

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DE AGUASCALIENTES

CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS  
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

TESIS  
CONFIABILIDAD EN MANTENIMIENTO DE SISTEMAS  
MULTI-ESTADO

PRESENTA  
L.M.A. Evelyn Jade Hernández Ramos

PARA OBTENER EL GRADO  
MAESTRO EN CIENCIAS EXACTAS, SISTEMAS Y DE LA  
INFORMACIÓN EN EL ÁREA DE ESTADÍSTICA

TUTOR  
Dr. Angel Eduardo Muñoz Zavala

COMITE TUTORAL  
Dr. Rogelio Salinas Gutiérrez  
Dr. Enrique Raúl Villa Diharce

Aguascalientes, Ags. Junio del 2012

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

M. EN C. MARTHA CRISTINA GONZÁLEZ DÍAZ  
DECANO DEL CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS  
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES  
P R E S E N T E


Estimada M. en C. González:

Por este medio le comunico que estoy de acuerdo, como miembro del comité sinodal, para que se realice la defensa de la tesis "**Confiabledad en Mantenimiento de Sistemas Multi-estado**" presentada por la alumna L.M.A. Evelyn Jade Hernández Ramos como requisito para obtener el grado de Maestro en Ciencias Exactas, Sistemas y de la Información en el área de Estadística de la Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Sin otro particular por el momento, aprovecho el presente para enviarle un cordial saludo y quedo a sus órdenes.

A T E N T A M E N T E  
"SE LUMEN PROFERRE"

AGUASCALIENTES. AGS., A 29 DE MAYO DE 2012



DR. ANGEL EDUARDO MUÑOZ ZAVALA  
DEPARTAMENTO DE ESTADISTICA

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES

**M. EN C. MARTHA CRISTINA GONZÁLEZ DÍAZ**  
**DECANO DEL CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS**  
**P R E S E N T E**

**Estimada M. en C. González:**

Por este medio le comunico que estoy de acuerdo, como miembro del comité sinodal, para que se realice la defensa de la tesis "**Confiabilidad en Mantenimiento de Sistemas Multi-estado**" presentada por la alumna **L.M.A. Evelyn Jade Hernández Ramos** como requisito para obtener el grado de Maestro en Ciencias Exactas, Sistemas y de la Información en el área de Estadística.

Sin otro particular por el momento, aprovecho el presente para enviarle un cordial saludo y quedo a sus órdenes.

**A T E N T A M E N T E**

**"SE LUMEN PROFERRE"**

**AGUASCALIENTES. AGS., A 29 DE MAYO DE 2012**



**DR. ENRIQUE VILLA DIHARCE**

**DEPARTAMENTO DE ESTADISTICA**

**CENTRO DE INVESTIGACION EN MATEMATICAS, A. C.**

**M. EN C. MARTHA CRISTINA GONZÁLEZ DÍAZ**  
**DECANO DEL CENTRO DE CIENCIAS BÁSICAS**  
**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES**  
**P R E S E N T E**

**Estimada M. en C. González:**

Por este medio le comunico que estoy de acuerdo, como miembro del comité sinodal, para que se realice la defensa de la tesis "**Confiabilidad en Mantenimiento de Sistemas Multi-estado**" presentada por la alumna **L.M.A. Evelyn Jade Hernández Ramos** como requisito para obtener el grado de Maestro en Ciencias Exactas, Sistemas y de la Información en el área de Estadística en la Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Sin otro particular por el momento, aprovecho el presente para enviarle un cordial saludo y quedo a sus órdenes.

**A T E N T A M E N T E**

**"SE LUMEN PROFERRE"**

**AGUASCALIENTES. AGS., A 29 DE MAYO DE 2012**



**DR. ROGELIO SALINAS GUTIERREZ**  
**DEPARTAMENTO DE ESTADISTICA**  
**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DE AGUASCALIENTES

Centro de Ciencias Básicas

L.M.A. EVELYN JADE HERNÁNDEZ ROMOS  
ALUMNO (A) DE LA MAESTRÍA EN CIENCIAS  
EXACTAS, SISTEMAS Y DE LA INFORMACIÓN,  
P R E S E N T E .

Estimado (a) alumno (a) Hernández:

Por medio de este conducto me permito comunicar a Usted que habiendo recibido los votos aprobatorios de los revisores de su trabajo de tesis y/o caso práctico titulado: "CONFIABILIDAD EN MANTENIMIENTO DE SISTEMAS MULTI-ESTADO", hago de su conocimiento que puede imprimir dicho documento y continuar con los trámites para la presentación de su examen de grado.

Sin otro particular me permito saludarle muy afectuosamente.

ATENTAMENTE  
Aguascalientes, Ags., 30 de mayo de 2012  
"SE LUMEN PROFERRE"  
LA DECANO

M. en C. MARTHA CRISTINA GONZÁLEZ DE



c.c.p.- Archivo  
MCGD/jajda



## AGRADECIMIENTOS

Agradezco infinitamente a Dios por estar siempre conmigo y durante la elaboración de la presente tesis, de no haber sido así, no lo hubiera podido lograr.

A mi madre, quien sembro en mí la semilla de superación y persistencia.

A mi esposo y mis hijos por el interés y el apoyo recibido de ellos en todo momento.

A mi tutor el Dr Angel Eduardo Muñoz Zavala, por su confianza, orientación y dedicación.

Así como a mis maestros y compañeros, por su amistad, comprensión y sustento.

Sin olvidar a la Universidad Autonoma de Aguascalientes, cuyo apoyo fué esencial en la realización de éste trabajo y así avanzar en mi preparación profesional.

## RESUMEN

Los Sistemas Multi-Estado MSS son los más apegados a la realidad y por consiguiente de gran importancia, un sistema no es suficiente que cumpla las especificaciones y criterios de calidad establecidos sino que además es necesario que tengan un buen desempeño durante su tiempo de vida. El interés radica en la disponibilidad del MSS, que esto nos lleva al mantenimiento del sistema, es decir, políticas de mantenimiento en donde consideraremos reparaciones mínimas, reemplazamiento y redundancia de los elementos que integran al sistema.

La disponibilidad del sistema, significa que debe cumplir ciertos requisitos de rentabilidad y confiabilidad, lograrlo es algo complicado, pues existen elementos del sistema que tienen diferentes costos, diferentes confiabilidades y tiempos de reparación. Optimizar las posibles combinaciones de elementos que conforman al sistema en el objetivo fundamental de minimizar los costos: por reparaciones, por reemplazamiento y por las multas adquiridas por la demanda no satisfecha.

Para lograr el objetivo nos apoyaremos en el Método de la Función Generadora Universal como una opción para calcular los índices de Confiabilidad, además que permite modelar elementos como sistemas multi-estado y reduce los tiempos de los cálculos.

Los resultados están presentados a través del uso del algoritmo evolutivo, llamado PESO (Particle Evolutionary Swarm Optimization); el cual se basa en caminatas de partículas en un espacio de búsqueda delimitado, éste algoritmo es usado para variables continuas, sin embargo, se harán algunas adaptaciones para encontrar soluciones discretas.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1. Conceptos Básicos . . . . .	3
2.1.1. Confiabilidad y Medidas de Confiabilidad . . . . .	3
2.1.2. Sistemas . . . . .	7
2.1.3. Mantenimiento . . . . .	11
2.2. Confiabilidad de Sistemas Binarios . . . . .	12
2.2.1. Función de Estructura . . . . .	12
2.2.2. Confiabilidad de Sistemas . . . . .	20
2.3. Confiabilidad de Sistemas Multi-Estado MSS . . . . .	25
2.3.1. Modelo Genérico de un MSS . . . . .	26
2.3.2. Propiedades Principales de MSS . . . . .	29
2.3.3. Tipos de MSS . . . . .	30
2.4. Modelos de la Función Generadora Universal FGU . . . . .	36
2.4.1. Fundamentos Matemáticos . . . . .	36
2.4.2. Índices de Confiabilidad de MSS y Basados en FGU . . . . .	40
2.4.3. FGU de Subsistemas Multi - Estado . . . . .	48
2.4.4. FGU de MSS serie-paralelo . . . . .	55
<b>3. Políticas de Mantenimiento</b>	<b>58</b>
3.1. Políticas de Reemplazo Cíclico Óptimo . . . . .	59
3.1.1. Planteamiento del Problema . . . . .	60
3.2. Redundancia Conjunta y Optimización de Mantenimiento . . . . .	62
3.2.1. Planteamiento del Problema . . . . .	63



3.3.	Mantenimiento Imperfecto Óptimo . . . . .	65
3.3.1.	Modelo de Reducción de Edad del Elemento . . . . .	66
3.3.2.	Planteamiento del Problema . . . . .	67
<b>4.</b>	<b>Algoritmo PESO</b>	<b>70</b>
4.1.	Algoritmo de Optimización . . . . .	70
4.1.1.	Características . . . . .	70
4.1.2.	Tipos de Óptimos . . . . .	71
4.1.3.	Metaheurísticos . . . . .	72
4.2.	Algoritmo PSO . . . . .	74
4.2.1.	Inteligencia Computacional CI . . . . .	74
4.2.2.	PSO . . . . .	75
4.2.3.	Tipos de Estructuras de las Redes Sociales . . . . .	80
<b>5.</b>	<b>Aplicación</b>	<b>85</b>
5.1.	Uso de la Distribución Binomial en PSO . . . . .	86
5.2.	Problema . . . . .	88
5.3.	Diseño 1 . . . . .	89
5.3.1.	Datos del Problema . . . . .	91
5.3.2.	Función Objetivo . . . . .	92
5.3.3.	Implementación del PESO . . . . .	95
5.4.	Diseño 2 . . . . .	96
5.4.1.	Datos del Problema . . . . .	97
5.4.2.	Función Objetivo . . . . .	100
5.4.3.	Implementación del PESO . . . . .	101
<b>6.</b>	<b>Resultados</b>	<b>103</b>
6.1.	Experimentos y Resultados del Diseño 1 . . . . .	103
6.1.1.	Experimento I . . . . .	103
6.1.2.	Experiment II . . . . .	105
6.1.3.	Experiment III . . . . .	106
6.2.	Experimentos y Resultados del Diseño 2 . . . . .	106

7. Conclusiones

108

8. Anexos

110

9. Glosario

112

Bibliografía

113



# Índice de figuras

2.1. Función de Confiabilidad (supervivencia) $R(t)$ . . . . .	6
2.2. Componente $i$ ilustrado como un bloque . . . . .	8
2.3. Diagrama de Bloque de Confiabilidad de una estructura en Serie . . . . .	8
2.4. Diagrama de Bloque de Confiabilidad de una estructura en Paralelo . . . . .	8
2.5. Diagrama de Bloque de Confiabilidad de una estructura de 2 de 3 (K de N) . . . . .	9
2.6. Esquema del Sistema Detector de Fuego . . . . .	10
2.7. Diagrama de Bloque de Confiabilidad del Sistema Detector de Fuego . . . . .	11
2.8. Diagrama de Bloque de Confiabilidad del Sistema Detector de Fuego . . . . .	17
2.9. Subsistemas del Sistema Detector de Fuego . . . . .	17
2.10. Composición de los Subsistemas del Sistema Detector de Fuego . . . . .	18
2.11. Gráfica de Bernoulli . . . . .	21
2.12. Sistema Multi - Estado . . . . .	28
2.13. Sistema de Transportador de carbón . . . . .	31
2.14. Transporta el carbón desde el punto A al punto B, abastece el sistema de calderas. . . . .	31
2.15. Estructura en Paralelo . . . . .	32
2.16. Estructura en Puente . . . . .	33
2.17. Válvula de Bola Típica Falla en el modo de abrir y cerrar . . . . .	34

2.18. Diferentes estado de un elemento multi-estado en MSS  
 conectados consecutivamente . . . . . 35

2.19. Función de Aceptabilidad . . . . . 40

2.20. Ejemplo para determinar recursivamente la función-U del  
 MSS . . . . . 56

4.1. Tipos de Óptimos . . . . . 72

4.2. La estructura social la Estrella . . . . . 81

4.3. La estructura social el Anillo . . . . . 81

4.4. La estructura social la Rueda . . . . . 82

4.5. La estructura social la Piramide . . . . . 82

4.6. La estructura social los Cuatro Grupos . . . . . 83

4.7. La estructura social de Von Neumann . . . . . 83

5.1. Distribución Binomial con parámetro  $n=6$  y  $p=0.1,0.5,0.9$  87

5.2. Ejemplo de un desalinización de agua. . . . . 88

5.3. Sistema de Desalinación de Agua Serie-Paralelo . . . . . 90

5.4. Sistema de Desalinación de Agua Serie-Paralelo . . . . . 97

## Índice de cuadros

2.1. Estados del sistema transmisión de aceite. . . . .	29
2.2. Estados y Probabilidades correspondientes al sistema en serie. . . . .	50
2.3. Estados y Probabilidades correspondientes al sistema en paralelo. . . . .	53
2.4. Función de Estructura para Subsistemas en serie y Subsistemas en paralelo. . . . .	57
5.1. Características de los elementos del sistema . . . . .	91
5.2. Distribución de la Demanda. . . . .	91
5.3. Características de los elementos del sistema para la solución. . . . .	92
5.4. Parámetros de los elementos del MSS. . . . .	98
5.5. Función de Renovación de los elementos del MSS. . . . .	99
5.6. Características de los elementos del sistema para la solución. . . . .	100
6.1. Minimizar $C_m$ obtenidos en el experimento I Optimo . . . . .	104
6.2. Minimizar $C_m$ obtenidos en el experimento I mejor BPSO . . . . .	104
6.3. Minimizar $C_m$ obtenidos en el experimento I Optimo . . . . .	104
6.4. Minimizar $C_m$ obtenidos en el experimento I mejor BPSO . . . . .	104
6.5. Minimizar $C_m$ obtenidos en el experimento I Optimo . . . . .	104
6.6. Minimizar $C_m$ obtenidos en el experimento I mejor BPSO . . . . .	104
6.7. Minimizar $C_m$ obtenidos en el experimento I . . . . .	105
6.8. Costos minimos obtenidos para el experimento II con BPSO . . . . .	105
6.9. Costos minimos obtenidos para el experimento II . . . . .	105
6.10. Costos minimos obtenidos para el experimento III Optimo . . . . .	106

6.11. Costos minimos obtenidos para el experimento III el mejor  
BPSO . . . . . 106

6.12. Costos minimos obtenidos para el experimento II . . . . 106

6.13. Minimizar  $CT$  obtenidos en el experimento con el BPSO 107

6.14. Resultados BPSO, Minimizando Costos Totales  $CT$  . . . 107

6.15. Resultados Optimos, Minimizando Costos Totales  $CT$  . . 107



# Capítulo 1

## Introducción

Cuando se escucha la palabra confiabilidad, algunas personas piensan que un producto que adquieran les funcionará un período largo de vida y eso les da confianza en su compra. Esto ha hecho que se incremente el uso de métodos estadísticos para mejorar la calidad de los productos y servicios. Viéndolo en una forma práctica, la confiabilidad se podría definir como “*calidad a través del tiempo.*” “Los administradores, ingenieros y los mismos consumidores se han convencido que buena confiabilidad es una característica indispensable para tener la oportunidad de competir en los mercados globalizados, complejos y sofisticados.” [8]

Se plantea el problema de encontrar la confiabilidad de un sistema de desalinación de agua. La confiabilidad depende del diseño del sistema, así como de los elementos que lo componen, puesto que existen varias versiones y calidad. La desalinización del agua del mar es muy costosa y se pretende reducir los costos del proceso, de tal forma que funcione continuamente durante su período de vida.

