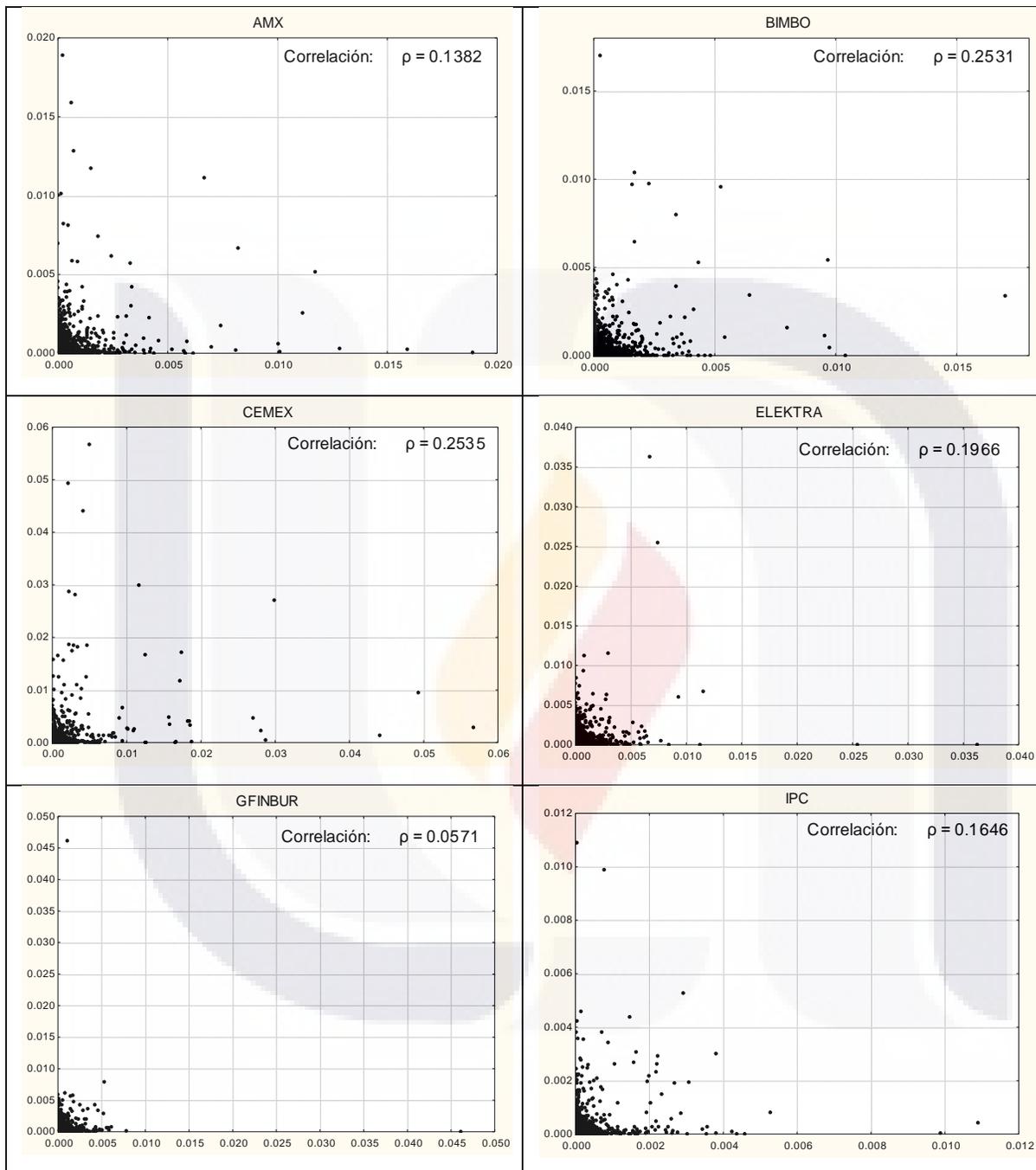


Figura 3.11. Diagramas de dispersión del cuadrado de residuales contra de su rezago.

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las emisoras y el IPC tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Los resultados de la Figura 3.11 son consistentes con los del análisis anterior pues gráficamente se puede apreciar que los datos se concentran en el extremo positivo de los ejes, en el entorno del origen. Cabe mencionar que hay un aumento del coeficiente de correlación, lo que se interpreta como la presencia de días de alta volatilidad que inducirán días de alta volatilidad. Esto es un indicador de que la volatilidad tiene memoria. Esto se aprecia más claramente en la Figura 3.12.b del análisis de la función de autocorrelación de los cuadrados de los log-rendimientos.

3. Gráfica de la función de autocorrelación de la serie de log-rendimientos.

Se lleva a cabo el análisis de la función de autocorrelación de rezagos de 1 a 20 días. Los resultados se grafican en la Figura 3.12.a, que muestra que en la mayoría de las acciones, la autorrelación para los diferentes rezagos permanece dentro de los límites de confianza, mismos que se indican con línea punteada, por lo que la autocorrelación es baja.

Se aprecia también en algunas acciones que la autocorrelación es mayor en los primeros rezagos y luego baja según aumenta el rezago, como es el caso de CEMEX, ELEKTRA y GFINBUR.

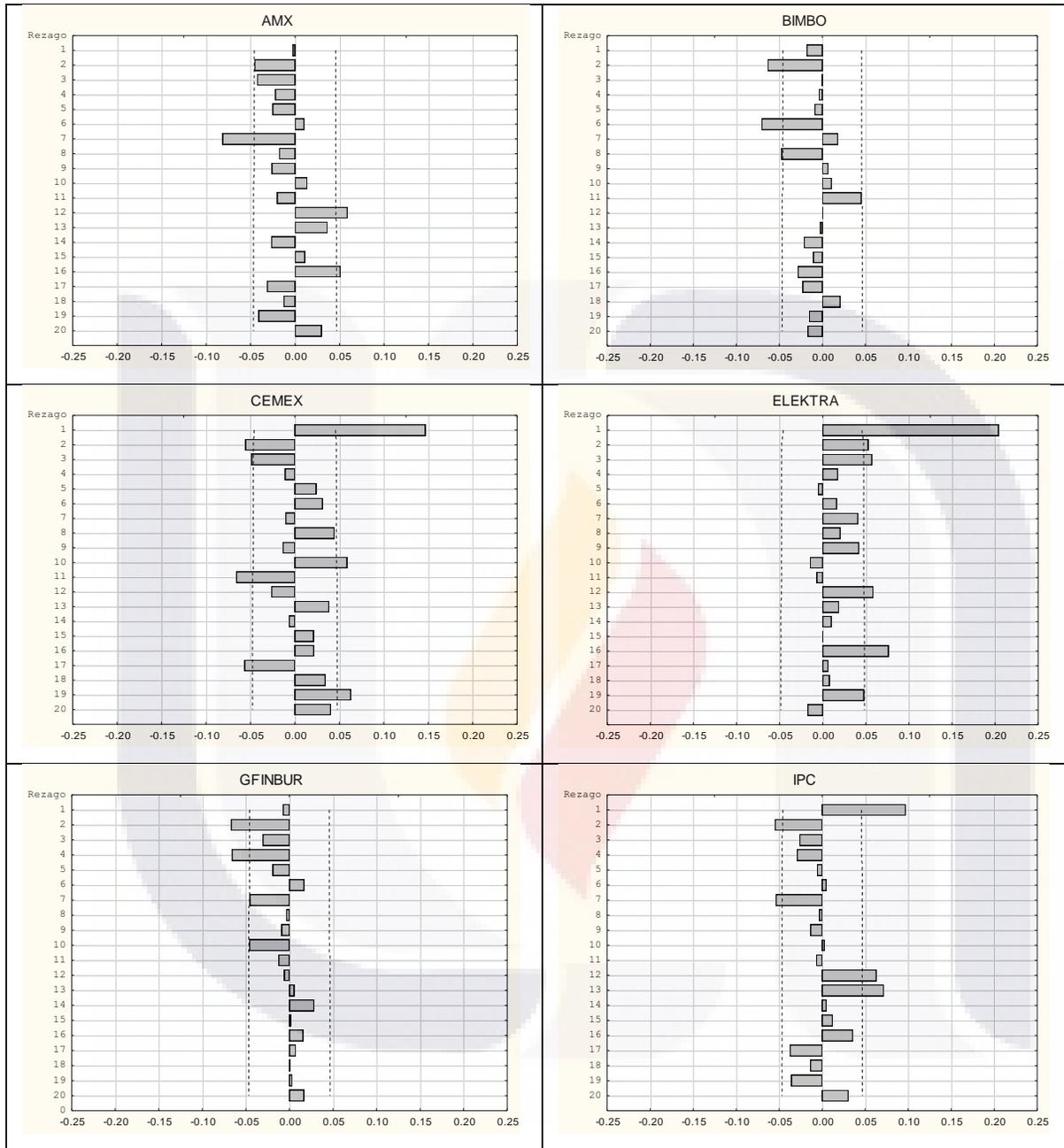


Figura 3.12.a. Gráficas de la función de autocorrelación de la serie de log-rendimientos.

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las emisoras y el IPC tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

4. Gráficas de la función de autocorrelación de la serie del cuadrado de log-rendimientos.

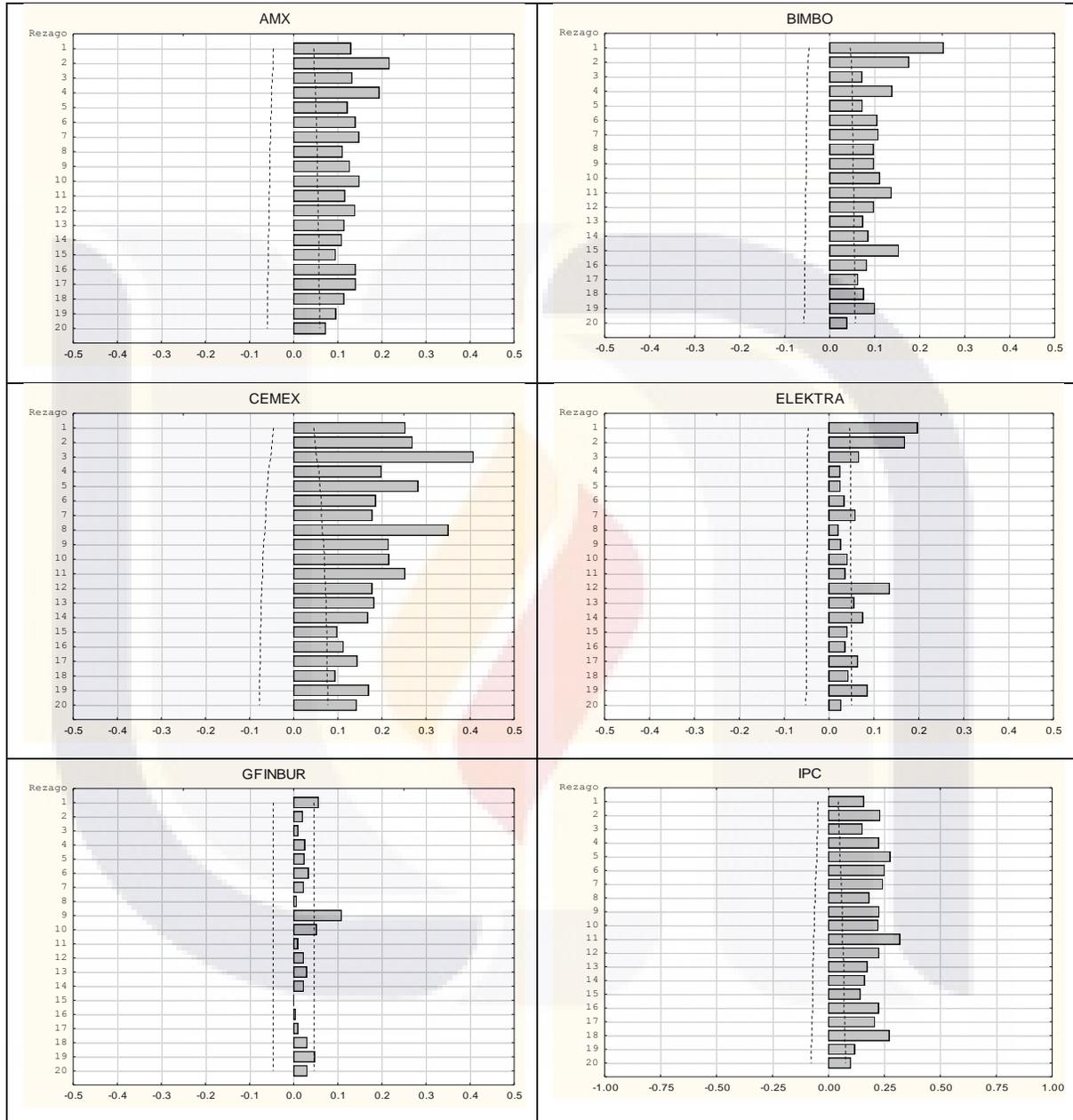


Figura 3.12.b. Gráficas de la función de autocorrelación de la serie del cuadrado de log-rendimientos.

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las emisoras y el IPC tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Utilizando la función de autocorrelación de los cuadrados de los log-rendimientos, graficados en la Figura 3.12.b, se obtienen también resultados en la misma dirección del análisis anterior, es decir, se concluye que, en general, la autocorrelación es baja, lo que se aprecia más claramente en ELEKTRA y GFINBUR, aunque debería ser nula bajo independencia.

En el resto de acciones, la correlación sale, en la mayoría de los rezagos, de los límites de confianza, tomando valores entre 0.1 y 0.25, los cuales reflejan también poca autocorrelación, salvo el caso de CEMEX en donde se presenta una mayor autocorrelación, sobre todo en los primeros rezagos. En el caso del IPC, se presentan autocorrelaciones un poco más altas y por más días consecutivos, lo que puede deberse a que por un lado el índice absorbe los momentos de alta volatilidad presente en cada una de las acciones, y por otro, a que el cuadrado del rendimiento representa la estimación más simple de la volatilidad, lo que puede hacer que, aparentemente, el efecto de la volatilidad perdure más días.

Se observa también que en general, la autocorrelación decae lentamente según aumentan los rezagos, particularmente en BIMBO CEMEX y ELEKTRA. Esta disminución paulatina se explica porque en momentos de alta volatilidad en los mercados financieros, esta tarda algunos días, incluso semanas, en diluirse.

Prueba analítica de independencia (Durbin-Watson)

La prueba analítica de independencia de la serie de log-rendimientos diarios, para cada acción de la muestra, es la de Durbin y Watson (1951). Esta prueba se lleva a cabo sobre la misma muestra de 40 acciones y el IPC y se utiliza el paquete del software de programación R. Los resultados de la autocorrelación de las series de log-rendimientos se muestran en la Tabla 3.4.

Las acciones que se remarcan son diez y corresponden a aquellas en las que el estadístico d de la prueba es muy cercano a 2 y el $valor - p$ es grande a favor de la hipótesis nula de autocorrelación cero. El resto de las acciones, junto con el IPC, toman valores del $valor - p$ muy bajos por lo que existe significancia estadística y en dichas pruebas la hipótesis nula se rechaza y no se puede afirmar que hay autocorrelación cero.

Tabla 3.4. Resultados de la prueba estadística de Durbin-Watson.

Durbin-Watson	d	$valor - p$	Durbin-Watson	d	$valor - p$
1 ALFA	1.7749	6.707E-07	22 GRUMA	1.7112	2.077E-08
2 ALSEA	1.8173	0.000186	23 HOGAR	2.0178	0.6164
3 AMX	2.0045	0.5389	24 HOMEX	1.7597	2.197E-06
4 ARA	1.8420	0.000345	25 ICA	1.7121	3.166E-10
5 ARCA	1.8754	0.003766	26 ICH	1.7514	2.329E-06
6 ASUR	1.9408	0.1337	27 IDEAL	1.8632	0.01009
7 AXTEL	1.8346	0.003328	28 KIMBER	1.8416	0.000336
8 BIMBO	2.0349	0.7733	29 KOF	2.0196	0.65679
9 CEMEX	1.7016	7.383E-11	30 PE	1.7368	8.528E-09
10 COMERCI	1.7565	8.804E-08	31 SARE	1.8300	3.220E-04
11 CONTAL	2.0930	0.9748	32 SIMEC	1.7873	0.0000389
12 ELEKTRA	1.5894	2.20E-16	33 SORIANA	1.7599	1.29E-07
13 FEMSA	1.9203	0.0436	34 TELECOM	1.8863	0.007327
14 GAP	1.9676	0.3005	35 TELMEX	1.8694	0.002526
15 GCARSO	1.9811	0.3423	36 TLEVISA	1.9048	0.02047
16 GEO	1.6489	2.398E-14	37 TVAZTCA	2.0445	0.8301
17 GFAMSA	1.5576	2.028E-12	38 URBI	1.8189	2.240E-04
18 GFINBUR	2.0140	0.6184	39 VITRO	1.8295	0.000132
19 GFNORTE	1.9050	0.02071	40 WALMEX	1.8912	0.009735
20 GMEXICO	1.8387	0.0002671	IPC	1.8057	0.00001507
21 GMODELO	2.0395	0.8018			

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 40 emisoras y el IPC tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Pruebas de normalidad de la serie de log-rendimientos diarios

Pruebas gráficas

1. Histograma de las series de log-rendimientos.

Los resultados se grafican en la Figura 3.13 y en todos los casos se aprecia similitud con la forma normal, lo que es una evidencia empírica de aproximación a la normalidad.

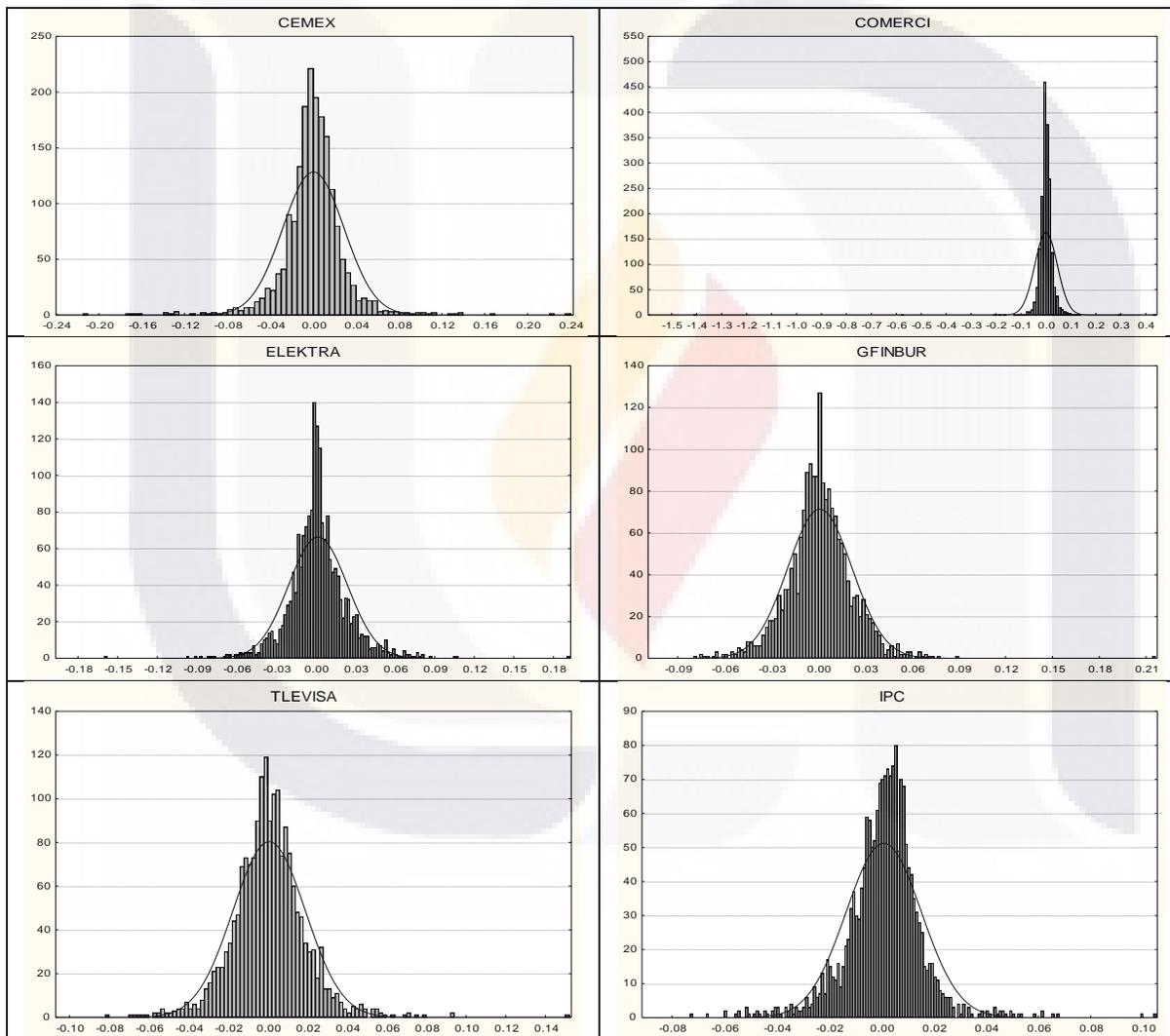


Figura 3.13. Histogramas de series de log-rendimientos y la normal.

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las emisoras y el IPC tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Se observa también la presencia de cierta esbeltez o leptocurtosis y colas pesadas en casi todas las acciones. La asimetría o sesgo (ver Anexo D) es cercana a cero.

En el caso de COMERCI, cuyo sesgo es muy diferente de cero (-16.89) hay dos días donde el log-rendimiento fue extremadamente bajo y por eso el histograma se muestra cargado al lado derecho. El histograma de GFINBUR muestra también log-rendimientos altos en algunos días.

2. Diagrama de papel de probabilidad (Q-Q) para cada serie de log-rendimientos diarios.

Los diagramas Q-Q de la Figura 3.14 muestran la buena aproximación a la normalidad de las series de log-rendimientos diarios de las emisoras analizadas pues prácticamente se ajustan a una recta, excepto en las colas. Las ligeras desviaciones en los extremos son resultado de la presencia de colas pesadas, evidencia empírica que se había mostrado ya en el análisis anterior de los histogramas contra la normal.

Bajo normalidad, en estos diagramas de dispersión todos los puntos deben verse alineados, lo que sucede parcialmente en las acciones analizadas, apreciándose cierta distorsión en los extremos. En el diagrama de COMERCI, se aprecian dos observaciones discrepantes que perturban todo análisis al respecto de la serie.

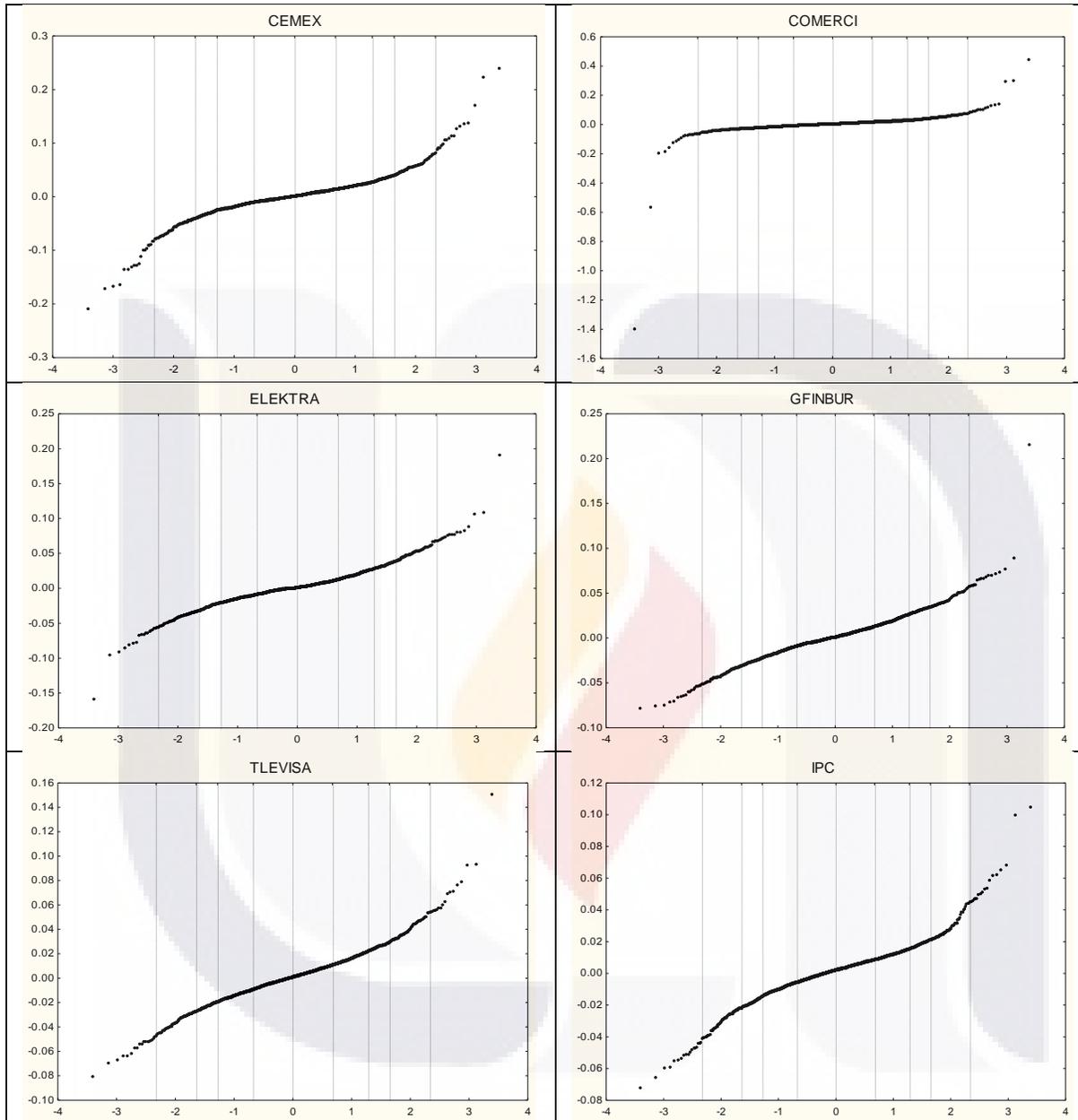


Figura 3.14. Diagramas Q-Q de las series de log-rendimientos.

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las emisoras y el IPC tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

3. Histogramas bivariados de las series de log-rendimientos.

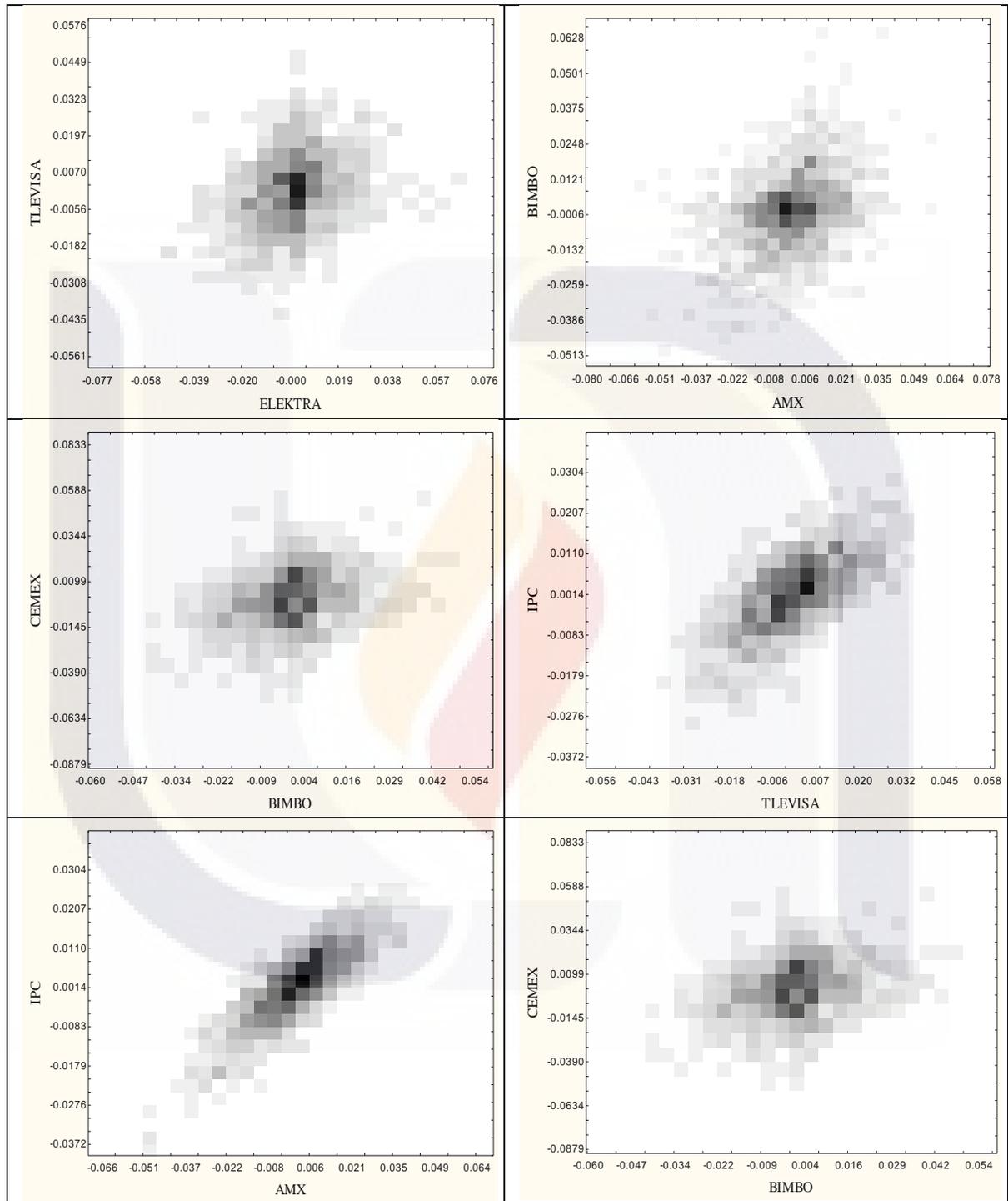


Figura 3.15. Histogramas bivariados de las series de log-rendimientos.

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las emisoras y el IPC tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Los histogramas bivariados de la Figura 3.15 se grafican en la modalidad de contorno, y muestran claramente la forma elíptica, típica de la densidad normal conjunta (Alexander, 2008), con lo que se da evidencia empírica a favor de la normalidad de las series de log-rendimientos diarios.

Prueba analítica de normalidad (Jarque-Bera)

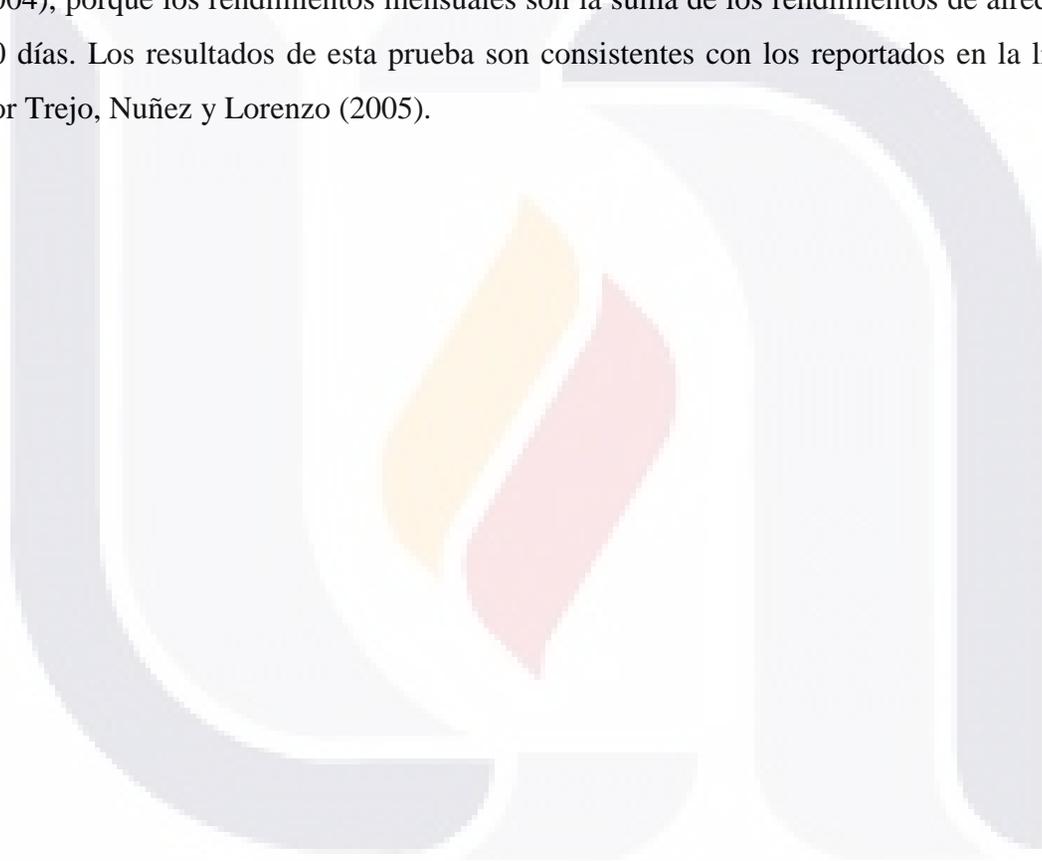
La prueba analítica que se selecciona para determinar la normalidad de la serie de log-rendimientos es la de Jarque y Bera (1987). En la Tabla 3.5 se muestran los resultados de aplicar la prueba a log-rendimientos diarios, semanales y mensuales. La metodología de la prueba utiliza la misma base de datos de las pruebas anteriores. La herramienta usada fue el paquete que el software de programación R tiene para esta prueba.

Tabla 3.5. Resultados de la prueba estadística de Jarque-Bera.

Jarque-Vera	Diario	Semanal	Mensual	Jarque-Vera	Diario	Semanal	Mensual
	valor-p	valor-p	valor-p		valor-p	valor-p	valor-p
1 ALFA	< 2e-16	< 2e-16	< 2e-16	22 GRUMA	< 2e-16	< 2e-16	< 2e-16
2 ALSEA	< 2e-16	< 2e-16	0.1401	23 HOGAR	< 2e-16	< 2e-16	0.1244
3 AMX	< 2e-16	< 2e-16	0.0705	24 HOMEX	< 2e-16	< 2e-16	3.8e-06
4 ARA	< 2e-16	< 2e-16	0.0004	25 ICA	< 2e-16	< 2e-16	7.7e-16
5 ARCA	< 2e-16	8.1e-12	1.0e-05	26 ICH	< 2e-16	< 2e-16	0.2232
6 ASUR	< 2e-16	4.3e-08	0.1097	27 IDEAL	< 2e-16	< 2e-16	0.0729
7 AXTEL	< 2e-16	3.4e-08	0.1641	28 KIMBER	< 2e-16	< 2e-16	0.4951
8 BIMBO	< 2e-16	< 2e-16	0.7311	29 KOF	< 2e-16	< 2e-16	0.0019
9 CEMEX	< 2e-16	< 2e-16	< 2e-16	30 PE	< 2e-16	< 2e-16	0.1562
10 COMERCI	< 2e-16	< 2e-16	< 2e-16	31 SARE	< 2e-16	< 2e-16	2.5e-11
11 CONTAL	< 2e-16	< 2e-16	0.6048	32 SIMEC	< 2e-16	< 2e-16	0.1483
12 ELEKTRA	< 2e-16	< 2e-16	1.3e-15	33 SORIANA	< 2e-16	< 2e-16	0.0642
13 FEMSA	< 2e-16	< 2e-16	0.0885	34 TELECOM	< 2e-16	< 2e-16	0.2264
14 GAP	< 2e-16	0.04757	0.9071	35 TELMEX	< 2e-16	< 2e-16	0.6673
15 GCARSO	< 2e-16	< 2e-16	0.31	36 TLEVISA	< 2e-16	1.8e-10	0.2044
16 GEO	< 2e-16	< 2e-16	0.0014	37 TVAZTCA	< 2e-16	< 2e-16	0.9295
17 GFAMSA	< 2e-16	< 2e-16	3.3e-11	38 URBI	< 2e-16	< 2e-16	0.0009
18 GFINBUR	< 2e-16	< 2e-16	0.7348	39 VITRO	< 2e-16	< 2e-16	3.4e-06
19 GFNORTE	< 2e-16	< 2e-16	0.0002	40 WALMEX	< 2e-16	6.6e-06	0.1506
20 GMEXICO	< 2e-16	< 2e-16	0.008	IPC	< 2e-16	< 2e-16	1.4e-05
21 GMODELO	< 2e-16	< 2e-16	0.3945				

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 40 emisoras y el IPC tomados de la base de datos Infosel® del 02/01/2003 al 23/04/2010. Elaboración propia.

De acuerdo a los resultados de la prueba, se rechaza la hipótesis de normalidad de los rendimientos diarios y semanales. Sin embargo, a escala mensual los resultados de la prueba muestran que en 21 emisoras, remarcadas en la Tabla 3.5, los rendimientos tienen una distribución normal. Esto es consecuencia del teorema del límite central (Gujarati, 2004), porque los rendimientos mensuales son la suma de los rendimientos de alrededor de 20 días. Los resultados de esta prueba son consistentes con los reportados en la literatura por Trejo, Nuñez y Lorenzo (2005).



3.3. Modelo de Black-Scholes-Merton para portafolios óptimos

3.3.1. Base de datos

Con objeto de que los portafolios obtenidos tengan una referencia y puedan compararse con el IPC, en esta parte de la investigación la base de datos de la serie de precios, para aplicar la metodología de optimización, incluye solamente acciones que forman parte del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC). Se lleva a cabo la siguiente metodología de análisis y selección:

1°. La composición del IPC se toma al 16/07/2010, fecha del reporte más cercano al último dato de la serie de precios considerada, integrado en ese momento por 33 acciones (Bolsa Mexicana de Valores, 2010b).

2°. Las series de precios de las 33 acciones que componen el IPC se obtienen de las base de datos Infosel® y se sigue la misma metodología desarrollada en la sección 3.2.1.

3°. Se revisan las fechas de emisión de cada acción pues se encuentra que el IPC contiene algunas acciones que llevan poco tiempo de cotización y generalmente los precios de estas suelen ser volátiles y con faltantes en las primeras semanas de cotización.

En base a lo anterior, la serie de datos de los precios de las acciones se reduce a 1,008 observaciones, desde el 18/04/2006 al 23/04/2010, es decir, 4 años aproximadamente, y a 31 acciones, habiéndose eliminado dos por ser emisiones muy recientes.

La razón de tomar la serie de tiempos dentro del período citado, obedece no solo a que un período mayor hubiera implicado eliminar mas acciones, sino también a que estas series de tiempo incluyen un período de estabilidad en los mercados de 04/2006 a 07/2008, y otro, de casi dos años, de mucha volatilidad de 08/2008 a 04/2010, lo que hace que la muestra sea representativa del comportamiento típico de un mercado en el mediano plazo (Ocampo, 2009).

En la Tabla 3.6 se muestran las 31 acciones consideradas para el análisis con sus respectivas ponderaciones como parte del IPC, así como el rendimiento, la volatilidad y la razón de Sharpe (θ), calculada con la tasa libre de riesgo obtenida por el estimador ($r = 5.55\%$) a partir de la ecuación (1.1.b). Se incluye también en la tabla el rendimiento y volatilidad del portafolio del IPC y el promedio del rendimiento, volatilidad y razón de Sharpe de las 31 emisoras.

Estos parámetros se calcularon con los estimadores del modelo BSM, para tener el mismo marco teórico y metodología y poder hacer comparaciones válidas. En la tabla se remarcen los valores mínimos y máximos de cada parámetro.

El promedio de los rendimientos y de las volatilidades de las 31 acciones es de 23.9% y 45.2% respectivamente. Estos valores sirven de referencia al citar, más adelante, rendimientos y volatilidades bajas, medias y altas. Cabe mencionar que dentro de las ponderaciones de las acciones de la Tabla 3.6, se remarca AMX por su alta participación, que representa el 26.39% del total de IPC. En la misma tabla se aprecia también que la emisora MEXCHEM muestra el valor más alto de la razón de Sharpe ($\theta = 1.34$) y CEMEX el más bajo ($\theta = -0.19$).

En la Figura 3.16 se grafican los resultados de la Tabla 3.6 de los rendimientos contra la volatilidad de las acciones, así como la línea de regresión, apreciándose en general poca linealidad. La mayor parte de las acciones se localizan en la nube de datos, con excepción de los *outliers* ARA y CEMEX por debajo de la recta y AUTLAN, MEXCHEM, y ELEKTRA por encima, únicas tres emisoras cuya volatilidad es menor a su rendimiento.

Tabla 3.6. Ponderaciones (π) de las emisoras que componen el IPC al 16/07/2010, rendimiento, volatilidad y razón de Sharpe (θ).

Acción	π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	θ
1 ALFA	2.9%	20.5%	41.7%	0.36
2 AMX	26.9%	19.6%	37.5%	0.38
3 ARA	0.4%	-2.2%	44.8%	-0.17
4 ASUR	1.0%	19.1%	35.1%	0.39
5 AUTLÁN	0.1%	75.9%	62.9%	1.12
6 AXTEL	0.5%	15.2%	46.6%	0.21
7 BIMBO	2.6%	32.3%	33.5%	0.80
8 CEMEX	6.6%	-5.3%	57.1%	-0.19
9 COMERCI	0.3%	30.5%	93.2%	0.27
10 ELEKTRA	2.9%	51.0%	39.0%	1.17
11 FEMSA	5.4%	21.0%	36.5%	0.42
12 GAP	1.1%	15.0%	37.3%	0.25
13 GCARSO	1.8%	25.7%	43.3%	0.47
14 GEO	1.0%	12.0%	51.9%	0.12
15 GFAMSA	0.2%	15.3%	52.3%	0.19
16 GFINBUR	2.6%	30.8%	36.0%	0.70
17 GFNORTE	4.2%	31.1%	52.6%	0.48
18 GMEXICO	6.9%	42.0%	54.0%	0.67
19 GMODELO	2.3%	20.6%	33.4%	0.45
20 GRUMA	0.3%	14.5%	64.4%	0.14
21 HOMEX	0.8%	12.7%	52.5%	0.14
22 ICA	1.1%	12.3%	48.7%	0.14
23 KIMBER	2.3%	20.6%	31.1%	0.48
24 MEXCHEM	1.4%	62.9%	42.9%	1.34
25 PE	1.8%	43.0%	55.6%	0.67
26 SORIANA	0.5%	28.6%	38.0%	0.61
27 TELMEX	2.5%	13.3%	30.0%	0.26
28 TLEVISA	6.5%	9.3%	33.0%	0.11
29 TVAZTCA	0.4%	13.3%	29.5%	0.26
30 URBI	0.7%	15.5%	51.5%	0.19
31 WALMEX	11.9%	24.3%	34.2%	0.55
IPC	100.0%	22.2%	28.6%	
Promedio²		23.9%	45.2%	0.42

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras y el IPC, tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

² Calculado sin los parámetros del IPC

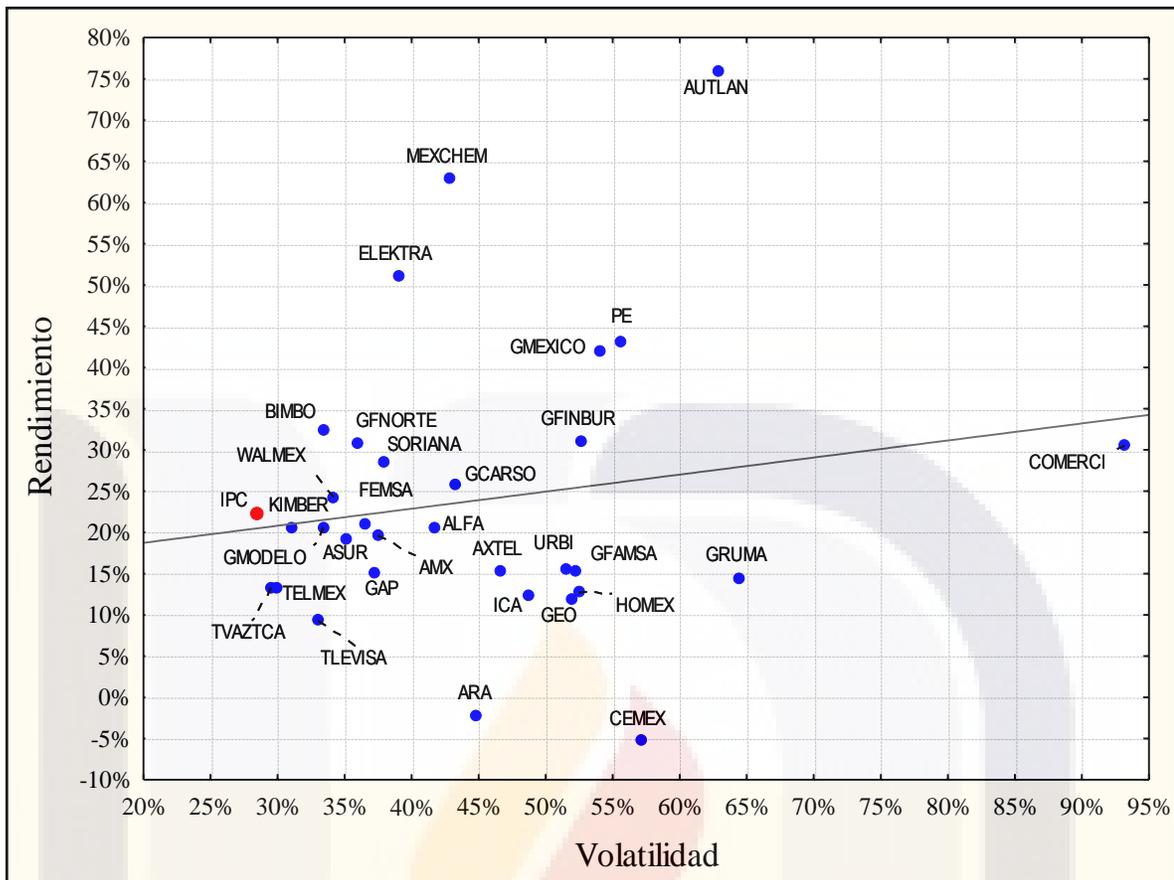


Figura 3.16. Rendimiento contra volatilidad de 31 acciones que componen la muestra del IPC al 16/07/2010.

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras y el IPC tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010 para estimar los parámetros $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$, mediante las ecuaciones (2.12) y (2.14). Elaboración propia.

3.3.2. Portafolio del Mercado con venta en corto

El portafolio del Mercado se calcula con el modelo BSM, con la siguiente metodología:

1°. Las ventas en corto son permitidas, tal como se plantea en el marco teórico del modelo en la sección 2.2.2, capítulo II.

2°. Se toma como tasa libre de riesgo $r = 5.55\%$, estimada en la sección 3.1.2 del capítulo III.

3°. Para determinar el portafolio del Mercado se considera que no hay inversión o préstamo a la tasa libre de riesgo, es decir, $\pi_p = 100\%$ y $\pi_r = 0\%$. Esta premisa es necesaria ya que el portafolio buscado es el portafolio sobre la Frontera Eficiente que es tangente a la Línea del Mercado de Capital (LMC) cuya metodología y cálculo se describe en la siguiente sección.

La composición del portafolio del Mercado obtenido se muestra en la Tabla 3.7. Los resultados son particularmente interesantes pues se aprecia la capacidad el modelo para seleccionar las acciones en las que hay que invertir y aquellas en las que la metodología de optimización asigna para venta en corto. Las acciones ARA y CEMEX son de manera natural las más atractivas para la venta en corto pues su rendimiento es negativo, siguiéndole las de baja rentabilidad, que generalmente deben tener baja volatilidad, aunque hay excepciones. Por ejemplo, GRUMA es una acción con muy bajo rendimiento y alta volatilidad, como puede observarse en la Figura 3.16.

Tabla 3.7. Ponderaciones (π) del portafolio del Mercado con venta en corto, rendimiento y volatilidad.

Acción	π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	Acción	π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
24 MEXCHEM	73.4%	62.9%	42.9%	14 GEO	1.4%	12.0%	51.9%
10 ELEKTRA	46.2%	51.0%	39.0%	20 GRUMA	-2.0%	14.5%	64.4%
7 BIMBO	24.0%	32.3%	33.5%	12 GAP	-2.6%	15.0%	37.3%
5 AUTLAN	21.4%	75.9%	62.9%	1 ALFA	-3.9%	20.5%	41.7%
23 KIMBER	21.1%	20.6%	31.1%	13 GCARSO	-7.9%	25.7%	43.3%
2 AMX	17.7%	19.6%	37.5%	30 URBI	-8.2%	15.5%	51.5%
18 GMEXICO	16.8%	42.0%	54.0%	21 HOMEX	-8.3%	12.7%	52.5%
11 FEMSA	16.7%	21.0%	36.5%	6 AXTEL	-8.4%	15.2%	46.6%
31 WALMEX	14.8%	24.3%	34.2%	15 GFAMSA	-8.5%	15.3%	52.3%
17 GFNORTE	14.7%	30.8%	36.0%	29 TVAZTCA	-23.6%	13.3%	29.5%
25 PE	11.6%	43.0%	55.6%	28 TLEVISA	-30.1%	9.3%	33.0%
4 ASUR	10.3%	19.1%	35.1%	8 CEMEX	-30.9%	-5.3%	57.1%
19 GMODELO	8.9%	20.6%	33.4%	22 ICA	-35.0%	12.3%	48.7%
14 GFINBUR	8.6%	31.1%	52.6%	3 ARA	-49.80%	-2.20%	44.80%
9 COMERCI	7.8%	30.5%	93.2%	Parámetros del portafolio			
26 SORIANA	2.1%	28.6%	38.0%	$\hat{\mu}$		119.1%	
27 TELMEX	1.8%	13.3%	30.0%	$\hat{\sigma}$		44.5%	

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Se aprecia en la Tabla 3.7 que el modelo selecciona el máximo rendimiento con la menor volatilidad, como es el caso de MEXCHEM y AUTLAN, pues teniendo esta última mayor rendimiento que la primera, 75.9% contra 62.9%, el modelo le da más participación a MEXCHEM por tener menor volatilidad, 42.9%, contra 62.9% de AUTLAN. Un caso similar es el de GMODELO y ALFA, acciones con rendimientos prácticamente iguales, 20.6% y 20.5% respectivamente, y el modelo invierte 8.9% en GMODELO, mientras que vende en corto, - 3.9%, a ALFA, esto porque la volatilidad de GMODELO es 33.4%, entre las más bajas, y la volatilidad de ALFA es de 41.7%.

Sin embargo, a pesar de la aparente racionalidad del modelo, no deja de llamar la atención que muestre una elevada inversión, 73.4% de todo el portafolio, en una sola acción, MEXCHEM, o bien una venta en corto de - 49.8% en la acción ARA, así como algunos casos poco factibles, como por ejemplo las dos acciones que se remarcan en la Tabla 3.7, que en el caso de la emisora ICA, teniendo rentabilidad positiva de 12.3% y volatilidad de 48.7%, es seleccionada por el modelo para venta en corto, hasta en un - 35.0% mientras que GEO, con rentabilidad ligeramente menor, de 12.0%, y mayor volatilidad, de 51.9%, es seleccionada para inversión. Esto puede deberse a cuestiones relacionadas con limitaciones de la estructura de correlación entre las acciones del modelo BSM, que se obtienen de la correlación de la matriz de volatilidad o varianza-covarianza de la muestra, como se plantea en la sección 2.2 del capítulo II en la ecuación (2.7).

3.3.3. Línea del Mercado de Capital

La Línea del Mercado de Capital (LMC) se muestra en la Figura 3.17, y se determina mediante el cálculo de las coordenadas μ y σ , de portafolios que resultan de combinaciones del portafolio del Mercado y el bono, a la tasa libre de riesgo. Se toma un rango de participación del portafolio de 0% a 130% y del complemento, de 100% a - 30% para el bono. La Tabla 3.8 muestra los datos obtenidos del rendimiento y la volatilidad de los portafolios resultantes, remarcándose el portafolio del Mercado, tangente a la Frontera Eficiente.

Tabla 3.8. Portafolios calculados con diferentes ponderaciones del portafolio del Mercado (π) y del bono libre de riesgo.

π	$100\% - \pi$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
0%	100%	5.5%	0%
20%	80%	28.3%	8.9%
40%	60%	51.0%	17.8%
60%	40%	73.7%	26.7%
80%	20%	96.4%	35.6%
90%	10%	107.8%	40.0%
100%	0%	119.1%	44.5%
110%	-10%	130.5%	49.0%
120%	-20%	141.8%	53.4%
130%	-30%	153.2%	57.8%

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel@ del 18/04/2006 al 23/04/2010 y la estimación del rendimiento del bono libre de riesgo. Elaboración propia.

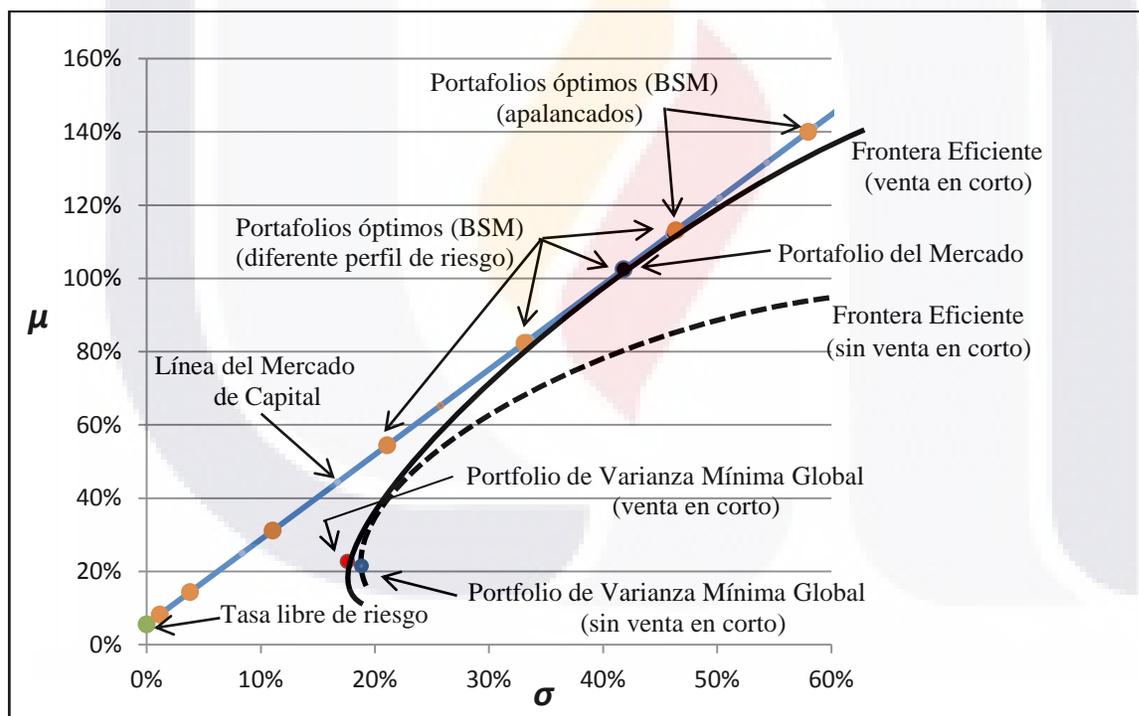


Figura 3.17. Portafolios óptimos con venta en corto.

Fuente: datos de las Tablas 3.7, 3.9, 3.10 y 3.19. Elaboración propia.

3.3.4. Portafolios óptimos con función de utilidad potencia

Se determinan varios portafolios óptimos para diferentes valores del coeficiente de propensión al riesgo γ . Los rendimientos y la volatilidad se muestran en la Tabla 3.9 y algunos de esos portafolios óptimos se muestran también en la Figura 3.17.

Es interesante observar que estos portafolios se localizan a lo largo de la Línea del Mercado de Capital, dependiendo del valor del coeficiente γ . El portafolio sobre la tangente con la Frontera Eficiente que se remarca en la Tabla 3.10 corresponde al portafolio del Mercado y el valor de γ para este portafolio es -4.7 en el que no hay inversión ni préstamo a la tasa libre de riesgo. Este portafolio corresponde a un perfil de inversionista neutral en cuanto a su propensión o aversión al riesgo pues invierte toda su riqueza en el portafolio del Mercado ($\pi = 100\%$).

Tabla 3.9. Portafolios con diferentes riesgos (γ) calculados con el modelo BSM formados por el portafolio del Mercado (π) y el bono libre de riesgo.

γ	π	$100\% - \pi$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
0.1	637.6%	-537.6%	729.8%	283.7%
0	573.9%	-473.9%	657.3%	255.3%
-0.1	521.7%	-421.7%	598.1%	232.1%
-1	286.9%	-186.9%	331.4%	127.7%
-3	143.5%	-43.5%	168.5%	63.8%
-4	114.8%	-14.8%	135.9%	51.1%
-4.7	100.0%	0.0%	119.1%	44.5%
-5	95.6%	4.4%	114.2%	42.6%
-6	82.0%	18.0%	98.7%	36.5%
-10	52.2%	47.8%	64.8%	23.2%
-20	27.3%	72.7%	36.6%	12.2%
-60	9.4%	90.6%	16.2%	4.2%
-500	1.1%	98.9%	6.9%	0.5%

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010 y la estimación del rendimiento del bono libre de riesgo.
Elaboración propia.

Para valores más pequeños, es decir para inversionistas con menor propensión al riesgo, los portafolios óptimos muestran menor rendimiento y menor volatilidad ya que se desplazan hacia la izquierda en la LMC, teniéndose menor proporción del portafolio del Mercado y

mayor inversión en el bono libre de riesgo, como el caso de $\gamma = -20$ donde las proporciones son 27.3% y 72.7%, respectivamente, como se aprecia en la Tabla 3.9.

Para inversionistas propensos al riesgo, γ toma valores mayores a -4.7 , por ejemplo, -1 , obteniéndose portafolios con rendimientos mucho mayores pero también con mayor volatilidad. En el caso mencionado de $\gamma = -1$, el portafolio óptimo tiene una ponderación del portafolio de acciones (portafolio del Mercado) de 286.9% y siendo mayor a 100%, significa que el inversionista pide prestado recursos a la tasa libre de riesgo en una proporción de -186.9% , recursos que invierte en el portafolio de acciones, apalancando su portafolio.

3.3.5. Portafolio de Varianza Mínima Global con venta en corto

El portafolio de Varianza Mínima Global (VMG) permitiendo venta en corto se calcula de la fórmula derivada por Merton (1972), definida en la ecuación (1.3) del capítulo I. Este portafolio es el único portafolio sobre la Frontera Eficiente cuyo cálculo no requiere de los rendimientos de las acciones.

Las ponderaciones de cada acción en el portafolio de VMG permitiendo venta en corto y sus rendimientos y volatilidades, así como el rendimiento y volatilidad del portafolio, se reportan en la Tabla 3.10 y el portafolio se muestra en la Figura 3.17.

Los resultados obtenidos en la Tabla 3.10 muestran, en principio, congruencia con el objetivo de determinar los portafolios de mínima varianza, al margen de los rendimientos. Se aprecian algunos resultados que pueden obedecer a limitaciones del modelo en cuanto a la matriz de volatilidades pues se observan resultados no factibles, como son los casos remarcados en la tabla, en donde el modelo propone, por ejemplo, invertir un 4% del portafolio en ARA, que es una emisora con volatilidad de 44.8% y solo un 2.10% en BIMBO, que muestra una volatilidad de 33.5%, mucho menor a la de ARA.

Tabla 3.10. Ponderaciones (π) del portafolio de VMG con venta en corto.

Acción	π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	Acción	π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
23 KIMBER	19.9%	20.6%	31.1%	9 COMERCI	0.7%	30.5%	93.2%
27 TELMEX	19.1%	13.3%	30.0%	5 AUTLAN	0.3%	75.9%	62.9%
16 GFINBUR	15.3%	30.8%	36.0%	15 GFAMSA	-0.8%	15.3%	52.3%
29 TVAZTCA	13.9%	13.3%	29.5%	1 ALFA	-1.4%	20.5%	41.7%
19 GMODELO	11.9%	20.6%	33.4%	22 ICA	-1.6%	12.3%	48.7%
4 ASUR	10.5%	19.1%	35.1%	25 PE	-2.6%	43.0%	55.6%
12 GAP	8.1%	15.0%	37.3%	17 GFNORTE	-3.5%	31.1%	52.6%
31 WALMEX	7.4%	24.3%	34.2%	18 GMEXICO	-3.9%	42.0%	54.0%
10 ELEKTRA	5.8%	51.0%	39.0%	13 GCARSO	-4.1%	25.7%	43.3%
20 GRUMA	5.8%	14.5%	64.4%	30 URBI	-4.1%	15.5%	51.5%
28 TLEVISA	5.6%	9.3%	33.0%	14 GEO	-4.9%	12.0%	51.9%
24 MEXCHEM	5.1%	62.9%	42.9%	21 HOMEX	-5.4%	12.7%	52.5%
26 SORIANA	4.9%	28.6%	38.0%	2 AMX	-5.4%	19.6%	37.5%
3 ARA	4.0%	-2.9%	44.8%	8 CEMEX	-7.3%	-5.3%	57.1%
6 AXTEL	3.5%	15.2%	46.6%	Parámetros del portafolio			
7 BIMBO	2.1%	32.3%	33.5%	$\hat{\mu}$	23.3%		
11 FEMSA	0.7%	21.0%	36.5%	$\hat{\sigma}$	19.6%		

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

En la Tabla 3.21 de la sección 3.3.8, se muestra el portafolio de VMG sin venta en corto, cuyo rendimiento y volatilidad son ligeramente menores a los del portafolio con venta en corto que se determina en esta sección, lo cual es congruente con el marco teórico sobre las fronteras eficientes de portafolios con y sin venta en corto (Fabozzi *et al.*, 2006). Ambos portafolios de VMG se muestran gráficamente en la Figura 3.18 en la que el portafolio de VMG sin venta en corto, se localiza sobre la curva (punteada) de la Frontera Eficiente de portafolios sin venta en corto.

3.3.6. Portafolios con venta en corto con diferente estructura de correlación

De manera explícita no es posible medir el efecto que la correlación entre las acciones tiene sobre la conformación del portafolio óptimo, sin embargo el modelo BSM toma en cuenta, a través de la matriz de varianza-covarianza de la muestra, las correlaciones entre los rendimientos de todas las acciones, y como se comenta en las secciones anteriores, esta

estructura de correlación puede dar lugar a portafolios inferiores a los que se pueden obtener a mediante otros modelos de correlación. Cabe señalar que portafolios inferiores se refiere a portafolios poco factibles o extremadamente desbalanceados, menos rentables o más volátiles, y que en general tengan un razón de Sharpe (θ) menor. Por lo anterior, se proponen dos modelos alternativos para el cálculo de la estructura de correlación entre las acciones. Ver el fundamento teórico en la sección 2.3, capítulo II.

Estructura de correlación de índice simple

Se desarrolla la metodología para aplicar el modelo de correlación de índice simple, con objeto de simplificar el cálculo de la matriz de varianza-covarianza y tratar de obtener resultados de portafolios superiores y sin las anomalías que se han presentado con el uso del cálculo de la correlación muestral que la literatura también reporta (Disantik y Benninga, 2007 y Bodie *et al.*, 2011).

La metodología para el cálculo del coeficiente de sensibilidad β , consiste en una regresión lineal simple de la serie de log-rendimientos de cada acción contra los log-rendimientos del IPC, según la ecuación (2.22) y se lleva a cabo con el software Statistica®. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 3.11 y se grafican en la Figura 3.18. En la tabla se remarcan las acciones CEMEX, con la β más alta (1.49) y la acción GFINBUR con la más baja (0.53). Se remarca también AMX por tener el coeficiente de determinación R^2 más alto (0.72).

Cabe señalar que ninguna de las acciones presenta una sensibilidad cercana a cero o negativa, típica de acciones o sectores anticíclicos en mercados de mayor profundidad que el mexicano. Este hecho refleja poca diversificación de emisoras y gran concentración del mercado en unas cuantas acciones.

Tabla 3.11. Regresión del rendimiento de la acción contra el rendimiento del IPC.

Acción	α	β	R^2	Acción	α	β	R^2
1 ALFA	0.0000	0.93	0.37	17 GFNORTE	0.0000	1.26	0.43
2 AMX	-0.0001	1.16	0.72	18 GMEXICO	0.0003	1.37	0.48
3 ARA	-0.0010	1.02	0.39	19 GMODELO	0.0002	0.70	0.33
4 ASUR	0.0002	0.55	0.19	20 GRUMA	-0.0006	0.58	0.06
5 AUTLAN	0.0018	0.8	0.12	21 HOMEX	-0.0008	1.32	0.48
6 AXTEL	-0.0003	0.91	0.29	22 ICA	-0.0006	1.22	0.47
7 BIMBO	0.0007	0.75	0.38	23 KIMBER	0.0003	0.57	0.25
8 CEMEX	-0.0017	1.49	0.5	24 MEXCHEM	0.0017	0.89	0.32
9 COMERCI	-0.0011	1.07	0.1	25 PE	0.0004	1.26	0.38
10 ELEKTRA	0.0014	0.66	0.22	26 SORIANA	0.0004	0.77	0.31
11 FEMSA	0.0001	0.86	0.42	27 TELMEX	0.0000	0.71	0.41
12 GAP	0.0000	0.66	0.23	28 TLEVISA	-0.0003	0.88	0.53
13 GCARSO	0.0001	1.05	0.44	29 TVAZTCA	0.0000	0.59	0.3
14 GEO	-0.0008	1.31	0.48	30 URBI	-0.0006	1.19	0.4
15 GFAMSA	-0.0005	0.97	0.25	31 WALMEX	0.0003	0.89	0.5
16 GFINBUR	0.0007	0.53	0.16	Promedio	0.000006	0.93	0.35

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras y el IPC, tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

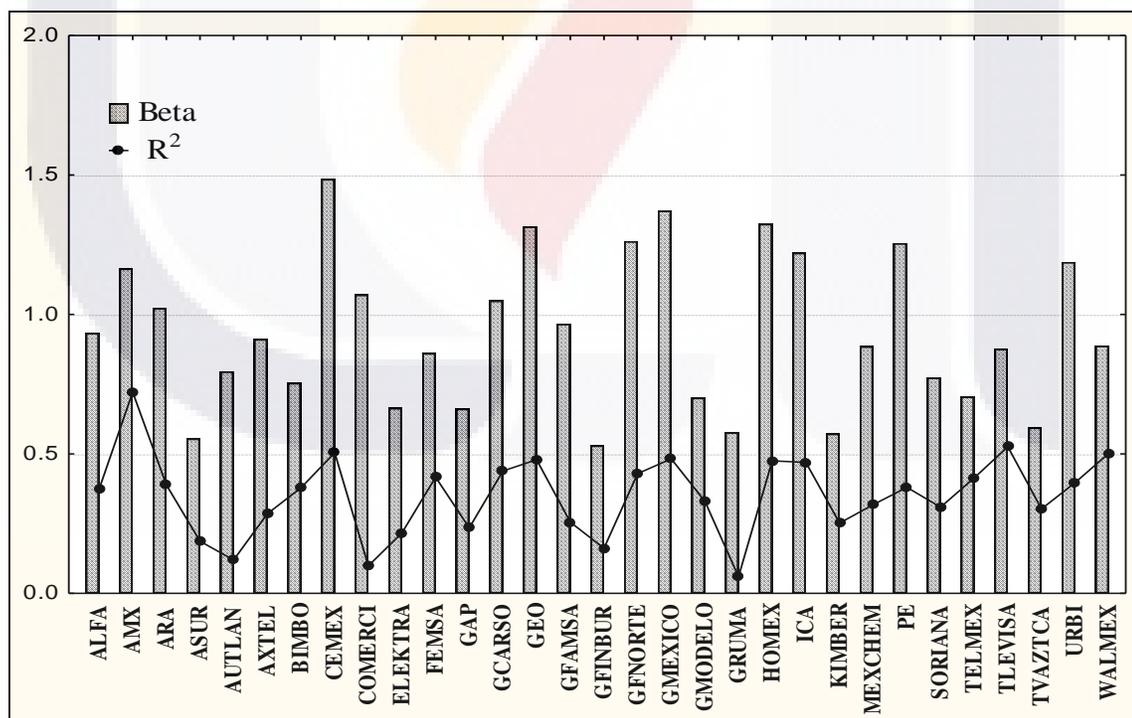


Figura 3.18. Beta y coeficiente de determinación de la regresión de cada acción contra el IPC.

Fuente: datos de la Tabla 3.11. Elaboración propia.

Esta concentración se hace patente por la participación de AMX en el IPC (26.9%) lo que explica también el alto valor del coeficiente de determinación R^2 de esta acción, que alcanza el valor de 0.72. La interpretación de este valor de R^2 , es que el rendimiento del IPC explica aproximadamente el 72% de la variabilidad del rendimiento de AMX.

Por otro lado, es también importante observar que el promedio de R^2 (0.35) indica que el rendimiento del IPC explica en un 35% la variabilidad del rendimiento de las 31 acciones. La beta promedio de 0.93, refleja en general una sensibilidad del rendimiento de las acciones casi directa a cambios en el rendimiento del índice.

Benninga (2008) reporta en un análisis llevado a cabo entre el índice S&P500 (*Standard & Poors*) y las 30 acciones del DJ 30 (*Dow Jones 30*), durante el período 07/2001 a 07/2006, eliminando siete acciones con R^2 menores de 0.2, una R^2 de 0.43 y una beta promedio de 1.12, lo cual nos indica que en promedio el índice S&P 500 explica aproximadamente el 43% de la variación de los rendimientos de las 23 acciones consideradas, lo cual muestra una buena representatividad de estas acciones en el índice.

En el caso de las acciones del IPC, para poder comparar con el dato reportado para el S&P500, se eliminan cinco acciones con R^2 menor a 0.2, y el valor discrepante de 0.72 de AMX, lo que da un promedio de R^2 de 0.38, reflejando, en general, una representatividad media de las acciones que componen el IPC.

En relación a los resultados de las betas, el valor más alto (1.49) corresponde a la emisora CEMEX, remarcada en la Tabla 3.12, empresa del sector cementero e íntimamente relacionada con la industria de la construcción, que tradicionalmente es muy sensible a los cambios en el mercado. La misma explicación corresponde a las acciones de HOMEX, GEO, URBI y ARA, del sector de construcción de vivienda e ICA, del sector de construcción de infraestructura pues todas presentan betas mayores a uno.

Las acciones con β entre 0.5 y 0.6, menos sensibles a cambios en el IPC, son empresas de servicios, como ASUR y GAP, en servicios aeroportuarios, GFINBUR, de servicios financieros que se remarca en la Tabla 3.12 por tener la menor β , y empresas de sectores relacionados con el consumo de bienes y servicios básicos, como es el caso de GRUMA en alimentos de maíz, KIMBER en papel, TVAZTCA en entretenimiento o ELEKTRA en electrodomésticos. Es interesante observar también que, en general, las acciones con β mayores o cercanas a uno muestran coeficientes de determinación altos, entre 0.4 y 0.5.

Con objeto de comparar el modelo de índice simple, cuya premisa básica es que la covarianza depende solamente del riesgo del mercado, representado por el IPC, es decir que los cambios en los rendimientos de las acciones obedecen solamente a cambios en el rendimiento del índice, se determinan los portafolios óptimos del Mercado y VMG aplicando el modelo de índice simple y se comparan con los obtenidos con el método de correlación muestral (var-cov). La matriz de covarianzas se calcula de acuerdo a la ecuación (2.25), en la que se aprecia que el cálculo de las varianzas de las acciones no cambia por lo que los valores son los mismos de la correlación muestral.

Las ponderaciones de los portafolios obtenidos se muestran en la Tablas 3.12 y 3.13 para el portafolio del Mercado y el de VMG, respectivamente, en las que se muestra también el coeficiente β , junto con el rendimiento y la volatilidad de cada acción. En cuanto a los portafolios obtenidos, se muestran en la tabla los parámetros estimados de rendimiento y volatilidad de ambos portafolios y en el caso del modelo con correlación de índice simple, la volatilidad del portafolio se estima también con correlación muestral (var-cov) para poder compararla con la misma metodología de cálculo. También se calculan la β y la razón de Sharpe (θ) de los portafolios con las ecuaciones (2.23) y (1.1.a) respectivamente.

Portafolio del Mercado con venta en corto con correlación de índice simple

Los resultados del modelo de índice simple para el portafolio del Mercado de la Tabla 3.12 son bastante satisfactorios pues aunque no es un portafolio superior pues su relación rendimiento-volatilidad es menor ya que presenta una θ menor, las ponderaciones de cada acción se muestran más balanceadas en el sentido de que no hay participaciones extremas de una sola acción, tanto de inversión como de venta en corto, como sucede con la correlación muestral.

Es también evidente que los valores del coeficiente β , que van de 0.53 a 1.49, son considerados de manera importante en la selección de acciones por el portafolio de índice simple, simultáneamente con el rendimiento y la volatilidad. El portafolio selecciona, para invertir, las acciones con las β más bajas y los más altos rendimientos, dejando para venta en corto aquellas acciones con los valores de β más altos, y por supuesto, con los menores rendimientos, decisión que cualquier inversionista racional tomaría en la búsqueda de un portafolio cuyas acciones estuvieran lo menos correlacionadas con el mercado.