La metodología que se utiliza fue desarrollada para estimar el número de repuestos necesarios para mantener equipos electrónicos y mecánicos que funcionaran en forma intensiva por períodos muy largos de tiempo. (Coppola,1984)[5]. En el inicio de la exploración espacial en los años cincuenta con satélites, sondas y vehículos tripulados, aumentaron la necesidad de más desarrollo e implementación de la metodología de confiabilidad para componentes y sistemas [3]

Un análisis de Sistemas Multi Estado (MSS) es considerado para productos, que pueden ser tomados como un sistema entero, en los cuales es complicado o no se pueden definir claramente los tipos de criterios de falla, pero pueden realizar su tarea con un funcionamiento parcial, es decir, que el sistema tiene varios niveles de funcionamiento, la falla de un elemento del sistema puede ocasionar la falla del sistema entero. La confiabilidad de los elementos varia igual que sus costos. Por éstas características el sistema de desalinación es considerado como un MSS.

Existen dos grandes áreas importantes en confiabilidad que son: sistemas reparables y componentes o unidades reemplazables. En la práctica, en ocasiones es necesario agregar elementos en los sistemas que ya existen para mejorar la confiabilidad y esto es posible con la implementación de programas de mantenimiento. Existen varias políticas de mantenimiento que se pueden aplicar en un sistema, dependiendo del diseño del sistema.

Para encontrar la confiabilidad en el mantenimiento de sistemas multi-estados, lo mejor es usar la técnica de la Función Generadora Universal, las ideas básicas de ésta técnica fueron introducidas por Ushakov (1987)[22]; su uso es muy conveniente para resultados numéricos. Requiere muy poco tiempo de cómputo para evaluar los índices de confiabilidad de los sistemas multi-estado, por todo esto es usado en algoritmos de optimización para calcular confiabilidades complejas.

Encontrar el número de veces que se debe dar mantenimiento al sistema, es decir el mantenimiento a cada uno de sus componentes, cumpliendo un nivel de confiabilidad requerido, minimizando costos en un sistema multi-estado de desalinación de agua, es un problema de optimización, donde las soluciones enteras posibles son una combinación, de la variedad existente, de los diferentes elementos del sistema y para resolver el problema con un cierto grado de complejidad de optimización como éste, se usó una metaheurística conocida como PSO (Particle Swarm Optimization), que está basado en el comportamiento social de algunas colonias de animales (pájaros, insectos, pecados) que se siguen entre sí para encontrar el camino más conveniente a sus necesidades (comida, mejor clima)[6].



## Capítulo 2

# Preliminares

### 2.1. Conceptos Básicos

Se Inicia definiendo los conceptos necesarios para llegar al tema central de esta tesis que es la Confiabilidad en Matenimiento de Sistemas Multi-Estado.

#### 2.1.1. Confiabilidad y Medidas de Confiabilidad

Cuando no se tiene conocimientos básicos sobre confiabilidad, se piensa que confiabilidad, calidad y disponibilidad de un artículo es lo mismo, pero existen algunas diferencias.

Definición **Confiabilidad**: Es la habilidad de un artículo para realizar una función requerida, bajo condiciones de ambiente y de operación dadas; durante un período de tiempo indicado.

Esta definición de confiabilidad es una definición más general dada por las normas ISO 8402 y por las normas Britanicas BS 4778.

El término “artículo” denota un componente, subsistema o sistema que puede ser considerado como una entidad. De igual forma, “función requerida” puede ser una única función o combinación de funciones.

Definición **Calidad**: Son los rasgos y características totales de un producto o servicio referentes a la habilidad de satisfacer necesidades indicadas o implícitas (ISO 8402).

La confiabilidad es una extensión de la calidad dentro del período indicado.

Definición **Falla:** Es la terminación de una habilidad del artículo para realizar una función requerida.

Definición **Disponibilidad:** Es la habilidad de un artículo (bajo los aspectos de su confiabilidad, capacidad de mantenimiento y apoyo de capacidad de mantenimiento) para realizar su función requerida en un instante de tiempo o en un período de tiempo dado (BS 4778).

La diferencia entre la disponibilidad promedio  $A_{av}$  y la disponibilidad al tiempo  $t$   $A(t)$  es como sigue:

- La disponibilidad al tiempo  $t$  es:

$$A(t) = P(\text{artículo este funcionando al tiempo } t)$$

‘funcionando’ quiere decir que el artículo está en operación activa o que puede estar en operación si se requiere.

- La disponibilidad promedio es la proporción media del tiempo que el artículo esta funcionando. Si tenemos un artículo que es reparado en condiciones “tan bueno como nuevo” cada vez que falla, el promedio de la disponibilidad es:

$$A_{av} = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR}$$

donde

MTTF (Tiempo medio de falla): Es el tiempo medio de funcionamiento del artículo.

MTTR (Tiempo medio de reparación): Es el tiempo medio de reparación o tiempo perdido después de la falla.

Ahora veremos medidas de confiabilidad para un elemento que no es reparado. Las tres medidas más importantes de la confiabilidad son:

- La función de confiabilidad  $R(t)$

- La tasa de falla  $z(t)$
- El tiempo medio a la falla MTTF

Un único componente puede estar en dos posibles estados: en estado de funcionamiento (de acuerdo a criterios definidos) o en estado de falla. La falla de un componente puede ser por diferentes causas, cuando ésta ocurre se dice que la unidad esta en estado de falla.

**Definición Tiempo a la Falla:** Es el lapso de tiempo desde que la unidad es puesta en operación hasta que la unidad falla por primera vez. [10]

Sea  $t=0$  el inicio de la puesta en operación del componente, el término de la habilidad del artículo para realizar la función requerida depende de muchas cosas por ejemplo del clima, el tipo de uso que le den etc. por esto determinar exactamente cuando será el tiempo a la falla es imposible por lo que es natural interpretar el tiempo a la falla como una variable aleatoria  $T$  que toma valores de  $(0,\infty)$  y asumiremos que tiene distribución continua con función de densidad de probabilidad  $f(t)$  y función de distribución, ecuación 2.1

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(u)du \quad \text{para} \quad t > 0 \quad (2.1)$$

De aquí podemos deducir que  $f(t)=F'(t)$ .

Con los conceptos que ahora ya sabemos podemos definir la confiabilidad en términos de probabilidad.

**Definición (R(t)) Confiabilidad al tiempo t:** Es la probabilidad de que una unidad desarrolle una función requerida, bajo condiciones de operación y ambiente dados; durante el intervalo de tiempo  $(0,t]$  [10].

Dado que  $R(t)$  es la probabilidad de que un componente no falle en el intervalo de tiempo  $(0, t]$ , entonces la función de confiabilidad se define por la ecuación 2.2

$$R(t) = 1 - F(t) = P(T > t) \quad t > 0 \quad (2.2)$$

La función de confiabilidad es conocida también como Función de Supervivencia, y es ilustrada en la figura 2.1

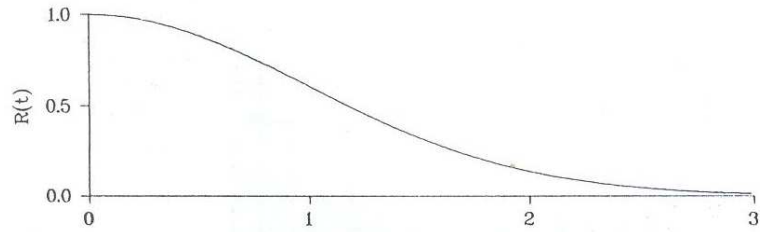


Figura 2.1: Función de Confiabilidad (supervivencia) R(t)

Como podemos ver en la gráfica la confiabilidad al inicio de operación del artículo ( $t=0$ ) es muy alta, pero conforme pasa el tiempo la confiabilidad disminuye.

De igual manera, conocer la probabilidad de que la unidad falle en el intervalo de tiempo  $(t, t+\Delta t]$  cuando sabemos que la unidad está funcionando al tiempo, nos lleva a la definición de la función de riesgo,  $t$ , esto es:

$$P(t < T < t + \Delta t | T > t) = \frac{P(t < T < t + \Delta t)}{P(T > t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)} \quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

**Definición La función de Riesgo o Tasa de Riesgo:**

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{F'(t)}{R(t)} \quad (2.5)$$

La función de riesgo indica el cambio instantáneo de F en el tiempo  $t$ . La función F es monótona creciente por lo que la derivada de F siempre es no negativa, por lo que si  $z$ ; aumenta durante un intervalo de tiempo entonces la falla es más probable, si disminuye la falla es menos probable y si es estable, que es lo que se esperaría durante la vida útil de un componente, las fallas se deben principalmente a factores aleatorios.

Se puede demostrar que:

$$R(t) = e^{-\int_t^0 z(u)du} \quad (2.6)$$

Definición **Tiempo Medio de Falla MTTF**: El tiempo medio de falla de un artículo es definido por

$$MTTF = E(T) = \int_0^{\infty} tf(t)dt \quad (2.7)$$

Si el componente falla, es posible que se lleve a cabo una reparación o reemplazamiento del componente, pero el tiempo de reparación o reemplazar una unidad en estado de falla es muy pequeño comparado con MTTF.

### 2.1.2. Sistemas

Se dijo que un artículo denotaba un componente o un subsistema o un sistema, que puede formar parte de sistemas complejos. Ahora se definirá el término de *sistema* que es el que se usará a lo largo de este trabajo.

Definición **Sistema**: Conjunto de componentes interrelacionados en base a una estructura determinada, para realizar una o más funciones.

El funcionamiento o falla del sistema depende de sus componentes de como están interrelacionados y regidos por el tipo de estructura.

Definición **Estructura**: Modelo de interacción lógica de un conjunto de componentes.

La estructura de un sistema es conocida como Diagrama de Bloque de Confiabilidad. En esta tesis consideraremos sistemas de  $n$  componentes enumerados del 1 al  $n$ , donde cada componente lo ilustraremos como un bloque, conectado desde un punto (a) a un punto (b), como se muestra en la figura 2.2

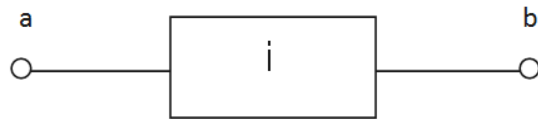


Figura 2.2: Componente  $i$  ilustrado como un bloque

Existen tres tipos de estructuras básicas: *Serie*, *Paralelo* y *K de N*, que se muestran enseguida.

**Definición Estructura en Serie:** Un sistema con estructura en serie, es aquel que funciona sí y sólo sí todos sus componentes funcionan. En forma gráfica, se muestra en la figura 2.3

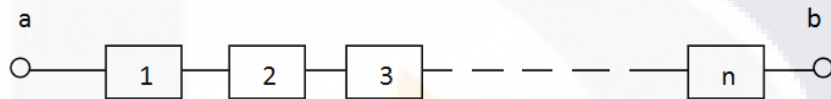


Figura 2.3: Diagrama de Bloque de Confiabilidad de una estructura en Serie

**Definición Estructura en Paralelo:** Un sistema con estructura en paralelo, es aquel que funciona sí al menos uno de los  $n$  componentes funcionan. En forma gráfica, se muestra en la figura 2.4

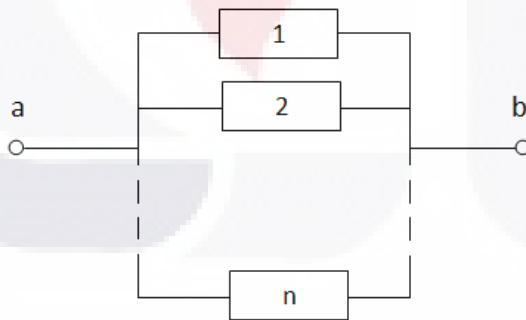


Figura 2.4: Diagrama de Bloque de Confiabilidad de una estructura en Paralelo

**Definición Estructura K de N:** Un sistema con estructura  $k$  de  $n$ , es aquel que funciona sí al menos  $k$  de sus  $n$  componentes funcionan. Este tipo de estructura abarca los dos tipos anteriores, un ejemplo de esta estructura de 2 de 3 se muestra en la figura 2.5

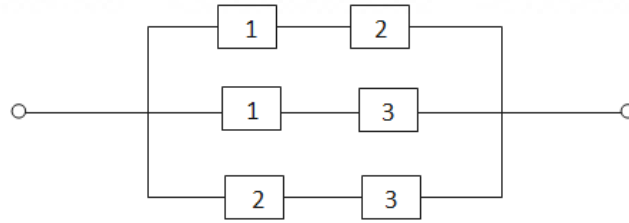


Figura 2.5: Diagrama de Bloque de Confiabilidad de una estructura de 2 de 3 (K de N)

Es importante mencionar que las estructuras presentadas en las figuras 2.3, 2.4 y 2.5, son solamente una representación gráfica de la interconexión que pueden poseer los componentes de un sistema; y no tiene relación alguna con la conexión física de los componentes. Hay algunos sistemas cuyos componentes no están conectados físicamente entre ellos, veamos el siguiente ejemplo que muestra un sistema compuesto por las tres estructuras básicas.