En las acciones remarcadas de la Tabla 3.12 se muestran diferencias importantes en las ponderaciones de cada portafolio. Por ejemplo, el caso de AMX es particularmente relevante ya que el modelo con correlación muestral invierte hasta un 17.7%, mientras que el de índice simple lo toma para venta en corto con una ponderación de -14.4% . Parece claro que una $\beta = 1.16$ influye más que la baja volatilidad de la acción, que parece ser el criterio con que el modelo con correlación muestral la selecciona ya que el rendimiento de 19.6% está entre los más bajos. En condiciones similares a AMX están los casos de FEMSA, GFNORTE, TELMEX y GEO.

En el caso de GFINBUR, también remarcado en la tabla, sucede lo contrario. El portafolio de correlación de la muestra le asigna baja ponderación por tener volatilidad relativamente alta (52.6%) aunque con buen rendimiento (31.1%), mientras que el portafolio de índice simple le asigna mucha más ponderación por presentar, además de buen rendimiento, el valor de $\beta = 0.53$, el más bajo de la muestra.

Tabla 3.12. Ponderaciones (π) del portafolio del Mercado calculado con correlación muestral (var-cov) y de índice simple.

Acción	var-cov π	índice simple π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	β	θ
24 MEXCHEM	73.4%	49.4%	62.9%	42.9%	0.89	1.34
10 ELEKTRA	46.2%	41.9%	51.0%	39.0%	0.66	1.17
7 BIMBO	24.0%	30.6%	32.3%	33.5%	0.75	0.80
5 AUTLAN	21.4%	23.6%	75.9%	62.9%	0.80	1.12
23 KIMBER	21.1%	12.1%	20.6%	31.1%	0.58	0.48
2 AMX	17.7%	-14.4%	19.6%	37.5%	1.16	0.38
18 GMEXICO	16.8%	14.3%	42.0%	54.0%	1.37	0.67
11 FEMSA	16.7%	3.9%	21.0%	36.5%	0.86	0.42
31 WALMEX	14.8%	12.2%	24.3%	34.2%	0.89	0.55
17 GFNORTE	14.7%	5.4%	30.8%	36.0%	1.26	0.48
25 PE	11.6%	13.3%	43.0%	55.6%	1.26	0.67
4 ASUR	10.3%	7.1%	19.1%	35.1%	0.55	0.39
19 GMODELO	8.9%	8.0%	20.6%	33.4%	0.70	0.45
16 GFINBUR	8.6%	22.2%	31.1%	52.6%	0.53	0.48
9 COMERCI	7.8%	1.5%	30.5%	93.2%	1.07	0.27
26 SORIANA	2.1%	15.8%	28.6%	38.0%	0.77	0.61
27 TELMEX	1.8%	-8.5%	13.3%	30.0%	0.71	0.26
14 GEO	1.4%	-14.0%	12.0%	51.9%	1.31	0.12
20 GRUMA	-2.0%	0.006%	14.5%	64.4%	0.58	0.14
12 GAP	-2.6%	-1.1%	15.0%	37.3%	0.66	0.25
1 ALFA	-3.9%	0.6%	20.5%	41.7%	0.93	0.36
13 GCARSO	-7.9%	5.3%	25.7%	43.3%	1.05	0.47
30 URBI	-8.2%	-7.4%	15.5%	51.5%	1.19	0.19
21 HOMEX	-8.3%	-13.0%	12.7%	52.5%	1.32	0.14
6 AXTEL	-8.4%	-4.0%	15.2%	46.6%	0.91	0.21
15 GFAMSA	-8.5%	-3.6%	15.3%	52.3%	0.97	0.19
29 TVAZTCA	-23.6%	-3.5%	13.3%	29.5%	0.58	0.26
28 TLEVISA	-30.1%	-26.8%	9.3%	33.0%	0.88	0.11
8 CEMEX	-30.9%	-29.7%	-5.3%	57.1%	1.49	-0.19
22 ICA	-35.0%	-13.7%	12.3%	48.7%	1.22	0.14
3 ARA	-49.8%	-27.2%	-2.2%	44.8%	1.02	-0.17
Parámetros del portafolio			Promedio		0.93	0.35
$\hat{\mu}$	119.1%	103.9%				
$\hat{\sigma}$	44.5%	37.3%				
$\hat{\sigma}$ (var-cov)	44.5%	42.4%				
β	0.46	0.30				
θ	2.55	2.32				

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

Con objeto de analizar gráficamente los dos portafolios de Mercado, con la correlación de la muestra y con correlación de índice simple, en las Figuras 3.19.a, y 3.19.b, se muestra cada portafolio, respectivamente. En las figuras se grafica la ponderación de cada acción contra su rendimiento, volatilidad y β . Se marcan con recuadro en las dos figuras doce acciones en las que se aprecian diferencias importantes en su participación en los dos portafolios.

Se aprecia en la comparación de las dos figuras, que con la correlación de índice simple de la Figura 3.19.b se obtiene un portafolio más compacto, que descarta la inversión en acciones con β alta, como es el caso de AMX o disminuye sensiblemente su ponderación como en la acción COMERCI. Se nota también que incrementa las ponderaciones de inversión en portafolios con β bajas, como el caso GFINBUR, sin dejar de considerar el rendimiento y la volatilidad, pues por ejemplo, en la emisora KIMBER, que tiene una β baja, similar a GFINBUR, su ponderación es reducida de 21.1% a 12.1%, por su bajo rendimiento.

En acciones con venta en corto como CEMEX y ARA, por ejemplo, el portafolio de correlación muestral de la Figura 3.19.a, le asigna una ponderación mayor a CEMEX que a ARA mientras que en el de correlación de índice simple de la Figura 3.19.b, la ponderación de CEMEX es más negativa que ARA ya que CEMEX no solo tiene una β mayor, sino un rendimiento menor y una volatilidad más elevada. Lo anterior indica la importancia de considerar el criterio que aporta el modelo de estructura de correlación de índice simple para evitar tomar decisiones incongruentes con la racionalidad que debe tener un modelo para conformar portafolios óptimos (Bodie *et al.*, 2011).

En relación a la β del portafolio con índice simple, es muy importante señalar que es sensiblemente menor a la del portafolio de correlación muestral (remarcado en la tabla) lo cual hace que el portafolio de índice simple sea atractivo por ser menos riesgoso en términos de su sensibilidad a cambios en el mercado.

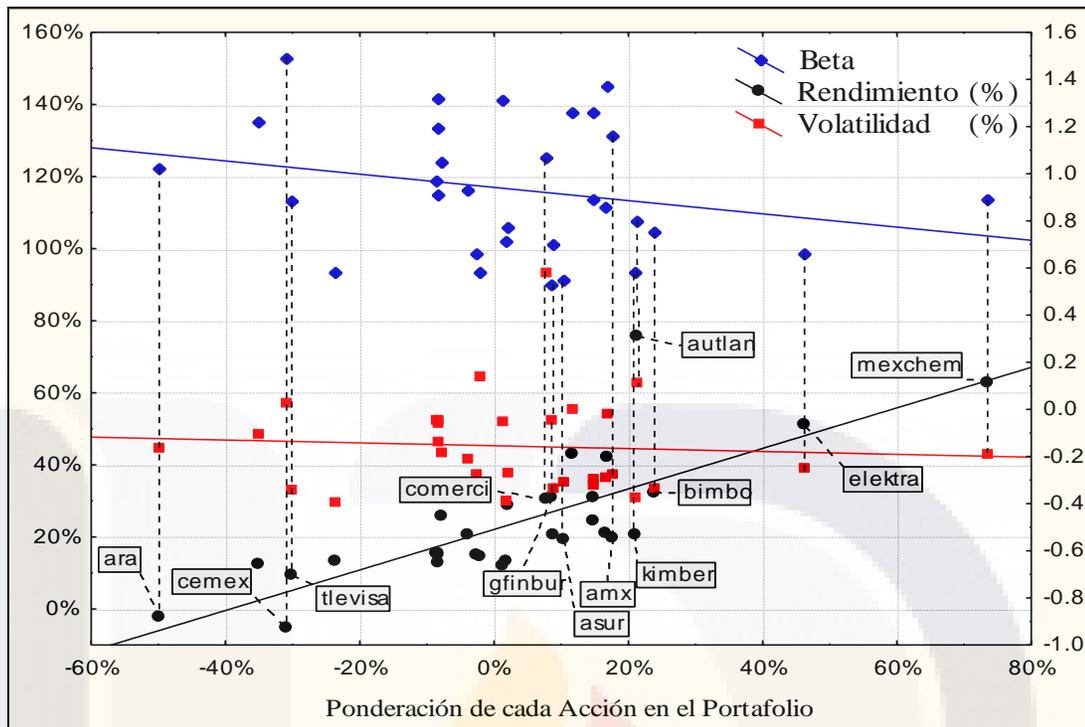


Figura 3.19.a. Portafolio del Mercado con venta en corto con correlación muestral.

Fuente: datos de la Tabla 3.12. Elaboración propia.

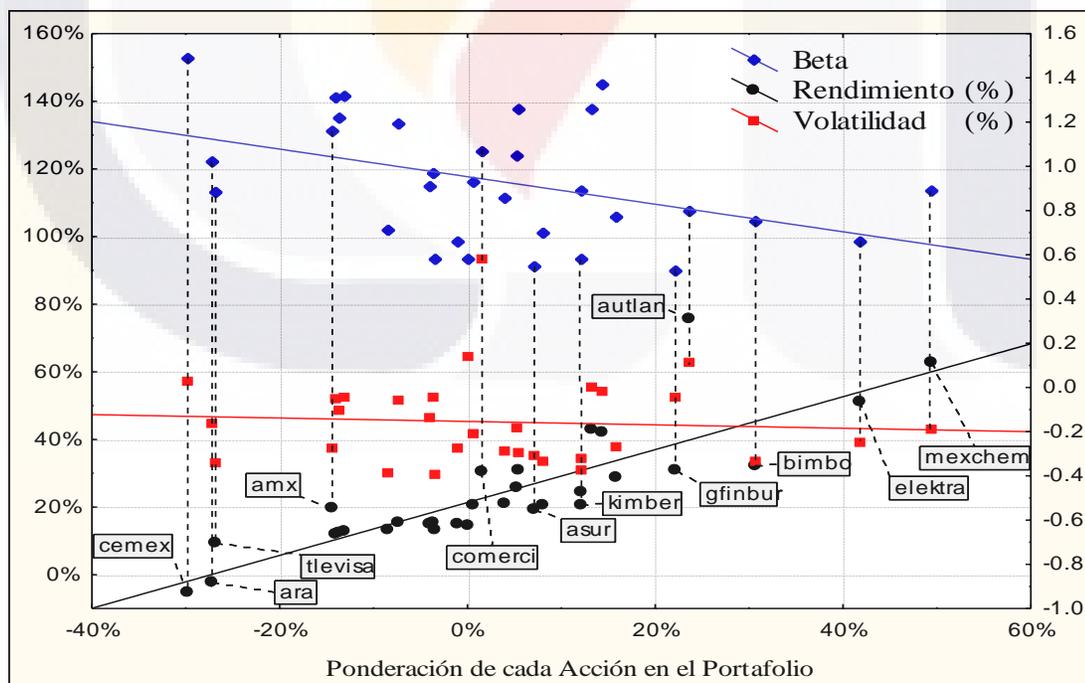


Figura 3.19.b. Portafolio del Mercado con venta en corto con correlación de índice simple.

Fuente: datos de la Tabla 3.12. Elaboración propia.

Portafolio de VMG con venta en corto con correlación de índice simple

En los resultados obtenidos para el portafolio de VMG de la Tabla 3.13, se puede apreciar que el portafolio de índice simple es superior al de correlación muestral por su menor volatilidad que se ve reflejado en una θ mayor. Por otro lado, el portafolio está más balanceado en sus ponderaciones y aunque la mayor parte de las emisoras seleccionadas son las mismas del portafolio correlación muestral, no es el caso de ARA y COMERCI, que se remarcan en la tabla, en donde la correlación de índice simple no las considera para inversión y las asigna a venta en corto por su alta β de poco más de uno. Lo contrario sucede con la emisora BIMBO, que pasa de un 2.2% con correlación muestral a una ponderación a 10.2%, pues su sensibilidad con el mercado, $\beta = 0.75$, es baja pues está por debajo del promedio de 0.93 y presenta un equilibrio rendimiento-volatilidad alto con $\theta = 0.80$, por arriba del promedio de 0.42.

Los resultados parecen indicar que, en general, todas las acciones con una β mayor a uno son consideradas para venta en corto, mientras que las menores a uno son seleccionadas para inversión, en función de su relación rendimiento-volatilidad. El portafolio de índice simple es un portafolio superior por su menor volatilidad y mayor razón de Sharpe (θ), además de tener una β menor que el portafolio de índice simple, lo que representa menor riesgo sistemático o de mercado. En la tabla se remarcan los valores de los parámetros del portafolio de índice simple que son superiores al de correlación muestral.

Tabla 3.13. Ponderaciones (π) del portafolio de VMG con venta en corto calculado con correlación muestral (var-cov) y de índice simple.

Acción	var-cov π	índice simple π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	β	θ
23 KIMBER	19.9%	16.6%	20.6%	31.1%	0.57	0.48
27 TELMEX	19.1%	16.0%	13.3%	30.0%	0.71	0.26
16 GFINBUR	15.3%	12.1%	30.8%	36.0%	0.53	0.70
29 TVAZTCA	13.9%	18.8%	13.3%	29.5%	0.59	0.26
19 GMODELO	11.9%	11.5%	20.6%	33.4%	0.70	0.45
4 ASUR	10.6%	12.5%	19.1%	35.1%	0.55	0.39
12 GAP	8.1%	9.0%	15.0%	37.3%	0.66	0.25
31 WALMEX	7.3%	6.0%	24.3%	34.2%	0.89	0.55
10 ELEKTRA	5.8%	8.0%	51.0%	39.0%	0.66	1.17
20 GRUMA	5.8%	3.1%	14.5%	64.4%	0.58	0.14
28 TLEVISA	5.6%	7.3%	9.3%	33.0%	0.88	0.11
24 MEXCHEM	5.1%	2.8%	62.9%	42.9%	0.89	1.34
26 SORIANA	4.9%	6.6%	28.6%	38.0%	0.77	0.61
3 ARA	4.1%	-0.2%	-2.2%	44.8%	1.02	-0.17
6 AXTEL	3.5%	1.8%	15.2%	46.6%	0.91	0.21
7 BIMBO	2.2%	10.2%	32.3%	33.5%	0.75	0.80
11 FEMSA	0.8%	5.4%	21.0%	36.5%	0.86	0.42
9 COMERCI	0.7%	-0.2%	30.5%	93.2%	1.07	0.27
5 AUTLAN	0.4%	1.7%	75.9%	62.9%	0.8	1.12
15 GFAMSA	-0.8%	0.7%	15.3%	52.3%	0.97	0.19
1 ALFA	-1.4%	2.1%	20.5%	41.7%	0.93	0.36
22 ICA	-1.7%	-4.4%	12.3%	48.7%	1.22	0.14
25 PE	-2.6%	-3.4%	43.0%	55.6%	1.26	0.67
17 GFNORTE	-3.5%	-4.2%	31.1%	52.6%	1.26	0.48
18 GMEXICO	-4.0%	-6.4%	42.0%	54.0%	1.37	0.67
13 GCARSO	-4.1%	-0.8%	25.7%	43.3%	1.05	0.47
30 URBI	-4.1%	-2.9%	15.5%	51.5%	1.19	0.19
14 GEO	-4.8%	-5.8%	12.0%	51.9%	1.31	0.12
21 HOMEX	-5.4%	-5.8%	12.7%	52.5%	1.32	0.14
2 AMX	-5.4%	-10.3%	19.6%	37.5%	1.16	0.38
8 CEMEX	-7.3%	-7.9%	-5.3%	57.1%	1.49	-0.19
Parámetros de los portafolios			Promedio		0.93	0.42
μ	23.3%	25.0%				
σ	19.6%	16.9%				
σ (var-cov)	19.6%	18.5%				
β	0.41	0.36				
θ	0.91	1.05				

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Modelo de estructura de correlación constante

Este modelo, como se explica en el marco teórico, sección 2.3 del capítulo II, se debe a Elton y Gruber (1973), y se basa en asumir que el coeficiente de correlación entre las acciones es constante. La metodología consiste en obtener la matriz de correlaciones y sacar un promedio de todas las correlaciones entre pares de acciones para luego utilizar la correlación promedio en el cálculo de la volatilidad del portafolio según la ecuación (2.26).

El valor del coeficiente de correlación promedio obtenido es $\bar{\rho} = 0.35$. En las Tablas 3.15.a, 3.15.b, 3.15.c, 3.15.d, 3.16.e y 3.15.f. se muestran los coeficientes de correlación entre las diferentes acciones remarcándose el valor más alto y el más bajo. De todas las correlaciones la más alta es 0.61 y se presenta entre AMX y TLEVISA, y la más baja y única negativa, entre GRUMA y KIMBER. En la Tabla 3.14.g se muestra el promedio de correlación de cada emisora y el promedio general y se remarcan las acciones con la correlación promedio mayor y menor que corresponden a AMX y GRUMA respectivamente.

Tabla 3.14.a. Coeficientes de correlación entre acciones.

Acción	ALFA	AMX	ARA	ASUR	AUTLAN	AXTEL	BIMBO	CEMEX	COMERCI	ELEKTRA
ALFA	1.00									
AMX	0.48	1.00								
ARA	0.52	0.52	1.00							
ASUR	0.31	0.34	0.22	1.00						
AUTLAN	0.20	0.26	0.25	0.17	1.00					
AXTEL	0.48	0.45	0.42	0.30	0.22	1.00				
BIMBO	0.44	0.45	0.39	0.26	0.19	0.29	1.00			
CEMEX	0.43	0.53	0.44	0.36	0.25	0.39	0.38	1.00		
COMERCI	0.36	0.23	0.43	0.11	0.07	0.23	0.25	0.35	1.00	
ELEKTRA	0.29	0.28	0.27	0.18	0.26	0.27	0.40	0.31	0.11	1.00

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Tabla 3.14.b. Coeficientes de correlación entre acciones.

Acción	ALFA	AMX	ARA	ASUR	AUTLAN	AXTEL	BIMBO	CEMEX	COMERCI	ELEKTRA
FEMSA	0.42	0.56	0.42	0.32	0.18	0.36	0.37	0.44	0.26	0.21
GAP	0.28	0.39	0.32	0.42	0.10	0.29	0.32	0.38	0.24	0.21
GCARSO	0.45	0.44	0.42	0.26	0.23	0.35	0.50	0.45	0.23	0.39
GEO	0.46	0.56	0.56	0.33	0.24	0.44	0.38	0.55	0.32	0.27
GFAMSA	0.41	0.37	0.41	0.20	0.21	0.42	0.38	0.46	0.36	0.28
GFNORTE	0.21	0.22	0.18	0.15	0.19	0.18	0.29	0.27	0.08	0.34
GFINBUR	0.45	0.50	0.50	0.33	0.25	0.43	0.38	0.53	0.44	0.26
GMEXICO	0.43	0.52	0.48	0.31	0.29	0.40	0.34	0.50	0.26	0.26
GMODELO	0.39	0.48	0.40	0.28	0.24	0.30	0.37	0.36	0.20	0.20
GRUMA	0.21	0.24	0.21	0.18	0.18	0.17	0.16	0.24	0.13	0.11

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Tabla 3.14.c. Coeficientes de correlación entre acciones.

Acción	ALFA	AMX	ARA	ASUR	AUTLAN	AXTEL	BIMBO	CEMEX	COMERCI	ELEKTRA
HOMEX	0.42	0.56	0.49	0.36	0.24	0.42	0.40	0.55	0.19	0.32
ICA	0.48	0.56	0.51	0.28	0.22	0.46	0.41	0.55	0.45	0.28
KIMBER	0.36	0.38	0.35	0.25	0.13	0.27	0.39	0.37	0.32	0.20
MEXCHEM	0.46	0.43	0.48	0.21	0.28	0.43	0.37	0.43	0.41	0.28
PE	0.38	0.43	0.41	0.23	0.24	0.34	0.40	0.40	0.14	0.28
SORIANA	0.38	0.37	0.38	0.24	0.24	0.28	0.43	0.36	0.23	0.34
TELMEX	0.35	0.55	0.33	0.32	0.21	0.31	0.35	0.45	0.08	0.28
TLEVISA	0.43	0.61	0.44	0.31	0.21	0.39	0.44	0.53	0.24	0.31
TVAZTCA	0.33	0.42	0.31	0.25	0.21	0.26	0.42	0.37	0.11	0.32
URBI	0.43	0.48	0.53	0.22	0.22	0.39	0.43	0.52	0.36	0.31
WALMEX	0.40	0.53	0.39	0.29	0.24	0.31	0.41	0.37	0.07	0.26

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Tabla 3.14.d. Coeficientes de correlación entre acciones.

Acción	FEMSA	GAP	GCARSO	GEO	GFAMSA	GFNORTE	GFINBUR	GMEXICO	GMODELO	GRUMA
FEMSA	1.00									
GAP	0.39	1.00								
GCARSO	0.38	0.30	1.00							
GEO	0.48	0.37	0.44	1.00						
GFAMSA	0.31	0.27	0.35	0.41	1.00					
GFNORTE	0.20	0.15	0.37	0.27	0.23	1.00				
GFINBUR	0.47	0.35	0.45	0.59	0.39	0.24	1.00			
GMEXICO	0.41	0.32	0.43	0.53	0.38	0.23	0.49	1.00		
GMODELO	0.48	0.28	0.36	0.46	0.30	0.16	0.39	0.43	1.00	
GRUMA	0.16	0.04	0.15	0.25	0.21	0.05	0.23	0.18	0.22	1.00

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Tabla 3.14.e. Coeficientes de correlación entre acciones.

Acción	FEMSA	GAP	GCARSO	GEO	GFAMSA	GFNORTE	GFINBUR	GMEXICO	GMODELO	GRUMA
HOMEX	0.44	0.37	0.46	0.59	0.39	0.27	0.50	0.51	0.40	0.17
ICA	0.49	0.35	0.43	0.61	0.41	0.27	0.57	0.53	0.40	0.24
KIMBER	0.41	0.32	0.37	0.39	0.30	0.20	0.39	0.33	0.34	-0.02
MEXCHEM	0.38	0.30	0.38	0.41	0.41	0.22	0.47	0.48	0.31	0.27
PE	0.37	0.29	0.47	0.43	0.30	0.25	0.39	0.47	0.32	0.08
SORIANA	0.33	0.26	0.40	0.37	0.32	0.29	0.38	0.34	0.31	0.08
TELMEX	0.42	0.32	0.36	0.40	0.28	0.19	0.33	0.39	0.32	0.12
TLEVISA	0.55	0.38	0.43	0.47	0.36	0.24	0.48	0.47	0.39	0.18
TVAZTCA	0.38	0.27	0.39	0.33	0.32	0.23	0.30	0.35	0.36	0.15
URBI	0.45	0.37	0.42	0.56	0.41	0.23	0.50	0.46	0.42	0.19
WALMEX	0.38	0.29	0.41	0.45	0.29	0.24	0.40	0.44	0.46	0.13

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Tabla 3.14.f. Coeficientes de correlación entre acciones.

Acción	HOMEX	ICA	KIMBER	MEXCHEM	PE	SORIANA	TELMEX	TLEVISA	TVAZTCA	URBI	WALMEX
HOMEX	1.00										
ICA	0.55	1.00									
KIMBER	0.39	0.37	1.00								
MEXCHEM	0.41	0.57	0.27	1.00							
PE	0.44	0.44	0.33	0.39	1.00						
SORIANA	0.34	0.39	0.28	0.36	0.41	1.00					
TELMEX	0.44	0.38	0.34	0.27	0.37	0.30	1.00				
TLEVISA	0.48	0.48	0.39	0.41	0.37	0.38	0.48	1.00			
TVAZTCA	0.37	0.30	0.30	0.31	0.34	0.32	0.40	0.42	1.00		
URBI	0.51	0.50	0.41	0.44	0.40	0.41	0.35	0.43	0.36	1.00	
WALMEX	0.43	0.40	0.29	0.33	0.38	0.40	0.39	0.49	0.41	0.40	1.00

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Tabla 3.14.g. Promedio de correlación de cada acción y promedio general.

Acción	ρ	Acción	ρ
1 ALFA	0.39	17 GFINBUR	0.41
2 AMX	0.44	18 GMEXICO	0.40
3 ARA	0.40	19 GMODELO	0.34
4 ASUR	0.27	20 GRUMA	0.16
5 AUTLAN	0.21	21 HOMEX	0.41
6 AXTEL	0.34	22 ICA	0.43
7 BIMBO	0.37	23 KIMBER	0.31
8 CEMEX	0.42	24 MEXCHEM	0.37
9 COMERCI	0.24	25 PE	0.35
10 ELEKTRA	0.27	26 SORIANA	0.33
11 FEMSA	0.38	27 TELMEX	0.34
12 GAP	0.30	28 TLEVISA	0.40
13 GCARSO	0.38	29 TVAZTCA	0.32
14 GEO	0.43	30 URBI	0.40
15 GFAMSA	0.34	31 WALMEX	0.36
16 GFNORTE	0.22	Promedio	0.35

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Portafolio del Mercado con venta en corto con correlación constante

Las ponderaciones del portafolio de Mercado, asumiendo un coeficiente de correlación promedio constante para todas las acciones, $\bar{\rho} = 0.35$, se muestran en la Tabla 3.15, comparadas con los resultados obtenidos con correlación muestral y con correlación de índice simple.

Se observa en la Tabla 3.15 que tanto el rendimiento como la volatilidad del portafolio con correlación constante son mayores que los obtenidos con correlación muestral y correlación de índice simple aunque θ es menor por lo que no es un portafolio superior. Para comparar este portafolio se grafican también sus resultados en la Figura 3.19.c, donde se aprecia que las ponderaciones, en general toman valores extremos, tanto en inversión como en venta en corto.

Aunque las acciones para invertir y para venta en corto son en su mayoría las mismas con respecto a los otros dos modelos, se observan algunas diferencias relevantes por lo que la correcta interpretación del portafolio con correlación constante es muy importante.

Se aprecian, por ejemplo, las acciones remarcadas en la Tabla 3.15 como ASUR, que es asignada a venta en corto por el portafolio de correlación constante por su baja relación rentabilidad-riesgo ($\theta = 0.39$) cuando muestra una correlación baja de 0.27, razón por la que el portafolio de correlación muestral la selecciona para invertir. El modelo de índice simple la toma también para inversión por su bajo coeficiente $\beta = 0.55$. Situaciones similares se presentan en TELMEX, que teniendo correlación media de 0.34 se asigna para venta en corto, también por su bajo rendimiento reflejado en una $\theta = 0.26$, o COMERCI por su alta volatilidad que se refleja en su $\theta = 0.27$, muy por abajo del promedio de 0.42. Lo anterior obedece a que al asumir correlación constante, el portafolio selecciona emisoras con la mayor razón de Sharpe (θ), es decir el mayor rendimiento con la menor volatilidad.

Tabla 3.15. Ponderaciones (π) del portafolio del Mercado con venta en corto calculado con correlación muestral (var-cov), de índice simple y correlación constante.

Acción	var-cov π	índice simple π	$\bar{\rho} = 0.35$ π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	β	ρ	θ
24 MEXCHEM	73.4%	49.4%	89.9%	62.9%	42.9%	0.89	0.37	1.34
10 ELEKTRA	46.2%	41.9%	80.9%	51.0%	39.0%	0.66	0.27	1.17
7 BIMBO	24.0%	30.6%	49.2%	32.3%	33.5%	0.75	0.37	0.80
5 AUTLAN	21.4%	23.6%	47.0%	75.9%	62.9%	0.80	0.21	1.12
23 KIMBER	21.1%	12.1%	11.6%	20.6%	31.1%	0.58	0.31	0.48
2 AMX	17.7%	-14.4%	-2.1%	19.6%	37.5%	1.16	0.44	0.38
18 GMEXICO	16.8%	14.3%	21.2%	42.0%	54.0%	1.37	0.40	0.67
11 FEMSA	16.7%	3.9%	3.4%	21.0%	36.5%	0.86	0.38	0.42
31 WALMEX	14.8%	12.2%	18.3%	24.3%	34.2%	0.89	0.36	0.55
17 GFNORTE	14.7%	5.4%	7.0%	30.8%	36.0%	1.26	0.22	0.48
25 PE	11.6%	13.3%	20.5%	43.0%	55.6%	1.26	0.35	0.67
4 ASUR	10.3%	7.1%	-0.9%	19.1%	35.1%	0.55	0.27	0.39
19 GMODELO	8.9%	8.0%	6.9%	20.6%	33.4%	0.70	0.34	0.45
16 GFINBUR	8.6%	22.2%	34.7%	31.1%	52.6%	0.53	0.41	0.48
9 COMERCI	7.8%	1.5%	-5.5%	30.5%	93.2%	1.07	0.24	0.27
26 SORIANA	2.1%	15.8%	22.9%	28.6%	38.0%	0.77	0.33	0.61
27 TELMEX	1.8%	-8.5%	-18.4%	13.3%	30.0%	0.71	0.34	0.26
14 GEO	1.4%	-14.0%	-21.2%	12.0%	51.9%	1.31	0.43	0.12
20 GRUMA	-2.0%	0.006%	-16.2%	14.5%	64.4%	0.58	0.16	0.14
12 GAP	-2.6%	-1.1%	-15.6%	15.0%	37.3%	0.66	0.30	0.25
1 ALFA	-3.9%	0.6%	-3.6%	20.5%	41.7%	0.93	0.39	0.36
13 GCARSO	-7.9%	5.3%	6.7%	25.7%	43.3%	1.05	0.38	0.47
30 URBI	-8.2%	-7.4%	-15.9%	15.5%	51.5%	1.19	0.40	0.19
21 HOMEX	-8.3%	-13.0%	-20.0%	12.7%	52.5%	1.32	0.41	0.14
6 AXTEL	-8.4%	-4.0%	-16.4%	15.2%	46.6%	0.91	0.34	0.21
15 GFAMSA	-8.5%	-3.6%	-16.2%	15.3%	52.3%	0.97	0.34	0.19
29 TVAZTCA	-23.6%	-3.5%	-18.4%	13.3%	29.5%	0.58	0.32	0.26
28 TLEVISA	-30.1%	-26.8%	-34.7%	9.3%	33.0%	0.88	0.41	0.11
8 CEMEX	-30.9%	-29.7%	-41.8%	-5.3%	57.1%	1.49	0.42	-0.19
22 ICA	-35.0%	-13.7%	-21.5%	12.3%	48.7%	1.22	0.43	0.14
3 ARA	-49.8%	-27.2%	-51.7%	-2.2%	44.8%	1.02	0.40	-0.17
Parámetros de los portafolios				Promedio		0.93	0.35	0.42
μ	119.1%	103.9%	169.5%					
σ	44.5%	37.3%	66.2%					
σ (var-cov)	44.5%	42.4%	73.4%					
β	0.46	0.30	0.14					
θ	2.55	2.32	2.23					

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

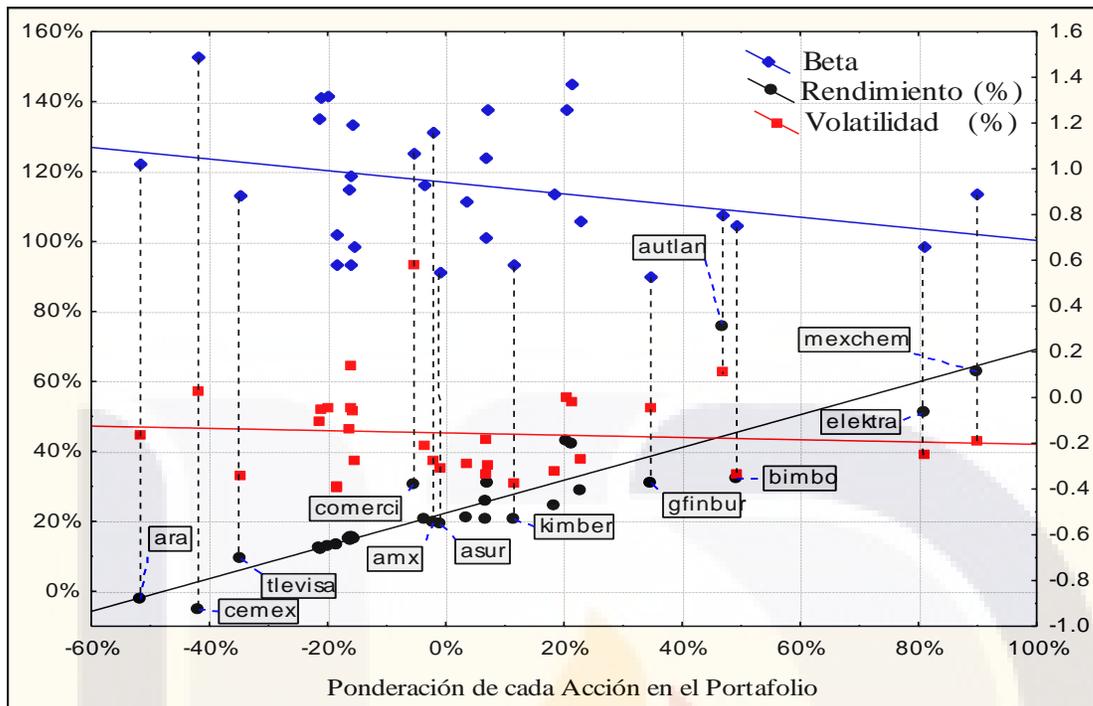


Figura 3.19.c. Portafolio del Mercado con venta en corto con correlación constante.

Fuente: datos de la Tabla 3.15. Elaboración propia.

En general, el portafolio de correlación constante muestra una mayor dispersión y desbalanceo de las ponderaciones como puede apreciarse en la Figura 3.19.c, con posiciones extremas poco factibles, por lo que no aporta ninguna mejora en relación a los portafolios obtenidos con las otras estructuras de correlación pues como se puede apreciar en la Tabla 3.15, la razón de Sharpe (θ) del portafolio es menor a la de los otros portafolios. El único parámetro en el que el portafolio de correlación constante supera a los otros dos es en la β ya que su valor de 0.14, remarcado en la tabla, lo hace el de menor riesgo sistemático.

Portafolio de VMG con venta en corto con correlación constante

En la Tabla 3.16 se muestran los resultados del portafolio de VMG calculado con la misma correlación constante, $\rho = 0.35$, comparado con el calculado con la correlación muestral y con el portafolio determinado con la correlación de índice simple.

Tabla 3.16. Ponderaciones (π) del portafolio de VMG con venta en corto calculado con correlación muestral (var-cov), de índice simple y correlación constante.

Acción	var-cov π	índice simple π	$\bar{\rho} = 0.35$ π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	β	ρ	θ
23 KIMBER	19.9%	16.6%	15.7%	20.6%	31.1%	0.57	0.31	0.48
27 TELMEX	19.1%	16.0%	18.4%	13.3%	30.0%	0.71	0.34	0.26
16 GFINBUR	15.3%	12.1%	7.5%	30.8%	36.0%	0.53	0.41	0.70
29 TVAZTCA	13.9%	18.8%	19.5%	13.3%	29.5%	0.59	0.32	0.26
19 GMODELO	11.9%	11.5%	11.4%	20.6%	33.4%	0.7	0.34	0.45
4 ASUR	10.6%	12.5%	8.8%	19.1%	35.1%	0.55	0.27	0.39
12 GAP	8.1%	9.0%	5.9%	15.0%	37.3%	0.66	0.30	0.25
31 WALMEX	7.3%	6.0%	10.1%	24.3%	34.2%	0.89	0.36	0.55
10 ELEKTRA	5.8%	8.0%	4.3%	51.0%	39.0%	0.66	0.27	1.17
20 GRUMA	5.8%	3.1%	-5.3%	14.5%	64.4%	0.58	0.16	0.14
28 TLEVISA	5.6%	7.3%	12.0%	9.3%	33.0%	0.88	0.41	0.11
24 MEXCHEM	5.1%	2.8%	1.2%	62.9%	42.9%	0.89	0.37	1.34
26 SORIANA	4.9%	6.6%	5.2%	28.6%	38.0%	0.77	0.33	0.61
3 ARA	4.1%	-0.2%	0.0%	-2.2%	44.8%	1.02	0.40	-0.17
6 AXTEL	3.5%	1.8%	-0.9%	15.2%	46.6%	0.91	0.34	0.21
7 BIMBO	2.2%	10.2%	11.2%	32.3%	33.5%	0.75	0.37	0.80
11 FEMSA	0.8%	5.4%	7.0%	21.0%	36.5%	0.86	0.38	0.42
9 COMERCI	0.7%	-0.2%	-6.2%	30.5%	93.2%	1.07	0.24	0.27
5 AUTLAN	0.4%	1.7%	-5.1%	75.9%	62.9%	0.80	0.21	1.12
15 GFAMSA	-0.8%	0.7%	-3.1%	15.3%	52.3%	0.97	0.34	0.19
1 ALFA	-1.4%	2.1%	1.6%	20.5%	41.7%	0.93	0.39	0.36
22 ICA	-1.7%	-4.4%	-1.9%	12.3%	48.7%	1.22	0.43	0.14
25 PE	-2.6%	-3.4%	-3.9%	43.0%	55.6%	1.26	0.35	0.67
17 GFNORTE	-3.5%	-4.2%	-3.2%	31.1%	52.6%	1.26	0.22	0.48
18 GMEXICO	-4.0%	-6.4%	-3.5%	42.0%	54.0%	1.37	0.40	0.67
13 GCARSO	-4.1%	-0.8%	0.9%	25.7%	43.3%	1.05	0.38	0.47
30 URBI	-4.1%	-2.9%	-2.8%	15.5%	51.5%	1.19	0.40	0.19
14 GEO	-4.8%	-5.8%	-3.0%	12.0%	51.9%	1.31	0.43	0.12
21 HOMEX	-5.4%	-5.8%	-3.1%	12.7%	52.5%	1.32	0.41	0.14
2 AMX	-5.4%	-10.3%	5.8%	19.6%	37.5%	1.16	0.44	0.38
8 CEMEX	-7.3%	-7.9%	-4.2%	-5.3%	57.1%	1.49	0.42	-0.19
Parámetros de los portafolios				Promedio		0.93	0.35	0.42
$\hat{\mu}$	23.3%	25.0%	17.7%					
$\hat{\sigma}$	19.6%	16.9%	18.0%					
$\hat{\sigma}$ (var-cov)	19.6%	18.5%	21.7%					
β	0.41	0.36	0.54					
θ	0.91	1.05	0.56					

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Los resultados de la Tabla 3.17 muestran una mayor volatilidad del portafolio con correlación constante en relación a los otros dos portafolios. Las participaciones de algunas acciones como GRUMA y AUTLAN, remarcadas en la tabla, se ven modificadas de inversión a venta en corto. Ambas son acciones con un promedio de correlación muy bajo, 0.16 y 0.21 respectivamente, razón por la que son atractivas para la correlación muestral, y con β por debajo de la media, 0.58 y 0.80 por lo que las selecciona también el portafolio de índice simple. Contrariamente, el portafolio con correlación constante, las asigna a venta en corto por su alta volatilidad de 64.4% y 62.9% respectivamente.

En el caso de GCARSO y AMX, el modelo de correlación constante las incluye en inversión pues presentan volatilidades bajas, mientras que sin una aparente explicación, el cálculo con correlación muestral las asigna para venta en corto, situación que también se presenta en correlación de índice simple, pero en este caso se explica por la β superior a uno de ambas emisoras. Cabe señalar que dado que el portafolio de VMG se optimiza sin considerar el rendimiento, la razón de Sharpe (θ) no aporta información para explicar la composición del portafolio.

En relación a los parámetros del portafolio de correlación constante, los resultados arrojan un portafolio inferior por su mayor volatilidad y menor θ y más riesgoso en términos de su aumento de β respecto a los otros portafolios.

Portafolios con venta en corto con diferentes coeficientes de correlación

Una aplicación del análisis de los portafolios con la estructura de correlación constante consiste en hacer escenarios con diferentes valores del coeficiente de correlación para ver cómo evolucionan las ponderaciones de las acciones y apreciar la sensibilidad que el portafolio tiene respecto a cambios en el coeficiente de correlación.

Concretamente, esta metodología se puede utilizar para pronosticar cambios en los portafolios cuando se puede predecir un cambio o alineación de las correlaciones, situación muy frecuente en caso de contracción o expansión económica o en crisis o auge financiero,

en los que es común el contagio entre los mercados, hoy inclusive a nivel global, situación en la que la correlación entre los mercados y entre los activos financieros que se operan en esos mercados tiende a incrementarse (Moldovan, 2011 y Sandoval y De Paula, 2011).

Para llevar a cabo esta metodología de análisis, se calculan cinco portafolios, dos con coeficientes de correlación mayores al promedio, $\rho = 0.5$ y $\rho = 0.7$, dos menores al promedio, $\rho = 0.1$ y $\rho = 0$ y el portafolio con la correlación promedio $\rho = 0.35$. El análisis se lleva a cabo para el portafolio del Mercado y para el portafolio de VMG, considerando los portafolios con venta en corto y sin ella.

Portafolio del Mercado con venta en corto con diferentes coeficientes de correlación

Los resultados del análisis de la sensibilidad del portafolio del Mercado cuando cambia el coeficiente de correlación se muestran en la Tabla 3.17. En las Figuras 3.20.a, 3.20.b y 3.20.c se puede apreciar gráficamente la evolución de las participaciones de las acciones cuando aumenta la correlación.

Se puede observar que el efecto del aumento de la correlación es el de seleccionar los portafolios de mayor rendimiento con menor volatilidad. Por ejemplo, incrementan su ponderación de manera importante acciones como MEXCHEM, ELEKTRA, AUTLAN, BIMBO y GFINBUR, y se reduce la participación en aquellas con baja rentabilidad como es el caso de ARA, CEMEX y TLEVISA, o muy alta volatilidad, como en el caso de COMERCI. En la Tabla 3.17 se remarcan las acciones asignadas a inversión o venta en corto cuya ponderación es más sensible al incremento del coeficiente de correlación.

Tabla 3.17. Ponderaciones (π) del portafolio del Mercado con venta en corto calculado con cinco diferentes coeficientes de correlación.

Acción	$\rho = 0$ π	$\rho = 0.1$ π	$\bar{\rho} = 0.35$ π	$\rho = 0.5$ π	$\rho = 0.7$ π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	θ
1 ALFA	2.7%	1.1%	-3.6%	-6.9%	-11.9%	20.5%	41.7%	0.36
2 AMX	3.2%	1.8%	-2.1%	-4.8%	-8.9%	19.6%	37.5%	0.38
3 ARA	-1.2%	-14.5%	-51.7%	-78.0%	-117.7%	-2.2%	44.8%	-0.17
4 ASUR	3.5%	2.4%	-0.9%	-3.1%	-6.5%	19.1%	35.1%	0.39
5 AUTLAN	5.6%	16.5%	47.0%	68.5%	100.9%	75.9%	62.9%	1.12
6 AXTEL	1.4%	-3.3%	-16.4%	-25.7%	-39.6%	15.2%	46.6%	0.21
7 BIMBO	7.6%	18.6%	49.2%	71.0%	103.7%	32.3%	33.5%	0.80
8 CEMEX	-1.1%	-11.8%	-41.8%	-63.1%	-95.1%	-5.3%	57.1%	-0.19
9 COMERCI	0.9%	-0.8%	-5.5%	-8.9%	-14.0%	30.5%	93.2%	0.27
10 ELEKTRA	9.5%	28.3%	80.9%	118.1%	174.1%	51.0%	39.0%	1.17
11 FEMSA	3.7%	3.6%	3.4%	3.2%	3.0%	21.0%	36.5%	0.42
12 GAP	2.2%	-2.5%	-15.6%	-24.8%	-38.7%	15.0%	37.3%	0.25
13 GCARSO	3.4%	4.3%	6.7%	8.4%	10.9%	25.7%	43.3%	0.47
14 GEO	0.8%	-5.0%	-21.2%	-32.8%	-50.1%	12.0%	51.9%	0.12
15 GFAMSA	1.1%	-3.4%	-16.2%	-25.3%	-38.9%	15.3%	52.3%	0.19
16 GFINBUR	6.2%	13.7%	34.7%	49.6%	72.1%	30.8%	36.0%	0.70
17 GFNORTE	2.9%	4.0%	7.0%	9.1%	12.3%	31.1%	52.6%	0.48
18 GMEXICO	4.0%	8.5%	21.2%	30.2%	43.7%	42.0%	54.0%	0.67
19 GMODELO	4.3%	5.0%	6.9%	8.3%	10.4%	20.6%	33.4%	0.45
20 GRUMA	0.7%	-3.8%	-16.2%	-25.1%	-38.4%	14.5%	64.4%	0.14
21 HOMEX	0.8%	-4.7%	-20.0%	-30.9%	-47.3%	12.7%	52.5%	0.14
22 ICA	0.9%	-5.0%	-21.5%	-33.2%	-50.8%	12.3%	48.7%	0.14
23 KIMBER	4.9%	6.7%	11.6%	15.1%	20.3%	20.6%	31.1%	0.48
24 MEXCHEM	9.9%	31.0%	89.9%	131.5%	194.3%	62.9%	42.9%	1.34
25 PE	3.8%	8.2%	20.5%	29.1%	42.2%	43.0%	55.6%	0.67
26 SORIANA	5.1%	9.8%	22.9%	32.1%	46.1%	28.6%	38.0%	0.61
27 TELMEX	2.8%	-2.8%	-18.4%	-29.4%	-46.0%	13.3%	30.0%	0.26
28 TLEVISA	1.1%	-8.3%	-34.7%	-53.2%	-81.3%	9.3%	33.0%	0.11
29 TVAZTCA	2.8%	-2.8%	-18.4%	-29.4%	-46.0%	13.3%	29.5%	0.26
30 URBI	1.2%	-3.3%	-15.9%	-24.9%	-38.3%	15.5%	51.5%	0.19
31 WALMEX	5.1%	8.6%	18.3%	25.2%	35.5%	24.3%	34.2%	0.55

Parámetros de los portafolios

$\hat{\mu}$	34.6%	70.3%	169.5%	240.8%	347.5%
$\hat{\sigma}$	9.6%	27.7%	66.2%	84.6%	96.4%
$\hat{\sigma}$ (var-cov)	24.5%	29.9%	73.4%	108.9%	163.4%
β	0.94	0.92	0.86	0.81	0.75
θ	1.19	2.17	2.23	2.16	2.09

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

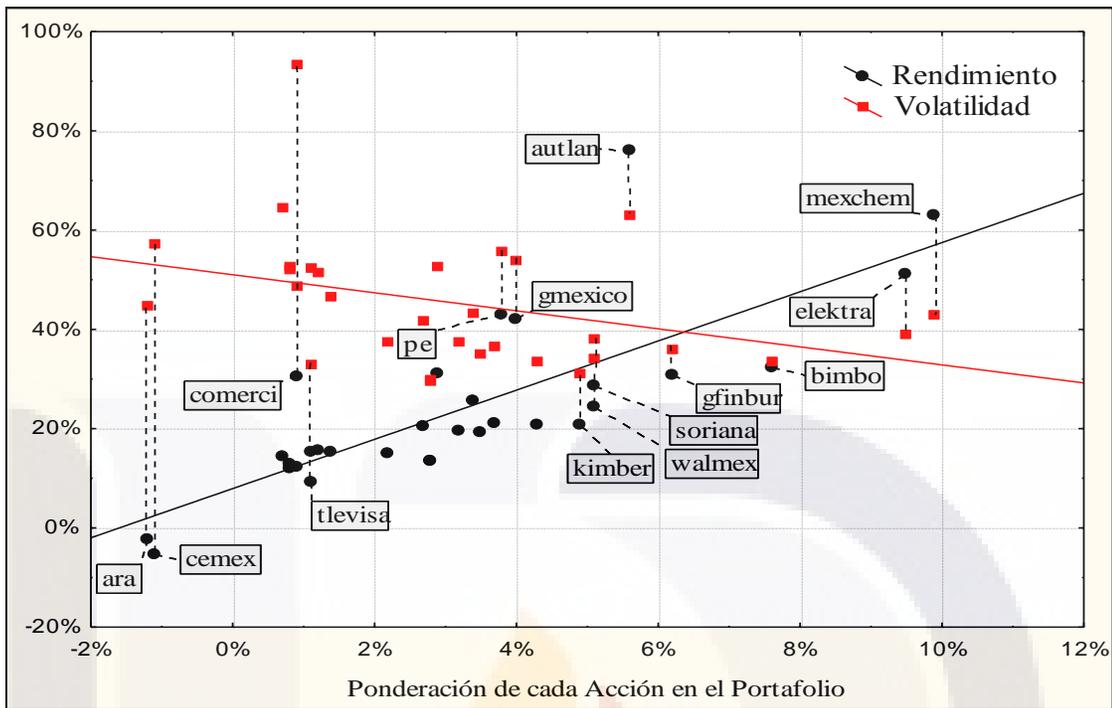


Figura 3.20.a. Portafolio del Mercado con venta en corto con correlación $\rho = 0$.

Fuente: datos de la Tabla 3.17. Elaboración propia.

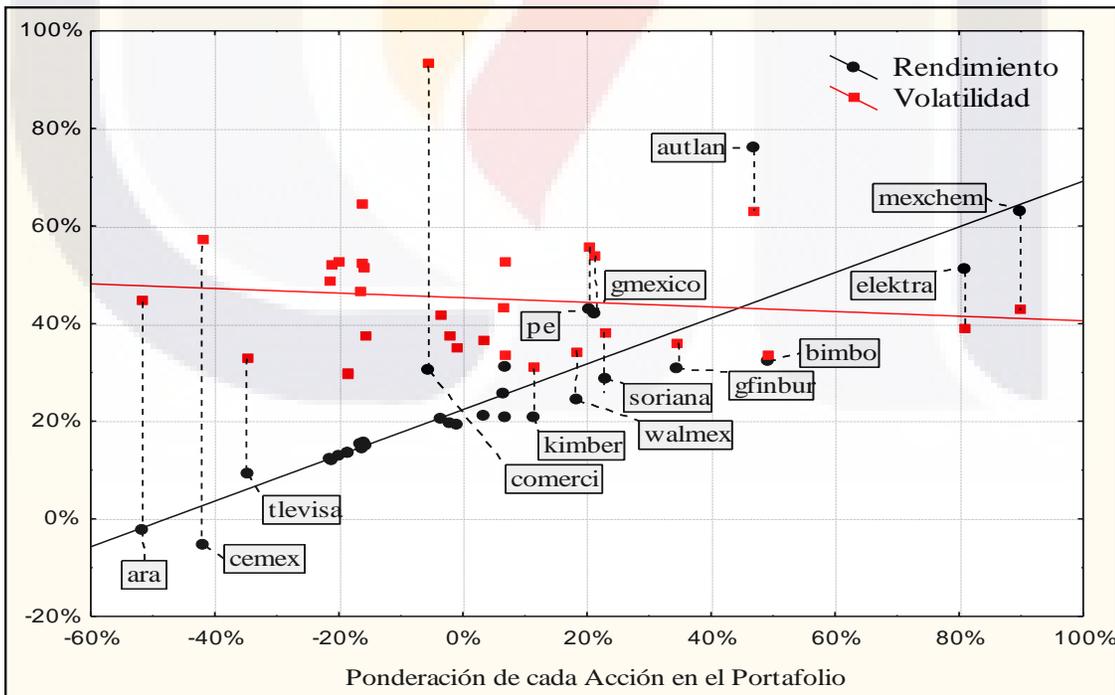


Figura 3.20.b. Portafolio del Mercado con venta en corto con correlación $\rho = 0.35$.

Fuente: datos de la Tabla 3.17. Elaboración propia.

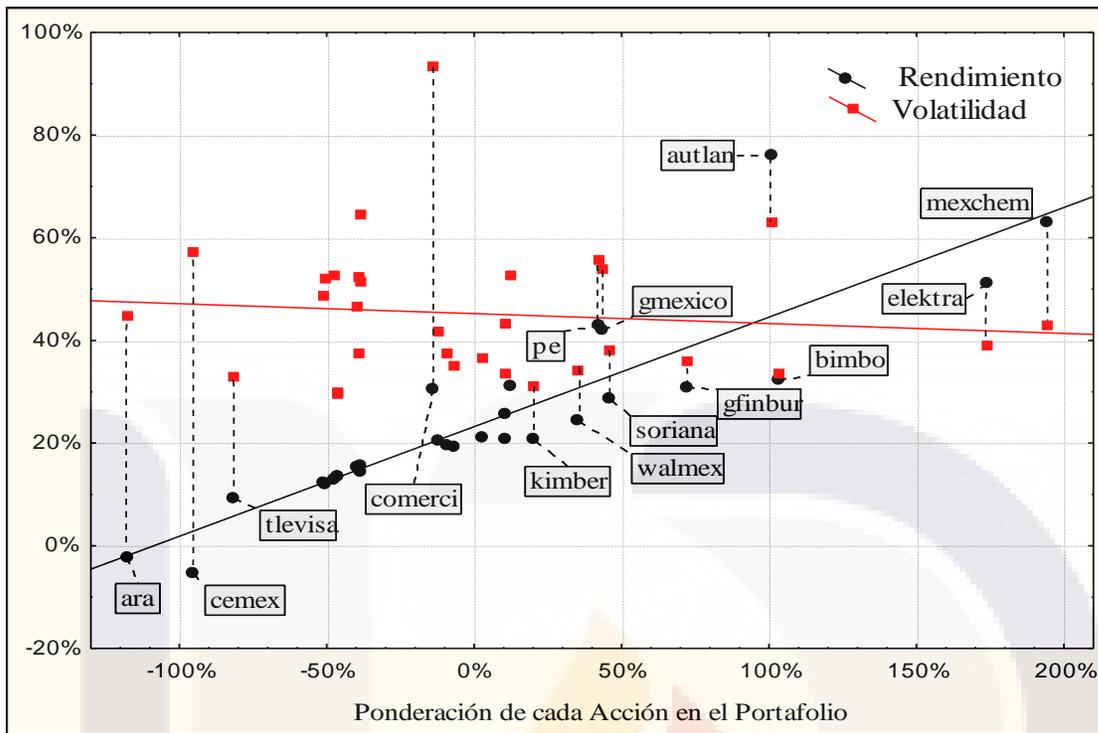


Figura 3.20.c. Portafolio del Mercado con venta en corto con correlación $\rho = 0.7$.

Fuente: datos de la Tabla 3.17. Elaboración propia.

De manera general, las participaciones aumentan proporcionalmente al aumento del coeficiente, sin embargo, es interesante observar en las emisoras marcadas con recuadro en las Figuras 3.21.a, 3.21.b y 3.21.c, cómo el aumento de la correlación entre las acciones hace que el modelo prefiera acciones de mayor rentabilidad con riesgo proporcional, es decir aquellas con valores altos de la razón de Sharpe (θ), como es el caso del mayor crecimiento de la ponderación de PE y GMEXICO, comparado con KIMBER, SORIANA y WALMEX. Una situación similar sucede con AUTLAN, cuya ponderación supera a GFINBUR cuando aumenta la correlación. En cuanto a las acciones con venta en corto, sucede algo similar pues aquellas emisoras con valores de θ muy bajos tienden a tener las ponderaciones mas negativas como ARA y CEMEX, con θ negativa y TLEVISA cuya θ es de 0.11.

Los resultados de los parámetros de los portafolios son interesantes ya que según aumenta la correlación, la razón de Sharpe (θ) aumenta y parece que alcanza el máximo en la

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

correlación promedio $\bar{\rho} = 0.35$, mientras que los portafolios con correlación mayor a la promedio disminuyen su θ . Respecto a la β de los portafolios, la situación es también interesante pues en este caso, según aumenta la correlación, la β disminuye rápidamente obteniéndose portafolios con menor riesgo sistemático o de mercado.

Portafolio de VMG con venta en corto con diferentes coeficientes de correlación

Los resultados de las ponderaciones de los portafolios de VMG con venta en corto se muestran en la Tabla 3.18. Como puede apreciarse, el portafolio hipotético, con $\rho = 0$, selecciona a todas las acciones para invertir, incluso las de rendimiento negativo, ya que como se trata del de varianza mínima, no toma en consideración el rendimiento, lo cual es congruente con el fundamento teórico de este portafolio.

Del análisis de los datos de la tabla se aprecia en las acciones remarcadas, que si la correlación aumenta, las ponderaciones aumentan solo en aquellas acciones con volatilidades muy bajas, entre 29.5% y 39.0%, alcanzando la máxima ponderación la acción TVAZTCA, que es la acción de menor volatilidad de toda la muestra. El resto de las acciones, con volatilidades superiores a 39.0%, tienden a disminuir su ponderación hasta su venta en corto y en el caso de COMERCI, que tiene la mayor volatilidad, alcanza la ponderación de mayor venta en corto. La interpretación de la razón de Sharpe de cada acción no aporta información adicional pues el portafolio de VMG se estima solamente a partir de las volatilidades y correlaciones de las acciones.

Los resultados de los parámetros de los portafolios de VMG con venta en corto muestran que al aumentar la correlación, los portafolios se vuelven inferiores en términos de la θ de Sharpe que disminuye su valor proporcionalmente. Respecto al riesgo de mercado, en este caso la situación es diferente al portafolio del Mercado pues al aumentar la correlación, la β también aumenta alcanzando el valor de 1.17 en el escenario de correlación $\rho = 0.7$, lo que indica que es un portafolio con alto riesgo sistemático.

Tabla 3.18. Ponderaciones (π) del portafolio de VMG con venta en corto calculado con cinco diferentes coeficientes de correlación.

Acción	$\rho = 0$ π	$\rho = 0.1$ π	$\bar{\rho} = 0.35$ π	$\rho = 0.5$ π	$\rho = 0.7$ π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	θ
1 ALFA	3.1%	2.9%	1.6%	1.5%	1.1%	20.5%	41.7%	0.36
2 AMX	3.9%	4.6%	5.8%	6.4%	7.1%	19.6%	37.5%	0.38
3 ARA	2.7%	1.8%	0.0%	-0.9%	-1.9%	-2.2%	44.8%	-0.17
4 ASUR	4.4%	6.0%	8.8%	10.2%	11.7%	19.1%	35.1%	0.39
5 AUTLAN	1.4%	-0.9%	-5.1%	-7.2%	-9.5%	75.9%	62.9%	1.12
6 AXTEL	2.5%	1.3%	-0.9%	-2.1%	-3.3%	15.2%	46.6%	0.21
7 BIMBO	4.8%	7.1%	11.2%	13.2%	15.5%	32.3%	33.5%	0.80
8 CEMEX	1.7%	-0.4%	-4.2%	-6.1%	-8.2%	-5.3%	57.1%	-0.19
9 COMERCI	0.6%	-2.0%	-6.2%	-8.4%	-10.8%	30.5%	93.2%	0.27
10 ELEKTRA	3.6%	3.8%	4.3%	4.5%	4.7%	51.0%	39.0%	1.17
11 FEMSA	4.1%	5.1%	7.0%	7.9%	8.9%	21.0%	36.5%	0.42
12 GAP	3.9%	4.6%	5.9%	6.6%	7.3%	15.0%	37.3%	0.25
13 GCARSO	2.9%	2.2%	0.9%	0.2%	-0.5%	25.7%	43.3%	0.47
14 GEO	2.0%	0.3%	-3.0%	-4.6%	-6.3%	12.0%	51.9%	0.12
15 GFAMSA	2.0%	0.2%	-3.1%	-4.7%	-6.5%	15.3%	52.3%	0.19
16 GFINBUR	4.2%	5.4%	7.5%	8.6%	9.7%	30.8%	36.0%	0.70
17 GFNORTE	2.0%	0.2%	-3.2%	-4.8%	-6.6%	31.1%	52.6%	0.48
18 GMEXICO	1.9%	0.0%	-3.5%	-5.2%	-7.2%	42.0%	54.0%	0.67
19 GMODELO	4.9%	7.2%	11.4%	13.5%	15.8%	20.6%	33.4%	0.45
20 GRUMA	1.3%	-1.1%	-5.3%	-7.4%	-9.7%	14.5%	64.4%	0.14
21 HOMEX	2.0%	0.2%	-3.1%	-4.8%	-6.6%	12.7%	52.5%	0.14
22 ICA	2.3%	0.8%	-1.9%	-3.2%	-4.7%	12.3%	48.7%	0.14
23 KIMBER	5.6%	9.0%	15.7%	18.9%	22.4%	20.6%	31.1%	0.48
24 MEXCHEM	3.0%	2.4%	1.2%	0.6%	-0.1%	62.9%	42.9%	1.34
25 PE	1.8%	-0.2%	-3.9%	-5.7%	-7.7%	43.0%	55.6%	0.67
26 SORIANA	3.8%	4.3%	5.2%	5.6%	6.1%	28.6%	38.0%	0.61
27 TELMEX	6.0%	10.2%	18.4%	22.3%	26.7%	13.3%	30.0%	0.26
28 TLEVISA	5.0%	7.4%	12.0%	14.2%	16.7%	9.3%	33.0%	0.11
29 TVAZTCA	6.2%	10.8%	19.5%	23.7%	28.3%	13.3%	29.5%	0.26
30 URBI	2.0%	0.4%	-2.8%	-4.4%	-6.1%	15.5%	51.5%	0.19
31 WALMEX	4.6%	6.5%	10.1%	11.8%	13.7%	24.3%	34.2%	0.55

Parámetros de los portafolios

$\hat{\mu}$	22.6%	20.9%	17.7%	16.1%	14.4%
$\hat{\sigma}$	7.4%	13.5%	18.0%	17.9%	15.5%
$\hat{\sigma}$ (var-cov)	24.3%	21.7%	21.7%	24.2%	28.2%
β	0.94	1.00	1.09	1.13	1.17
θ	0.70	0.71	0.56	0.44	0.31

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

3.3.7. Portafolios sin venta en corto y el Índice de Precios y Cotizaciones

Los portafolios son calculados permitiendo solamente participaciones positivas de las acciones, es decir que no se permite la venta en corto. Como en el caso en que se permite la venta en corto, se analizan los portafolios del Mercado y de VMG, y se calculan además tres portafolios sobre la Frontera Eficiente, entre el de VMG y el de Mercado, con el objetivo de compararlos con el portafolio del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC). Los portafolios obtenidos se muestran en la Tabla 3.19 y se grafican en la Figura 3.21, en donde también se muestra el IPC como un portafolio factible pero no eficiente, al estar dentro de la curva de la Frontera Eficiente, pero no sobre ella. Se grafica también como referencia (curva punteada), la Frontera Eficiente de portafolios con venta en corto.

La metodología consiste en estimar los portafolios óptimos utilizando el modelo BSM pero limitando los valores de las ponderaciones a valores positivos o iguales a cero. El óptimo se obtiene a través de la maximización, mediante la función *Solver* de Excel®, de la razón de Sharpe (θ) de la ecuación (1.1.a), que se plantea en la sección 1.3 del capítulo I como un criterio para obtener portafolios óptimos en la Frontera Eficiente de portafolios sin venta en corto (Benninga, 2008). La solución explícita del portafolio óptimo del modelo BSM de la ecuación (2.19) no se puede utilizar pues se plantea permitiendo venta en corto (sección 2.2.2 del capítulo II).

Los portafolios 1, 2 y 3 de la Tabla 3.19 se comparan con el portafolio del IPC y como se puede observar, el portafolio de VMG, con un rendimiento ligeramente más bajo que el IPC, menos de 1%, presenta una volatilidad sensiblemente menor, de 19.8% contra 28.6% del IPC, lo cual se refleja en una mejor θ (0.78 contra 0.58). En relación al riesgo sistemático, la β del portafolio de VMG es superior a la del IPC (1.01 contra 0.95). Es importante señalar que solo el portafolio del Mercado representado por todos los activos con riesgo, ponderados según su valor de capitalización y en equilibrio, lo cual es un concepto teórico, tendría una β ponderada igual a uno (Fama, 1970). En la práctica se

utilizan los portafolios de los índices de acciones como lo más cercano al portafolio de mercado (Bodie *et al.*, 2011).

Tabla 3.19. Ponderaciones (π) del portafolio del IPC, y de los portafolios sin venta en corto de VMG, tres portafolios Eficientes y el del Mercado.

Acción	π_{IPC}	π_{VMG}	π_1	π_2	π_3	π_{PdelM}	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
1 ALFA	2.9%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	20.5%	41.7%
2 AMX	26.9%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	19.6%	37.5%
3 ARA	0.4%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	-2.2%	44.8%
4 ASUR	1.0%	9.9%	9.9%	10.4%	8.3%	0.0%	19.1%	35.1%
5 AUTLAN	0.1%	0.0%	0.2%	6.1%	10.4%	19.3%	75.9%	62.9%
6 AXTEL	0.5%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	15.2%	46.6%
7 BIMBO	2.6%	0.0%	0.4%	4.4%	5.6%	0.6%	32.3%	33.5%
8 CEMEX	6.6%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	-5.3%	57.1%
9 COMERCI	0.3%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	30.5%	93.2%
10 ELEKTRA	2.9%	5.2%	6.4%	15.7%	21.7%	32.8%	51.0%	39.0%
11 FEMSA	5.4%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	21.0%	36.5%
12 GAP	1.1%	5.5%	5.0%	0.1%	0.0%	0.0%	15.0%	37.3%
13 GCARSO	1.8%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	25.7%	43.3%
14 GEO	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	12.0%	51.9%
15 GFAMSA	0.2%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	15.3%	52.3%
16 GFINBUR	2.6%	14.8%	14.8%	14.2%	13.0%	6.9%	30.8%	36.0%
17 GFNORTE	4.2%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	31.1%	52.6%
18 GMEXICO	6.9%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	42.0%	54.0%
19 GMODELO	2.3%	8.2%	8.2%	6.6%	3.6%	0.0%	20.6%	33.4%
20 GRUMA*	0.3%	4.7%	4.4%	0.7%	0.0%	0.0%	14.5%	64.4%
21 HOMEX	0.8%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	12.7%	52.5%
22 ICA	1.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	12.3%	48.7%
23 KIMBER	2.3%	17.2%	17.1%	15.1%	12.6%	0.0%	20.6%	31.1%
24 MEXCHEM	1.4%	0.0%	0.9%	14.4%	23.0%	40.4%	62.9%	42.9%
25 PE	1.8%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	43.0%	55.6%
26 SORIANA	0.5%	2.5%	2.4%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%	38.0%
27 TELMEX	2.5%	14.0%	13.2%	5.5%	0.0%	0.0%	13.3%	30.0%
28 TLEVISA	6.5%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	9.3%	33.0%
29 TVAZTCA	0.4%	15.2%	14.2%	3.7%	0.0%	0.0%	13.3%	29.5%
30 URBI	0.7%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	15.5%	51.5%
31 WALMEX	11.9%	2.8%	2.9%	3.0%	1.7%	0.0%	24.3%	34.2%
Parámetros de los portafolios								
$\hat{\mu}$	22.2%	21.1%	22.2%	36.0%	44.6%	59.1%		
$\hat{\sigma}$	28.6%	19.8%	19.8%	21.8%	24.5%	31.5%		
β	0.95	1.01	1.00	0.92	0.88	0.89		
θ	0.58	0.78	0.84	1.40	1.59	1.7		

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

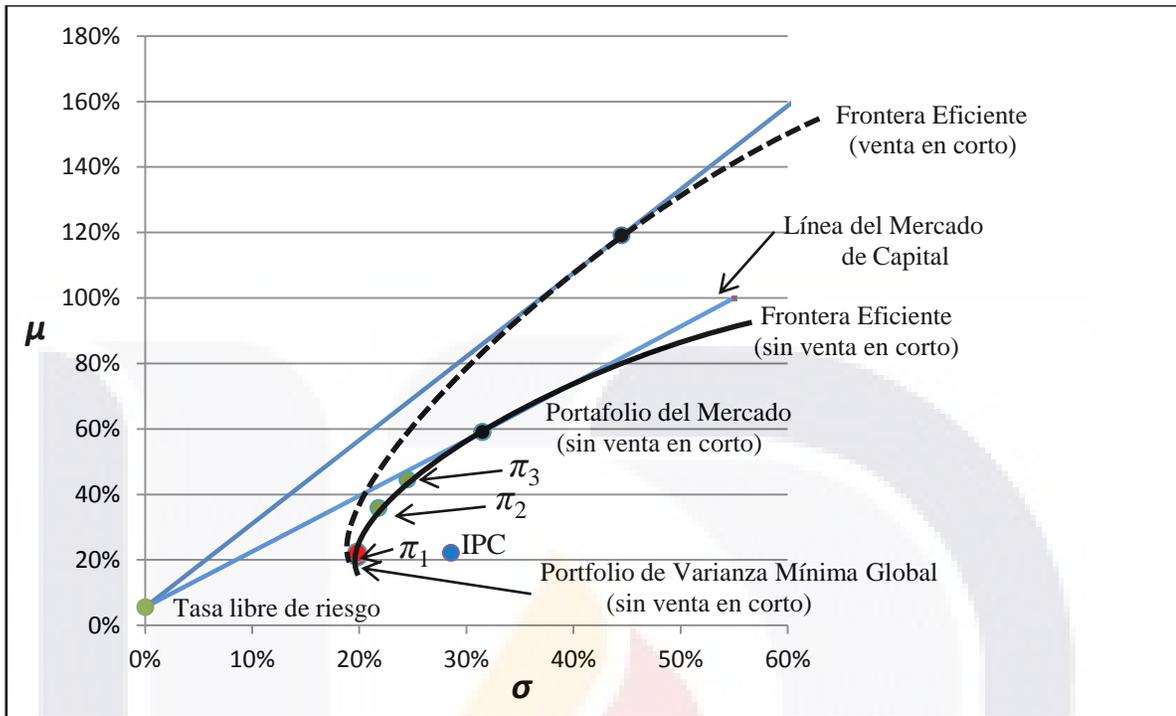


Figura 3.21. Portafolios óptimos sin venta en corto y el IPC.

Fuente: datos de la Tabla 3.19. Elaboración propia.

Respecto al portafolio 1, éste se calcula de modo que se obtenga el mismo rendimiento del IPC (22.2%), pero presenta una volatilidad mucho menor que la de índice por lo que es superior a este lo que confirma su mayor valor de θ . Los portafolios 2 y 3 son también superiores al IPC, tanto por mayor rendimiento como menor volatilidad. El portafolio del Mercado presenta también un rendimiento superior al del IPC, de 59.1%, pero con una volatilidad ligeramente mayor, de 31.5% contra 28.6%, sin embargo es un portafolio superior pues su $\theta = 1.7$.

De lo anterior se concluye que las ponderaciones de las acciones que componen el IPC, basadas en la capitalización de mercado de cada acción, están lejos de conformar portafolios óptimos. Esta situación ha llevado a propuestas de ponderación de índices diferentes a la capitalización del mercado (Amenc, Goltz, Martellini, y Retkowsky, 2010) que pueden ser tema de otra investigación.

En la Tabla 3.19 se aprecia también cómo evolucionan las ponderaciones de las acciones según se calculan portafolios más rentables, a lo largo de la Frontera Eficiente. Se ve como al aumentar el rendimiento, aumenta la volatilidad y los portafolios van dejando las acciones de bajo rendimiento y generalmente baja volatilidad, como es el caso ASUR, GFINBUR, GMODELO, GRUMA, KIMBER, TELMEX, y TVAZTCA, remarcadas en la tabla. Contrariamente, las acciones AUTLAN, ELEKTRA Y MEXCHEM, también remarcadas, van siendo más atractivas por ser más rentables y también más volátiles. Esto se puede apreciar en el rendimiento y volatilidad de los portafolios, que en el caso del portafolio del Mercado llega a 59.1% y 31.5%, respectivamente. Es importante señalar el caso de las acciones ASUR, BIMBO y WALMEX, cuya ponderación incrementa primero y luego disminuye según se van calculando portafolios más rentables. Esta anomalía puede estar relacionada con el cálculo de las correlaciones de la muestra, por lo que en las siguientes secciones se obtienen los portafolios del Mercado y de Varianza Mínima Global sin venta en corto, utilizando el modelo de estructura de correlación de índice simple y el modelo de estructura de correlación constante.

En relación a los parámetros de los portafolios, en la Tabla 3.19 se puede apreciar que la razón de Sharpe (θ) de todos los portafolios es mayor a la del IPC, lo que los hace superiores en cuanto al equilibrio rentabilidad-riesgo, además de que θ va aumentando según se obtienen portafolios Eficientes más rentables.

Respecto al riesgo sistemático del portafolio medido por el parámetro β , es importante señalar que solo los portafolios de VMG y el número 1 muestran una β ligeramente mayor a la del IPC. Los portafolios 2, 3 y el del Mercado van disminuyendo su β lo que los hace también atractivos por su menor dependencia del mercado.

3.3.8. Portafolios sin venta en corto con diferente estructura de correlación

Portafolio del Mercado con correlación de índice simple

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 3.20. Como en el caso de portafolios con venta en corto, se observa que el portafolio con correlación de índice simple aporta un balanceo entre las ponderaciones de las acciones ya que las participaciones son menos extremas y más uniformes.