EJERCICIO 1. A continuación se describe un sistema complejo, construya el Diagrama de Boques correspondiente al sistema dado.

*Sistema de Detector de Fuego.* Considere un sistema de detector de fuego localizado en un cuarto de producción, que esta dividido en dos partes, detecta el fuego y detecta el humo. Tiene un switch que puede ser operado manualmente y una fuente DC que en todo momento debe permanecer intacta.

DETECTOR DE CALOR. Formado por un circuito de tubos neumaticos con cuatro fusibles identicos, FP1, FP2, FP3 y FP4. Estos fusibles permiten la salida del aire hacia afuera del circuito si son expuestos a una temperatura mayor a  $72^{\circ}\text{C}$ . Están conectados a un switch de presión PS, si uno o más de estos switch es activado, se enviará una señal para inicial el relevo SR.

DETECTOR DE HUMO. Consiste de tres detectores de humo ópticos, SD1, SD2 y SD3; todos son independientes con batería propia. Estos detectores son sensibles y pueden dar una señal falsa, para evitarlo están conectados por una unidad de votación lógica VS dos de tres. Si almenos dos

detectores son activados, la unidad VS enviara una señal para inicial el relevo SR.

ACTIVACIÓN MANUAL. Cuando el fuego inicia, el operador (OP), personal de vigilancia, puede activar el switch manual (MS), que activa el swith de presión PS y da la señal para inicial el relevo SR.

INICIAR EL RELEVO SR. Cuando SR recibe una señal del sistema de de-tección de fuego, es activado y da una señal para:.

- Cerrar el Sistema
- Activar la alarma y los extinguidores de fuego

Dicho sistema puede ser descrito esquemáticamente como se muestra en la figura 2.6 y el diagrama de bloque de confiabilidad en la figura 2.7



Figura 2.6: Esquema del Sistema Detector de Fuego



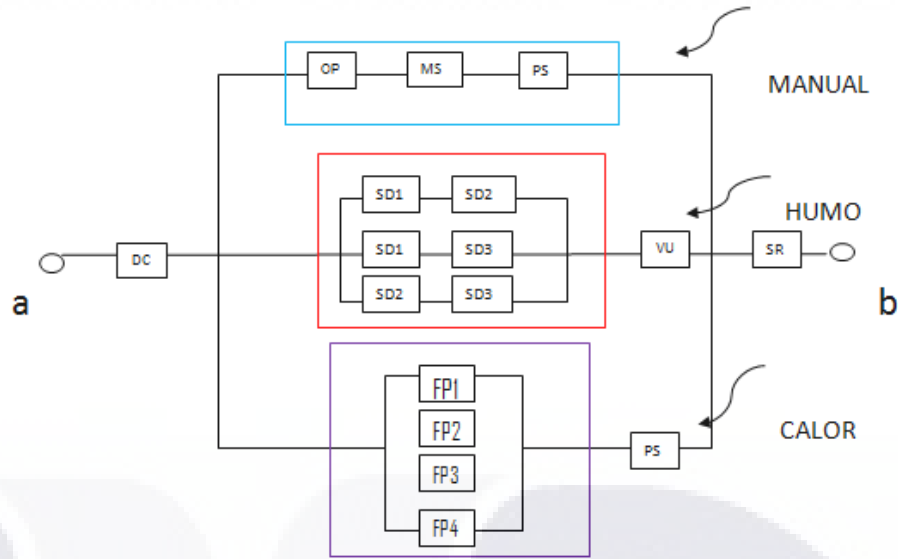


Figura 2.7: Diagrama de Bloque de Confiabilidad del Sistema Detector de Fuego

### 2.1.3. Mantenimiento

La creciente demanda y la competencia por parte de los cliente de una entrega oportuna de los artículos de alta calidad, obliga a requerir de equipos ‘automatizados’ confiables y capaz de mantenerse en ese estado sin tener paros de trabajo y reparaciones costosas.

Muchas compañías han implementado programas de mantenimiento, el mantenimiento es un aspecto importante en la calidad de los artículos y puede utilizarse como una estrategia para una competencia exitosa.

**Definición Capacidad de Mantenimiento:** Es la habilidad de un artículo, bajo las condiciones indicadas de uso, para ser conservado, o restaurado para, un estado en el cual puede realizar su función requerida, cuando la capacidad de mantenimiento es realizada bajo las condiciones indicadas, usando los procedimientos prescritos y recursos (BS 4778).

Un sistema reparable posee políticas de mantenimiento, reparación y reemplazo de componentes; las cuales tienen un costo y un tiempo determinado. Se distinguen dos tipos de mantenimiento:

- Mantenimiento Correctivo llamado también de Reparación, es realizado después de que el componente falla. Su objetivo es tener al

componente en funcionamiento lo más pronto posible. Algunas veces es necesario hacer el reemplazamiento de uno o más componentes

- Mantenimiento Preventivo mediante pruebas de mantenimiento periódicamente incluso monitorea, realiza actividades de lubricaciones, pequeños ajustes o reemplazamiento de componentes o partes de componentes que empiezan a desgastarse con el fin de reducir la probabilidad de falla del componente.

El deseo por no tener paros de trabajo, en algunos sistemas se implementan otro tipo de estrategias. Hay algunos sistemas que tienen alguna unidad única (componente o subsistema) que es de gran importancia para su funcionamiento, llamada unidad crítica, hay dos formas de asegurar el funcionamiento

- Usar unidades con una confiabilidad grande.
- Usar Redundancia en esa unidad crítica (introduciendo una o más unidades de reserva).

Las unidades en reserva que se usan en la unidad crítica, son puestos en paralelo, así cuando un componente falla se conecta el siguiente componente y así sucesivamente.

## **2.2. Confiabilidad de Sistemas Binarios**

### **2.2.1. Función de Estructura**

Recordemos, que en esta tesis, consideraremos sistemas de  $n$  componentes, enumerados desde 1 hasta  $n$ , para facilitar la comprensión y los calculos que se realicen.

En esta parte trataremos con sistemas, que al igual que los componentes que lo conforman, tienen sólo dos estados (son binarios), estado de funcionamiento y estado de falla, que pueden tener más estado pero ese tema lo abordaremos más adelante. El estado del componente  $i$ ,  $i=1, \dots, n$ , puede ser descrito mediante una variable binaria  $X_i$ , donde

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el componente } i \text{ está funcionando} \\ 0 & \text{si el componente } i \text{ está en estado de falla} \end{cases} \quad (2.8)$$

Es importante conocer si el componente falla después del tiempo  $t$ , así que denotaremos con  $X_i(t)$ , el estado del componente  $i$  en el tiempo  $t$ , que generalmente la falla de un componente no se puede predecir con certeza, por lo que podemos considerar a  $X_i(t)$  como una variable aleatoria donde

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si el componente } i \text{ está funcionando al tiempo } t \\ 0 & \text{si el componente } i \text{ está en estado de falla} \\ & \text{al tiempo } t \end{cases} \quad (2.9)$$

Sí conocemos los estados de los  $n$  componentes, podemos determinar el estado del sistema, el vector de estados de los  $n$  componentes es denotado por  $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$  y el vector de estados de los  $n$  componentes al tiempo  $t$  por  $\mathbf{X}(t)=(X_1(t), \dots, X_n(t))$ .

De la misma forma el estado del sistema es descrito por una función binaria  $\phi(X)$  llamada *función de estructura del sistema* dada por

$$\phi(X) = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.10)$$

donde

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema está funcionando} \\ 0 & \text{si el sistema está en estado de falla} \end{cases} \quad (2.11)$$

De igual manera, es importante conocer el estado del sistema al tiempo  $t$ , así

$$\phi(X(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema está funcionando al tiempo } t \\ 0 & \text{si el sistema está en estado de falla} \\ & \text{al tiempo } t \end{cases} \quad (2.12)$$

Ahora determinaremos la función de estructura para los tres tipos básicos de estructura que vimos anteriormente. Para analizar la estructura de un sistema es necesario considerar lo siguiente:

## Suposiciones para el Análisis de la Estructura del Sistema

1. Todos los componentes son relevantes, lo cual significa que sí el  $i$ -ésimo componente es relevante, entonces

$$\phi(0_i, X(t)) \neq \phi(1_i, X(t)) \quad (2.13)$$

donde  $\phi(0_i, X(t))$  indica que el  $i$ -ésimo componente está fallando al tiempo  $t$  sin importar el estado de los  $n-1$  componentes restantes, de igual manera  $\phi(1_i, X(t))$  indica que el  $i$ -ésimo componente está funcionando al tiempo  $t$ . Sí un componente es irrelevante, su estado nunca afecta el estado del sistema; solamente importa el estado de los otros componentes.

2. El sistema es coherente, esto quiere decir, que todos sus componentes son relevantes y su función de estructura es creciente; y además

■

$$\phi(0) = 0 \text{ y } \phi(1) = 1$$

esto quiere decir que: Si todos los componentes del sistema están funcionando, entonces el sistema está funcionando. Si todos los componentes del sistema están en estado de falla, entonces el sistema está en estado de falla.

- Si  $\mathbf{X}(t)$  es el vector de estados de los  $n$  componentes de un sistema, entonces la función de estructura de dicho sistema es

$$\prod_{i=1}^n X_i(t) \leq \phi(\mathbf{X}(t)) \leq \prod_{i=1}^n X_i(t) \quad (2.14)$$

Ésto es: Si los  $n$  componentes funcionan, entonces,  $1 \leq \phi(\mathbf{X}(t)) \leq 1$ .

Sí al menos un componente funciona, entonces,  $0 \leq \phi(\mathbf{X}(t)) \leq 1$ .

Sí ningún componente funciona, entonces,  $0 \leq \phi(\mathbf{X}(t)) \leq 0$ .

- Sí  $\mathbf{X}(t)$  y  $\mathbf{Y}(t)$  son vectores de estados de sistemas idénticos; entonces

$$\phi(\mathbf{X}(t) \amalg \mathbf{Y}(t)) \geq \phi(\mathbf{X}(t)) \amalg \phi(\mathbf{Y}(t)) \quad (2.15)$$

$$\phi(X(t) * Y(t)) \geq \phi(X(t)) * \phi(Y(t)) \quad (2.16)$$

La expresión 2.15 señala, que la redundancia a nivel componente es mejor que la redundancia a nivel sistema.

### **Función de Estructura en Serie**

Un sistema está funcionando si y sólo si sus  $n$  componentes están funcionando, por lo que la función de estructura en serie se expresa de la siguiente forma

$$\phi(X) = X_1 * X_2 * \cdots * X_n = \prod_{i=1}^n X_i \quad (2.17)$$

En la expresión 2.17, se puede ver que  $\phi(X)$  toma el valor de 1, si  $X_i = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$ ; y el valor de 0 si al menos un componente falla. De igual manera, la estructura del sistema al tiempo  $t$ , es dada por 2.18:

$$\phi(X(t)) = X_1(t) * X_2(t) * \cdots * X_n(t) = \prod_{i=1}^n X_i(t) \quad (2.18)$$

### **Función de Estructura en Paralelo**

Un sistema está funcionando si al menos uno de sus  $n$  componentes están funcionando, por lo que la función de estructura en paralelo se expresa de la siguiente forma

$$\phi(X) = 1 - (1 - X_1)(1 - X_2) \cdots (1 - X_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i) = \prod_{i=1}^n X_i \quad (2.19)$$

En la expresión 2.19, se ve que  $\phi(X)$  toma el valor de 1, si el  $i$ -ésimo componente está funcionando, esto es,  $X_i = 1$ , para alguna  $i = 1, 2, \dots, n$ ; y el valor de 0 si todos los componentes fallan; esto es,  $X_i = 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Y la función de estructura al tiempo  $t$  es como sigue:

$$\begin{aligned} \phi(X(t)) &= 1 - (1 - X_1(t))(1 - X_2(t)) \cdots (1 - X_n(t)) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i(t)) = \prod_{i=1}^n X_i(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

**Función de Estructura en  $k$  de  $n$**

Un sistema está funcionando si sólo si al menos  $k$  de sus  $n$  componentes están funcionando, por lo que la función de estructura en  $k$  de  $n$  se expresa de la siguiente forma

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n X_i \geq k \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n X_i < k \end{cases} \quad (2.21)$$

En la expresión 2.21,  $\phi(X)=1$ , si al menos  $k$  de sus  $n$  componente está funcionando.

Existen artículos cuya complejidad va más allá de una estructura en serie, paralelo o  $k$  de  $n$ . Por más complejo que sea un sistema es posible analizar su función de estructura con algunos métodos como *Árboles de Falla*, *Descomposición Pivotal*, *Trayectorias*, *Cortes Minimal* y *Descomposición Modular de Sistemas*, para mayor informacion de estas técnicas consultar Barlow Lambert [1] y Hoyland Rausand [9]

En esta tesis ilustraremos sólo el método *Descomposición Modular de Sistemas*, el procedimiento es el siguiente: Ver el sistema como un sistema simple de ‘*componentes compuestos*’, es decir, dividir el sistema en subsistemas, de tal forma que cada componente sólo aparece en uno y sólo un subsistema, llamados módulos.