En cuanto a seleccionar o eliminar acciones, no se presenta ninguna diferencia con el de correlación muestral. Solamente se percibe que las acciones con β menores tienden a aumentar su ponderación como en las emisoras AUTLAN, GFINBUR y BIMBO. En el caso de que la β sea más alta, como en la emisora MEXCHEM, la participación disminuye casi 5%.

Tabla 3.20. Ponderaciones (π) del portafolio del Mercado sin venta en corto calculado con tres estructuras de correlación.

Acción	var-cov π	índice simple π	$\bar{\rho} = 0.35$ π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	β	ρ	θ
24 MEXCHEM	40.4%	35.5%	43.3%	62.9%	42.9%	0.89	0.37	1.34
10 ELEKTRA	32.8%	31.4%	33.7%	51.0%	39.0%	0.66	0.27	1.17
5 AUTLAN	19.3%	20.4%	18.5%	75.9%	62.9%	0.80	0.21	1.12
16 GFINBUR	6.9%	10.7%	0.0%	30.8%	36.0%	0.53	0.22	0.7
7 BIMBO	0.6%	2.0%	4.5%	32.3%	33.5%	0.75	0.37	0.8
Rendimiento y volatilidad de los portafolios				Promedio³		0.93	0.35	0.41
$\hat{\mu}$	59.1%	57.7%	59.9%					
$\hat{\sigma}$	31.5%	29.3%	33.5%					
$\hat{\sigma}$ (var-cov)	31.5%	30.8%	32.1%					
β	0.77	0.76	0.79					
θ	1.70	1.694	1.693					

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

³ Calculado con las 31 emisoras de la muestra del IPC.

El rendimiento y la volatilidad del portafolio de índice simple resultan ligeramente menores así como la θ del portafolio, lo que no lo hace un portafolio superior, sin embargo la β es ligeramente menor por lo que sería un portafolio menos riesgoso que el de correlación muestral ante cambios del mercado.

Portafolio del Mercado sin venta en corto con correlación constante

Los portafolios obtenidos se muestran en la Tabla 3.20 en la que, tal como el caso de venta en corto, el portafolio con correlación constante incrementa la ponderación de algunas acciones ya seleccionadas por los otros portafolios ya sea por su mayor rendimiento o menor volatilidad. Resalta solamente la eliminación de GFINBUR en el portafolio de correlación constante, que se remarca en la tabla, y que presenta un bajo rendimiento en relación a las otras acciones lo que se refleja en la menor θ (0.7). Sin embargo, la emisora es seleccionada por el portafolio de índice simple por su baja β (0.53) y también por el portafolio de correlación muestral por su correlación promedio ($\rho = 0.22$), que es de las más bajas.

A pesar de que el rendimiento del portafolio de correlación constante es mayor al de los otros dos portafolios, las ponderaciones se muestran más desbalanceadas y el portafolio resulta más volátil y reporta una θ menor. En cuanto a la β del portafolio, esta también aumenta haciéndolo más riesgo. Como ya se comentó, los resultados de este modelo tienen que ser analizados con más detalle pues al asumir la misma correlación para todas las acciones, en la selección predomina solamente el equilibrio rendimiento-volatilidad (θ).

Portafolio de VMG sin venta en corto con correlación de índice simple

Las ponderaciones de los portafolios se muestran en la Tabla 3.21. La aplicación de correlación con índice simple al cálculo del portafolio de VMG aporta cierto balance entre las ponderaciones.

Se remarcan en la tabla a la emisora AUTLAN con una β de 0.8 y a la emisora BIMBO, con una β de 0.75, ambas por debajo del promedio (0.93), que la correlación muestral no incluye.

Tabla 3.21. Ponderaciones (π) del portafolio de VMG sin venta en corto calculado con tres estructuras de correlación.

Acción	var-cov π	índice simple π	$\bar{\rho} = 0.35$ π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	β	ρ	θ
28 TVAZTCA	15.2%	17.4%	18.5%	13.3%	29.5%	0.59	0.32	0.26
23 KIMBER	17.2%	16.1%	13.8%	20.6%	31.1%	0.57	0.31	0.48
16 GFINBUR	14.8%	12.5%	3.9%	30.8%	36.0%	0.53	0.22	0.70
27 TELMEX	14.0%	10.4%	17.1%	13.3%	30.0%	0.71	0.34	0.26
4 ASUR	9.9%	12.5%	5.4%	19.1%	35.1%	0.55	0.27	0.39
18 GMODELO	8.2%	7.6%	8.6%	20.6%	33.4%	0.70	0.34	0.67
12 GAP	5.5%	7.0%	2.0%	15.0%	37.3%	0.66	0.30	0.25
10 ELEKTRA	5.2%	6.3%	0.0%	51.0%	39.0%	0.66	0.27	1.17
20 GRUMA	4.7%	2.9%	0.0%	14.5%	64.4%	0.58	0.16	0.14
31 WALMEX	2.8%	0.0%	6.9%	24.3%	34.2%	0.89	0.36	0.55
26 SORIANA	2.5%	2.4%	1.1%	28.6%	38.0%	0.77	0.33	0.61
7 BIMBO	0.0%	4.7%	8.4%	32.3%	33.5%	0.75	0.37	0.80
5 AUTLAN	0.0%	0.4%	0.0%	75.9%	62.9%	0.80	0.21	1.12
28 TLEVISA	0.0%	0.0%	9.3%	9.3%	33.0%	0.88	0.41	0.11
11 FEMSA	0.0%	0.0%	3.2%	21.0%	36.5%	0.86	0.38	0.42
2 AMX	0.0%	0.0%	1.8%	19.6%	37.5%	1.16	0.44	0.38
Parámetros de los portafolios				Promedio⁴		0.93	0.35	0.41
$\hat{\mu}$	21.1%	22.0%	18.5%					
$\hat{\sigma}$	19.8%	19.5%	20.9%					
$\hat{\sigma}$ (var-cov)	19.8%	19.9%	21.1%					
β	0.619	0.618	0.67					
θ	0.79	0.83	0.61					

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

El portafolio de índice simple incrementa las participaciones de ASUR, ELEKTRA, GAP y TVAZTCA, remarcadas en la tabla, por su baja volatilidad y β , y elimina la acción WALMEX, por presentar una β más alta (0.89), comparada con la de las acciones seleccionadas. La volatilidad del portafolio obtenido es ligeramente mayor a la de la

⁴ Calculado para las 31 emisoras de la muestra del IPC.

correlación muestral y su razón de Sharpe (θ) también es mayor, lo que lo hace un portafolio superior. Cabe señalar también, a favor del portafolio de índice simple, que la β del portafolio es ligeramente menor.

Portafolio de VMG sin venta en corto con correlación constante

Los resultados obtenidos para el portafolio de VMG se muestran en la Tabla 3.21 y se aprecia en general, que el uso del modelo de correlación constante no altera sensiblemente el portafolio obtenido con correlación de índice simple y con correlación de la muestra, aunque el modelo, como en el caso de venta en corto, selecciona algunas acciones y elimina otras.

Resalta la eliminación de ELEKTRA y GRUMA, remarcadas en la tabla, que el portafolio con correlación muestral incluye por su baja correlación, pero al considerar el modelo de correlación constante, los excluye por su mayor volatilidad pues se trata del portafolio de VMG. Se aprecia también el caso de las emisoras TLEVISA, FEMSA y AMX, eliminadas por el modelo de correlación muestral sin una justificación aparente y por el de índice simple por mostrar una β alta, pero el de correlación constante las incluye por su baja volatilidad.

Se remarcan también en la tabla los casos de AUTLAN, que solo la correlación de índice simple incluye, por su β baja y las otras estructuras no seleccionan por su alta volatilidad, y de WALMEX, que contrariamente, es solo eliminada por la correlación de índice simple por su β más alta, e incluida por los otros portafolios por su baja volatilidad (34.2%).

En cuanto a los parámetros de los portafolios, el portafolio de correlación constante es más volátil que los otros dos y presenta un mayor riesgo de mercado pues la β del portafolio es la más alta de las tres. El análisis del portafolio con correlación constante muestra la importancia de considerar para cada acción, un equilibrio rendimiento-volatilidad (θ), el riesgo sistemático (β) y su correlación con las demás acciones.

Portafolios sin venta en corto con diferentes coeficientes de correlación

Como en el caso de los portafolios con venta en corto, una aplicación del modelo de estructura de correlación es la simulación de portafolios estimados con diferentes coeficientes de correlación suponiendo escenarios en los que el mercado presente un posible alineamiento o tendencia de los coeficientes de correlación entre las acciones.

Portafolio del Mercado sin venta en corto con diferentes coeficientes de correlación

La Tabla 3.22 muestra los resultados del análisis del portafolio del Mercado cuando aumenta la correlación. Se aprecia que al ir aumentando la correlación, el portafolio va eliminando acciones hasta quedar solamente MEXCHEM, ELEKTRA y AUTLAN, en ponderaciones de 63.3%, 27.2% y 9.5% respectivamente, cuando $\rho = 0.7$. Es interesante apreciar que la más rentable es AUTLAN, aunque por su volatilidad es la que presenta la menor ponderación de las tres ya que tiene la menor razón de Sharpe (θ). Estas acciones son también las únicas de toda la muestra que presentan una volatilidad menor que el premio del rendimiento⁵ y por tanto la θ es mayor a uno en los tres casos.

Se simuló también el escenario para la correlación igual a uno y el portafolio selecciona una sola acción, MEXCHEM, que no es la más rentable pero la que presenta el mejor equilibrio rendimiento-volatilidad, lo cual se aprecia por mostrar el valor más grande de la razón de Sharpe ($\theta = 1.34$).

En cuanto a los parámetros de los portafolios, se aprecia que el portafolio con la correlación promedio presenta la mayor θ , igual que el caso de venta en corto, y a partir de $\bar{\rho} = 0.35$ disminuye ligeramente sin que el rendimiento y la volatilidad aumenten de manera importante. Respecto a la β , el valor más bajo y por tanto de menor riesgo de mercado se presenta también en el escenario de correlación promedio, volviendo a aumentar muy poco cuando aumenta la correlación.

⁵ Rendimiento que excede la tasa libre de riesgo.

Tabla 3.22. Ponderaciones (π) del portafolio del Mercado sin venta en corto calculado con cinco diferentes coeficientes de correlación.

Acción	$\rho = 0$ π	$\rho = 0.1$ π	$\bar{\rho} = 0.35$ π	$\rho = 0.5$ π	$\rho = 0.7$ π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	θ
1 ALFA	2.7%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	20.5%	41.7%	0.36
2 AMX	3.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	19.6%	37.5%	0.38
3 ARA	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	-2.2%	44.8%	-0.17
4 ASUR	3.4%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	19.1%	35.1%	0.39
5 AUTLAN	5.5%	12.1%	18.5%	16.8%	9.5%	75.9%	62.9%	1.12
6 AXTEL	1.4%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	15.2%	46.6%	0.21
7 BIMBO	7.4%	12.1%	4.5%	0.0%	0.0%	32.3%	33.5%	0.80
8 CEMEX	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	-5.3%	57.1%	-0.19
9 COMERCI	0.9%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	30.5%	93.2%	0.27
10 ELEKTRA	9.3%	20.9%	33.7%	33.2%	27.2%	51.0%	39.0%	1.17
11 FEMSA	3.6%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	21.0%	36.5%	0.42
12 GAP	2.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	15.0%	37.3%	0.25
13 GCARSO	3.3%	0.9%	0.0%	0.0%	0.0%	25.7%	43.3%	0.47
14 GEO	0.7%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	12.0%	51.9%	0.12
15 GFAMSA	1.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	15.3%	52.3%	0.19
16 GFINBUR	6.1%	8.3%	0.0%	0.0%	0.0%	30.8%	36.0%	0.70
17 GFNORTE	2.9%	1.1%	0.0%	0.0%	0.0%	31.1%	52.6%	0.48
18 GMEXICO	3.9%	5.0%	0.0%	0.0%	0.0%	42.0%	54.0%	0.67
19 GMODELO	4.2%	0.6%	0.0%	0.0%	0.0%	20.6%	33.4%	0.45
20 GRUMA	0.7%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	14.5%	64.4%	0.14
21 HOMEX	0.8%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	12.7%	52.5%	0.14
22 ICA	0.9%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	12.3%	48.7%	0.14
23 KIMBER	4.8%	1.8%	0.0%	0.0%	0.0%	20.6%	31.1%	0.48
24 MEXCHEM	9.7%	23.5%	43.3%	50.0%	63.3%	62.9%	42.9%	1.34
25 PE	3.8%	4.8%	0.0%	0.0%	0.0%	43.0%	55.6%	0.67
26 SORIANA	5.0%	5.1%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%	38.0%	0.61
27 TELMEX	2.7%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	13.3%	30.0%	0.26
28 TLEVISA	1.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	9.3%	33.0%	0.11
29 TVAZTCA	2.8%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	13.3%	29.5%	0.26
30 URBI	1.2%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	15.5%	51.5%	0.19
31 WALMEX	5.0%	3.7%	0.0%	0.0%	0.0%	24.3%	34.2%	0.55

Parámetros de los portafolios

μ	33.7%	48.7%	59.9%	61.1%	60.9%
σ	9.4%	20.8%	33.5%	37.1%	40.0%
σ (var-cov)	24.7%	27.5%	32.1%	33.0%	34.2%
β	0.84	0.82	0.79	0.80	0.82
θ	1.14	1.57	1.69	1.68	1.62

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Portafolio de VMG sin venta en corto con diferentes coeficientes de correlación

En la Tabla 3.23 se muestran los cambios en las ponderaciones de las acciones que componen el portafolio de VMG sin venta en corto, cuando cambia el valor del coeficiente de correlación. Puede apreciarse que la volatilidad del portafolio es muy sensible a cambios en la correlación cuando esta toma valores menores al promedio y cercanos a cero.

Se observa también que en el escenario de correlación cero, el modelo selecciona todas las acciones para invertir, pues el óptimo es independiente del rendimiento, mientras que en el caso del portafolio del Mercado (Tabla 3.22), en el escenario de correlación cero el modelo elimina a las emisoras ARA y CEMEX por tener rendimiento negativo, lo cual es congruente con el objetivo de maximizar el rendimiento sin permitir venta en corto.

Puede apreciarse en las acciones remarcadas en la Tabla 3.23, que conforme aumenta la correlación, las acciones con volatilidades medias o altas se van eliminando, mientras que incrementan su ponderación solo aquellas con volatilidades menores de 33% aproximadamente.

En el escenario de correlación uno, el portafolio contiene solo una sola acción, TVAZTCA, la de menor volatilidad de toda la muestra, lo cual es una prueba empírica del fundamento teórico del portafolio de VMG.

Respecto a los parámetros de los portafolios, el portafolio de mayor θ es el que se obtiene con una correlación $\rho = 0.1$ y el de menor riesgo sistemático (β) es el que corresponde a $\rho = 0.7$.

Tabla 3.23. Ponderaciones (π) del portafolio de VMG sin venta en corto calculado con cinco diferentes coeficientes de correlación.

Acción	$\rho = 0$ π	$\rho = 0.1$ π	$\bar{\rho} = 0.35$ π	$\rho = 0.5$ π	$\rho = 0.7$ π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	θ
1 ALFA	3.1%	2.6%	0.0%	0.0%	0.0%	20.5%	41.7%	0.36
2 AMX	3.9%	4.4%	1.8%	0.0%	0.0%	19.6%	37.5%	0.38
3 ARA	2.7%	1.6%	0.0%	0.0%	0.0%	-2.2%	44.8%	-0.17
4 ASUR	4.4%	5.7%	5.4%	3.3%	0.0%	19.1%	35.1%	0.39
5 AUTLAN	1.4%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	75.9%	62.9%	1.12
6 AXTEL	2.5%	1.2%	0.0%	0.0%	0.0%	15.2%	46.6%	0.21
7 BIMBO	4.8%	6.8%	8.3%	8.1%	2.7%	32.3%	33.5%	0.80
8 CEMEX	1.7%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	-5.3%	57.1%	-0.19
9 COMERCI	0.6%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	30.5%	93.2%	0.27
10 ELEKTRA	3.6%	3.6%	0.0%	0.0%	0.0%	51.0%	39.0%	1.17
11 FEMSA	4.1%	4.9%	3.2%	0.0%	0.0%	21.0%	36.5%	0.42
12 GAP	3.9%	4.4%	2.0%	0.0%	0.0%	15.0%	37.3%	0.25
13 GCARSO	2.9%	2.1%	0.0%	0.0%	0.0%	25.7%	43.3%	0.47
14 GEO	2.0%	0.2%	0.0%	0.0%	0.0%	12.0%	51.9%	0.12
15 GFAMSA	2.0%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	15.3%	52.3%	0.19
16 GFINBUR	4.2%	5.1%	3.9%	0.8%	0.0%	30.8%	36.0%	0.70
17 GFNORTE	2.0%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	31.1%	52.6%	0.48
18 GMEXICO	1.9%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	42.0%	54.0%	0.67
19 GMODELO	4.9%	6.9%	8.6%	8.5%	3.8%	20.6%	33.4%	0.45
20 GRUMA	1.3%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	14.5%	64.4%	0.14
21 HOMEX	2.0%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	12.7%	52.5%	0.14
22 ICA	2.3%	0.7%	0.0%	0.0%	0.0%	12.3%	48.7%	0.14
23 KIMBER	5.6%	8.8%	13.8%	16.9%	20.5%	20.6%	31.1%	0.48
24 MEXCHEM	3.0%	2.2%	0.0%	0.0%	0.0%	62.9%	42.9%	1.34
25 PE	1.8%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	43.0%	55.6%	0.67
26 SORIANA	3.8%	4.1%	1.1%	0.0%	0.0%	28.6%	38.0%	0.61
27 TELMEX	6.0%	10.0%	17.1%	22.4%	31.2%	13.3%	30.0%	0.26
28 TLEVISA	5.0%	7.2%	9.3%	9.6%	5.8%	9.3%	33.0%	0.11
29 TVAZTCA	6.2%	10.5%	18.5%	24.6%	36.1%	13.3%	29.5%	0.26
30 URBI	2.0%	0.3%	0.0%	0.0%	0.0%	15.5%	51.5%	0.19
31 WALMEX	4.6%	6.3%	6.9%	5.8%	0.0%	24.3%	34.2%	0.55

Parámetros de los portafolios

$\hat{\mu}$	22.6%	21.4%	18.5%	17.3%	15.3%
$\hat{\sigma}$	7.4%	13.6%	20.9%	23.9%	26.9%
$\hat{\sigma}$ (var-cov)	24.3%	21.7%	21.1%	21.4%	22.3%
β	0.86	0.75	0.70	0.68	0.65
θ	0.70	0.73	0.61	0.55	0.43

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Portafolio hipotético sin riesgo

Además del análisis de escenarios con diferentes correlaciones para el portafolio del Mercado y el de VMG con y sin venta en corto, se obtiene también el portafolio hipotético con volatilidad cero, asumiendo estructura de correlación constante. Como metodología se utiliza la función *Solver* de Excel®, igualando la volatilidad del portafolio a cero para calcular el valor de la correlación constante entre las acciones del portafolio y las ponderaciones de las mismas que cumplan esta restricción. Lo anterior convierte al portafolio en uno de VMG en donde los rendimientos no intervienen en el cálculo de las ponderaciones.

Los resultados se muestran en la Tabla 3.24 en la que se aprecia que todas las ponderaciones de las acciones son positivas y se relacionan inversamente a sus volatilidades pues como se comenta en el párrafo anterior el modelo las determina al definir $\sigma = 0$, con independencia del rendimiento. Se remarcan las emisoras con la menor y mayor ponderación que corresponden a la mayor y menor volatilidad respectivamente.

El coeficiente de correlación constante obtenido es $\rho = -0.033$. Este resultado valida empíricamente el modelo al comprobar que la correlación negativa entre las acciones puede reducir el riesgo en su totalidad. Se aprecia también que la volatilidad del portafolio es muy sensible a la correlación pues el valor negativo obtenido es cercano a cero, lo cual lo hace un portafolio atractivo pues con correlaciones negativas muy bajas entre las emisoras, en el supuesto de que existieran, se obtiene el mínimo riesgo.

Tabla 3.24. Portafolio con volatilidad cero.

Acción	$\rho = -0.033$ π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	Acción	$\rho = -0.033$ π	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
1 ALFA	3.3%	20.5%	41.7%	17 GFNORTE	2.6%	31.1%	52.6%
2 AMX	3.6%	19.6%	37.5%	18 GMEXICO	2.5%	42.0%	54.0%
3 ARA	3.0%	-2.2%	44.8%	19 GMODELO	4.1%	20.6%	33.4%
4 ASUR	3.9%	19.1%	35.1%	20 GRUMA	2.1%	14.5%	64.4%
5 AUTLAN	2.2%	75.9%	62.9%	21 HOMEX	2.6%	12.7%	52.5%
6 AXTEL	2.9%	15.2%	46.6%	22 ICA	2.8%	12.3%	48.7%
7 BIMBO	4.1%	32.3%	33.5%	23 KIMBER	4.4%	20.6%	31.1%
8 CEMEX	2.4%	-5.3%	57.1%	24 MEXCHEM	3.2%	62.9%	42.9%
9 COMERCI	1.5%	30.5%	93.2%	25 PE	2.4%	43.0%	55.6%
10 ELEKTRA	3.5%	51.0%	39.0%	26 SORIANA	3.6%	28.6%	38.0%
11 FEMSA	3.7%	21.0%	36.5%	27 TELMEX	4.5%	13.3%	30.0%
12 GAP	3.6%	15.0%	37.3%	28 TLEVISA	4.1%	9.3%	33.0%
13 GCARSO	3.1%	25.7%	43.3%	29 TVAZTCA	4.6%	13.3%	29.5%
14 GEO	2.6%	12.0%	51.9%	30 URBI	2.6%	15.5%	51.5%
15 GFAMSA	2.6%	15.3%	52.3%	31 WALMEX	4.0%	24.3%	34.2%
16 GFINBUR	3.8%	30.8%	36.0%				

Parámetros del portafolio

$\hat{\mu}$	23.2%
$\hat{\sigma}$	0.0%

Fuente: log-rendimientos estimados con los precios de cierre diarios de las 31 emisoras tomados de la base de datos Infosel® del 18/04/2006 al 23/04/2010. Elaboración propia.

Capítulo IV. Conclusiones

1. El desarrollo matemático de los estimadores de los parámetros del modelo estocástico de Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971), rendimiento y volatilidad, tanto para datos completos como para datos faltantes, es una aportación de esta tesis a la metodología del cálculo del rendimiento y la volatilidad de las series de precios de las acciones que cotizan en el mercado bursátil mexicano, que con frecuencia presentan días en que no cotizan. Desde la perspectiva académica, la investigación complementa la escasa literatura referida a la modelación de los rendimientos bursátiles mexicanos.
2. A partir de dos bases de datos ampliamente utilizadas en el medio bursátil mexicano, se llevó a cabo un minucioso análisis exploratorio para la selección de acciones con series de datos de buena calidad, es decir, se eliminaron acciones con baja o nula bursatilidad y se hizo un detallado escrutinio y un análisis gráfico para detectar datos discrepantes y faltantes ya que el mercado mexicano es aún un mercado poco profundo (Alarco-Tosoni, 2008). Se seleccionó una muestra de 40 acciones, entre el 02/01/2003 y el 23/04/2010 y los resultados obtenidos permiten confirmar la hipótesis H1 sobre la calidad de los datos.
3. La modelación de los precios de las acciones del mercado mexicano de valores con el modelo Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971) a través de los parámetros estimados del modelo, mostró resultados satisfactorios. Una vez aplicada la metodología de estimación de los parámetros utilizando las series de datos seleccionadas, se comprobó la calidad de estimación de los mismos. En particular, el estimador del rendimiento se comparó, mediante un análisis de intervalo dinámico, con un estimador ponderado obteniéndose resultados positivos que validan la calidad del estimador de rendimiento del modelo, confirmando la hipótesis H2. Es pertinente señalar que en esta tesis el estimador dinámico ponderado se utilizó para fines de comparar el estimador del modelo, señalando solamente las propiedades de independencia y consistencia del mismo, y se propone, como tema de otra investigación, profundizar en las propiedades estadísticas y validación empírica de este tipo de estimador.

4. Los resultados de la validación empírica de los supuestos del modelo Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971) reflejaron, en general, que estos se cumplen, tanto por la independencia de las series de datos de log-rendimientos como por la aproximación a la normalidad de los mismos. Los resultados gráficos para el caso de independencia, revelan en general que la autocorrelación es muy baja. La prueba analítica, mediante el estadístico de Durbin-Watson, mostró que en 10 de las 40 acciones, la autocorrelación es cero.

La validación gráfica de la normalidad de los log-rendimientos se aproxima a la normal, presentando en las series diarias cierta esbeltez o leptocurtosis y colas pesadas. La prueba analítica se llevó a cabo con el estadístico de Jarque-Bera y los resultados mostraron que para rendimientos diarios y semanales, la hipótesis sobre normalidad se rechaza. En el caso de rendimientos mensuales, en 21 emisoras de 40 y el IPC, se puede afirmar que los rendimientos siguen una distribución normal. Estos resultados validan la aceptación de la hipótesis H3 planteada en esta tesis sobre la validación de los supuestos del modelo Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971).

En el caso del modelo de tasa de interés de Vasicek (1977) no pudo realizarse la validación por la naturaleza de la serie de datos del Certificado de la Tesorería (CETE), que está sujeto a las políticas monetarias del gobierno mexicano y no cotiza en un mercado abierto a la oferta y demanda.

5. Las acciones seleccionadas de la muestra del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) al 16/07/2010 fueron 31 y la serie de tiempos del 18/04/2006 al 24/04/2010. Los portafolios con función de utilidad potencia obtenidos mediante el modelo Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971) fueron consistentes con la variación del coeficiente de propensión al riesgo del inversionista, resultando portafolios óptimos a lo largo de la Línea del Mercado de Capital. Los rendimientos de los portafolios obtenidos con el modelo, son en general altos debido a la posibilidad de venta en corto. Para coeficientes de propensión al riesgo altos, el modelo de portafolio se apalancó tomando deuda a la tasa

libre de riesgo. Estos resultados confirman la aceptación de la hipótesis H4 sobre la obtención de portafolios óptimos para diferentes perfiles de riesgo del inversionista.

6. Los portafolios del Mercado y de Varianza Mínima Global (VMG) con venta en corto, que el modelo Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971) determina utilizando la matriz de correlación de la muestra, presentaron participaciones extremas de algunas acciones, y se seleccionaron algunas emisoras menos atractivas que otras, resultando ponderaciones poco factibles. Estas anomalías suelen presentarse por las limitaciones del modelo en el cálculo de la matriz de correlación de la muestra. En la tesis se plantearon dos modelos alternativos para calcular la estructura de correlación, el de índice simple de Sharpe (1963) y el de correlación constante de Elton y Gruber (1973).

Para determinar portafolios con la estructura de correlación de índice simple, se calculó mediante regresión lineal el coeficiente β que mide la sensibilidad de los rendimientos de cada acción a cambios en el rendimiento del mercado (riesgo sistemático), representado por el IPC. En la regresión se determinó también el coeficiente de determinación R^2 . Se obtuvo que el promedio de la β de todas las acciones de la muestra fue de 0.93, lo cual indica alta sensibilidad del rendimiento de las acciones con el rendimiento del IPC, no presentándose ninguna emisora con β negativo o cercano a cero. La acción con la mayor β fue CEMEX y la menor fue GFINBUR. El coeficiente de determinación promedio ajustado dio 0.38, el cual es un indicador de mediana representatividad de las acciones en el IPC, comparado con 0.42 del índice S&P 500, como representativo de 30 acciones del índice DJ 30 (Benninga, 2008).

En la aplicación del modelo de estructura de correlación constante, se calcularon todas las correlaciones entre las acciones de la muestra del IPC, se sacó el promedio de cada una y el promedio de toda la muestra, que dio un valor de 0.35. La acción con mayor correlación promedio fue AMX y la de menor resultó la emisora GRUMA. Cabe mencionar que todas las emisoras se correlacionan positivamente excepto GRUMA y KIMBER cuya correlación dio un valor negativo, cercano a cero.

7. Los portafolios del Mercado y de VMG con venta en corto obtenidos con la correlación de índice simple mostraron ponderaciones más balanceadas, tanto en inversión como en venta en corto, que las obtenidas con la correlación muestral. Los portafolios con correlación de índice simple eliminaron o reasignaron de inversión a venta en corto, algunas acciones cuya sensibilidad con el IPC (β) fue alta. De igual manera, los portafolios de índice simple seleccionan o asignan más ponderación a aquellas emisoras cuya β es menor, conformando portafolios más equilibrados. En el caso del portafolio de VMG se obtuvo un portafolio superior al de correlación muestral por su menor volatilidad y mayor θ y con menor riesgo de mercado por su menor β . En cuanto al portafolio del Mercado no se obtuvo un portafolio superior pues la θ es ligeramente menor, sin embargo se obtiene una β menor que el de correlación muestral reduciendo su riesgo sistemático.

8. Los portafolios del Mercado y de VMG con venta en corto, calculados con correlación constante, resultan portafolios más desbalanceados con ponderaciones extremas respecto a los portafolios de correlación de la muestra y de índice simple. Algunas acciones que fueron seleccionadas por los otros modelos de estructura por su coeficiente de correlación bajo son eliminadas ya que este modelo, al considerar que todas las acciones tienen correlación constante, selecciona el mayor rendimiento y la menor volatilidad, es decir busca emisoras con valores de θ altos por lo que es importante que su aplicación y resultados sean cuidadosamente analizados pues los portafolios obtenidos en esta tesis no revelan ser mejores. La única aportación es el caso del portafolio del Mercado con venta en corto que muestra menor riesgo sistemático. La aplicación de esta estructura de correlación ayuda a detectar acciones que requieren un análisis más detallado para decidir si deben o no incluirse, buscando un equilibrio entre rendimiento, volatilidad, sensibilidad al mercado y correlación.

9. Respecto al uso de la estructura de correlación de índice simple y de correlación constante en los portafolios del Mercado y Varianza Mínima Global sin permitir venta en corto, los resultados mostraron, como en el caso de venta en corto, que los portafolios con índice simple son portafolios superiores en cuanto a estar más balanceados y ser más

selectivos desde el punto de vista de asignar inversión a emisoras con baja sensibilidad al IPC y eliminar aquellas con alta β . Los portafolios obtenidos con la estructura de correlación constante no fueron superiores pero aportaron información útil sobre la composición de portafolios bajo dicha estructura de correlación. Los resultados de las conclusiones 7, 8 y 9 validan la aceptación de la hipótesis H6 planteada en esta tesis en relación a estructuras alternativas de correlación.

10. Una aplicación de la estructura de correlación constante es la simulación de escenarios en los que la correlación entre las acciones converge a un valor predecible o, por contagio sistemático o sistémico (Moldovan, 2011), la correlación tiende a alinearse a un valor constante, como en el caso de crisis o fuerte expansión económica, en donde la correlación, en general, tiende a uno entre los valores y mercados financieros (Sandoval y De Paula, 2011). El análisis de los portafolios para escenarios de diferentes coeficientes de correlación reveló resultados muy interesantes y de mucho valor para la conformación de portafolios en situaciones extremas del entorno económico y financiero. El portafolio del Mercado con y sin venta en corto reflejó que el aumento de correlación va formando portafolios más rentables y más volátiles, seleccionando con el criterio de equilibrio entre el máximo rendimiento y la mínima volatilidad. Los rendimientos y volatilidades de los portafolios aumentan, en general, proporcionalmente al aumento de la correlación. Es importante señalar que en el portafolio del Mercado sin venta en corto la ponderación se fue incrementando en una sola acción, MEXCHEM, dejando atrás a otras emisoras como AUTLAN, a pesar de que esta fue más rentable que MEXCHEM. Se simuló el escenario extremo en que $\rho = 1$ y el modelo ponderó al 100% la acción MEXCHEM, lo cual fue muy revelador en el sentido de que la acción tiene la razón de Sharpe (θ) más alta de toda la muestra, validando empíricamente los fundamentos del modelo. Se valida también el modelo al confirmarse que la volatilidad de un portafolio no puede reducirse mediante la diversificación bajo el supuesto de $\rho = 1$.

En el caso del portafolio de VMG con y sin venta en corto, el aumento de la correlación, congruente con el modelo teórico de este portafolio, va seleccionando exclusivamente

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

aquellas acciones con las mínimas volatilidades, independientemente de los rendimientos. En el caso del portafolio de VMG sin venta en corto, en el escenario extremo ($\rho = 1$), el modelo seleccionó una sola acción, TVAZTCA, que es la de menor volatilidad de la muestra. Este resultado valida empíricamente el fundamento teórico sobre el que fue planteado el portafolio de VMG. Finalmente se determinó el portafolio hipotético sin riesgo, obteniéndose con un coeficiente de correlación negativo $\rho = -0.033$, resultado que también valida empíricamente al modelo pues comprueba que correlaciones negativas entre las emisoras pueden reducir el riesgo a cero.

11. Con objeto de comparar el portafolio del IPC, se determinaron los portafolios sin venta en corto del Mercado, de VMG y tres portafolios sobre la Frontera Eficiente. El primer portafolio Eficiente se calculó con el mismo rendimiento del índice para poder compararlo y se obtuvo un portafolio superior al presentar menor volatilidad. Los otros dos portafolios Eficientes se calcularon con mayores rendimientos que el índice y resultaron superiores al índice al mostrar también menor volatilidad. En el caso del tercer portafolio se dobló el rendimiento del IPC y su volatilidad resultó también menor a la del índice. Excepto el portafolio del Mercado, que dio una volatilidad ligeramente mayor a la del IPC, pero con un rendimiento casi tres veces superior, todos los portafolios calculados fueron superiores al IPC, lo que valida la hipótesis H5 planteada en la introducción de esta tesis sobre la ponderación de las acciones del IPC. Se resaltó la importancia de desarrollar otras metodologías de representatividad eficiente del índice, diferentes a la capitalización de las acciones en el mercado, lo que puede ser tema de otra investigación.

El hecho de que existan portafolios que superen al IPC, permite afirmar que muchas veces los administradores de carteras, que frecuentemente recomiendan la inversión en fondos que siguen el comportamiento del índice (*index tracker funds*) y los califican como la mejor y más segura opción, no están asesorando correctamente a los inversionistas, ya que pueden existir otros portafolios superiores, muy atractivos también para el inversionista conservador, con los que puede obtener mejores rendimientos tomando riesgos similares o aún menores.

12. Además de haber desarrollado, a partir del modelo de Black-Scholes-Merton (Black y Scholes, 1973 y Merton, 1971), estimadores del rendimiento y volatilidad para series de datos con faltantes, así como la metodología para su aplicación a series de precios de acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana, la aportación de esta tesis en el ámbito de la optimización de portafolios de acciones, es en primer lugar, la utilización de la función de utilidad potencia para incluir en el modelo las preferencias al riesgo del inversionista, que otros modelos como el de Markowitz (1952) no consideran y en segundo lugar, la recomendación de valorar la ponderación de cada acción a través de estructuras de correlación diferentes a la correlación de la muestra que es utilizada por el modelo, pues como se comentó, se obtuvieron algunas ponderaciones poco factibles o inconsistentes con la racionalidad de un inversionista, inherente a las limitaciones del modelo. Las estructuras propuestas permiten, además de evaluar el impacto del riesgo sistemático de las emisoras sobre las ponderaciones, rendimiento y volatilidad del portafolio, llevar a cabo un análisis de escenarios donde la correlación entre emisoras tome diferentes valores.

Por lo anterior, se recomienda que los parámetros de decisión para una asignación óptima de acciones a un portafolio incluyan, además del equilibrio rendimiento-volatilidad y correlación entre acciones, el riesgo sistemático de cada emisora y se analicen escenarios para medir el impacto sobre el portafolio de cambios en los valores de la correlación entre las acciones.

13. El programa desarrollado en esta tesis con el software de programación R, para la obtención de parámetros, portafolios óptimos y pruebas estadísticas, cuyo código fuente se muestra en el Anexo E, es también una importante aportación, no solo como herramienta para la administración óptima de portafolios, sino como un instrumento didáctico para la enseñanza de una parte de las finanzas cuantitativas que corresponde a la aplicación de modelos estocásticos a la optimización de portafolios de inversión.

Glosario

APT: *Arbitrage Pricing Theory*. Teoría del arbitraje en la fijación de precios de activos.

ARCH: *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*. Modelos de series de tiempo autorregresivos de heteroscedasticidad condicional.

ARIMA: *Autoregressive Integrated Moving Average*. Modelos de series de tiempo autorregresivos integrados de promedios móviles.

ARMA: *Autoregressive Moving Average*. Modelo de series de tiempo autorregresivo de promedios móviles.

BSM: Black-Scholes-Merton.

CAPM: *Capital Asset Pricing Model*. Modelo de fijación de precios de activos.

CETE: Certificado de la Tesorería de la Federación.

Cluster: Concentración o agrupación de datos, i.e. *cluster* de volatilidad.

Commodities: Productos genéricos sin mayor diferenciación entre sus variedades que se compran y se venden principalmente por su precio. Actualmente se ha generalizado la palabra para incluir también servicios e instrumentos financieros.

DJ 30: Forma breve de referirse al Índice DJIA (Dow Jones Industrial Average) formado por las 30 acciones de mayor capitalización del mercado bursátil de los Estados Unidos.

EDE: Ecuación diferencial estocástica.

EM: *Expectation-Maximization*. Algoritmo de maximización del valor esperado o esperanza mediante máxima verosimilitud.

EMV: Estimador de máxima verosimilitud.

EWMA: *Exponential Weighted Moving Average*. Modelo de series de tiempo basado en promedios móviles ponderados exponenciales.

GARCH: *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*. Modelo de serie de tiempos autorregresivo de heteroscedasticidad condicional.

GMM: *Generalized Method of Moments*. Método generalizado de momentos.

Index Tracker Funds: Fondos de inversión que siguen el comportamiento de un índice.

JB: Estadístico de la prueba de normalidad de Jarque-Bera

M.B.: Movimiento Browniano.

OLS: *Ordinary Least Squares*. Método de regresión lineal por mínimos cuadrados.

OPI: Oferta Pública Inicial.

Outliers: Observaciones o datos inusuales, atípicos o discrepantes.

PCA: *Principal Component Analysis*. Análisis de componente principal.

Selling short: Venta en corto. Vender un activo con el objeto de recomprarlo a un precio menor.

S&P500: Índice Standard and Poor formado por 500 acciones representativas del mercado bursátil de los Estados Unidos.

Split: Aumento en el número de acciones en circulación de una emisora, sin variar el importe de su capital social.

VAR: *Vector Autoregressive*. Modelos de series de tiempo basados en procesos de vector autorregresivo.

VaR: *Value at Risk*. Valor al riesgo.

VMG: Varianza Mínima Global.

Bibliografía

- Alarco-Tosoni, G. (2008). Precios de equilibrio y episodios especulativos en los mercados de valores latinoamericanos. *Análisis Económico*, 53, Vol. XXIII.
- Alexander, C. (2008). *Practical Financial Econometrics*. England: John Wiley & Sons Ltd.
- Allison, P. D. (2002). *Missing data series: Quantitative applications in the social sciences*. California: Sage.
- Amenc, N., Goltz, F., Martellini, L., y Retkowsky, P. (2010). *Efficient Indexation: An alternative to Cap-Weighted Indices*. France: EDHEC-Risk Institute Publication.
- Anderson, T. W. y Olkin, I. (1985). Maximum-Likelihood estimation of the Parameters of a Multivariate Normal Distribution. *Linear Algebra and its Applications*, 70, 147-171.
- Aoki, M. (1990). *State Space Modeling of Time Series*. New York: Springer.
- Arrow, K. J. (1965). The theory of risk aversion. *Essays in the Theory of Risk Bearing*. Chicago: Markham Publ. Co. (1971), 90-109.
- Atkins, A. B. y Sundali, J. A. (1997). Portfolio managers versus the darts: evidence from the Wall Street Journal's Dartboard Column. *Applied Economics Letters*, 4(10), 635-637.
- Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 17, 21-86.
- Banco de México (2010). Estadísticas de los resultados de las subastas de colocación de valores gubernamentales. Disponible en:
<http://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion=consultarCuadro&idCuadro=CF107§or=22&locale=es> al 29/05/2010.
- Benninga, S. (2008). *Financial Modeling*. Massachusetts: The MIT Press.
- Black, F. y Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.

- Bodie, Z., Kane, A. y Marcus, A. J. (2011). *Investments*. New York: McGraw-Hill Irwin.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- Bolsa Mexicana de Valores (2010a). Nota Metodológica del Índice de Precios y Cotizaciones de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. Disponible en: <http://www.bmv.com.mx> al 15/09/2010.
- Bolsa Mexicana de Valores (2010b). Ponderaciones Estimadas del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. Datos al 16 de Julio, 2010. Disponible en: <http://www.bmv.com.mx> al 25/07/2010.
- Bolsa Mexicana de Valores (2012). Reglamento interior. Disponible en: http://www.bmv.com.mx/wb3/wb/BMV/BMV_reglamento_vigente al 5/03/2012.
- Box, G. y Jenkins, G. (1970). *Time series analysis: Forecasting and control*. San Francisco: Holden-Day.
- Brockwell, P. J. y Davis, R. A. (1987). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag.
- Candelon, B. B., Hurlin, C. C., y Tokpavi, S. S. (2012). Sampling error and double shrinkage estimation of minimum variance portfolios. *Journal of Empirical Finance*, 19(4), 511-527.
- Casella, G. y Berger R. L. (2002). *Statistical Inference*. London: Thomson Learning.
- Castañeda-Leyva, N., Pérez-Hernández, L. R. y Rodríguez-Narciso, N. (2008). Métodos estocásticos en finanzas I y II. *Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones*, 39, 3-78, Sociedad Matemática Mexicana, Instituto de Matemáticas, UNAM.
- Chamberlain, G. (1983). A characterization of the Distributions That Imply Mean-Variance Utility Functions. *Journal of Economic Theory*, 29(1), 185-201.

- Chen, N., Roll, R., y Ross, S. (1986). Economic Forces and the Stock Market. *Journal of Business*, 59, 386-403.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. y Ross, S. A. (1985). A theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53(2), 363-384.
- Cremers, J. H., Kritzman, M. y Page S. (2004). Optimal Hedge Fund Allocations: Do Higher Moments Matter? *Revere Street Working Paper*, 272, 13.
- Cvitanic, J. y Zapatero, F. (2004). *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*. Massachusetts: The MIT Press.
- de Roover, R. (1955). Scholastic economics: survival and lasting influence from the sixteenth century to Adam Smith. *Quarterly Journal of Economics*, 69(2), 161-190.
- Debreu, G. (1960). Individual Choice Behavior. *American Economic Review*, 50(1), 186.
- Dempster, A. P., Laird, N. M. y Donald, R. B. (1977). Maximum likelihood estimation from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, B* 39, 1-38.
- Disatnik, D. J., y Benninga, S. (2007). Shrinking the Covariance Matrix. *Journal of Portfolio Management*, 33(4), 55-63.
- Durbin, J., y Watson, G. S. (1951). Testing for Serial Correlations in Least Squares Regression. *Biometrika*, 38, 159-178.
- Elton, E. J. y Gruber M. J. (1973). Estimating the Dependence Structure of Share Prices. *Journal of Finance*, 12, 1203-1232.
- Elton, E. J., Gruber M. J., Brown, S. J., y Goetzmann, W.N. (2010). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. New Jersey: John Wiley & Sons Ltd.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation. *Econometrica*, 50, 987-1008.

- Engle, R. F. y Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error-correction: Representation, estimation and testing. *Econometrica*, 55(2), 251–276.
- Fabozzi, F. J., Focardi, S. M., y Kolm, P. M. (2006). *Financial Modeling of the Equity Market*. New Jersey: John Wiley & Sons Ltd.
- Fama, E. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of theory and Empirical Work. *Journal of Finance*, 25 (2), 383–417.
- Fama, E. y French, K. R. (1992). The cross-section of Expected Stock Returns. *The Journal of Finance*, Vol. XLVII, No. 2.
- Grabchak, M. y Samorodnitsky, G. (2010). Do financial returns have finite or infinite variance? A paradox and explanation. *Quantitative Finance*, 10 (8), 883-893.
- Graham, B y Dodd, D. L. (1934). *Security Analysis: The classic 1934 Edition*. New York: McGraw-Hill.
- Gujarati, D. N. (2004). *Basic Econometrics*. New York: McGraw-Hill.
- Jarque, C. M. y Bera, A. K. (1987). A test for normality of observations and regression residuals. *International Statistical Review*, 55, 163–172.
- Kallberg, J. G. y Ziemba, W. T. (1983). Comparison of Alternative Utility Functions in Portfolio Selection Problems. *Management Science*, 29(11), 1257-1276.
- Keynes, J. M. (1935). *The General Theory of employment, interest, and money*. New York: Harcourt, Brace and World.
- Kiechel, W. (2011). Strategy, Risk, and the Global Financial Crisis. *Balanced Scorecard Report, Article Reprint No. B1105A*, Harvard Business Publishing.
- Kourtis, A., Dotsis, G., y Markellos, R. N. (2012). Parameter uncertainty in portfolio selection: Shrinking the inverse covariance matrix. *Journal of Banking & Finance*, 36(9), 2522-2531.

- Lintner, J. (1965). The valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stocks Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47.
- Lutz, F. y Lutz, Vera (1951). *The theory of investment of the firm*. Connecticut: Greenwood Press.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 7, 77-91.
- Markowitz, H. y Levy H. (1979). Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance. *American Economic Review*, 69(3), 308-318.
- Merton, R. C. (1971). Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413.
- Merton, R. C. (1972). An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7.
- Mitchell, D. (2008). A Note on Rising Food Prices. *Policy Research Working Paper 4692*. Development Prospects Group. The World Bank.
- Modigliani, F. y Miller, M. (1958). The Cost of Capital, Corporation Finance and the theory of the Firm. *The American Economic Review*, 3, 261-297.
- Moldovan, I. (2011). Stock Markets Correlation: before and during the Crisis Analysis. *Theoretical & Applied Economics*, 18(8), 111-122.
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital market. *Econometrica*, 34.
- Ocampo, J. A. (2009) Impactos de la crisis financiera mundial sobre América Latina. *Revista CEPAL*, 97, 9-32.
- Ornstein, L. S. y Uhlenbeck, G. E. (1930). On the theory of Brownian Motion. *Physical Review*, 36, 823-841.
- Osborne, M. F. M. (1959). Brownian Motion in the Stock Market. *Operations Research*, 7, 145-173.

- Pareto, V. (1935). *The Mind and Society* [Trattato Di Sociologia Generale]. New York: Harcourt, Brace.
- Pratt, J. W. (1964). Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 32, 122-136.
- RiskMetrics™ (1966). *Technical document*, JP Morgan/Reuters, 4th ed., Morgan Guaranty Trust Company of New York.
- Ross, S. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 13 (3), 341–360.
- Samuelson, P. A. (1965). Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. *Industrial Management Review*, 6, 41–49.
- Samuelson, P. A. (1973). Mathematics of speculative prices. *Society of Industrial and Applied Mathematics Rev.*, 15, 1-42.
- Sandoval, L. y De Paula, I. (2011). Correlation of financial markets in times of crisis. *Inesper, Instituto de Ensino e Pesquisa*.
- Sharpe, W. F. (1963). A simplified Model for Portfolio Analysis. *Management Science*, 9, 227-293.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A theory of Market Equilibrium under conditions of Risk. *Journal of Finance*, 19.
- Sprott, D. A. (2000). *Statistical Inference in Science*. New York: Springer.
- Stevens, G. (2011). The Role of Finance. *Economic Record*, 87(276), 1-10.
- Temin, P. (2010). The Invention of Enterprise: Entrepreneurship from Ancient Mesopotamia to Modern Times. *Journal of Economic History*, 70(3), 772-773.
- Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *The Review of Economic Studies*, 25, 65-86.

Trejo, B., Nuñez, J. A. y Lorenzo, A. (2005). Distribución de los Rendimientos del Mercado Mexicano Accionario. *Estudios Económicos*, 21(1), 85-118.

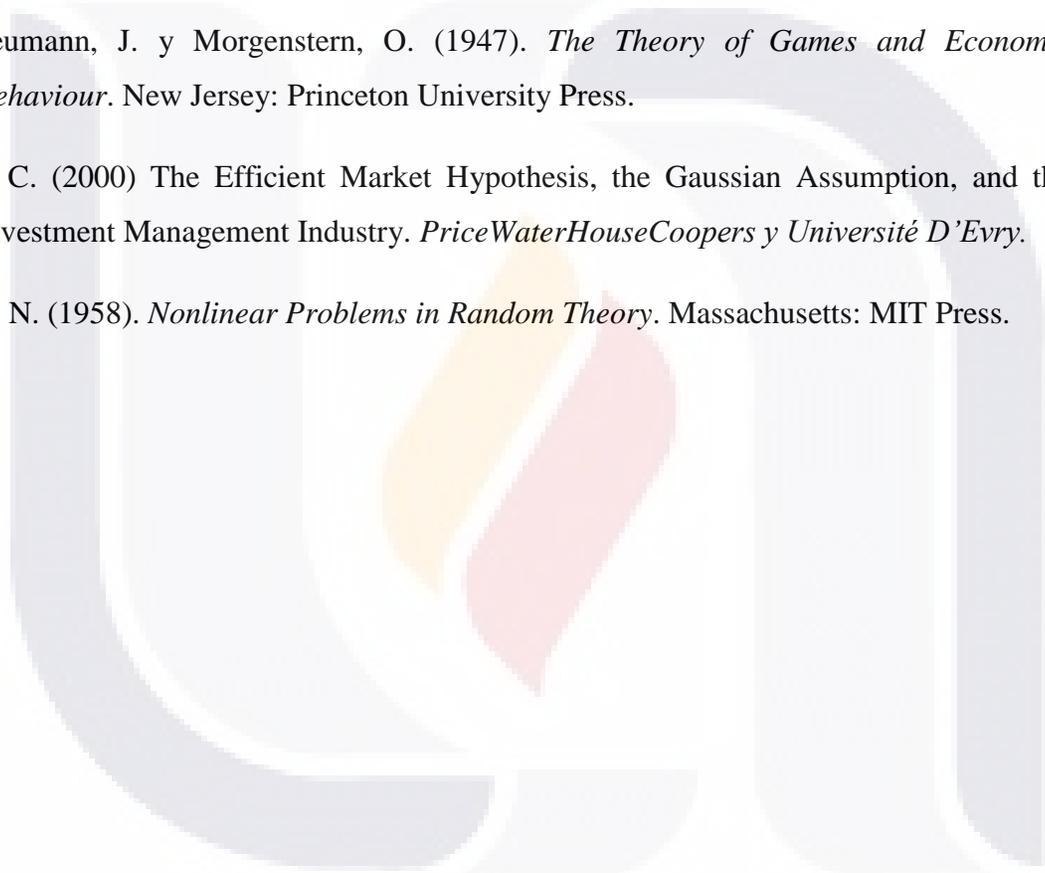
Treynor, J. L. (1961). Toward a Theory of Market Value of Risky Assets. *Artículo no publicado*. Arthur D. Little, Cambridge, MA.

Vasicek, O. A. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177-188.

von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1947). *The Theory of Games and Economic Behaviour*. New Jersey: Princeton University Press.

Walter, C. (2000) The Efficient Market Hypothesis, the Gaussian Assumption, and the Investment Management Industry. *PriceWaterHouseCoopers y Université D'Evry*.

Wiener, N. (1958). *Nonlinear Problems in Random Theory*. Massachusetts: MIT Press.



Anexo A

Inferencia de parámetros con datos faltantes mediante intervalo variable

Considere que el proceso de precios $\{S_t\}_{t \geq 0}$ se observa en los tiempos

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = T.$$

El total de días observados $n + 1$ puede diferir de acción en acción. Sea

$$h_i = t_i - t_{i-1}.$$

Si la serie de tiempo diaria no tiene datos faltantes, entonces

$$h_i = h = 1 \text{ día y } T = nh.$$

Sin pérdida de generalidad la ventana h corresponde a un día hábil. Los fines de semana así como los días festivos no cuentan como días faltantes. Es decir, de viernes a lunes transcurre un día hábil.

La correspondiente serie de log-rendimientos observada es

$$Z_i = \log \frac{S_t}{S_{t-1}} = \log S_t - \log S_{t-1}; \quad i = 1, \dots, n.$$

Por el modelo considerado

$$Z_i \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)h, \sigma^2h\right)$$

con

$$\alpha = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2.$$

Entonces

$$Z_i \sim N(\alpha(t_i - t_{i-1}), \sigma^2(t_i - t_{i-1})).$$

Notar que

$$\sum_{i=1}^n h_i = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = T,$$

donde n es el número de intervalos entre datos conocidos. En el caso de que no haya datos faltantes, $n + 1$ corresponde al número total de observaciones de la serie.

La función de densidad conjunta de (Z_1, \dots, Z_n) es

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_n) &= \prod_{i=1}^n f(z_i) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{h_i}} \right) \varphi\left(\frac{z_i - \alpha h_i}{\sigma\sqrt{h_i}} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{h_i}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 h_i} (z_i - \alpha h_i)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n h_i^{1/2} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} (z_i - \alpha h_i)^2}. \end{aligned}$$

Así, las funciones de verosimilitud y de log-verosimilitud quedan

$$L(\alpha, \sigma) = \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} (z_i - \alpha h_i)^2}$$

y

$$l(\alpha, \sigma) = -n \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} (z_i - \alpha h_i)^2.$$

Por lo que, maximizando sobre α y σ (derivando e igualando a cero),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu_z} l(\alpha, \sigma) &= \frac{2}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} (z_i - \alpha h_i) h_i \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (z_i - \alpha h_i) = \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n z_i - \alpha \sum_{i=1}^n h_i \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n z_i - \alpha (T - t_0) \right), \end{aligned}$$

despejando

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T - t_0} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{\log S_T - \log S_{t_0}}{T - t_0}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T - t_0} \log \frac{S_T}{S_0} \quad (\text{A.1})$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} l(\alpha, \sigma) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{2}{2\sigma^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} (z_i - \alpha h_i) h_i$$

$$= \frac{n}{\sigma^3} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(z_i - \alpha h_i)^2}{h_i} - \sigma^2 \right],$$

despejando

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(z_i - \hat{\alpha} h_i)^2}{h_i}. \tag{A.2}$$

Se concluye que, del modelo

$$\hat{\alpha} = \hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2,$$

por lo que el estimador del rendimiento $\hat{\mu}$, es:

$$\hat{\mu} = \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2, \tag{A.3}$$

y de la ecuación (A.1):

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T - t_0} \log \frac{S_T}{S_0}. \tag{A.4}$$

Asimismo, para la varianza se tiene de la ecuación (A.2) que el estimador es:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(z_i - \hat{\alpha} h_i)^2}{h_i}. \tag{A.5}$$

Anexo B

Desarrollo del modelo de estructura de correlación de índice simple

Ecuación básica:

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_M + e_i, \quad (\text{B.1})$$

para todas las acciones, $i = 1, \dots, m$, donde

μ_i : rendimiento de la acción,

α_i : valor esperado del componente del rendimiento de la acción que es independiente del desempeño del mercado (μ_M) y es una variable aleatoria,

β_i : sensibilidad del rendimiento de la acción a cambios en el rendimiento del mercado,

e_i : representa el elemento aleatorio o la incertidumbre de α_i .

Se asume lo siguiente:

1. La media de $e_i = E(e_i) = 0$.
2. e_i no está correlacionado con μ_M , es decir, $cov(e_i, \mu_M) = E[(e_i - 0)(\mu_M - \hat{\mu}_M)] = 0$.
3. Las acciones se relacionan solamente por su respuesta común al mercado $E(e_i, e_j) = 0$.

Se tiene entonces que el valor esperado del rendimiento de la acción μ_i , es, según la ecuación (B.1):

$$E(\mu_i) = E[\alpha_i + \beta_i \mu_M + e_i]$$

$$E(\mu_i) = E(\alpha_i) + E(\beta_i \mu_M) + E(e_i).$$

Si se asume que α_i y β_i son constantes y por la premisa 1, $E(e_i) = 0$, entonces

$$E(\mu_i) = \bar{\mu}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{\mu}_M. \tag{B.2}$$

La varianza del rendimiento de cualquier acción está dada por:

$$\sigma_i^2 = E(\mu_i - \bar{\mu}_M)^2,$$

sustituyendo (B.1) y (B.2)

$$\sigma_i^2 = E[(\alpha_i + \beta_i \mu_M + e_i) - (\alpha_i + \beta_i \bar{\mu}_M)]^2$$

$$\sigma_i^2 = E[\beta_i(\mu_M - \bar{\mu}_M) + e_i]^2$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 E(\mu_M - \bar{\mu}_M)^2 + 2\beta_i E[e_i(\mu_M - \bar{\mu}_M)] + E(e_i)^2$$

y por la premisa 2, $E[e_i(\mu_M - \hat{\mu}_M)] = 0$, se tiene que

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 E(\mu_M - \bar{\mu}_M)^2 + E(e_i)^2$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{e_i}^2. \tag{B.3}$$

La covarianza entre dos acciones se puede expresar como:

$$cov(\mu_i, \mu_j) = \sigma_{ij} = E[(\mu_i - \bar{\mu}_i)(\mu_j - \bar{\mu}_j)]$$

sustituyendo μ_i , $\bar{\mu}_i$, μ_j y $\bar{\mu}_j$, se tiene

$$\sigma_{ij} = E\{[(\alpha_i + \beta_i\mu_M + e_i) - (\alpha_i + \beta_i\bar{\mu}_M)][(\alpha_j + \beta_j\mu_M + e_j) - (\alpha_j + \beta_j\bar{\mu}_M)]\}$$

$$\sigma_{ij} = E[(\beta_i(\mu_M - \bar{\mu}_M) + e_i)(\beta_j(\mu_M - \bar{\mu}_M) + e_j)]$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_jE(\mu_M - \bar{\mu}_M)^2 + \beta_jE[e_i(\mu_M - \bar{\mu}_M)] + \beta_iE[e_j(\mu_M - \bar{\mu}_M)] + E(e_ie_j)$$

y dado que los tres últimos sumandos son cero, se tiene

$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_jE(\mu_M - \bar{\mu}_M)^2$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_j\sigma_M^2. \quad (\text{B.4})$$

Anexo C

Acción	Serie	Razón Social	Productos y Servicios
Sector: Grupos Diversificados			
ALFA	A	ALFA, S.A.B. DE C.V.	Alimentos refrigerados, petroquímica y fibras sintéticas, autopartes de aluminio, telecomunicaciones
GCARSO	A1	GRUPO CARSO, S.A. DE C.V.	Cables y conductores, hoteles y restaurantes, inmuebles y construcción e infraestructura
Sector: Servicios Aeroportuarios			
ASUR	B	GRUPO AEROPORTUARIO DEL SURESTE S.A.B. DE C.V.	Construcción y/o explotación de aeródromos civiles, administración y operación de servicios aeroportuarios
GAP	B	GRUPO AEROPORTUARIO DEL PACÍFICO, S.A.B. DE C.V.	Construcción y/o explotación de aeródromos civiles, administración y operación de servicios aeroportuarios
Sector: Comunicación (Medios)			
TLEVISA	CPO	GRUPO TELEVISA, S.A.	Distribución y transmisión de programas de televisión, televisión satelital, deportes, entretenimiento, noticias, venta de programación, venta de tiempo de publicidad
TVAZTCA	CPO	TV AZTECA, S.A. DE C.V.	Distribución y transmisión de programas de televisión, televisión satelital, deportes, entretenimiento, noticias, venta de programación, venta de tiempo de publicidad
Sector: Minerías			
AUTLAN	B	COMPAÑÍA MINERA AUTLÁN, S.A.B. DE C.V.	Exploración, extracción, producción y venta de minerales derivados del manganeso
GMEXICO	B	GRUPO MÉXICO, S.A. DE C.V.	Extracción y producción de minerales, cobre, zinc, plata, oro, plomo y molibdeno
PE	*	INDUSTRIAS PEÑOLES, S.A. DE C.V.	Extracción y producción de minerales y metales, plata, oro, cobre, zinc, cadmio, arsénico, ácido sulfúrico y sulfato de sodio
Sector: Cerveceras			
GMODELO	C	GRUPO MODELO, S.A.B. DE C.V.	Elaboración, distribución de cerveza y tiendas de conveniencia
FEMSA	UBD	FOMENTO ECONÓMICO MEXICANO, S.A.B. DE C.V.	Elaboración, distribución y venta de refrescos y cerveza y tiendas de conveniencia

Acción	Serie	Razón Social	Productos y Servicios
Sector: Infraestructura			
ICA	*	EMPRESAS ICA, S.A.B. DE C.V.	Construcción, agregados y puertos, desarrollo inmobiliario, hotelería y concesiones
IDEAL	B-1	IMPULSORA DEL DESARROLLO Y EL EMPLEO EN AMÉRICA LATINA, S.A.	Análisis, adquisición, estructuración y desarrollo de capital, financiamiento de proyectos a largo plazo de infraestructura, operación de autopistas de cuota
Sector: Siderurgia			
ICH	B	INDUSTRIAS CH, S.A.B. DE C.V.	Ángulos y soleras, barras forjadas, palanquilla, barras laminadas, tubería con costura, aceros especiales y perfiles comerciales
SIMEC	B	GRUPO SIMEC, S.A.B. DE C.V.	Acero líquido, aceros planos, perfiles estructurales, aceros comerciales, barras de acero, bola forjada
Sector: Vidrio, Papel, Química			
KIMBER	A	KIMBERLY-CLARK DE MEXICO, S.A.B. DE C.V.	Papel para escritura e impresión, papel higiénico, pañales desechables, servilletas, celulosa
MEXCHEM	*	MEXICHEM, S.A.B. DE C.V.	Productos químicos y petroquímicos, cloro, sosa cáustica, hipoclorito de sodio
VITRO	A	VITRO, S.A.B. DE C.V.	Envases de vidrio y plástico, frascos de vidrio, cristal flotado, vidrio plano volado, fibra de vidrio
Sector: Grupos Financieros			
GFINBUR	O	GRUPO FINANCIERO INBURSA, S.A.B. DE C.V.	Controladora de acciones de empresas de servicios financieros
GFNORTE	O	GRUPO FINANCIERO BANORTE, S.A.B. DE C.V.	Servicios financieros, arrendamiento de inmuebles, factoraje, almacenadora
Sector: Alimentos Procesados			
BIMBO	A	GRUPO BIMBO, S.A.B. DE C.V.	Pan blanco, bollería, pan dulce, pastelería, galletas, dulces y chocolates, mermeladas, cajeta, comida procesada, tortillas de maíz y harina de trigo
GRUMA	B	GRUMA, S.A.B. DE C.V.	Harina de maíz, tortillas, harina de trigo, frituras
ALSEA	*	ALSEA, S.A.B. DE C.V.	Distribución de queso y masa para pizzas, Domino's pizza en México y Brasil, Starbucks Coffee, El Pan Caliente, Burger King

Acción	Serie	Razón Social	Productos y Servicios
---------------	--------------	---------------------	------------------------------

Sector: Telecomunicaciones

AMX	L	AMÉRICA MÓVIL, S.A.B. DE C.V.	Telefonía móvil, telefonía local y de larga distancia, servicios de voz y datos
AXTEL	CPO	AXTEL, S.A.B. DE C.V.	Servicios de telefonía local, servicios de telefonía de larga distancia, transmisión de datos, internet para clientes de negocios y residenciales
TELMEX	L	TELÉFONOS DE MÉXICO, S.A.B. DE C.V.	Servicio telefónico local, de larga distancia, celular, servicio de directorios telefónicos, transmisión de datos, acceso a internet, radiolocalización, interconexión a operadores de larga distancia
TELECOM	A1	CARSO GLOBAL TELECOM, S.A.B. DE C.V.	Servicios de telecomunicaciones

Sector: Cementeras

CEMEX	CPO	CEMEX, S.A.B. DE C.V.	Cemento, concreto premezclado, agregados, clinker, cemento blanco
-------	-----	-----------------------	---

Sector: Distribución al Detalle

COMERCI	UBC	CONTROLADORA COMERCIAL MEXICANA, S.A.B. DE C.V.	Controladora de empresas de autoservicio, operación de restaurantes
ELEKTRA	*	GRUPO ELEKTRA, S.A. DE C.V.	Productos electrónicos, línea blanca, muebles para el hogar, electrodomésticos, arrendamiento de inmuebles y servicios financieros
GFAMSA	A	GRUPO FAMSA, S.A.B. DE C.V.	Muebles, electrodomésticos y línea blanca, servicios financieros
WALMEX	V	WAL-MART DE MEXICO, S.A.B. DE C.V.	Venta de artículos de consumo básico, comercialización de líneas de ropa y de productos alimenticios
SORIANA	B	ORGANIZACIÓN SORIANA, S.A.B. DE C.V.	Artículos básicos en alimentación, vestido, comercio al mayoreo y menudeo

Sector: Bebidas

ARCA	*	EMBOTELLADORAS ARCA, S.A.B. DE C.V.	Producción y comercialización de bebidas carbonatadas y no carbonatadas
KOF	L	COCA-COLA FEMSA, S.A.B. DE C.V.	Producción y comercialización de bebidas carbonatadas y no carbonatadas
CONTAL	*	GRUPO CONTINENTAL, S.A.B.	Controladora de embotelladores Coca-cola

Acción	Serie	Razón Social	Productos y Servicios
Sector: Construcción Vivienda			
ARA	*	CONSORCIO ARA, S.A.B. DE C.V.	Construcción de vivienda de interés social, tipo media, residencial y turística
URBI	*	URBI DESARROLLOS URBANOS, S.A.B. DE C.V.	Construcción, Promoción y venta de vivienda media, residencia y de interés social
HOMEX	*	DESARROLLADORA HOMEX, S.A.B. DE C.V.	Construcción de vivienda de interés social y media
GEO	B	CORPORACIÓN GEO, S.A.B. DE C.V.	Construcción de vivienda de interés social y media, diseño, desarrollo, construcción y venta de unidades habitacionales
HOGAR	B	CONSORCIO HOGAR, S.A.B. DE C.V.	Construcción de vivienda de interés social y promoción de desarrollos inmobiliarios
SARE	B	SARE HOLDING, S.A.B. DE C.V.	Construcción y comercialización de vivienda de interés social, media y residencial

Anexo D

Estadística Descriptiva de log-rendimientos de las Acciones y rendimientos de los Certificados de la Tesorería

Acción	No. Datos	Mínimo	Mediana	Media	Máximo	Desviación Estándar	Sesgo	Curtosis
ALFA	1,842	-15.55%	0.092%	0.100%	22.81%	2.25%	0.51	11.49
ALSEA	1,590	-14.17%	0.000%	0.111%	21.69%	2.37%	0.63	9.06
AMX	1,842	-13.74%	0.168%	0.136%	12.61%	2.09%	0.09	4.23
ARA	1,842	-23.73%	0.000%	0.044%	24.84%	2.38%	-0.50	18.74
ARCA	1,842	-6.40%	0.000%	0.047%	5.57%	1.31%	-0.02	2.50
ASUR	1,421	-13.91%	0.019%	0.076%	10.05%	2.13%	-0.15	3.39
AUTLAN	1,347	-31.58%	0.000%	0.111%	25.38%	3.54%	-0.34	15.46
AXTEL	1,097	-16.65%	0.000%	0.016%	18.73%	2.86%	0.42	6.76
BIMBO	1,842	-10.20%	0.073%	0.106%	13.04%	1.91%	0.19	3.78
CEMEX	1,842	-21.01%	0.046%	0.016%	23.81%	2.86%	0.04	11.27
COMERCI	1,842	-140.24%	0.000%	0.039%	43.81%	4.49%	-16.89	536.73
CONTAL	1,842	-9.89%	0.000%	0.041%	9.90%	1.95%	-0.08	3.37
ELEKTRA	1,842	-15.96%	0.054%	0.175%	19.04%	2.21%	0.33	6.23
FEMSA	1,842	-14.03%	0.051%	0.083%	12.58%	1.91%	-0.18	7.01
GAP	1,041	-14.99%	0.113%	0.040%	12.02%	2.35%	-0.23	3.25
GCARSO	1,842	-13.30%	0.028%	0.094%	21.95%	2.24%	0.41	8.40
GEO	1,842	-18.31%	0.095%	0.125%	16.17%	2.71%	-0.20	5.88
GFAMSA	985	-24.38%	-0.030%	0.007%	13.33%	3.33%	-0.50	7.53
GFINBUR	1,842	-7.85%	0.024%	0.102%	21.48%	2.06%	0.59	7.27
GFNORTE	1,842	-24.24%	0.081%	0.114%	27.02%	2.71%	0.09	13.45
GMEXICO	1,842	-18.41%	0.173%	0.182%	17.42%	2.88%	-0.24	5.36
GMODELO	1,842	-10.88%	0.032%	0.055%	8.44%	1.75%	-0.06	3.66
GRUMA	1,483	-89.38%	0.000%	0.020%	25.78%	3.48%	-10.87	298.89
HOGAR	1,842	-32.54%	0.000%	0.015%	29.57%	3.28%	0.68	18.75
HOMEX	1,467	-26.16%	0.016%	0.044%	25.07%	2.97%	0.01	11.48
ICA	1,842	-27.69%	0.000%	0.080%	29.57%	2.77%	0.56	19.15
ICH	1,386	-16.22%	0.000%	0.052%	12.86%	2.19%	-0.11	4.57
IDEAL	1,154	-13.22%	0.000%	0.084%	12.75%	2.67%	-0.04	4.24
KIMBER	1,842	-11.33%	0.047%	0.059%	14.07%	1.66%	0.18	6.14
KOF	1,842	-18.23%	0.000%	0.082%	10.31%	2.07%	-0.35	6.10
MEXCHEM	1,101	-19.88%	0.065%	0.200%	20.43%	2.61%	-0.27	11.25
PE	1,841	-15.73%	0.058%	0.144%	20.00%	3.15%	-0.07	4.58
SARE	1,637	-19.32%	0.000%	-0.020%	30.75%	2.79%	0.53	15.98
SIMEC	1,593	-36.66%	0.000%	0.069%	28.26%	3.74%	-0.59	12.58
SORIANA	1,842	-13.52%	0.085%	0.095%	11.79%	2.04%	-0.24	4.47
TELECOM	1,842	-12.18%	0.088%	0.091%	17.58%	2.14%	0.13	4.91
TELMEX	1,842	-7.87%	0.045%	0.036%	7.71%	1.61%	-0.12	2.48
TLEVISA	1,842	-8.14%	0.031%	0.067%	15.02%	1.83%	0.46	4.39
TVAZTCA	1,842	-19.42%	0.000%	0.073%	11.95%	1.87%	-0.35	10.39
URBI	1,504	-25.35%	0.071%	0.066%	17.21%	2.84%	-0.45	9.44
VITRO	1,842	-26.07%	0.000%	0.009%	26.72%	2.96%	0.13	12.95
WALMEX	1,842	-11.49%	0.078%	0.090%	13.19%	1.85%	0.05	4.00
IPC	1,842	-7.27%	0.167%	0.092%	10.44%	1.43%	0.10	5.55
CETE 28	383	4.14%	7.19%	6.98%	9.81%	1.50%	-0.23	-0.67
CETE 91	383	4.56%	7.37%	7.17%	10.08%	1.49%	-0.24	-0.68
CETE 182	383	4.67%	7.50%	7.35%	10.21%	1.41%	-0.35	-0.45