**Definición Descomposición Modular:** Una descomposición modular de una estructura (sistema) coherente es el conjunto de módulos disjuntos  $(A_i, \chi_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  junto con una estructura organizada  $\omega$ , tal que

- Sistema =  $\cup_{i=1}^r A_i$  donde  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$

- $\phi(X) = \omega[\chi_1(X^{A_1}), \chi_2(X^{A_2}), \dots, \chi_r(X^{A_r})]$

donde

$A_i$  el modulo  $i$  donde  $i = 1, 2, \dots, r$ ,

$X^{A_i}$  es el conjunto de estados correspondiente al modulo A

$\chi_i$  es la función binaria de  $X^{A_i}$

EJERCICIO 2. Continuando con el EJERCICIO 1, encontraremos la función de estructura del **Sistema Detector de Fuego**, primero enumeramos los componentes como se puede ver en la figura 2.8

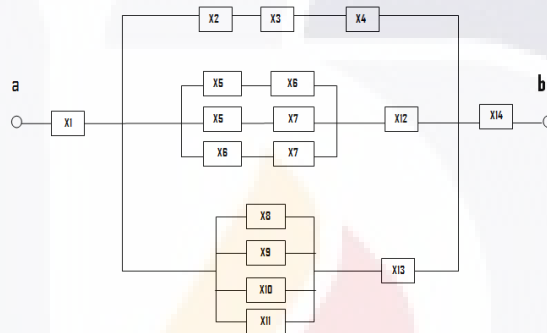


Figura 2.8: Diagrama de Bloque de Confabilidad del Sistema Detector de Fuego

Continuamos con la división en subsistemas como en la figura 2.9

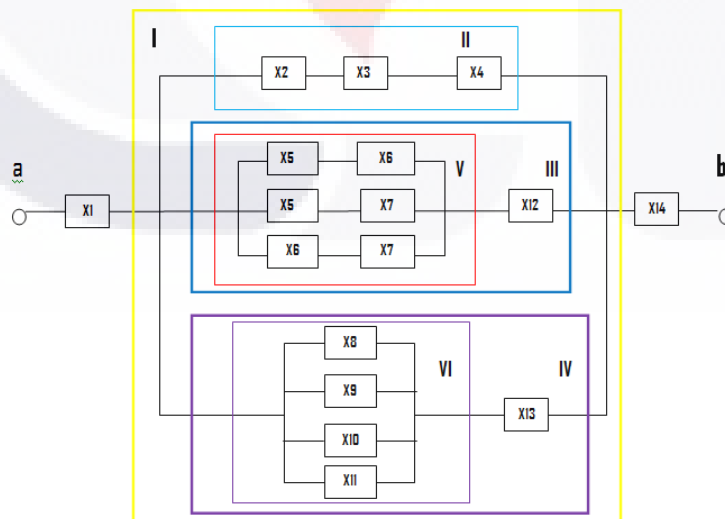


Figura 2.9: Subsistemas del Sistema Detector de Fuego

De tal manera que los subsistemas quedarían compuestos de la si-

guiente forma, figura 2.10

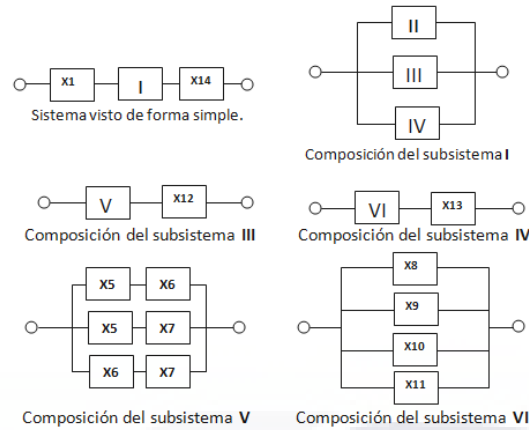


Figura 2.10: Composición de los Subsistemas del Sistema Detector de Fuego

Ahora calcularemos la función de estructura de cada subsistema o modulo como sigue:

- Para el modulo **V** como podemos ver el componente 5-6, 5-7 y 6-7 están en serie y los tres están en paralelo, es decir, que la función de estructura de cada uno de ellos es, usando las ecuaciones 2.17 y 2.19:

$\phi_{5-6}(X) = X_5X_6$ ,  $\phi_{5-7}(X) = X_5X_7$  y  $\phi_{6-7}(X) = X_6X_7$ , considerando que  $X_i^k = X_i$  para  $\forall i,k$ , y por ser una variable binaria, la función de estructura del modulo quedaría:

$$\begin{aligned}
 \phi_{M_V}(X) &= 1 - (1 - X_5X_6)(1 - X_5X_7)(1 - X_6X_7) \\
 &= X_5X_6 + X_5X_7 + X_6X_7 - X_5^2X_6X_7 - X_5X_6^2X_7 \\
 &\quad - X_5X_6X_7^2 + X_5^2X_6^2X_7^2 \\
 &= X_5X_6 + X_5X_7 + X_6X_7 - 2X_5X_6X_7 \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

- Para el modulo **VI** como podemos ver los componente 8, 9, 10 y 11 están en paralelo, así que usaremos la ecuación 2.19. Por lo tanto la



función de estructura del modulo quedaría:

$$\begin{aligned}
 \phi_{M_{VI}}(X) &= 1 - (1 - X_8)(1 - X_9)(1 - X_{10})(1 - X_{11}) \\
 &= X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} - X_8X_{10} - X_8X_{11} - X_{10}X_{11} + \\
 &\quad X_9X_{10} + X_9X_{11} + X_9X_{10}X_{11} + X_8X_{10}X_{11} + X_8X_9X_{10} \\
 &\quad + X_8X_9X_{11} - X_8X_9X_{10}X_{11}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

- Para el modulo **IV** como lo muestra la figura 2.10 está formado por el modulo VI y el componente 13 que están en serie. Por lo tanto la función de estructura del modulo, considerando la ecuación 2.23, quedaría:

$$\phi_{M_{IV}}(X) = \phi_{M_{VI}}(X)X_{13} \tag{2.24}$$

- Para el modulo **III** como lo muestra la figura 2.10 está formado por el modulo V y el componente 12 que están en serie. Por lo tanto la función de estructura del modulo, considerando la ecuación 2.22, quedaría:

$$\phi_{M_{III}}(X) = \phi_{M_V}(X)X_{12} \tag{2.25}$$

- Para el modulo **II** como lo muestra la figura 2.10 está formado por los componente 2, 3 y 4 que están en serie. Por lo tanto la función de estructura del modulo, quedaría:

$$\phi_{M_{II}}(X) = X_2X_3X_4 \tag{2.26}$$

- Para el modulo **I** como lo muestra la figura 2.10 está formado por el modulo II,III y IV que están en paralelo, con función de estructura dadas en las ecuaciones 2.24, 2.25 y 2.26 respectivamente, la función de estructura es:

$$\chi^I = 1 - (1 - \phi_{M_{II}})(1 - \phi_{M_{III}})(1 - \phi_{M_{IV}}) \tag{2.27}$$

- La función de estructura del sistema completo quedaría:

$$\phi_S(X) = X_1 * \chi^I * X_{14} \tag{2.28}$$

### 2.2.2. Confiabilidad de Sistemas

El estado de un sistema al tiempo  $t$ , depende del estado de sus componentes al tiempo  $t$ , y de la estructura del sistema. Para calcular la confiabilidad de un sistema, es necesario tener en cuenta las siguientes consideraciones.

- La falla de los componentes individuales son eventos **independientes**, esto es, los componentes son independientes, la falla o funcionamiento de un componente no influye en la falla o funcionamiento de otro componente.
- Cuando los sistemas y componentes son no reparables, son desechados cuando ocurre por primera vez la falla.
- Cuando los sistemas y componentes fallan, son reparados o reemplazados después de la falla, que esto se apega más a la realidad.
- La función de confiabilidad de los componentes es monótona decreciente.

En términos de confiabilidad, el estado que resulta de importancia es el de operación, por lo tanto el interés es que  $X_i(t)=1$ , es decir, que el componente  $i$  esté funcionando al tiempo  $t$ . Definimos  $p_i(t)$  como la probabilidad de que el  $i$ -ésimo componente de un sistema, este operando al tiempo  $t$ ; entonces

$$P[X_i(t) = 1] = p_i(t) \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.29)$$

A partir de este resultado podemos definir  $X_i(t)$ , como una variable aleatoria con distribución Bernoulli, que es una distribución de variable discreta que toma valores 0 y 1, con parámetro  $p$  que indica la probabilidad de que la variable sea igual a 1, es decir  $P[X_i(t)=1]=p$ ; cuya gráfica se muestra a continuación

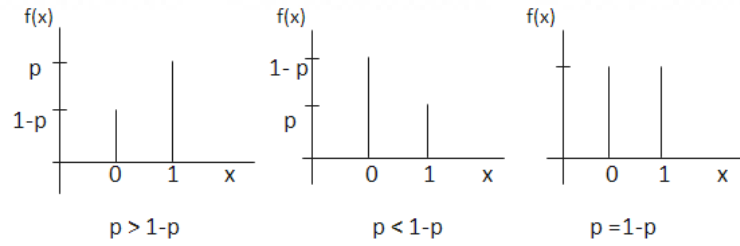


Figura 2.11: Gráfica de Bernoulli

De lo anterior podemos deducir que

$$X_i(t) \sim \text{Bernoulli}(p_i(t)) \tag{2.30}$$

De igual forma, se define  $p_s(t)$  como la probabilidad de que el sistema funcione al tiempo  $t$ , tenemos que

$$P[\phi(X(t)) = 1] = p_s(t) \tag{2.31}$$

y por consiguiente

$$\phi(X(t)) \sim \text{Bernoulli}(p_s(t)) \tag{2.32}$$

Y por ser una variable binaria  $X_i(t)$ , tenemos que el valor esperado es

$$E(X_i(t)) = 0 * P[X_i(t) = 0] + 1 * P[X_i(t) = 1] = p_i(t) \tag{2.33}$$

Continuando con la confiabilidad del sistema al tiempo  $t$

$$E(\phi(X(t))) = p_s(t) \tag{2.34}$$

**Confiabilidad de las estructura básicas**

Veremos ahora la confiabilidad de un sistema al tiempo  $t$  de tres formas distintas: característica general, sistemas no reparables y sistemas reparables, así que cuando hablemos de la

**Confiabilidad del i-ésimo componente para  $i = 1, 2, \dots, n$**

$$E(X_i(t)) = p_i(t); \text{ de manera general.} \tag{2.35}$$

$$E(X_i(t)) = P(T_i > t) = p_i(t) = R_i(t); \text{ para componentes no reparables.} \quad (2.36)$$

$$E(X_i(t)) = p_i(t) = A_i(t); \text{ para componentes reparables.} \quad (2.37)$$

### Confiabilidad del Sistema

$$E(\phi(X(t))) = p_s(t); \text{ de manera general.} \quad (2.38)$$

$$E(\phi(X(t))) = p_s(t) = R_s(t); \text{ para sistemas no reparables.} \quad (2.39)$$

$$E(\phi(X(t))) = p_s(t) = A_s(t); \text{ para sistemas reparables.} \quad (2.40)$$

### Confiabilidad de Estructuras en Serie

Partiendo de ecuación 2.18, la función de estructura de un sistema en serie al tiempo  $t$ , entonces:

■ EN FORMA GENERAL

$$R_s(t) = E(\phi(X(t))) = E\left(\prod_{i=1}^n X_i(t)\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i(t)) = \prod_{i=1}^n p_i(t) \quad (2.41)$$

Note que  $R_s(t) \leq \min(p_i(t))$ , decir, que confiabilidad del sistema es a lo más la confiabilidad del componente menos confiable. Y que si todos los componentes tienen la misma confiabilidad  $p(t)$ , entonces

$$p_s(t) = p(t)^n \quad (2.42)$$

■ SISTEMAS NO REPARABLES

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) \quad (2.43)$$

Y por lo visto en conceptos básicos y de acuerdo a la ecuación 2.6, esto es igual a

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^n e^{-\int_0^t z_i(u) du} = e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^n z_i(u) du} \quad (2.44)$$

■ SISTEMAS REPARABLES

$$A_s(t) = \prod_{i=1}^n A_i(t) \quad (2.45)$$

### Confiabilidad de Estructuras en Paralelo

Partiendo de la ecuación 2.20, la función de estructura de un sistema en paralelo al tiempo  $t$  es

■ EN FORMA GENERAL

$$\begin{aligned} R_s(t) &= E(\phi(X(t))) = E\left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i(t))\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - E(X_i(t))) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i(t)) = \prod_{i=1}^n p_i(t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Si todos los componentes tienen la misma confiabilidad  $p(t)$ , entonces

$$p_s(t) = 1 - (1 - p(t))^n \quad (2.47)$$

■ SISTEMAS NO REPARABLES

$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)) \quad (2.48)$$

■ SISTEMAS REPARABLES

$$A_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - A_i(t)) \quad (2.49)$$

### Confiabilidad de Estructuras K de N

Partiendo de ecuación 2.21, si los componentes son identicos y tienen la misma probabilidad de que el componente funcione al tiempo  $t$ , es decir,  $p_i(t) = p(t)$  para  $i=1, 2, \dots, n$ . Sea  $Y(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t)$  una variable aleatoria con distribución binomial con parámetros  $(n, p(t))$ , entonces

$$P(Y(t) = y) = \binom{n}{y} p(t)^y (1 - p(t))^{n-y} \text{ para } y = 1, 2, \dots, n \quad (2.50)$$

Esto simplifica los calculos y Confiabilidad de la función de estructura de un sistema K de N al tiempo  $t$  es

■ EN FORMA GENERAL

$$p_s(t) = P(Y(t) \geq k) = \sum_{y=k}^n \binom{n}{y} p(t) (1 - p(t))^{n-y} \quad (2.51)$$

■ SISTEMAS NO REPARABLES

$$R_s(t) = \sum_{y=k}^n \binom{n}{y} R(t) (1 - R(t))^{n-y} \quad (2.52)$$

■ SISTEMAS REPARABLES

$$A_s(t) = \sum_{y=k}^n \binom{n}{y} A(t) (1 - A(t))^{n-y} \quad (2.53)$$

EJERCICIO 3. Calcularemos la confiabilidad del sistema detector de fuego del EJERCICIO 1 que contiene  $n=14$  componentes no reparables, la subdivisión en subsistemas está mostrada en la figura 2.9. Suponga que  $p_i(t) = 0,90 \forall i = 1, 2, \dots, 14$ .

$$R_{\chi_{II}}(t) = R_2(t)R_3(t)R_4(t) = (0,90)^3 = 0,729$$

$$R_{\chi_{VI}}(t) = 1 - (1 - R_8(t))(1 - R_9(t))(1 - R_{10}(t))(1 - R_{11}(t))$$

$$= 1 - (1 - R(t))^4 = 1 - (1 - 0,90)^4 = 0,9999$$

$$R_{\chi_V}(t) = R_5(t)R_6(t) + R_5(t)R_7(t) + R_6(t)R_7(t) - 2R_5(t)R_6(t)R_7(t)$$

$$= 3(0,9)^2 - 2(0,9)^3 = 0,972$$

Observemos que la confiabilidad del sistema en serie es más bajo que el sistema en paralelo y el de 2 de 3, así puesto que con un componente que falle se tiene la falla del sistema, y por el contrario la confiabilidad del sistema en paralelo es la más alta ya que tiene tres componentes de reserva por si falla alguna.

$$R_{\chi_{III}}(t) = R_{\chi_V}(t)R_{12}(t) = (0,972)(0,90) = 0,8748$$

$$R_{\chi_{IV}}(t) = R_{\chi_{VI}}(t)R_{13}(t) = (0,9999)(0,90) = 0,89991$$

$$R_{\chi_I}(t) = 1 - \prod_{i=II}^{IV} (1 - R_{\chi_i}(t))$$

$$= 1 - (1 - 0,729)(1 - 0,8748)(1 - 0,89991) = 0,9966$$

$$R_s(t) = R_1(t)R_{\chi_I}(t)R_{14}(t) = (0,9966)(0,90)^2 = 0,8072$$

### 2.3. Confiabilidad de Sistemas Multi-Estado MSS

Hemos analizado sistemas con dos estados, funcionamiento y falla completa, pero existen muchos sistemas que trabajan a cierta capacidad que depende de la capacidad a la cual trabajan sus elementos, ya sea porque fueron hechos con esa capacidad o porque han fallado o porque su funcionamiento a disminuido.