Anexo E

Código fuente del programa:

```
### Inferencia del modelo de Osborne-Samuelson (Black-Scholes-Merton),
### caso multivariado con posibles datos faltantes.
### Validación del modelo con pruebas de normalidad e independencia
### de la serie de log rendimientos (gráficas y analíticas).
### Estrategia de portafolio óptimo

### Contenido:
###1: Estimación de tasa de rendimiento y volatilidad
###2: Histogramas de serie de log rendimientos
###3: Gráfica de log rendimientos vs. su rezago
###3.1: Gráfica de residual al cuadrado vs. su rezago
###4: Gráfica de función de autocorrelación de log rendimientos
###5: Gráfica de función de autocorrelación de cuadrado de log rendimientos
###6: Estimación de matriz de correlación de m*m
###7: Estrategia de portafolio óptimo
###8: Papel de probabilidad de serie de log rendimientos
###9: Gráfica de dispersión de series de precios y de log rendimientos
###10 Prueba de Durbin-Watson
###11 Prueba de Jarque-Bera para probar la normalidad de la serie de precios diarios
###12 Prueba de Jarque-Bera para probar la normalidad de la serie de log-rendimientos

rm(list=ls()) #remueve todos los objetos de la memoria
datos<-read.table("D:\\Mis documentos\\TESIS\\Validación del modelo\\Precios Acciones
Datos.txt",header=TRUE)
edit(datos)
#str(datos) #Estructura de cualquier objeto de R
#structure(datos) #Estructura de cualquier objeto de R

n<-nrow(datos)-1 #el total de datos es n+1
m<-ncol(datos)-2 #el 1 ó 2 (dependiendo) es para no contar las columnas
'caso' e 'IPC' #las columnas 'caso' e 'IPC' son las últimas dos de la base

de datos
h<-1/252 #Nota: 252 es divisible por 12
#***: corregir el valor de "h" a uno realista, digamos

h=1/252.5
precios<-datos #como mínimo, en cada columna debe haber tres datos
#edit(precios)

###1: Estimación de tasa de rendimiento y volatilidad
```

```

alfa <- mi <- sigma2 <- rep(NA,m)
corr<-cov<-matrix(NA,m,m)

for (j in 1:m){
  p.aux<-na.omit(precios[,c(j,m+1)]) #la j-ésima acción
  la acción) y preserva la columna m+1 "caso" #elimina los 'NA' de la columna j (precios de
  nn<-nrow(p.aux) #número de días con precio, nn <= n+1 y
  regularmente se da la igualdad
  T<-(nn-1)*h #longitud de tiempo T (en años)

  #Estimación de alfa, mi y sigma2:
  alfa[j]<-log(p.aux[nn,1]/p.aux[1,1]) / T #estimación de alfa, donde alfa = mi -
  (1/2)sigma^2

  hh <- diff(p.aux[,2]) #distancia entre dos tiempos: h(i) = t(i)-t(i-1)
  (enteros) #la anterior instrucción justifica la segunda

  columna de p.aux
  Z <- diff(log(p.aux[,1])) #serie de log-rendimientos
  Z.aux <- Z^2 / hh / h #variable auxiliar
  sigma2[j] <- mean(Z.aux)-alfa[j]^2*h
  mi[j] <- alfa[j] + sigma2[j]/2
}

sigma<-sigma2^0.5
param.est<-cbind(alfa,mi,sigma)
rownames(param.est)<-colnames(datos)[1:m] #invoca en nombre de las acciones
edit(param.est)
windows(width=6.5, height=6.5)
par(mfrow=c(1,1))
plot(100*sigma,100*mi,panel.first =
grid(8,6,col="black"),ylim=c(0,100*0.6),xlab="volatilidad",
ylab="rendimiento",cex = 1,col="red",type="p",pch=16,cex.lab=1)
text(x=100*sigma, y=100*mi, labels=row.names(param.est), pos=1,cex=.5)

```

###2: Histogramas de serie de log rendimientos

```

windows(width=6.5, height=8.0)
par(mfrow=c(3,2))
seleccion<-c(3,8,19,38,40,42)
for (j in seleccion){ #en un futuro cercano cambiar por m#la j-ésima acción
  p.aux<-na.exclude(precios[,j]) #elimina los 'NA' de la columna j (precios de
  la acción)
  nn<-length(p.aux) #número de días con precio. Note que se
  cambia comando "length" por "nrow"

```

```

print(nn)
Z <- diff(log(p.aux)) #serie de log-rendimientos

###histograma
clases<-min(floor(sqrt(nn)),100) #número de intervalos de clase. A lo más
son 100.
hist<-hist(Z,nclass=clases,col="lightblue",xlab="",ylab="",main=colnames(datos)[j])
base<-hist$breaks[2]-hist$breaks[1] #longitud de los intervalos de clase
media<-alfa[j]*h
d.e.<-sigma[j]*sqrt(h)
curve(base*(nn-1)*dnorm(x,mean=media,sd=d.e.), add=TRUE, col="violet", lwd=2)
}

```

```

###3: Gráfica de log rendimientos vs. su rezago
### Esta gráfica equivale a la gráfica de residuales vs. su rezago,
### puesto que la serie de log rendimientos es un modelo lineal (de media constante) .
windows(width=6.5, height=8.0)

```

```

par(mfrow=c(3,2))
seleccion<-c(3,8,19,38,40,42)
for (j in seleccion){ #la j-ésima acción

  p.aux<-na.exclude(precios[,j]) #elimina los 'NA' de la columna j (precios de
la acción)
  nn<-length(p.aux) #número de días con precio. Note que se
cambia comando "length" por "nrow"
  Z <- diff(log(p.aux)) #serie de log-rendimientos
  plot(Z[1:(nn-2)],Z[2:(nn-1)],cex =
0.5,col="blue",xlab="",ylab="",main=colnames(datos)[j])
}

```

```

###3.1: Gráfica de residual al cuadrado vs. su rezago

```

```

windows(width=6.5, height=8.0)
par(mfrow=c(3,2))
seleccion<-c(3,8,19,38,40,42)
for (j in seleccion){ #la j-ésima acción

  p.aux<-na.exclude(precios[,j]) #elimina los 'NA' de la columna j (precios de
la acción)
  nn<-length(p.aux) #número de días con precio.
  Z <- diff(log(p.aux)) #serie de log-rendimientos
  media<-mean(Z)
  plot((Z[1:(nn-2)]-media)^2,(Z[2:(nn-1)]-media)^2,cex =
0.5,col="blue",xlab="",ylab="",main=colnames(datos)[j])
}

```

```

}
#gráfica de log-rendimientos al cuadrado

###4: Gráfica de función de autocorrelación de log rendimientos
windows(width=6.5, height=8.0)
par(mfrow=c(3,2))
seleccion<-c(3,8,19,38,40,42)
for (j in seleccion){
  p.aux<-precios[,j]
  nn<-length(p.aux)
  Z <- diff(log(p.aux))
  acf(Z,na.action=na.pass,lag.max<-20,ylim=c(-
0.1,0.4),xlab="rezago",ylab="autocorrelación",main=colnames(datos)[j])
}
#la j-ésima acción
#nota: aquí no se requiere quitar los días con NA
#número de días con precio.
#serie de log-rendimientos
#"na.pass" significa que toma en cuenta los datos faltantes (NA)
#advertencia: no usar "na.exclude" porque equivale a eliminar datos faltantes

```

```

###5: Gráfica de función de autocorrelación de cuadrado de log rendimientos
windows(width=6.5, height=8.0)

par(mfrow=c(3,2))
seleccion<-c(3,8,19,38,40,42)
for (j in seleccion){
  p.aux<-precios[,j]
  NA
  nn<-length(p.aux)
  Z <- diff(log(p.aux))
  Z<-Z**2
  acf(Z,na.action=na.pass,lag.max<-20,ylim=c(-
0.1,0.4),xlab="rezago",ylab="autocorrelación",main=colnames(datos)[j])
}
#la j-ésima acción
#nota: aquí no se requiere quitar los días con
#número de días con precio.
#serie de log-rendimientos al cuadrado
#advertencia: no usar "na.exclude" porque equivale a eliminar datos faltantes

```

```

###6: Estimación de matriz de correlación de m*m

mm<-ifelse(m>1,m,NA)
for (j in 1:mm){
  k<-j+1
  while(k <= mm){
    p.aux<-na.omit(precios[,c(j,k,m+1)])
  }
  nn<-nrow(p.aux)
  regularmente se da la igualdad
  T<-(nn-1)*h
}
#para garantizar que m>=2
#elimina los 'NA' de los precios. Se agrega la
columna de tiempos
#número de días con precio, nn <= n+1 y
#longitud de tiempo T (en años)

```

```
hh <- diff(p.aux[,3]) #distancia entre dos tiempos: h(i) = t(i)-t(i-1)
(enteros)
```

```
Z.j <- diff(log(p.aux[,1])) #serie de log-rendimientos
Z.k <- diff(log(p.aux[,2])) #serie de log-rendimientos
Z.aux <- Z.j*Z.k /hh / h #variable auxiliar
```

```
alfa.j<-log(p.aux[nn,1]/p.aux[1,1])
alfa.k<-log(p.aux[nn,2]/p.aux[1,2])
```

```
cov[j,k] <- (sum(Z.aux) - alfa[j]*alfa.k - alfa[k]*alfa.j + alfa[j]*alfa[k]*T)/(nn-1)
corr[j,k] <- corr[k,j] <- cov[j,k]/(sigma[j]*sigma[k])
k<-k+1
}
corr[j,j] <-1
}
corr
SIGSIG<-corr * sigma %%% t(sigma)
SIGSIG.inv<-solve(SIGSIG)
```

```
###7: Estrategia de portafolio óptima
r<-0.05 #tasa de rendimiento del bono bancario (constante)
r.vec<-rep(r,m)
```

```
pi<-100*SIGSIG.inv%%(mi-r.vec)
```

```
pi.sum<-sum(pi)
pi.pond<-100*pi/pi.sum
edit(cbind(param.est,pi,pi.pond))
par(mfrow=c(2,2))
plot(sigma,mi,cex = 1,col="red",type="p",ylim=c(0,0.6),pch=16)
text(x=sigma, y=mi, labels=row.names(param.est), pos=1,lwd=0.25,cex=0.5)
plot(pi,mi,cex = 1,col="red",type="p",ylim=c(0,0.6),pch=16)
text(x=pi, y=mi, labels=row.names(param.est), pos=1,lwd=0.25,cex=0.5)
plot(pi,sigma,cex = 1,col="red",type="p",ylim=c(0.2,0.6),pch=16)
text(x=pi, y=sigma, labels=row.names(param.est), pos=1,lwd=0.25,cex=0.5)
```

```
###8: papel de probabilidad de serie de log rendimientos
```

```
windows(width=6.5, height=8.0)
par(mfrow=c(3,2))
seleccion<-c(3,8,19,38,40,42)
for (j in seleccion){ #la j-ésima acción
```

```

    p.aux<-na.exclude(precios[,j])          #elimina los 'NA' de la columna j (precios de
la acción)
    Z <- diff(log(p.aux))                    #serie de log-rendimientos
    qqnorm(Z,main=colnames(datos)[j],col=4,cex=0.5,xlab="esperado",ylab="observado")
}

```

###9: Gráfica de dispersión de series de precios y de log rendimientos

```

seleccion<-c(3,8,19,38,40,42)
colores<-floor(precios$CASO/max(precios$CASO+1)*7)+1
pairs(precios[,seleccion], upper.panel = NULL,cex.labels =
1.25,cex=0.5,gap=0.25,col=palette()[colores])
#pairs(precios[,seleccion],upper.panel = NULL,cex.labels =
1.25,cex=0.5,gap=0.25,col="darkgreen")

```

```

Z<-matrix(NA,n,m+2)                        #matriz de log-rendimientos
colnames(Z)<-colnames(precios)             #invoca el nombre de las acciones
for (j in 1:(m+2)){
Z[,j]<-diff(log(precios[,j]))
}
pairs(Z[,seleccion],upper.panel = NULL,cex.labels =
1.25,cex=0.5,gap=0.25,col="darkgreen")

```

###10: Prueba de Durbin-Watson para la autocorrelación de la serie de log-rendimientos

Esto equivale a usar la serie de residuales, de hecho ambas series difieren sólo por una constante

Requiere paquete 'lmtest'

```

m<-ncol(datos)
m<-m-2
DW<-matrix(NA,m,2)
precios<-datos
for (j in 1:m){  ****en un futuro cercano cambiar por m #la j-ésima acción
    p.aux<-na.exclude(precios[,j])          #elimina los 'NA' de la columna j (precios de
la acción)
    Zd<- diff(log(p.aux))                    #serie de log-rendimientos
    DWT<-dwtest(Zd~1)
    DW[j,]<-as.numeric(DWT[c(1,4)])
}
DW

```

###11: Prueba de Jarque-Bera para probar la normalidad de la serie de precios diarios con base de datos Zi

```
### Requiere paquete 'fBasics'
```

```
m<-ncol(datos)
m<-m-2
JB<-rep(NA,m)
for (j in 1:m){ ****en un futuro cercano cambiar por m #la j-ésima acción
  Zi<-na.exclude(precios[,j]) #elimina los 'NA' de la columna j (precios de
la acción)
  Zd<- Zi #serie de precios
  JBT<-jarqueberaTest(Zd)
  JB[j]<-as.numeric(JBT@test[2])
}
JB
```

###12: Prueba de Jarque-Bera para probar la normalidad de la serie de log-rendimientos diarios con base de datos Zi

```
### Requiere paquete 'fBasics'
```

```
m<-ncol(datos)
m<-m-2
JB<-rep(NA,m)
for (j in 1:m){ ****en un futuro cercano cambiar por m #la j-ésima acción
  p.aux<-na.exclude(precios[,j]) #elimina los 'NA' de la columna j (precios de la
acción)
  Zd<- diff(log(p.aux)) #serie de log-rendimientos
  JBT<-jarqueberaTest(Zd)
  JB[j]<-as.numeric(JBT@test[2])
}
JB
```

Anexo F

Artículo publicado

Indexación:

ISSN 1537-2316

Key title: Proceedings, International Business and Economy Conference

Variant title(s): International Business and Economy Conference Proceedings

Variant title(s): IBEC

Place of publication: San Francisco, CA

Publisher: College of Business, San Francisco State University

Issuing body: International Business and Economy Conference.

Issuing body: San Francisco State University. College of Business.

DDC number: 337

Status: Currently published title

Start date: 2002

End date: 9999

Country: United States (USA)

Frequency: Annual

ISSN Centre: Library of the Congress of the United States of America

Type: Periodical

Alphabet: Basic roman

Language: English (ENG)

Media: CD-ROM or computer disk (laser-optical) (CD)

Web: <http://www.ibec-info.org/2012>; password: ibec_proceedings

AN APPLICATION OF THE MERTON-BLACK-SCHOLES (OSBORNE-SAMUELSON) CONTINUOUS TIME STOCHASTIC MODEL IN THE MEXICAN STOCK EXCHANGE

Manuel D. Sáinz Fernández
Universidad Autónoma de Aguascalientes, Universidad Panamericana at Aguascalientes,
México
msainz@up.edu.mx

Netzahualcóyotl Castañeda Leyva
Universidad Autónoma de Aguascalientes, México
ncastane@correo.uaa.mx

Erick Treviño Aguilar
Universidad de Guanajuato, México
erick.trevino@ugto.org

Carlos Omar Trejo-Pech
Universidad Panamericana at Guadalajara, México
ctrejo@up.edu.mx

Abstract

In the last 30 years quantitative finance has contributed to the understanding of the behavior and simulation of diverse financial markets. An important and widely used financial quantitative tool has been the continuous time model known as The Merton-Black-Scholes Model (Merton (1973), Black and Scholes (1973)) or Osborne-Samuelson (Osborne (1959), Samuelson (1965)). In this study the model is implemented in the Mexican Stock Exchange market. Parameters of the model are based on maximum likelihood criteria for complete data time series (Castañeda et al (2008)) as well as for missing data, developing a new approach for incomplete data estimation of parameters. In order to analyze the robustness, the parameters are compared on a dynamic time interval analysis. The risk-free bond's return is modeled using the continuous time, stochastic model of interest rate of Vasicek (1977), also known as Ornstein-Uhlenbeck (Cvitanic and Zapatero (2003)), and the data corresponds to the Mexican Treasury Bills for 91-day maturity. Moreover, portfolios are optimized using a power utility function for various investors' risk profiles, assuming deterministic and stochastic control. The model is tested in portfolios holding stocks included in the Mexican Stock Exchange index and the rate of return and volatility of optimal portfolios are compared with the index. Some optimal portfolios outperform the index in terms of lower volatility and better returns which make them more attractive for the conservative investor who usually is advised by portfolio managers to invest in tracking index stock funds.

Keywords: *Stochastic models, Merton-Black-Scholes, Vasicek, optimal portfolios, Mexican Stock Exchange market, Mexican Stock Exchange index.*

Introduction

In this study we provide results of optimal portfolios holding stocks taken from a sample of the Mexican Stock Exchange index under stochastic control with parameters determined for the complete and incomplete data. Merton-Black-Scholes (MBS) (Merton (1973), Black and Scholes (1973)) and Vasicek (1977) models are used to calculate parameters to optimize portfolio strategies. Inference of parameters is based on maximum likelihood estimation (MLE). The quality of estimators is compared on a dynamic time interval analysis. In order to maximize investor's wealth with different risk profiles, a power utility function is considered in the MBS model. In this study, data from publicly traded Mexican firms and 91-day maturity Mexican Treasury Bills (CT's) annual returns are used to estimate rates of return, volatility and the risk-free bond return, respectively. In the aggregate, risk and returns parameters estimated with maximum likelihood estimator (MLE) are consistent with the risk-return theoretical framework. The optimal portfolios are also consistent with an investor's rationale and risk profile. Some optimal portfolios outperform the index, providing the investor with explicit solutions for the optimal trading strategy.

Merton-Black-Scholes Model-Equities

The dynamics of prices of risky assets follows an m -dimensional Brownian Motion (B.M.) (Bachelier (1900)), also known as a Weiner process or diffusion model with drift.

At $t \in [0, T]$, and final time $T > 0$, it is denoted:

S_t^1 : Price of risky asset 1,
 \vdots
 S_t^m : Price of risky asset m

The price model is an m -dimensional generalization of the Merton-Black-Scholes (MBS) model, according to the following Stochastic Differential Equation (SDE):

$$dS_t^i = S_t^i(\mu_i dt + \sigma_{i1}dW_t^1 + \dots + \sigma_{im}dW_t^m) \quad (1)$$

for $i = 1, \dots, m$

where

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \dots & \sigma_{mm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_t = \begin{pmatrix} W_t^1 \\ \vdots \\ W_t^m \end{pmatrix}; \quad t \geq 0$$

are the vector of stock returns, the volatility or uncertainty matrix and a B.M. or stochastic vector, m -dimensional, respectively.

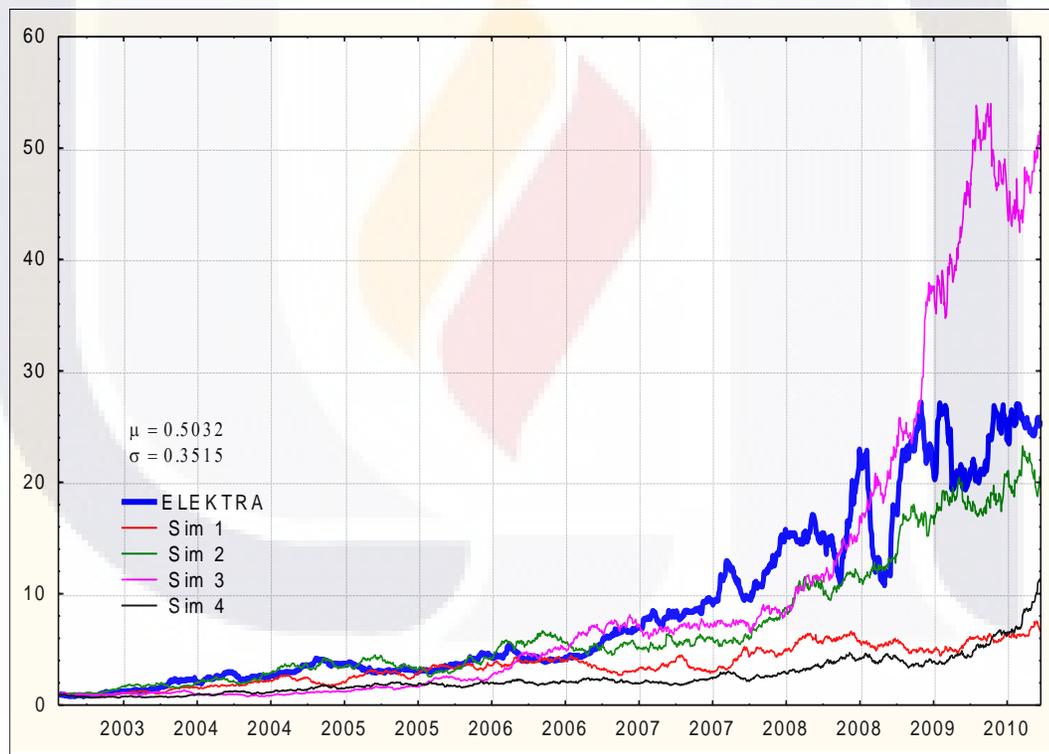
It is assumed that the parameters of the model remain constant over time. The solution of the SDE (1) comes from Itô's lemma (Castañeda *et al* (2008)):

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}; \quad t \geq 0. \quad (2)$$

In (2) S_t is positive, (i.e. non negative prices), the distribution of S_t/S_{t-1} is log-normal, and W_t has a normal distribution, with mean zero and variance t .

An application of the model is shown in Figure 1 where four simulations are run in Excel with ELEKTRA's stock estimated parameters using equation (2). The randomness of the simulations is expected given the stochastic effect of the B.M. in the model.

FIGURE 1.
ELEKTRA's relative stock prices (dark) and four simulations using the MBS model (Equation (2)) with ELEKTRA's estimated parameters.



Estimation of parameters of the MBS model

The model (1) has $m + m(m + 1)/2$ different parameters corresponding to:

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \text{ and } \sigma\sigma'$$

The method of maximum likelihood estimation (MLE) is used for inference of parameters μ and σ from time series of prices S_t .

It is considered that in the price process $\{S_t\}_{t \geq 0}$, $n + 1$ equidistant time steps are observed:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T,$$

$$t_i = ih, \quad i = 0, \dots, n \quad \text{then} \quad h = \frac{T}{n},$$

and from Friday to Monday, it is assumed that there exists only one time step, h .

The log-returns series $\{Z_i\}_{i=1}^n$ are defined as:

$$Z_i = \log \frac{S_t}{S_{t-1}} = \log S_{ih} - \log S_{(i-1)h}.$$

Complete data estimation

Assuming complete data, the MLE of μ and σ^2 , are the mean and variance of the sample respectively. According to the model (Castañeda *et al* (2008)), the MLE of μ and σ^2 satisfy the equations:

$$\hat{\mu}_Z = (\hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2)h \quad \text{and} \quad \hat{\sigma}_Z^2 = \hat{\sigma}^2 h,$$

where $\hat{\mu}_Z, \hat{\sigma}_Z^2$ are the sample mean and variance of the series $\{Z_i\}_{i=1}^n$ respectively, since:

$$\hat{\mu}_Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} = \frac{1}{n} \log \frac{S_t}{S_0}$$

and

$$\hat{\sigma}_Z^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \hat{\mu}_Z)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2 - \hat{\mu}_Z^2$$

$$\hat{\sigma}_Z^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log^2 \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} - \frac{1}{n^2} \log^2 \frac{S_T}{S_0}.$$

Substituting, the parameters estimators are determined as:

$$(3)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\mu}_Z}{h} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_Z^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}_Z^2}{h} \quad (4)$$

Incomplete data estimation

Sometimes, the data series of stock prices $\{S_t\}_{t \geq 0}$ have some *missing data*. This situation may happen due to lack of market liquidity or because stock exchange authorities make the decision to stop trading the stock because irregularities or anomalies in financial information, dim trading or problems between shareholders or management that may affect the company's stock pricing. A simpler approach is developed for parameters inference assuming missing data and is described as follows.

Variable h approach

The approach for the inference of parameters with missing data assumes h , the period of time between two consecutive prices, becomes variable, and takes different values depending on the number of missing data between two prices. Under complete data, h is equivalent to one day. If one price is missing, h represents two days. Then h becomes h_i , and takes different values depending on the number of missing data between two consecutive price quotes.

Note that now $h_i = t_i - t_{i-1}$ and

$$\sum_{i=1}^n h_i = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = T.$$

Inference of parameters is done using MLE, getting the following estimators:

$$\hat{\mu}_Z = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n Z_i = \frac{1}{T} \log \frac{S_T}{S_0}$$

$$\hat{\sigma}_Z^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{Z_i^2}{h_i} - \hat{\mu}_Z^2 T \right)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\mu}_Z}{h} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_Z^2 \quad (7)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}_Z^2}{h} \quad (8)$$

See Appendix I for the mathematical demonstration of formulae.

Vasicek Model-Fixed-income Securities

The dynamics of a bond or a savings account $\{B_t\}_{t \geq 0}$, with $r(t)$ return or interest rate is given by the SDE

$$dB_t = rB_t dt ; \quad t \geq 0, \tag{9}$$

$$\frac{dB_t}{B_t} = r dt,$$

and the solution is

$$B_t = B_0 e^{\int_0^t r(s) ds}. \tag{10}$$

The continuous-time models of fixed-income markets focuses on the dynamics of the so-called *short rate* or *instantaneous rate*, r . More precisely r is modeled as a diffusion process also. Then, the risk-free asset can be modeled as the interest rate of a bank savings account or the rate of return of a riskless bond.

The Vasicek model is one of the most widely known continuous-time model for the dynamics of the interest rate of the one-factor type. (Cvitanic and Zapatero (2004)).

The stochastic process $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ is Vasicek if it satisfies the SDE

$$dY_t = -\lambda(Y_t - \mu)dt + \sigma dW_t, \quad t \gg 0 \tag{11}$$

$$Y_0 = y \in \mathbf{R}, \text{ and } \lambda > 0, \mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0.$$

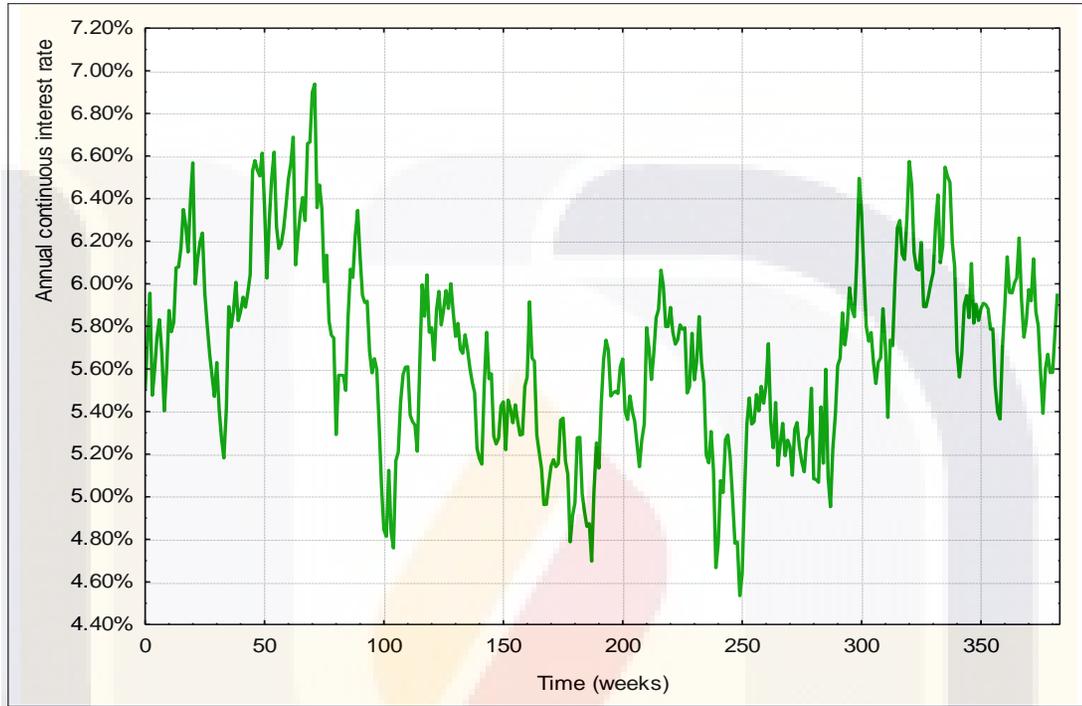
This model satisfies the property called mean reversion and the parameter λ is called the *rate of mean reversion*. Mean reversion is a property that interest rates display in the real world. Parameter μ is named *long term mean*. A drawback of the Vasicek model is that the interest rate can become negative. For the complete mathematics of the solution, see Castañeda *et al* (2008).

The solution of (11) turns out to be:

$$Y_t = e^{-\lambda t} y + (1 - e^{-\lambda t})\mu + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW_s \tag{12}$$

A simulation of the dynamics of the interest rate is shown in Figure 2. The reversion to the mean can be appreciated since the interest rate varies within a band.

FIGURE 2
Simulation of Mexican Treasury Bills dynamics using the Vasicek model and estimated parameters based on historical data of 91-day maturity issue



Estimation of parameters of the Vasicek model

The inference of parameters (λ, μ, σ) is done similarly to MBS parameters estimation (MLE), assuming the process $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ is observed in the equidistant times $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, of the interval $[0, T]$, with very small $h = (T/n) > 0$.

Assuming the process is observed in equidistant time, the Euler scheme is applied to the SDE (11)

$$Y_{t+h} - Y_t \approx -\lambda(Y_t - \mu)h + \sigma(W_{t+h} - W_t)$$

or

$$Y_{t+h} - Y_t \approx \lambda\mu h + (1 - \lambda h)Y_t + \sigma(W_{t+h} - W_t).$$

If we redefine the time series of the interest rate data as the series $\{R_i\}_{i=0}^n$ and $R_i = Y_{ih}$; $i = 0, 1, \dots, n$,

the last equation can be written as:

$$R_i \approx \beta_0 + \beta_1 R_{i-1} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (13)$$

where

$$\beta_0 = \lambda\mu h, \quad \beta_1 = 1 - \lambda h, \quad \sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2 h$$

and $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ is a *gaussian white noise*, a set of independent and identically distributed stochastic variables with a standard normal distribution

$$\varepsilon_i \sim i.i.d. N(0,1).$$

Since Equation (13) is a linear model, parameters $(\beta_0, \beta_1, \sigma_\varepsilon)$ are estimated with least square linear regression and the MLE of parameters of the Vasicek process prove to be:

$$\hat{\lambda}_r = -\frac{1}{h} \log \tilde{\beta}_1, \quad \hat{\mu}_r = \frac{\tilde{\beta}_0}{1 - \tilde{\beta}_1}, \quad \hat{\sigma}_r^2 = \frac{2\tilde{\lambda}_r \tilde{\sigma}_\varepsilon^2}{1 - \tilde{\beta}_1^2} \quad (14)$$

Portfolio model

An investment portfolio of multiple risky assets and a risk free asset is modeled. However, for the purpose of describing the model, the univariate case, one risky asset and the bond, is assumed. The price process $\{S_t\}_{t \geq 0}$, and interest rate process $\{Y_t\}_{t \geq 0}$, are modeled according the dynamics described in previous sections. Therefore the market parameters:

- r : instantaneous interest rate
- μ : instantaneous rate of return of the stock
- σ : volatility of the stock

are all known.

Assuming the investor's objective is to maximize his wealth, he has to make decisions continuously to define his investment strategy, weighting and allocating each financial asset at every moment of time t of the interval $[0, T]$, $T > 0$, being able to rebalance his portfolio at every moment $t \in [0, T]$.

Assuming an investor with positive initial capital $X_0 = x > 0$, $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ is the wealth process at every moment $t \in [0, T]$.

If π_t is the proportion of wealth that is invested in the risky asset, the investor allocates $\pi_t X_t$ amount of money to the risky asset while the complement $(1 - \pi_t) X_t$ is invested in the risk-free bond,

$$X_t = \pi_t X_t + (1 - \pi_t) X_t.$$

The wealth process $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ is stochastic because it depends on the changing conditions of the market but the strategy is determined by the investor.

The portfolio strategy $\{\pi_t\}_{0 \leq t \leq T}$ is *admissible* if the corresponding wealth process is non negative, i.e. $X_t \geq 0, 0 \leq t \leq T$. In case $X_t(\omega) = 0$, the wealth process becomes an absorbent state and any type of investment stops.

The portfolio strategy at time t is the column vector:

$$\boldsymbol{\pi}_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^m); \quad t \in [0, T],$$

and

$$X_t = \pi_t^0 X_t + \pi_t^1 X_t + \dots + \pi_t^m X_t.$$

where π_t^i is the proportion of the total wealth X_t invested in the i -th risky asset, for each asset $i = 1, \dots, m$, and π_t^0 is the proportion of capital invested in the bond or bank account.

For *self-financing* strategies the capital at time t is the sum of all investments in each asset, risky and risk-free, in other words,

$$\pi_t^0 + \pi_t^1 + \dots + \pi_t^m = 1.$$

This means that during $[0, T]$ the capital gained is reinvested only in the two available financial securities. The investor is not allowed to withdraw or consume funds from the portfolio or to make injections of capital into the portfolio during the investment period. Though this condition seems restrictive to the convenience and sound decision making process of the investor, it is an important assumption that helps quantify and make comparisons of the efficiency of portfolio strategies.

Furthermore, the model allows *short selling*, $\pi_t^i < 0$ and *borrowing*, $\pi_t^0 < 0$, assuming that the cost of financing is r , the interest rate, thus assuming there is not any spread between saving and lending rates.

Considering the previous assumptions and equations, the wealth process can be described by the SDE

$$dX_t = \pi_t X_t \frac{dS_t}{S_t} + (1 - \pi_t) X_t \frac{dB_t}{B_t}.$$

Substituting equations (1) and (9)

$$dX_t = X_t(r + (\mu - r)\pi_t)dt + \dots + \pi_t \sigma dW_t, \quad (15)$$

and the solution is

$$X_t = X_0 e^{rt + ((\mu - r)\pi_t - \frac{1}{2}\sigma^2\pi_t^2)t + \sigma\pi_t W_t}; \quad t \geq 0. \quad (16)$$

Portfolio optimization

The objective is to maximize the expected utility function $EU(X)$, being $U(x)$ a power or logarithmic utility function, defined as:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} x^\gamma & x > 0, \quad 0 \neq \gamma < 1 \\ \log x & x > 0, \quad \gamma = 0 \end{cases}$$

where γ is the risk propensity coefficient. If $\gamma \approx -1$, the investor is risk-averse and if $\gamma \approx 1$, the investor is a risk-taker.

In this paper the stochastic control for the optimization of the portfolio is assumed and dynamic programming is applied using the power utility function. However, to have a better understanding of the model and the portfolio strategy, a solution under deterministic control is considered first, which means constant allocation of investment to assets over time, and, for simplicity of the demonstration, the univariate case is assumed.

Deterministic control

Thus, π_t is constant, i.e. $\pi_t = \pi, 0 \leq t \leq T$ and the solution (16) becomes:

$$X_t = x e^{(r+\pi(\mu-r)-\frac{1}{2}\pi^2\sigma^2)t+\pi\sigma W_t} . \quad (17)$$

The investor will determine his portfolio strategy maximizing the utility function

$$J(\pi, x) = EU(X_t) = E \left\{ \frac{1}{\gamma} X_T^\gamma \right\}; \quad \pi \in \mathbf{R}, \quad x > 0,$$

where the dynamics of the wealth process is given by equation (15) with initial wealth $X_0 = x > 0$, and $\pi \in \mathbf{R}$, constant. Then, the objective function is:

$$J(\pi) = EU(X_T) = \frac{1}{\gamma} E X_T^\gamma.$$

Substituting equation (15)

$$J(\pi) = \frac{x^\gamma}{\gamma} e^{\gamma r T} \times e^{[(\mu-r)\pi - \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma^2\pi^2]\gamma T} .$$

Note that the maximization problem does not depend on the initial wealth x , simplifying the objective function as

$$\tilde{J}(\pi) = \frac{1}{\gamma} e^{[(\mu-r)\pi - \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma^2\pi^2]\gamma T}.$$

Applying elementary calculus,

$$\tilde{J}'(\pi) = (\mu - r - (1 - \gamma)\sigma^2\pi)T \tilde{J}(\pi),$$

and

$$\tilde{J}''(\pi) = ((\mu - r - (1 - \gamma)\sigma^2\pi)^2\gamma T - (1 - \gamma)\sigma^2)T \tilde{J}(\pi).$$

Solving for

$$\tilde{J}'(\pi) = 0,$$

the optimal solution is

$$\hat{\pi} = \frac{\mu - r}{(1 - \gamma)\sigma^2} \quad (18)$$

and

$$\tilde{J}''(\hat{\pi}) = -(1 - \gamma)\sigma^2 T \tilde{J}(\hat{\pi}) < 0,$$

that is to say that π in (18) is the unique global maximum.

Solution (18) implies, for example, that the optimal portfolio will hold primarily risky assets if:

$$\mu \gg r, \quad \sigma \approx 0, \quad \text{or} \quad \gamma \approx 1$$

which is in accordance with a rational risk-taker investor. Instead, the investment in the risky asset is discouraged, increasing investment in the riskless bond when:

$$\mu \leq r, \quad \sigma \gg 0, \quad \text{or} \quad \gamma \ll 1.$$

Furthermore, the model short-sells the stock in the unusual case of $\mu < r$.

Stochastic control

From EDE (15) and for $0 \neq \gamma < 1$, the objective function is:

$$J(t, \pi, x) = E \left\{ \frac{1}{\gamma} X_T^\gamma \mid X_t = x \right\}; \pi \in R, x > 0$$

Since the solution is a dynamic representation, i.e. depending on time t , the only solution, based on the dynamic programming principle, satisfies the Hamilton Jacobi Bellman (HJB) equation and the optimal portfolio strategy is:

$$\hat{\pi}_u = \pi^*(u, X_u) = \frac{\mu - r}{(1 - \gamma)\sigma^2}; u \in [t, T].$$

Note that this strategy is the same under deterministic control (18) and the practical interpretation is accordingly similar. (Castañeda *et al* (2008)).