Algunos sistemas pueden relizar sus actividades con varios niveles distintos de eficiencia usualmente llamados *tasas o niveles de funcionamiento*.

**Definición MSS:** Un sistema que posee un número finito de niveles de funcionamiento es llamado un Sistema Multi-Estado (MSS multi-state system).

Usualmente los MSS son sistemas compuestos de elementos que pueden ser por si mismos multi-estado. El caso más simple de MSS es un sistema Binario teniendo dos distintos estados (funcionamiento perfecto y falla total) analizados anteriormente.

Los sistemas así como los elementos que los componen poseen diferentes niveles de funcionamiento a lo largo de su vida útil o período de funcionamiento específico. Es claro que en  $t=0$ , el componente se encuentra en el estado deseado, estado de funcionamiento perfecto, con el uso el nivel de funcionamiento decrece, el nivel de funcionamiento al tiempo  $t$  no se puede predecir con certeza. Para encontrar la confiabilidad de los MSS, veremos primero los conceptos básicos de éstos.

### 2.3.1. Modelo Generico de un MSS

Para analizar el comportamiento de un MSS, antes se deben conocer las características de sus elementos. Para algún elemento  $j$  del sistema posee  $k_j$  diferentes estados correspondientes a sus diferentes niveles de funcionamiento, representado por el conjunto:

$$\mathbf{g}_j = \{g_{j1}, g_{j2}, \dots, g_{jk_j}\}$$

donde  $g_{ji}$  es el nivel de funcionamiento del elemento  $j$  en el estado  $i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k_j\}$ .

El nivel de funcionamiento  $G_j(t)$  del elemento  $j$  en algún instante  $t \geq 0$ , es una variable aleatoria que toma valores de  $\mathbf{g}_j$ :  $G_j(t) \in \mathbf{g}_j$ .

Así mismo, las probabilidades asociadas con los diferentes estados o niveles de funcionamiento del elemento  $j$  del sistema en algún instante de tiempo  $t$  están representados por el conjunto

$$p_j(t) = \{p_{j1}(t), p_{j2}(t), \dots, p_{jk_j}(t)\} \quad (2.54)$$

donde

$$p_{ji}(t) = P[G_j(t) = g_{ji}] \quad (2.55)$$

Note que un elemento puede estar sólomente en un estado al tiempo  $t$ . Esto significa que los estados del componente conforman un conjunto de eventos mutuamente excluyentes tal que  $\sum_{i=1}^{k_j} p_{ji}(t) = 1$  para todo  $0 \leq t \leq T$ . La colección de pares ordenados  $(g_{ji}, p_{ji}(t))$ ,  $i=1, 2, \dots, k_j$  determinan completamente la distribución de probabilidades del funcionamiento del elemento  $j$  en algún instante  $t$ .

Cuando el MSS consiste de  $n$  elementos, su nivel de funcionamiento es determinada por los niveles de funcionamiento de sus elementos. En cada momento, los elementos del sistema poseen ciertos niveles de funcionamiento correspondientes a cada uno de sus estados y en consecuencia el estado del sistema cambia a cada momento. El estado del sistema entero tiene  $K$  diferentes estados con  $g_i$  niveles de funcionamiento correspondientes a cada estado,  $i \in 1, \dots, K$ . Los niveles de funcionamiento de MSS al tiempo  $t$  toma valores del conjunto  $\{g_1, \dots, g_k\}$ .



Sea  $L^n = \{g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1k_1}\} \times \{g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2k_2}\} \times \dots \times \{g_{n1}, g_{n2}, \dots, g_{nk_n}\}$  el espacio de todas las posibles combinaciones de los niveles de funcionamiento de todos los elementos del sistema y  $M = \{g_1, \dots, g_k\}$  es el espacio de todos los valores posibles de niveles de funcionamiento para el sistema completo. Se define la transformación:  $\phi(G_1(t), \dots, G_n(t)): L^n \rightarrow M$ , que mapea el espacio de todas las posibles combinaciones de los niveles de funcionamiento de los elementos del sistema en el espacio de los niveles de funcionamiento del sistema entero. A esta transformación se le llama *Función de Estructura*. Note que la función de estructura de un MSS es una extensión de una función de estructura binaria. La única diferencia se encuentra en la definición de los estados, la función de estructura binaria es mapeada  $[0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ , mientras que MSS posee espacios mucho más complejos.

El modelo genérico de un MSS incluye

1. El proceso estocástico  $G_j(t)$ ,  $j=1, 2, \dots, n$
2. La función de estructura generada por el proceso estocástico

$$G(t) = \phi(G_1(t), \dots, G_n(t))$$

donde  $G(t)$  corresponde al funcionamiento del MSS completo.

3. Y la distribución de probabilidad del funcionamiento de todos los elementos del sistema en cualquier instante  $t$  durante el periodo de operación  $[0, T]$

$$g_j, \quad p_j(t); \quad 1 \leq j \leq n; \quad (2.56)$$

El siguiente ejemplo muestra lo visto. [14, página 19]

EJERCICIO 4. Considere un sistema de transmisión de flujo de aceite, el aceite es transmitido desde un punto C al punto E, que consiste de tres tubos (elementos), como se muestra en la figura 2.12. Determinar la función de estructura para el sistema dado.

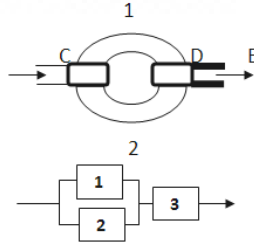


Figura 2.12: Sistema Multi - Estado

El funcionamiento de los tubos es medido por su capacidad de transmisión (toneladas por minuto). El elemento 1 y 2 son binarios, estado de falla total para ambos elementos corresponde a una capacidad de transmisión de 0 y la capacidad de transmisión es de 1.5 y 2 toneladas por minuto respectivamente tal que  $G_1(t) \in \{0, 1.5\}$  y  $G_2(t) \in \{0, 2\}$ . El elemento 3 puede estar en: un estado de falla total capacidad de 0, un estado de falla parcial capacidad de 1.8 toneladas por minuto y un estado de operación total con una capacidad de 4 toneladas por minuto tal que  $G_3(t) \in \{0, 1.8, 4\}$ .

El flujo total entre los puntos C y D a través de los tubos paralelos 1 y 2 son iguales a la suma de los flujos por cada uno de los tubos. El flujo desde el punto D a el punto E es limitado por la capacidad de transmisión del elemento 3. Por otro lado, este flujo puede ser más grande que el flujo entre los puntos C y D. Por lo tanto, el flujo máximo (nivel de funcionamiento del sistema) entre los puntos C y E es

$$G(t) = \phi(G_1(t), G_2(t), G_3(t)) = \min\{G_1(t), G_2(t), G_3(t)\}.$$

Los valores de la función de estructura del sistema para todos los posibles estados son representados en la siguiente tabla.

$G_1(t)$	$G_2(t)$	$G_3(t)$	$G(t) = \phi(G_1(t), G_2(t), G_3(t))$
0	0	0	0
0	0	1.8	0
0	0	4	0
0	2	0	0
0	2	1.8	1.8
0	2	4	2
1.5	0	0	0
1.5	0	1.8	1.5
1.5	0	4	1.5
1.5	2	0	0
1.5	2	1.8	1.8
1.5	2	4	3.5

Cuadro 2.1: Estados del sistema transmisión de aceite.

Resumiendo  $G(t)=(0, 1.5, 1.8, 2, 3.5)$ , el sistema tiene cinco capacidades diferentes de transmisión de flujo, el máximo es de 3.5 toneladas de aceite por minuto

### 2.3.2. Propiedades Principales de MSS

Estas propiedades es una extensión de las suposiciones que hicimos para el análisis de la estructura de un sistema en sistemas binarios.

- *Relevancia de los elementos del sistema*

Para el análisis de un MSS, el elemento es relevante si algún cambio en su estado, sin cambios en los estados de los demás elementos, causa un cambio en el estado del sistema entero, esto es si para algun  $g_{jk} \neq g_{jm}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi(G_1(t), \dots, G_{j-1}(t), g_{jk}, G_{j+1}(t), \dots, G_n(t)) &= 1 \neq \\ \phi(G_1(t), \dots, G_{j-1}(t), g_{jm}, G_{j+1}(t), \dots, G_n(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

- *Coherencia*

De la propiedad de la función de estructura se sigue que el funcionamiento más grande del sistema es alcanzado cuando las niveles de funcionamiento de todos los elementos son las más grandes y fun-

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

cionamiento más bajo del sistema es alcanzado cuando los niveles de funcionamiento de todos los elementos son los más bajos.

■ *Homogeneidad*

El MSS es homogéneo si todos sus elementos y el sistema entero mismo tienen el mismo número y los distintos estados.

### 2.3.3. Tipos de MSS

De acuerdo con el modelo genérico, se pueden definir diferentes tipos de MSS describiendo el comportamiento estocástico de cada componente y definiendo la función de estructura del sistema. Se presentarán a continuación diferentes modelos MSS que son comúnmente ocupados en estudios de confiabilidad, detallados brevemente

1. MSS con Configuración simple típica

- Estructura en Serie
- Estructura en Paralelo
- Estructura en Puente

2. Sistemas con dos modos de falla

3. Ponderado de sistemas de votación

4. Sistemas conectados consecutivamente

5. Sistemas ventanas deslizadas

6. Redes

- Modelos de Borde
- Modelos de Vertices
- Modelos Mixtos

#### **Estructura en Serie**

Depende de su tipo de funcionamiento y de la naturaleza física de la interconexión entre sus elementos

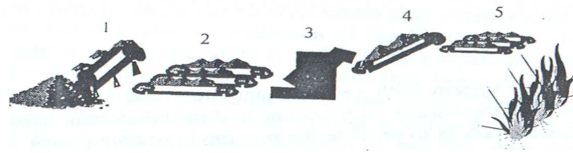


Figura 2.13: Sistema de Transportador de carbón

- Transmisión:** Sistemas que utiliza la capacidad de sus componentes como una medida de su funcionamiento. La operación de este sistema está asociada al flujo que existe a través de los componentes (líneas de producción o flujo continuo), a continuación se muestra un ejemplo en la figura 2.13.

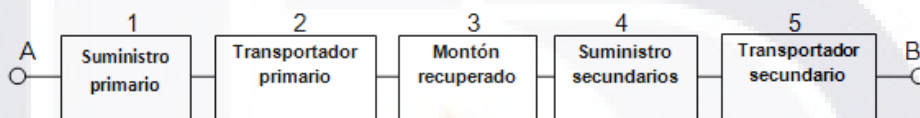


Figura 2.14: Transporta el carbón desde el punto A al punto B, abastece el sistema de calderas.

Las figuras 2.13 y 2.14 muestra un sistema de transmisión donde la confiabilidad del sistema se define como la habilidad para abastecer una cantidad dada de carbón (demanda) durante un tiempo de operación específico.

- Procesamiento:** La medida de funcionamiento del sistema es caracterizada por el tiempo de operación o la rapidez del proceso. La operación de ese sistema está asociado con una media de flujo pasando continuamente a través de sus elementos. El tiempo total del sistema en operación es igual a la suma de los tiempos de operación de todos sus componentes.

La definición de MSS de la conexión en serie preservar su propiedad principal: la falla total de algún elemento (nivel de funcionamiento igual a 0) causa la falla total del sistema entero (nivel de funcionamiento del sistema es igual a 0)

## Estructura en Paralelo

El MSS con estructura en paralelo tiene inherente la propiedad esencial tal que la falla total del sistema entero ocurre solo cuando todos los elementos están en estado de falla total. Dos modelos básicos de sistemas en paralelo son distinguidos en el análisis de confiabilidad. El primero esta basado en la suposición de que todos los elementos son activados y comparten carga (trabajos compartidos), el segundo representa una situación donde solo un elemento esta operando a la vez (activo y/o redundancia en espera sin trabajos compartidos)

- Para los MSS con trabajos compartidos, el nivel de funcionamiento del sistema entero es usualmente igual a la suma de las niveles de funcionamiento de los elementos en paralelo para ambos sistemas flujos de transmisión y procesador de tareas, como se muestra en la figura 2.15 A.
- Para MSS sin trabajos compartidos el nivel de funcionamiento del sistema depende de la disciplina de la activación de los elementos. La política más común en ambos transmisiones de flujo y el procesamiento en MSS es usar la disponibilidad del elemento con el nivel de funcionamiento más grande posible. En este caso, el nivel de funcionamiento del sistema es igual al nivel de funcionamiento máxima de los elementos en paralelo disponibles, como se muestra en la figura 2.15 B.

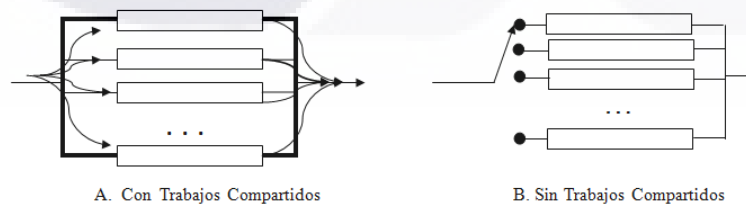


Figura 2.15: Estructura en Paralelo

Una combinación híbrida de estructuras en serie y paralelo resulta sistema serie-paralelo. El nivel de esa estructura puede ser obtenida por la evaluación consecutiva de los niveles de funcionamiento de un subsistema

puro serie o paralelo.

La confiabilidad del sistema para los MSS en serie-paralelo, puede ser definida como la probabilidad de que el nivel de funcionamiento sobre todo el sistema se encuentre en una demanda especifica.

La confiabilidad de los sistema k de n es definida como una probabilidad de que al menos k elementos de los n están en condiciones operables.

### Estructura en Puente (Bridge)

La confiabilidad de muchas configuraciones no puede ser reducida a una combinación de estructuras en serie y paralelo. El sistema se encuentra diseñado para asegurar el menor esfuerzo posible para los estados de funcionamiento y de falla. El ejemplo se muestran en la figura 2.16.

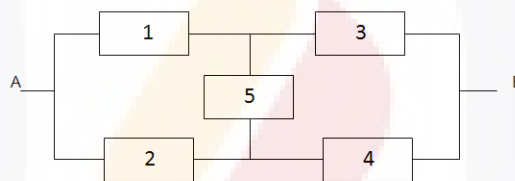


Figura 2.16: Estructura en Puente

Los componentes  $G_1$  y  $G_2$  poseen los mismos atributos operacionales, pero tienen diferentes niveles y probabilidades, lo mismo para los componentes  $G_3$  y  $G_4$ , un componente  $G_5$ , trabaja como interfase entre los pares  $(G_1, G_4)$  y  $(G_2, G_3)$ .

### Sistemas con dos modos de falla

Estos sistemas consisten en modos de falla que pueden ocurrir en diferentes formas. Por ejemplo, ver figura 2.17, sistemas con switch que pueden fallar cuando se abre el sistema o cuando se cierra. Las fallas en modos abiertos o cerrados son eventos mutuamente excluyentes.

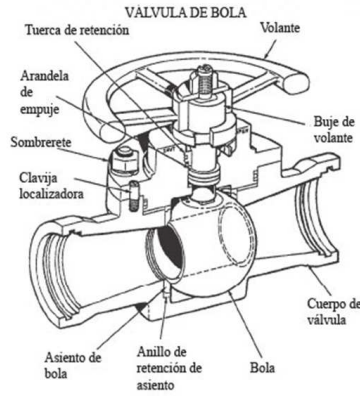


Figura 2.17: Válvula de Bola Típica Falla en el modo de abrir y cerrar

### Ponderado de Sistemas de Votación

Este sistema toma decisiones basadas en cada uno de los  $N$  componentes independientes. Cada componente ( $j=1, 2, \dots, N$ ), produce una decisión, la cual puede ser  $G_j=1$ , (proposición aceptada), o  $G_j=0$  (proposición rechazada), puede no tomarse alguna decisión si se abstiene de dar una respuesta. Para realizar una decisión, el sistema incorpora todas las decisiones unitarias. Si al menos  $m$  aceptan, el sistema da una respuesta favorable. Un ejemplo de esto puede verse en las pruebas del VIH, cuando se está compuesto por más de una sola prueba y se da una respuesta si al menos un número  $k$  da como resultado positivo.

Notemos que este tipo de MSS puede ser considerado un caso especial de la estructura  $\mathbf{K} - \mathbf{N}$  con dos tipos de falla. Dado que el funcionamiento del sistema puede variar, este tipo de sistemas puede ser considerados como el caso más simple de MSS.

### Sistemas MSS consecutivos

En el modelo multi estado los elementos tienen diferentes estados y cuando un elemento está en el estado  $i$ , es capaz de proveer una conexión con el siguiente elemento  $i$  (los  $n$  elementos después del uno están asumidos estar dentro de su rango). Los sistemas conectados consecutivamente lineal multi estado, falla si su primero y último elemento no son conectados (no existen caminos entre esos elementos), el ejemplo se muestra en



la siguiente figura 2.18.



Figura 2.18: Diferentes estado de un elemento multi-estado en MSS conectados consecutivamente

### MSS de ventanas deslizables

El sistema consiste de  $N$  elementos linealmente ordenados multi - estados. Cada elemento puede tener un número de diferentes estados; desde falla completa a funcionamiento perfecto. Un nivel de funcionamiento es asociada con cada estado.

El sistema falla si la suma de los niveles de funcionamiento de los  $r$  elementos consecutivos es más bajo que la demanda  $W$ .

Por ejemplo (en control de Calidad).En varios planes de control de calidad los criterios para decidir cuándo iniciar la búsqueda de la causa del cambio en el proceso están basados en las llamadas pruebas de zona. Si en  $k$  de  $r$  pruebas consecutivas los valores de los parámetros están fuera de la advertencia de límite, la alarma de búsqueda es iniciada.

### Redes MSS

Redes son sistemas que consisten de un conjunto de vértices (nodos) y un conjunto de bordes que conectan esos vértices. Las redes no dirigidas y dirigidas existen. Los cuales las redes no dirigidas los bordes conectan meramente los vértices sin considerar alguna dirección, en las redes dirigidas, los bordes son pares ordenados de vértices. Esto es, cada borde puede ser seguido desde un vértice al siguiente. Por ejemplo, “ Los sistemas de producción continua en los cuales los vértices corresponden a los productos procesados con capacidad variable y los bordes representan

la secuencia de operaciones tecnológicas”.

## 2.4. Modelos de la Función Generadora Universal FGU

### 2.4.1. Fundamentos Matemáticos

La función generadora universal permite evaluar la distribución de funcionamiento de un MSS completo empleado procedimientos algebraicos sobre las distribuciones de funcionamiento de los elementos que lo componen. Está basada en procedimientos recursivos simples y provee un método sistemático para la enumeración de los estados de sistema, que puede reemplazar algoritmos combinatoriales extremadamente complicados.

Sea  $X$  una variable aleatoria que toma valores en un conjunto finito, posee una función de distribución  $f(x)$ , sólo puede ocupar un valor a la vez, por lo que todo evento que relacione los valores de la variable aleatoria son mutuamente excluyentes.

La función de un elemento multi-estado definido como una variable aleatoria discreta, se puede representar por el siguiente polinomio,

$$W(z) = E(z^X) = \sum_{i=0}^k z^{x_i} p_i \quad (2.58)$$

Esta función es llamada la *transformación-z* de la variable aleatoria  $X$ . Es así como un elemento puede ser descrito en función de sus estados y la probabilidad de los mismos. Si consideramos  $n$  variables aleatorias discretas  $X_1, \dots, X_n$  y asumimos que cada variable  $X_i$  tiene una función de distribución representada por los vectores  $x_i, p_i$ . De este modo, la *transformación-z* de la suma de variables aleatorias independientes es el producto de cada *transformación-z* individual:

$$W\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n W_{X_i}(z) \quad (2.59)$$

Para evaluar la función de distribución de cualquier función arbitraria  $f(X_1, \dots, X_n)$  se tendría que evaluar el vector  $y$  y  $q$  correspondientes a

los estados y posibilidades generados por dicha función, consideremos cada posible valor de la función  $f$  corresponde a una combinación de valores de sus argumentos  $X_1, \dots, X_n$ . El número total de combinaciones es

$$K = \prod_{i=1}^n (k_i + 1) \quad (2.60)$$

donde  $k_i+1$  es el número de las diferentes realizaciones de la variable aleatoria  $X_i$ . Dado que todas las variables son independientes, la probabilidad de cada combinación es el producto de la probabilidad de cada realización de los argumentos que conforman cierta combinación.

La probabilidad de que la  $j$ -ésima combinación de las realizaciones de las variables puede ser obtenida como

$$q_j = \prod_{i=1}^n p_{ij_i} \quad (2.61)$$

y el correspondiente valor de la función puede ser obtenido como

$$f_j = f(x_{1j_1}, \dots, x_{nj_n}) \quad (2.62)$$

Cabe resaltar que algunas combinaciones diferentes puede producir el mismo valor de la función, pero todas las combinaciones son mutuamente excluyentes. Así, la probabilidad de que una función tome algún valor es igual a la suma de las probabilidades de las combinaciones que produce dicho valor. Sea  $A_h$  el conjunto de combinaciones que produce el valor  $f_h$ . Si el número de realizaciones diferentes de la función  $f(X_1, \dots, X_n)$  es  $H$ , entonces la distribución de la función es

$$y = (f_h : 1 \leq h \leq H), \quad q = \left[ \sum_{(x_{1j_1}, \dots, x_{nj_n}) \in A_h} \prod_{i=1}^n p_{ij_i} : 1 \leq h \leq H \right] \quad (2.63)$$

Definimos la *transformada*  $-z$  de cada variable aleatoria  $X_i$  que representa la distribución correspondiente a  $(x_{i0}, \dots, x_{ik_i}), (p_{i0}, \dots, p_{ik_i})$  en la forma polinomial como anteriormente fue mencionado:

$$\sum_{j=0}^{k_j} p_{ij} z^{x_{ij}}. \quad (2.64)$$

De forma similar, se puede obtener la *transformada -z* que representa la distribución de cualquier función arbitraria  $\mathbf{f}$  reemplazando el producto de los polinomios por un operador más general sobre las *transformada -z* de  $n$  variables aleatorias independientes representando la distribución correspondiente a cada una

$$\otimes_f \left( \sum_{j_i=0}^{k_i} p_{ij_i} z^{x_{ij_i}} \right) = \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \dots \sum_{j_n=0}^{k_n} \left( \prod_{i=0}^n p_{ij_i} z^{f(x_{1j_1}, \dots, x_{nj_n})} \right) \quad (2.65)$$

La técnica basada en el uso de la *transformada-z* y operadores compuestos es llamada la *Función Generadora Universal* (UGF). En este contexto la *transformada-z* de una variable aleatoria para la cual el operador  $\otimes_f$  se encuentra definido como UGF. Dicha función para alguna variable  $X_i$  es denotada como  $u_j(z)$  y la UGF para la variable  $f(X_1, \dots, X_n)$  como  $U(z)$ . De acuerdo a la notación

$$U(z) = \otimes_f (u_1(z), u_2(z), \dots, u_n(z)). \quad (2.66)$$

A pesar de el hecho de que la UGF tenga la forma de un polinomio, no es un polinomio pues los coeficientes y exponentes no son necesariamente escalares, pero pueden ser otros objetos matemáticos como vectores. Los operadores definidos pueden diferir de los operadores de productos polinomiales. En general, las UGF pueden ser utilizadas no solamente para representar la distribución de cierta variable. Sin embargo, en cualquier representación los coeficientes se interpretan como las probabilidades asociadas a cierta característica o algún objeto representado por los exponentes correspondientes a cada término.

### Propiedades de composición de operadores

Las propiedades de la composición de operadores  $\otimes_f$  depende estrictamente de las propiedades de la función  $f$ . Dado que la multiplicación de probabilidades bajo este operador es conmutativa y asociativa, el operador completo posee también estas propiedades si la función las posee.

$$\text{Si } f(X_1, \dots, X_n) = f[f(X_1, \dots, X_{n-1}), X_n], \quad (2.67)$$

entonces:

$$U(z) = \otimes_f [u_1(z), \dots, u_n(z)] = \otimes_f [\otimes_f (u_1(z), u_2(z), \dots, u_{n-1}(z)), u_n(z)]. \quad (2.68)$$

Si la función posee la propiedad asociativa

$$f(X_1, \dots, X_n) = f[f(X_1, \dots, X_j), f(X_{j+1}, \dots, X_n)] \quad \forall j, \quad (2.69)$$

entonces el operador posee la propiedad

$$\otimes_f (u_1(z), \dots, u_n(z)) = \otimes_f [\otimes_f (u_1(z), \dots, u_j(z)), \otimes_f (u_{j+1}(z), \dots, u_n(z))]. \quad (2.70)$$

Si además la función posee la propiedad conmutativa

$$f(X_1, \dots, X_j, X_{j+1}, \dots, X_n) = f(X_1, \dots, X_{j+1}, X_j, \dots, X_n), \quad (2.71)$$

el operador también posee dicha propiedad:

$$\otimes_f (u_1(z), \dots, u_j(z), u_{j+1}, \dots, u_n(z)) = \otimes_f (u_1(z), \dots, u_{j+1}(z), u_j(z), \dots, u_n(z)). \quad (2.72)$$

La forma recursiva de la función es

$$f[f_1(X_1, \dots, X_j), f_2(X_{j+1}, \dots, X_h), \dots, f_m(X_l, \dots, X_n)], \quad (2.73)$$

entonces la función  $U(z)$  puede ser obtenida recursivamente:

$$\otimes_f [\otimes_{f_1} (u_1(z), \dots, u_j(z)), \otimes_{f_2} (u_{j+1}, \dots, u_h(z)), \otimes_{f_m} (u_l(z), \dots, u_n(z))] \quad (2.74)$$

Considerando una variable aleatoria  $X$  con distribución representada por su UGF

$u_X(z) = \sum_{j=0}^k p_j z^{x_j}$ . Para obtener la UGF que represente la distribución de  $f(X, c)$  para una constante  $c$ , se puede aplicar el siguiente operador:

$$U(z) = u_X(z) \otimes_f c = \left( \sum_{j=0}^k p_j z^{x_j} \right) \otimes_f c = \sum_{j=0}^k p_j z^{f(x_j, c)}. \quad (2.75)$$

### 2.4.2. Índices de Confiabilidad de MSS y Basados en FGU

La relación entre los sistemas multi-estado y la confiabilidad de dichos sistemas, es mostrada a continuación.