Multivariate optimal portfolio

For the optimization of a multivariate portfolio, i.e. holding multiple risky assets and a risk-free bond, the mathematics are the same as for the univariate case but the optimal solution involves vectors and matrices:

$$\hat{\pi}_u = \pi^*(u, X_u) = \frac{1}{(1 - \gamma)} (\sigma\sigma')^{-1} (\mu - r); u \in [t, T]. \quad (19)$$

This optimal strategy implies, at every moment, a constant assignment of wealth to each risky asset S_t . Usually the strategy favors those assets with higher returns, while the risk aversion coefficient $(1 - \gamma)$ and uncertainty, represented by the square matrix $\sigma\sigma'$, inhibit investment in risky assets, channeling wealth to the risk-free bond.

Data and Methodology

Data base and methodology of estimation of MBS model parameters

Daily stock prices are obtained from INFOSEL, a Mexican data base that is widely used by stock brokers. An initial data screening is performed based on visual analysis of charts in order to eliminate stocks with low or minimum market liquidity. This is made using STATISTICA, a software for data analysis.

Historic daily quotes along 20 years for active firms are inspected. From this initial analysis, 54 stocks are selected, out of 247, the total number of stocks listed in the Mexican Stock Exchange in the analyzed period.

A second, more detailed, scrutiny of data, which included the analysis of daily trading volume, reduced the sample to 40 stocks and the Mexican stock market index. The total number of observations is 1,843 prices for each stock and the index, from 01/02/03 to 04/23/10. Figure 3 shows a sample of 10 selected stocks illustrating a wide variety of closing prices and performance.

For comparison purposes, stock prices are scaled to the same initial relative price of 1, as of 01/02/03 (day of first observation in the data sample), and those stocks with missing price that day are scaled to the same relative price of 28.76 (the highest of the sample), as of 04/23/10. Taking relative prices, (Figure 4) the time series are separated in two groups, 28 stocks that are listed since 01/02/03 and 12 that have their Initial Public Offering (IPO) after that date. Tables 1 and 2 present these stocks' tickers.

In order to compare the volatility of the data series, stocks are classified by visual inspection into 3 groups: low, medium and high volatility. Figure 5 illustrates these differences with 3 selected stocks.

A final classification is made regarding the continuity of daily prices since only 20 stocks and the Mexican Stock Market index have complete data over the analyzed time interval (1,843 time series).

TABLE 1
Tickers of stocks quoting from 01/02/2003

1 ARA	8 HOGAR	15 VITRO	22 SIMEC
2 ARCA	9 ICA	16 ALFA	23 SORIANA
3 CEMEX	10 KIMBER	17 BIMBO	24 TELECOM
4 COMERCI	11 KOF	18 GCARSO	25 WALMEX
5 CONTAL	12 TELMEX	19 GEO	26 AMX
6 FEMSA	13 TLEVISA	20 GFINBUR	27 GMEXICO
7 GMODELO	14 TVAZTCA	21 GFNORTE	28 ELEKTRA

TABLE 2
Tickers of stocks with IPO's after 01/02/2003

1 ALSEA	4 GAP	7 HOMEX	10 PE
2 ASUR	5 GFAMSA	8 ICH	11 SARE
3 AXTEL	6 GRUMA	9 IDEAL	12 URBI

FIGURE 3
Sample of daily closing prices of 10 stocks from 2003 to 2010



FIGURE 4
Sample of stocks with scaled prices to 1 (2003) and 28.73 (2010)



FIGURE 5
Sample of three stocks (scaled prices) with high, medium and low volatilities



Parameters μ and σ , mean and standard deviation (return and volatility), are determined according to Equations (5) and (6) for complete data and (11) and (12) for incomplete data, depending on the stock continuity of price series. The calculations are made using log-returns Z_i .

Robustness analysis of parameters

A dynamic time interval analysis is done in order to have an empirical proof of the quality of the estimated parameters. The methodology consists in calculating, using the model parameters estimators, daily annual rates of return $\hat{\mu}_i, i \in \{0,1, \dots, n\}$, from the first price observation, going forward in time to the the last observation, $\hat{\mu}_i^F$, and going backward from the last to the first observation, $\hat{\mu}_i^B$, and comparing both returns with the estimated rate of return $\hat{\mu}$, calculated for the complete time interval. The analysis is done plotting the three estimators and visually determining how $\hat{\mu}$ compares with $\hat{\mu}_i^F$ and $\hat{\mu}_i^B$. Also, an indicator of robustness is proposed, calculated as an *average deviation* $\bar{\alpha}$, between $\hat{\mu}$ and $\hat{\mu}_i^F$, and $\hat{\mu}$ and $\hat{\mu}_i^B$, using the formula:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}) \tag{20}$$

The analysis of the results, shown in Figure 9 and Table 4 led to propose a new estimator, weighting μ_i^F and μ_i^B , for a fixed index $i \in \{0,1, \dots, n\}$, according to the formula:

$$\hat{\mu}_i = \delta \hat{\mu}_i^F + (1 - \delta) \hat{\mu}_i^B; 0 \leq \delta \leq 1.$$

Two particular cases of this estimator are:

$$\hat{\mu}_i = \hat{\mu}_i^B, \text{ for } \delta = 0$$

and

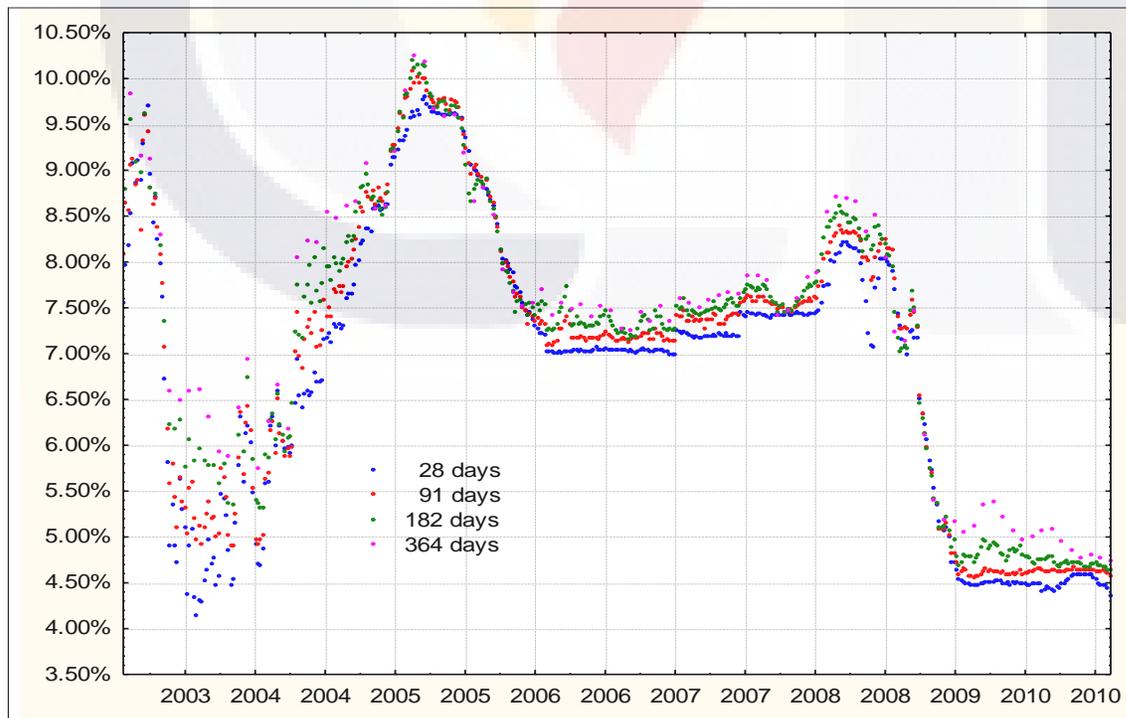
$$\hat{\mu}_i = \hat{\mu}_i^F, \text{ for } \delta = 1.$$

It is important to mention that $\hat{\mu}_i$ represents the weighting of two independent estimators of μ , since they are calculated from different time intervals. The determination of the index i and the weight factor δ , is considered for future research.

Data base and methodology of estimation of Vasicek model parameters

Regarding interest rates, Mexican Treasury Bill (CT) returns are taken from Mexican Central Bank (BM) data bases from 01/03/03 to 04/23/10. The CT is a widely used reference rate in México. BM offers the CT's through a close auction every week. Issues are usually for maturities of 28, 91, 182 and 364 days. In this study, 91-day maturity is used since its behavior showed the highest return with relative low volatility. Figure 6 shows historical data series of Mexican Treasury Bills.

FIGURE 6
Data series of Mexican Treasury Bills returns for different maturities



Time series of nominal rate of return of CT are adjusted to instantaneous rate of return using the equivalence relation of nominal to continuous rates:

$$e^r = \left(1 + \frac{R_n}{n}\right)^n,$$

clearing r

$$r = n \ln \left(1 + \frac{R_n}{n}\right)$$

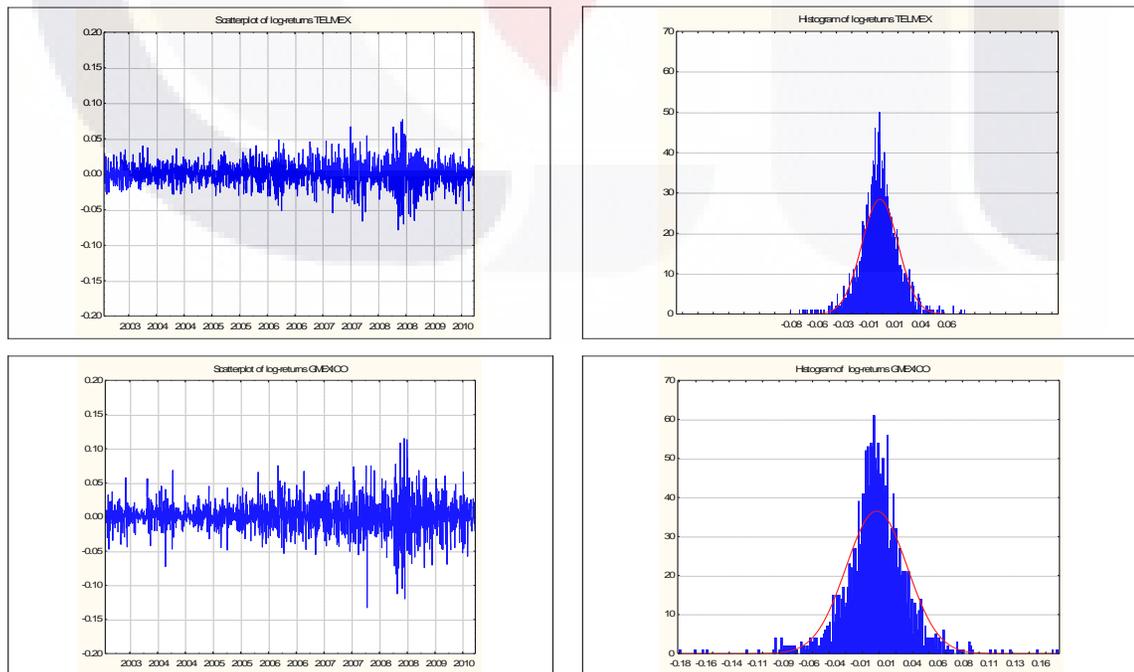
The estimation of parameters β_0 , β_1 , and σ_ε of Equation (11) is implemented using the regression analysis mode of STATISTICA software, and the estimator of r , the instantaneous interest rate, and its volatility are calculated from Equation (12).

Results

Results of estimation of parameters of MBS model for stock prices.

Figure 7 shows scatterplots and histograms of log-returns of two selected stocks, TELMEX and GMEXICO. It can be noticed in the graphs that GMEXICO's log-returns are more volatile and that log-returns of both securities follow a normal distribution function, an important assumption of the model.

FIGURE 7
Scatterplots and histograms of log-returns of TELMEX and GMEXICO

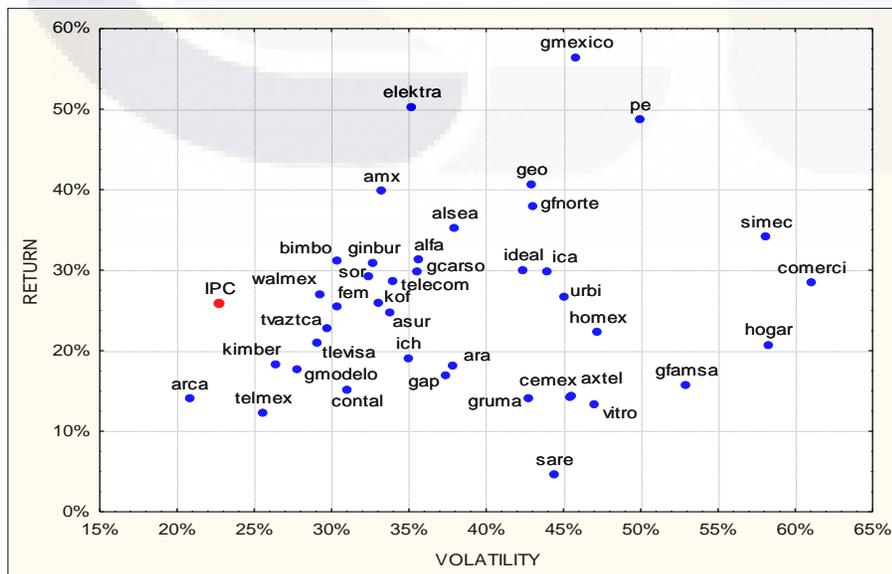


Results of estimation of μ and σ are shown in Table 3 and plotted in Figure 8. Parameter $h = 1/252$, represents the time step, i.e. one day.

TABLE 3
Estimation of parameters μ and σ for 40 stocks and the Mexican Stock Exchange index

	Ticker	Return (μ)	Volatility (σ)		Ticker	Return (μ)	Volatility (σ)
1	SARE	4.71%	44.39%	22	KOF	25.99%	33.00%
2	TELMEX	12.28%	25.55%	23	URBI	26.71%	45.04%
3	VITRO	13.32%	46.96%	24	WALMEX	26.97%	29.28%
4	ARCA	14.04%	20.79%	25	COMERCI	28.50%	60.99%
5	GRUMA	14.19%	42.71%	26	TELECOM	28.62%	33.96%
6	CEMEX	14.25%	45.44%	27	SORIANA	29.22%	32.41%
7	AXTEL	14.47%	45.49%	28	ICA	29.84%	43.97%
8	CONTAL	15.12%	30.96%	29	GCARSO	29.91%	35.55%
9	GFAMSA	15.71%	52.90%	30	IDEAL	30.04%	42.39%
10	GAP	16.99%	37.33%	31	GINBUR	30.94%	32.68%
11	GMODELO	17.78%	27.74%	32	BIMBO	31.21%	30.39%
12	ARA	18.22%	37.82%	33	ALFA	31.43%	35.63%
13	KIMBER	18.38%	26.41%	34	SIMEC	34.21%	58.10%
14	ICH	19.11%	34.97%	35	ALSEA	35.26%	37.93%
15	HOGAR	20.79%	58.22%	36	GFNORTE	38.02%	43.02%
16	TLEVISA	21.02%	29.02%	37	AMX	39.89%	33.23%
17	HOMEX	22.32%	47.21%	38	GEO	40.72%	42.94%
18	TVAZTCA	22.88%	29.72%	39	PE	48.77%	49.97%
19	ASUR	24.79%	33.73%	40	ELEKTRA	50.32%	35.15%
20	FEMSA	25.56%	30.39%	41	GMEXICO	56.43%	45.78%
21	IPC	25.76%	22.76%				

FIGURE 8
Return and volatility of 40 stocks and the Mexican Stock Exchange index



Stocks like ALSEA, AMX and ELEKTRA have very high return and medium volatility and GMEXICO, PE, GEO and GFNORTE achieved also high returns but high volatility. Other stocks like SARE, GRUMA, CEMEX, AXTEL, VITRO and GFAMSA perform poorly regarding return and had high volatility and others like SIMEC, COMERCI and HOGAR, show medium and low returns and extremely high volatility. The Mexican Stock Exchange index yield medium (average) return and low volatility, which demonstrates the effect of diversification to reduce risk.

Dynamic time interval analysis

Results of the analysis are shown in Figure 9 and 10 for a sample of four stocks. It can be seen that dynamic interval rates of return, $\hat{\mu}_i^F$, and $\hat{\mu}_i^B$ approximate and in various intervals equal the return calculated for the complete time interval, $\hat{\mu}$, especially when the intervals are not close to the extreme data (first and last observations), where volatility of returns is higher due to the smaller size of the interval, either forward or backward. The average deviation $\bar{\alpha}$, calculated with Equation (20) is shown in Table 4. The results, for the selected four stocks, show that $\bar{\alpha}$ takes relative low values, which makes the estimation of $\hat{\mu}$ a robust estimation in comparison with dynamic interval estimators $\hat{\mu}_i^F$, and $\hat{\mu}_i^B$.

TABLE 4
Average deviation ($\bar{\alpha}$) of rate of return $\hat{\mu}$ with respect to $\hat{\mu}_i^F$, and $\hat{\mu}_i^B$

Ticker	Forward	Backward
BIMBO	-3.93%	5.36%
WALMEX	3.61%	1.98%
IPC	3.99%	-3.61%
ALFA	9.06%	3.64%

FIGURE 9
Relative price of BIMBO and WALMEX and dynamic interval analysis

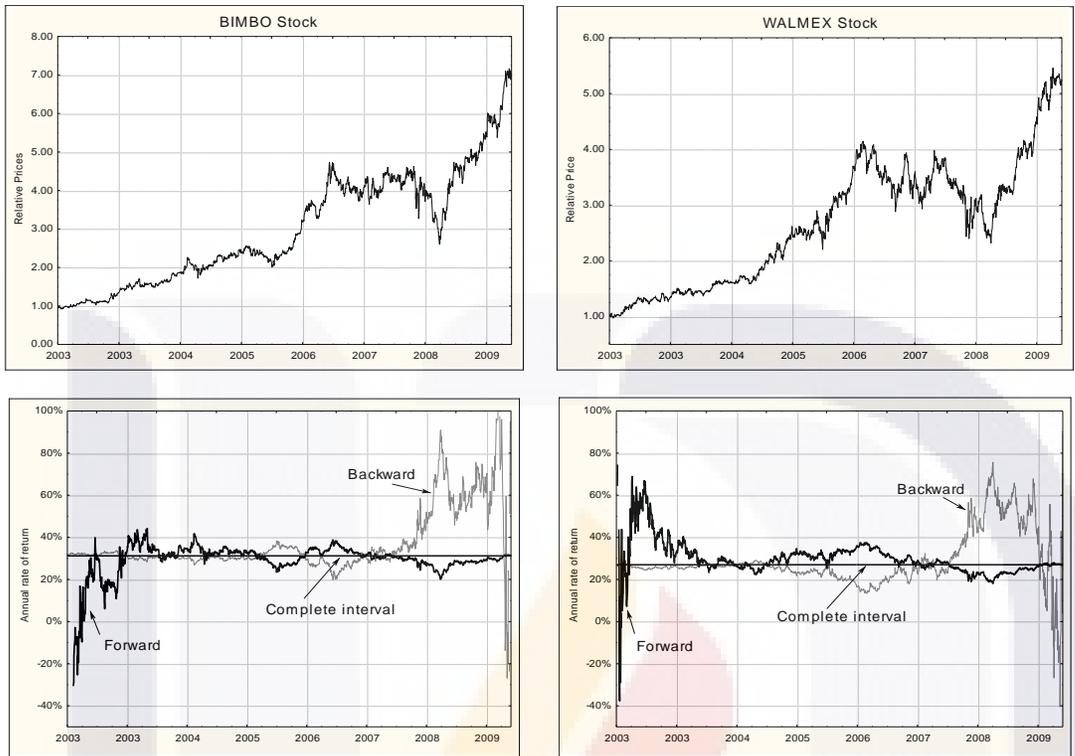
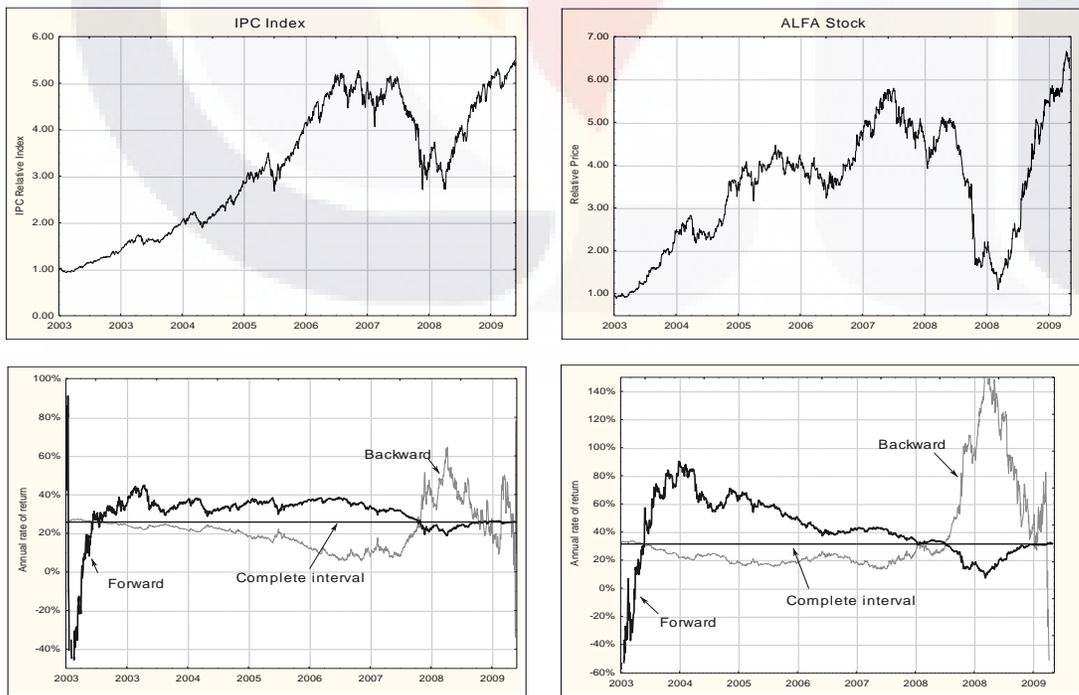


FIGURE 10
Relative IPC index and price of ALFA and dynamic interval analysis



Interest rate estimation using Vasicek model.

The results of the estimation of the instantaneous interest rate and its volatility are given in Table 5.

TABLE 5
Instantaneous and nominal interest rate and volatility

	Instantaneous	Nominal
$\hat{\mu}_r$	5.55%	5.70%
$\hat{\sigma}_r$	1.43%	

Results of the multivariate portfolio optimization under stochastic control

To compare optimal portfolios with the Mexican Stock Exchange index, the same stocks of the index are held in the portfolios. Stocks on the Mexican index and weights as of 03/23/2011 (Table 6) are analyzed. Since some new stocks in the index have less than four years trading, BOLSA and COMPART are eliminated and in order to have data available for all stocks, time interval for the portfolio analysis is limited to four years of price series, from 04/18/2007 to 04/23/2011.

TABLE 6
Stocks in the Mexican Stock Exchange index as of 03/23/2011, excluding BOLSA and COMPART

1 ALFA	3.91%	12 GAP	1.14%	23 KIMBER	2.02%
2 AMX	25.23%	13 GCARSO	1.37%	24 MEXCHEM	1.49%
3. ARA	0.32%	14 GEO	0.86%	25 PE	2.47%
4 ASUR	0.91%	15 GFAMSA	0.16%	26 SORIANA	0.50%
5 AUTLÁN	0.14%	16 GFINBUR	2.61%	27 TELMEX	2.46%
6 AXTEL	0.41%	17 GFNORTE	4.02%	28 TLEVISA	6.75%
7 BIMBO	2.24%	18 GMEXICO	8.53%	29 TVAZTCA	0.43%
8 CEMEX	5.01%	19 GMODELO	2.24%	30 URBI	0.64%
9 COMERCI	0.33%	20 GRUMA	0.33%	31 WALMEX	12.40%
10 ELEKTRA	2.40%	21 HOMEX	0.64%		
11 FEMSA	5.56%	22 ICA	0.84%		

Market Portfolio and the Capital Market Line

The Market Portfolio (MP) is calculated with the MBS model, assuming short selling, a risk free rate, $r = 5.55\%$ and $\pi_r = 0$. The Capital Market Line (CML) is plotted in Figure 11, using coordinates calculated in Table 7 for a range of proportions of the MP (π_s) from 0% to 130%.

TABLE 7
Optimal portfolios on the CML

π_s	π_r	μ_p	σ_p
0%	100%	5.5%	0%
20%	80%	25%	8%
40%	60%	44%	17%
80%	20%	83%	33%
90%	10%	93%	38%
100%	0%	103%	42%
110%	-10%	112%	46%
120%	-20%	122%	50%
130%	-30%	132%	54%

Global Minimum Variance portfolio

The Global Minimum Variance portfolio (GMV) is calculated from the formula derived by Merton (1971) and the resulting mean and variance are shown in Table 8 and plotted in Figure 11.

TABLE 8
Global Minimum Variance portfolio

μ_p	σ_p
26%	23%

Optimal portfolios with MBS model

Optimal portfolios are calculated for different values of the risk propensity coefficient γ . Portfolios are located along the Capital Market Line, depending on the value of γ . Return and volatility are shown in Table 9 for different values of γ and plotted in Figure 11.

TABLE 9
Portfolios calculated with the MBS model and optimized using the power utility function for different γ , the risk propensity coefficient

γ	μ_p	σ_p	π_s	π_r
-0.8	313%	133%	317%	-217%
-1	274%	116%	277%	-177%
-4	113%	46%	111%	-11%
-6	82%	33%	79%	21%
-8	65%	26%	62%	38%
-10	54%	21%	50%	50%
-20	31%	11%	26%	74%
-60	14%	4%	9%	91%
-500	7%	0%	1%	99%

Comparison of optimal portfolios and the Mexican Stock Exchange index

The return and volatility of the Mexican Stock Exchange index (Table 10) are calculated with the same methodology and the weights of each stock are taken from the Mexican Stock Exchange index (IPC) as of 03/23/2011 (Table 6). Since the IPC is an index, optimal portfolios are calculated with non-negative weights, i.e. not allowing for short selling of stocks and assuming $\pi_r = 0$. Table 11 shows a sample of three portfolios with less volatility of the Mexican Stock Exchange index and higher return. These portfolios are calculated maximizing Sharpe (1963) ratio, since the MBS optimal solution permits short selling. Both, the Mexican Stock Exchange index and these three optimal portfolios are plotted in Figure 11, and weights, return and volatility optimal Portfolio 1 are compared with the Mexican Stock Exchange index weights, return and volatility, in Table 12.

TABLE 10
Return and volatility of Mexican Stock Exchange index

μ_p	σ_p
24%	28%

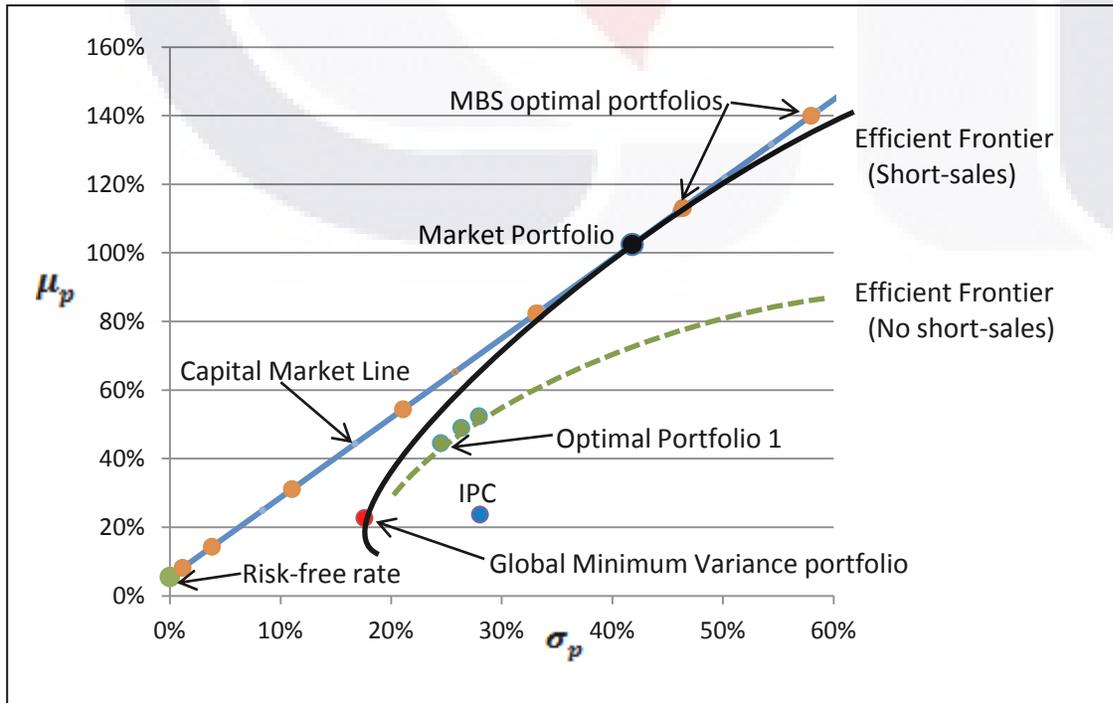
TABLE 11
Return and volatility of three optimal portfolios (No short selling)

Portfolio	μ_p	σ_p
1	45%	25%
2	49%	26%
3	52%	28%

TABLE 12
Mexican Stock Exchange and optimal portfolio weights, returns and volatility

	IPC $\mu_p = 24\%$ $\sigma_p = 28\%$	Portfolio 1 $\mu_p = 45\%$ $\sigma_p = 25\%$		IPC $\mu_p = 24\%$ $\sigma_p = 28\%$	Portfolio 1 $\mu_p = 45\%$ $\sigma_p = 25\%$
1 ALFA	3.91%	0.00%	17 GFNORTE	4.02%	0.00%
2 AMX	25.23%	0.00%	18 GMEXICO	8.53%	0.00%
3 ARA	0.32%	0.00%	19 GMODELO	2.24%	3.61%
4 ASUR	0.91%	8.33%	20 GRUMA	0.33%	0.00%
5 AUTLÁN	0.14%	10.40%	21 HOMEX	0.64%	0.00%
6 AXTEL	0.41%	0.00%	22 ICA	0.84%	0.00%
7 BIMBO	2.24%	5.59%	23 KIMBER	2.02%	12.63%
8 CEMEX	5.01%	0.00%	24 MEXCHEM	1.49%	22.98%
9 COMERCI	0.33%	0.00%	25 PE	2.47%	0.00%
10 ELEKTRA	2.40%	21.71%	26 SORIANA	0.50%	0.00%
11 FEMSA	5.56%	0.00%	27 TELMEX	2.46%	0.00%
12 GAP	1.14%	0.00%	28 TLEVISA	6.75%	0.00%
13 GCARSO	1.37%	0.00%	29 TVAZTCA	0.43%	0.00%
14 GEO	0.86%	0.00%	30 URBI	0.64%	0.00%
15 GFAMSA	0.16%	0.00%	31 WALMEX	12.40%	1.68%
16 GFINBUR	2.61%	13.07%			

FIGURE 11
Optimal portfolios, the Mexican Stock Exchange index, the Global Minimum Variance portfolio and the Market portfolio



Conclusions

The results of modeling stock prices in the Mexican Stock Exchange with the Merton-Black-Scholes model are encouraging. Data from publicly traded Mexican firms are calibrated and, in the aggregate, risk and return parameters estimated with MLE procedures, are consistent with the risk-return theoretical framework. The calibration of the data means that a very detailed and careful data filtering process is followed, along with a test of the robustness of the estimated parameters through an empirical dynamic time interval analysis. A weighted estimator is proposed for future research. Regarding missing data, two different approaches, using MLE, are developed for the estimation of parameters.

The MBS model optimal portfolios are located along the Capital Market Line, depending on the risk aversion of the investor. They showed very high rates of return, due to the short selling feature.

For the purpose of comparison with the Mexican Stock Exchange index, optimal portfolios are determined including the restriction of not allowing for short sales so that only positive or zero weights for each stock is permitted. It is important to mention that these portfolios outperformed the Mexican Stock Exchange index in terms of higher returns and lower volatility, which make them more attractive for the risk averse investor. Portfolio managers usually advise and encourage risk averse customers to invest in tracking index stock funds, which are mistakenly qualified as the safest and most profitable portfolios, preventing investors to increase their return on investment and even taking lower risk exposure.

Appendix I

Parameters inference with missing data

Assume the price process $\{S_t\}_{t \geq 0}$ is observed at time series

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T.$$

If daily time series has no missing data, then

$$h = t_i - t_{i-1} = 1 \text{ day}.$$

It is important to mention that h is related to working days only so that holidays and weekends are not considered missing data days and it is also assumed that there exists one day step from Friday to Monday. The series of log-returns are

$$Z_i \triangleq \log \frac{S_t}{S_{t-1}} = \log S_t - \log S_{t-1}; i = 1, \dots, n,$$

According to the model, the distribution of Z_i is

$$Z_i \sim N\left(2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)h, 2\sigma^2h\right)$$

with

$$\mu_z = \left(\mu - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)h$$

and

$$h_i = t_i - t_{i-1}.$$

Note that

$$\sum_{i=1}^n h_i = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = T.$$

The joint probability density function of (Z_1, \dots, Z_n) is

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_n) &= \prod_{i=1}^n f(z_i) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{h_i}}\right) \varphi\left(\frac{z_i - \mu_z h_i}{\sigma\sqrt{h_i}}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{h_i}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 h_i}(z_i - \mu_z h_i)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n h_i^{1/2} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i}(z_i - \mu_z h_i)^2}. \end{aligned}$$

The likelihood and log-likelihood functions are,

$$L(\mu_z, \sigma) = \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i}(z_i - \mu_z h_i)^2}$$

and

$$l(\mu_z, \sigma) = -n \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} (z_i - \mu_z h_i)^2.$$

Deriving and equating to zero,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mu_z} l(\mu_z, \sigma) &= \frac{2}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} (z_i - \mu_z h_i) h_i, \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu_z h_i) = \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n z_i - \mu_z \sum_{i=1}^n h_i \right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n z_i - \mu_z T \right)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \sigma} l(\mu_z, \sigma) &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{2}{2\sigma^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} (z_i - \mu_z h_i) h_i \\
&= \frac{n}{\sigma^3} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(z_i - \mu_z h_i)^2}{h_i} - \sigma^2 \right].
\end{aligned}$$

Clearing $\hat{\mu}_z$,

$$\hat{\mu}_z = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{T} (\log S_T - \log S_0),$$

$$\hat{\mu}_z = \frac{1}{T} \log \frac{S_T}{S_0}$$

and according to the model

$$\hat{\mu}_z = (\hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2) h,$$

then, the estimator of $\hat{\mu}$ is

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\mu}_z}{h} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2,$$

and for the sample variance

$$\hat{\sigma}_z^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(z_i - \hat{\mu}_z h_i)^2}{h_i}$$

$$\hat{\sigma}_z^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{h_i} - \hat{\mu}_z^2 T \right).$$

This equation is obtained from

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{(z_i - \hat{\mu}_z h_i)^2}{h_i} &= \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{h_i} - 2\hat{\mu}_z \sum_{i=1}^n z_i + \hat{\mu}_z^2 \sum_{i=1}^n h_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{h_i} - 2\hat{\mu}_z (T\hat{\mu}_z) + \hat{\mu}_z^2 T \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{h_i} - \hat{\mu}_z^2, \end{aligned}$$

and the estimator for the variance is

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}_z^2}{h}$$

References

- Louis Bachelier, (1900) “Théorie de la speculation”, Ann. Sci. École Norm.Sup. 17, 21-86.
Theory of Speculation, in P.H. Cootner, editor. The random character of stock market prices, Ann. Sci. École Sup., 1018.
- Fischer S. Black, and Myron S. Scholes, (1973) “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, Journal of Political Economy, 81, 637-659.
- Netzahualcóyotl Castañeda-Leyva, Leonel Ramón Pérez-Hernández and Silvia Rodríguez-Narciso, (2008) Métodos estocásticos en finanzas I y II, Aportaciones Matemáticas. Comunicaciones 39, 3-78: Sociedad Matemática Mexicana 2008.
- Jaksa Cvitanic and Fernando Zapatero, (2004) Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- Robert C. Merton, (1971) “Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model”, Journal of Economic Theory ,3, 373-413.
- M.F.M. Osborne, (1959) “Brownian Motion in the Stock Market”, Operations. Research, 7, 145-173.
- Paul A. Samuelson, (1965) “Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly”, Industrial Management Review, 6, 41-49.

William F. Sharpe, (1963) “A simplified Model for Portfolio Analysis”, Mangement Science, 9.

Oldrich A. Vasicek, (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure. Journal of Financial Economics, 5(2), 177-188.

Norbert Weiner, (1958) Nonlinear Problems in Random Theory: MIT Press & Wiley.