#### Básicos

Las características numéricamente del comportamiento de MSS, son ciertos índices de confiabilidad que determinaremos usando la función de aceptabilidad, la figura 2.19 muestra un cuadro sinóptico que sintetiza de donde se obtiene dicha función.

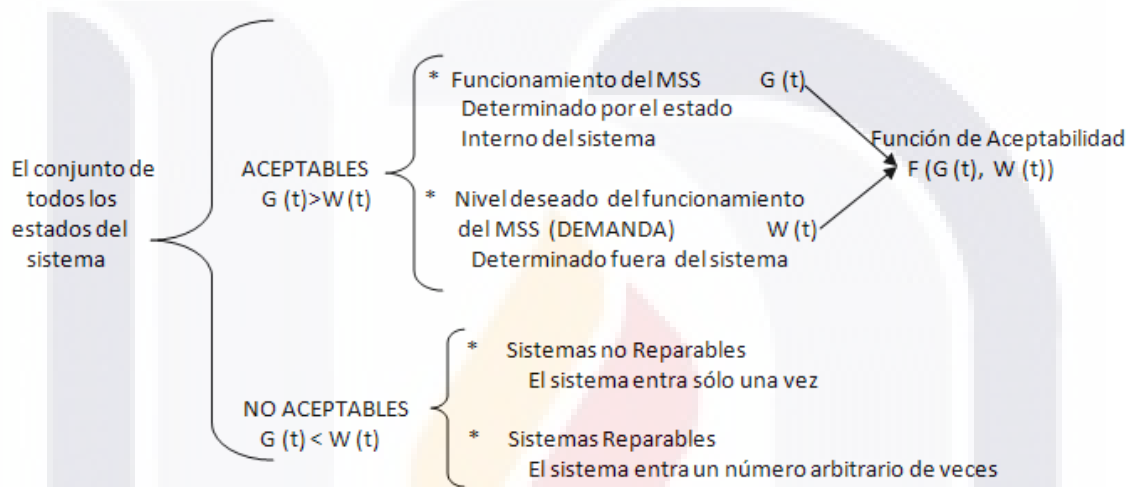


Figura 2.19: Función de Aceptabilidad

Podemos considerar que existe cierta demanda que debe satisfacerse, entonces, en este caso, la relación entre el funcionamiento del sistema y la demanda representados por dos procesos estocásticos debe ser estudiado.

Cuando la distribución del sistema no depende del tiempo o del instante en el que se encuentre el mismo, el funcionamiento es representado como una variable aleatoria que relaciona cada estado con cierta demanda correspondiente. Sea dos vectores  $w, q$  donde  $w = w_1, \dots, w_M$  el vector de los posibles niveles de demanda y  $q = q_1, \dots, q_M$  el vector de probabilidades estacionarias correspondiente a cada nivel de demanda,  $q_j = P(W = w_j)$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Cuando uno considera que MSS evoluciona conforme pasa el tiempo o durante el periodo de vida del mismo  $[0, T]$ , las siguientes *variables* aleatorias deben ser consideradas:

1. Tiempo de falla ( $T_f$ ) es el momento en el cual apartir del inicio de actividades del sistema se encuentre en algún nivel innaceptable.
2. Tiempo entre fallas ( $T_b$ ) es el tiempo entre dos tansiciones consecutivas entre algún estado aceptable a uno innaceptable.
3. Número de fallas ( $N_t$ ) ocasiones en que el sistema, hasta el tiempo  $T$ , posee niveles o estados innaceptables.

Los indices de confiabilidad asociados conla variable aleatoria ( $T_f$ ) son:

- Función de Confiabilidad  $R(t)$ , es la probabilidad de que ( $T_f$ ) sea mayor o igual a  $t \geq 0$ , donde en el estado inicial MSS se encuentra en un estado aceptable:

$$R(t) = P[T_f \geq t | F(G(0), W(0)) \geq 0] \quad (2.76)$$

Asumiremos que el funcionamiento del sistema debe exceder el valor de la demanda, entonces  $F(G(t), W(t)) = G(t) - W(t)$ .

- Tiempo medio a la falla ( $MTTF$ ) es el tiempo medio al instante cuando el sistema completo se encuentra en algún estado o funcionamiento innaceptable por primera vez

$$E(T_f) \quad (2.77)$$

La disponibilidad instantánea  $A(t)$  es la probabilidad de que MSS al instante  $t > 0$  se encuentre en un estado aceptable, es decir,

$$A(t) = P[F(G(t), W(t)) \geq 0] \quad (2.78)$$

La disponibilidad en el intervalo  $[0, T]$  está definido como

$$A_T = \frac{1}{T} \int_0^T 1(F(G(t), W(t)) \geq 0) dt \quad (2.79)$$

así,  $A_T$  representa la porción de las veces que el nivel de funcionamiento de salida del MSS no es menor que la demanda, es decir cuando  $G(t) < W(t)$ .

La disponibilidad estacionaria o estable  $A$ , que es cuando el tiempo es muy grande de tal manera que no le afecta, para un nivel constante de demanda  $W(t)=w$  puede ser determinada como:

$$A(w) = \sum_{k=1}^K p_k 1(F(g_k, w)) \geq 0, \quad (2.80)$$

donde  $p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t)$  es el vector de probabilidades estacionarias o estables del MSS correspondiente al estado  $k$ .

Cuando la demanda es variable, el periodo de operación de  $[0, T]$  del MSS es particionado en  $M$  intervalos  $T_m (1 \leq m \leq M)$  y un nivel de demanda constante  $w_m$  es asignado a cada intervalo  $m$ . En este caso el índice de disponibilidad puede ser escrito [Billinton and Allan, 1996];

$$A(w, q) = \sum_{m=1}^M q_m \sum_{k=1}^K p_k 1(F(g_k, w_m) \geq 0), \quad (2.81)$$

y  $w = w_1, \dots, w_M$  es el vector de los posibles niveles de demanda y  $q = q_1, \dots, q_M$  el vector de probabilidades estacionarias correspondientes a los niveles de demanda

$$q_m = \frac{T_m}{T}. \quad (2.82)$$

### Los índices de funcionamiento promedio del MSS

Estos índices no dependen de la demanda, están determinados como:

- El valor esperado del funcionamiento de salida del MSS instantáneo:

$$E_t = E(G(t)) \quad (2.83)$$

- El valor esperado del funcionamiento de estado estable o estacionario:

$$E_\infty = \sum_{k=1}^K p_k g_k \quad (2.84)$$

- El funcionamiento promedio en un intervalo de tiempo  $[0, T]$ :

$$E_T = \frac{1}{T} \int_0^T E_t dt \quad (2.85)$$



## Demanda no satisfecha o Deficiencia del funcionamiento del MSS

Cuando la demanda deseada no fue cubierta en su totalidad, es acreedor a una sanción económica, y por ésta razón es importante cuantificar la demanda no satisfecha por el sistema, es decir, cuando el funcionamiento del MSS se encontró en un estado no aceptable denotado como  $G(t) < A(t)$ , los índices que lo involucran son:

- Como consideramos que  $F(G(t), W(t)) = G(t) - W(t)$  entonces la deficiencia del funcionamiento instantánea (que es una variable aleatoria) es definido:

$$D(t) = \text{máx}\{W(t) - G(t), 0\} \quad (2.86)$$

- La probabilidad de que al instante  $t$ ,  $D(t)$  no exceda cierto nivel de demanda  $d$

$$P\{D(t) \leq d\}, \quad (2.87)$$

- El valor medio del funcionamiento deficiente del MSS instantánea

$$D_t = E[D(t)] \quad (2.88)$$

- Deficiencia Estable. Considerando las probabilidades estacionarias del MSS y una demanda es constante  $W(t) = w$ :

$$D_\infty = \sum_{k=1}^K p_k \text{máx}(w - g_k, 0) \quad (2.89)$$

- En el caso de tener demanda variable, la deficiencia estacionaria es

$$D_\infty(w, q) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K p_k q_m \text{máx}(w_m - g_i, 0) \quad (2.90)$$

El cálculo de muchos de estos índices o medidas en la mayoría de las ocasiones es difícil de realizar inclusive computacionalmente, sin embargo, se utilizará la técnica de la Función Generadora Universal para tal propósito.

## Indices Basados en la FGU

Habiendo aprendido el uso y propiedades de la función generadora universal en el estudio de la distribución de variables aleatorias, ahora estudiaremos la confiabilidad de un sistema multi-estado aplicando la FGU para obtener algunos de los índices anteriormente mencionados, esto con la finalidad de determinar diversas características de un sistema para posteriormente mejorar las mismas.

Utilizando la función generadora universal y la función  $u$  que representa la distribución de funcionamiento instantáneo del MSS, que es usada en la evaluación de las medidas de confiabilidad que a continuación se muestran. Teniendo la distribución del funcionamiento de MSS al tiempo  $t \geq 0$  utilizando la representación de la función generadora universal

$$U(z, t) = \sum_{i=1}^k p_i(t) z^{g_i} \quad (2.91)$$

se puede obtener

- La disponibilidad al instante  $t > 0$  para una demanda constante arbitraria  $w$  usando el operador  $\delta_A$ :

$$\begin{aligned} A(t, w) &= \delta_A[U(z, t), w] = \delta_A \left( \sum_{i=1}^K p_i(t) z^{g_i}, w \right) \\ &= \sum_{i=1}^K p_i(t) 1(F(g_i, w) \geq 0). \end{aligned} \quad (2.92)$$

- El Rendimiento instantáneo esperado producido por el MSS en el momento  $t > 0$  puede ser obtenido dada  $U(z)$  usando el operador  $\delta_E$  y con la ecuación 2.83:

$$E_t = \delta_E(U(z, t)) = \delta_E \left( \sum_{i=1}^K p_i(t) z^{g_i} \right) = \sum_{i=1}^K p_i(t) g_i. \quad (2.93)$$

Cuando el funcionamiento o comportamiento de MSS es representado por un valor escalar y  $U(z)$  toma la forma de un polinomio

genuino, el operador  $\delta_E$  genera el valor de la primera derivada de  $U(z,t)$  para  $z=1$ ;

$$\delta_E \left( \sum_{i=1}^K p_i(t) z^{g_i} \right) = \frac{dU(z,t)}{dz}(1) = \sum_{i=1}^K p_i(t) g_i. \quad (2.94)$$

- El rendimiento promedio esperado de MSS para un intervalo de tiempo  $[0, T]$  está definido como:

$$E_T = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^K g_i \int_0^T p_i(t) dt. \quad (2.95)$$

- Para obtener ahora el rendimiento deficiencia promedio instantánea para la función dada  $U(z,t)$  y la demanda constante  $w$ , el operador  $\delta_D$  debe ser usado:

$$\begin{aligned} D(t, w) &= \delta_D(U(z), w) = \delta_D \left( \sum_{i=1}^K p_i(t) z^{g_i}, w \right) \\ &= \sum_{i=1}^K p_i(t) \times \text{máx}(w - g_i, 0). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Notar que si existen las probabilidades estacionarias correspondientes:  $p_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t)$ , cada una correspondiente a los estados del sistema, se puede determinar la disponibilidad  $A_{\infty}$  del sistema, la media estacionaria de funcionamiento  $E_{\infty}$  y la deficiencia media estacionaria  $D_{\infty}$  reemplazando  $p_i(t)$  por  $p_{i\infty}$ .

Cabe destacar que FGU no considera las características de las transiciones del sistema entre diferentes estados, y por lo tanto, no puede ser usada para evaluar algunos índices como el tiempo medio de falla o el número esperado de fallas.

Veamos ahora un ejemplo en el cual podamos ver la aplicación de los conceptos ya definidos:

EJERCICIO 5. (*Lisnianski y Levitin, página 162*). Considerar un sistema que tiene tres diferentes grados de funcionamiento:

$$g_1 = 0, g_2 = 20, g_3 = 40$$

cuyas probabilidades de cada  $g_i$  son:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 0.043e^{-23,478t} - 0,106e^{-9,552t} + 0.063 \\ p_2(t) &= -0.289e^{-23,478t} - 0,0246e^{-9,552t} + 0.313 \\ p_3(t) &= 0.246e^{-23,478t} + 0,13e^{-9,552t} + 0.624 \\ 1 &= p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) \end{aligned}$$

Si quisieramos conocer las probabilidades de estado estable, es decir:

$$\begin{aligned} p_1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = 0,063 \\ p_2 &= \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t) = 0,313 \\ p_3 &= \lim_{t \rightarrow \infty} p_3(t) = 0,624 \end{aligned}$$

por otro lado, (este sistema tiene 3-estados por elemento con falla mínima y cuyas reparaciones poseen una intensidad de transición  $\lambda_{2,1}=2.02/\text{años}$ ,  $\lambda_{3,2}=7.01/\text{años}$ ,  $\mu_{1,2}=10/\text{años}$ ,  $\mu_{2,3}=14/\text{años}$ ).

La distribución del funcionamiento del MSS en cualquier instante  $t > 0$ :

$$g = \{0, 20, 40\}, p(t) = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\},$$

como tenemos la distribución entonces la representamos por FGU (usando la ecuación 2.91):

$$U(z, t) = p_1(t)z^0 + p_2(t)z^{20} + p_3(t)z^{40}.$$

Suponga que la demanda deseada es de  $w=15$ , si es menor entonces el funcionamiento del MSS decae tal que no pueda satisfacer una demanda. La función de aceptación toma la forma:

$$F(g_i, w) = g_i - 15.$$

Así, podemos obtener las siguientes expresiones que nos proporcionan información acerca de la confiabilidad del MSS:

1. Disponibilidad Instantánea (usando las ecuaciones 2.78 y 2.92) te-

niendo que la demanda constante es  $w=15$ , es:

$$\begin{aligned}
 A(t, w) &= \delta_A(U(z, t), 15) = \delta_A \left( \sum_{i=1}^3 p_i(t) z^{g_i}, 15 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^3 p_i(t) 1(F(g_i, 15) \geq 0) \\
 &= p_1(t) 1((0 - 15) \geq 0) + p_2(t) 1((20 - 15) \geq 0) \\
 &\quad + p_3(t) 1((40 - 15) \geq 0) \\
 &= p_2(t) + p_3(t) = -0,043e^{(-23,478t)} + 0,106e^{(-9,552t)} + 0,937.
 \end{aligned}$$

Como ejemplo suponga que deseamos conocer las características del MSS en  $t=0.3$  y a  $t=1$  que suponemos que el tiempo esta en años, de ahí; si  $t=1$  y la  $w=1.5$  la  $A(1,1.5)=-0,043e^{(-23,478(1))} + 0,106e^{(-9,552(1))}+0.937=0.937$ , es decir, que la probabilidad de que el MSS se encuentre disponible en un estado aceptable al  $t=1$  con una demanda de al menos 1.5 es de 0.937. De igual manera: si  $t=0.3$  y la  $w=1.5$  la  $A(0.3,1.5)=0.943$ , es decir, que la probabilidad de que el MSS se encuentre disponible en un estado aceptable al  $t=0.3$  con una demanda de al menos 1.5 es de 0.943. Y por último si  $t \rightarrow \infty$  entonces  $A_\infty=0.937$

2. El funcionamiento instantáneo esperado (usando las ecuaciones 2.83 y 2.93):

$$\begin{aligned}
 E_t &= \delta_E(U(z)) = \delta_E \left( \sum_{i=1}^3 p_i(t) z^{g_i} \right) = \sum_{i=1}^3 p_i(t) g_i \\
 &= 0p_1(t) + 20p_2(t) + 40p_3(t) \\
 &= 4,047e^{(-23,478t)} + 4,730e^{(-9,552t)} + 31,223.
 \end{aligned}$$

Si  $t \rightarrow \infty$  el funcionamiento esperado estable del MSS sería de  $E_\infty = 31,223$

3. Una vez que tenemos el funcionamiento instantaneo esperado podemos ahora calcular el funcionamiento promedio esperado durante un

intervalo de tiempo  $[0, T]$  (usando la ecuación 2.95):

$$\begin{aligned}
 E_T &= \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^K g_i \int_0^T p_i(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} [20 \int_0^T p_2(t) dt + 40 \int_0^T p_3(t) dt] \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T (4,047e^{(-23,478t)} + 4,730e^{(-9,552t)} + 31,223) dt \\
 &= \frac{1}{T} (0,667 - 0,172e^{(-23,478t)} - 0495e^{(-9,552t)} + 31,223)
 \end{aligned}$$

Por ejemplo si tomamos que  $T=0.3$ , el funcionamiento promedio esperado del MSS en el intervalo  $[0,0.3]$  sería de  $E_T=33.35$ , o si  $T=1$ ,  $E_T=31.89$ .

4. La deficiencia media instantánea (usando las ecuaciones 2.86 y 2.96):

$$\begin{aligned}
 D(t) &= \delta_D(U(z, t), 15) = \delta_D \left( \sum_{i=1}^3 p_i(t) z^{g_i}, 15 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^3 p_i(t) \text{máx}(15 - g_i, 0) \\
 &= p_1(t) \text{máx}(15 - 0, 0) + p_2(t) \text{máx}(15 - 20, 0) \\
 &\quad + p_3(t) \text{máx}(15 - 40, 0) \\
 &= 15p_1(t) = 15(0,043e^{(-23,478t)} - 0,106e^{(-9,552t)} + 0,063) \\
 &= 0,650e_{(-23,478t)} - 1,597e_{(-9,552t)} + 0,947
 \end{aligned}$$

El funcionamiento deficiente estable es de  $D_\infty=0.947$ . Y si por ejemplo tomamos  $t=0.3$ , tendríamos que  $D(0.3)=0,650e^{(-23,478(0,3))} - 1,597e^{(-9,552(0,3))} + 0,947=0.8566$ , es decir que una demanda no satisfecha cuando la demanda es de  $w=15$  con  $t=0.3$  es de 0.8566.

### 2.4.3. FGU de Subsistemas Multi - Estado

#### Método de Confiabilidad de Diagramas de Bloque

En muchos casos la función de estructura del MSS entero no cumple con las propiedades asociativa y comutativa, pero puede ser representado como una composición de la función de estructura que cumple una o ambas propiedades. Esas funciones corresponden a algunos subconjuntos de

los elementos del MSS, y se puede obtener la función-u de esos subconjuntos de forma separada. Es decir, un bloque representa un elemento del sistema (el bloque es una parte o un conjunto de partes del sistema), un conjunto de bloques conectados en serie puede ser reemplazado por un único bloque, de igual manera para un conjunto de bloques conectados en paralelo puede ser reemplazado por un único bloque, y así sucesivamente. Este procedimiento es llamado Método de Confiabilidad de Diagrama de bloques, y es el que usaremos para obtener la función de estructura del sistema entero, por consiguiente obtendremos la función-U.

Este método es usualmente aplicado a sistemas con configuración compleja de serie-paralelo, que veremos más adelante. En esta parte veremos primero como encontrar la FGU de subsistemas que tienen elementos en serie y subsistemas con elementos en paralelo.

### **FGU de Subsistemas con elementos en Serie**

Así como lo vimos en los tipos de MSS, identificamos dos formas de medir el funcionamiento en un sistema en serie, que son flujo de transmisión y procesamiento de tareas que veremos a continuación.

#### **1. MSS con Transmisión de Flujo**

En sistemas multi-estado de transmisión de procesos o de flujo en los cuales el funcionamiento del mismo está definido como su capacidad de productividad o rendimiento, la capacidad total de un subsistema que contiene  $n$  elementos conectados en serie, es igual a la capacidad del elemento que sea el cuello de botella, es decir, el elemento con menos funcionamiento. Entonces, la función de estructura de tal subsistema toma la forma

$$\phi_s(G_1, \dots, G_n) = \text{mín}\{G_1, \dots, G_n\} \quad (2.97)$$

Veamos un ejemplo de un subsistema multi-estado, con elementos conectados en serie, determinaremos la función de estructura así como las probabilidades correspondientes a cada combinación y

la función  $U(z)$ .

EJERCICIO 6. (*Lisnianski y Levitin, página 156*). *Considérese un sistema de transmisión de gas que consiste de dos elementos (pipas). El grado de funcionamiento de la línea de pipas es definido por la capacidad de transmisión, esta puede tomar diferentes valores discretos dependiendo del estado de control del equipo. El primer elemento posee tres posibles estados ( $k_1 = 3$ ) con grados de funcionamiento  $g_{13}=1$ ,  $g_{12}=0,7$  y  $g_{11}=0$ , con probabilidades  $p_{13}=0,8$ ,  $p_{12}=0,15$  y  $p_{11}=0,05$ . El segundo elemento posee dos posibles estados ( $k_2 = 2$ ) con grados de funcionamiento  $g_{21}=0$  y  $g_{22}=1$ , con probabilidades  $p_{22}=0,9$ , y  $p_{21}=0,1$ .*

El número total de combinaciones de estados en el sistema es  $K = k_1 k_2 = 6$ . La línea de pipas esta conectada en serie, el total de la capacidad de transmisión está restringida por la pipa con menor capacidad de transmisión; así la función de estructura sería  $\phi(G_1, G_2) = \min\{G_1, G_2\}$ . Cada combinación define un único estado del sistema, veamos la siguiente tabla

Estados del sistema	Estados de los elementos	Desempeño del sistema $\phi(G_1, G_2) = \min\{G_1, G_2\}$	Probabilidades del Edo. del sistema
1	$\{g_{13}, g_{22}\} = \{1, 1\}$	$g_1 = \min\{g_{13}, g_{22}\} = 1$	$p_{13} * p_{22} = 0,720$
2	$\{g_{13}, g_{21}\} = \{1, 0\}$	$g_2 = \min\{g_{13}, g_{21}\} = 0$	$p_{13} * p_{21} = 0,080$
3	$\{g_{12}, g_{22}\} = \{0,7, 1\}$	$g_3 = \min\{g_{12}, g_{22}\} = 0,7$	$p_{12} * p_{22} = 0,135$
4	$\{g_{12}, g_{21}\} = \{0,7, 0\}$	$g_4 = \min\{g_{12}, g_{21}\} = 0$	$p_{12} * p_{21} = 0,015$
5	$\{g_{11}, g_{22}\} = \{0, 1\}$	$g_5 = \min\{g_{11}, g_{22}\} = 0$	$p_{11} * p_{22} = 0,045$
6	$\{g_{11}, g_{21}\} = \{0, 0\}$	$g_6 = \min\{g_{11}, g_{21}\} = 0$	$p_{11} * p_{21} = 0,005$

Cuadro 2.2: Estados y Probabilidades correspondientes al sistema en serie.

Aplicando el operador  $\otimes_f$  con la función de estructura  $\phi(G_1, G_2) = \min\{G_1, G_2\}$  sobre las funciones generadoras individuales de cada pipa en el ejemplo, se puede obtener la distribución de funcionamiento del sistema completo en el caso de ser en serie (usando las ecuaciones 2.64, 2.65 y 2.66).



La representación de las distribuciones de funcionamiento de los elementos usando polinomios:

$$u_1(z) = p_{11}z^{g_{11}} + p_{12}z^{g_{12}} + p_{13}z^{g_{13}} = 0,8z^1 + 0,15z^{0,7} + 0,05z^0$$

$$u_2(z) = p_{21}z^{g_{21}} + p_{22}z^{g_{22}} = 0,9z^1 + 0,1z^0$$

Con esto se obtiene la representación de la distribución de funcionamiento del sistema entero como el producto de los polinomios:

$$\begin{aligned} U(z) &= \otimes_f(u_1(z), u_2(z)) \\ &= \otimes_f(p_{11}z^{g_{11}} + p_{12}z^{g_{12}} + p_{13}z^{g_{13}}, p_{21}z^{g_{21}} + p_{22}z^{g_{22}}) \\ &= \otimes_f(0,8z^1 + 0,15z^{0,7} + 0,05z^0, 0,9z^1 + 0,1z^0) \\ &= p_{13}p_{22}z^{\min\{g_{13},g_{22}\}} + p_{13}p_{21}z^{\min\{g_{13},g_{21}\}} + p_{12}p_{22}z^{\min\{g_{12},g_{22}\}} + \\ &\quad p_{12}p_{21}z^{\min\{g_{12},g_{21}\}} + p_{11}p_{22}z^{\min\{g_{11},g_{22}\}} + p_{11}p_{21}z^{\min\{g_{11},g_{21}\}} \\ &= 0,72z^{\min\{1,1\}} + 0,08z^{\min\{1,0\}} + 0,135z^{\min\{1,0,7\}} + \\ &\quad 0,015z^{\min\{0,7,0\}} + 0,045z^{\min\{0,1\}} + 0,005z^{\min\{0,0\}} \\ U(z) &= 0,72z^{1,0} + 0,135z^{0,7} + 0,145z^0 \end{aligned}$$

Observe que se hizo una simplificación en la última expresión, porque la función-U tiene la propiedad esencial de los polinomios regulares, es decir, se suman los coeficientes que tienen la variable elevada a la misma potencia.

De la última expresión podemos identificar la distribución de probabilidad del MSS:

$$\mathbf{g}=\{1.0,0.7,0\}; \mathbf{p}=\{0.72,0.135,0.145\}.$$

## 2. MSS con Procesamiento de Tareas

Cuando se tiene un sistema que procesa diferentes tareas, el funcionamiento está definido por la rapidez del procesamiento o el tiempo de operación de cada elemento del sistema que posee su propio funcionamiento, así el tiempo total para completar ciertas tareas se

encuentra restringido. Generalmente el tiempo total que toma el sistema para completar cierta tarea es mayor que el tiempo necesario para realizarlo. Esto puede ser causado por el deterioro de los elementos del mismo que causan atrasos o que el funcionamiento sea insatisfactorio.

El tiempo de procesamiento  $T_j$  es aleatorio para algun elemento  $j$  del sistema, esta definido como  $T_j = \frac{1}{G_j}$ . Entonces el tiempo total para acompletar la tarea por el sistema total es:

$$T = \sum_{j=1}^n T_j = \sum_{j=1}^n G_j^{-1} \quad (2.98)$$

La rapidez de procesamiento del sistema total es:

$$G = \frac{1}{T} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n G_j^{-1}} = \left( \sum_{j=1}^n G_j^{-1} \right)^{-1} \quad (2.99)$$

Es claro que si alguna  $G_j=0$  la ecuación no puede ser usada. Por lo tanto la funcion de estructura esta dada por:

$$\phi_s(G_1, \dots, G_n) = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{j=1}^n G_j^{-1}} & \text{si } \prod_{j=1}^n G_j \neq 0 \\ 0 & \text{si } \prod_{j=1}^n G_j = 0 \end{cases} \quad (2.100)$$

## FGU de Subsistemas con Elementos en Paralelo.

De igual manera, tratamos dos tipos de formas de medir el funcionamiento en los sistemas con elementos en paralelo.

### 1. MSS con Trabajos Compartidos

En los sistemas MSS de transmisión de procesos en los cuales se puede dispersar dicho proceso y ser transferido a diferentes elementos en paralelo simultáneamente, la capacidad total de un subsistema que contiene  $n$  elementos conectados en paralelo es igual a la suma

de las capacidades de cada elemento. Así, la función de estructura para la cual un subsistema toma la forma

$$\phi_p(G_1, \dots, G_n) = \sum_{j=1}^n G_j. \quad (2.101)$$

EJERCICIO 7. Consideraremos el mismo sistema de transmisión de gas que consiste de dos elementos, con los mismos estados y las mismas probabilidades, que tratamos en EJERCICIO 6, pero ahora veremos la conexión en paralelo, donde el flujo de gras será por los dos elementos simultaneamente, para este sistema la tabla quedaria de la siguiente manera:

Estados del sistema	Estados de los elementos	Desempeño del sistema $\phi(G_1, G_2) = G_1 + G_2$	Probabilidades del Edo. del sistema
1	$\{g_{13}, g_{22}\} = \{1, 1\}$	$g_1 = g_{13} + g_{22} = 2$	$p_{13} * p_{22} = 0,720$
2	$\{g_{13}, g_{21}\} = \{1, 0\}$	$g_2 = g_{13} + g_{21} = 1$	$p_{13} * p_{21} = 0,080$
3	$\{g_{12}, g_{22}\} = \{0,7, 1\}$	$g_3 = g_{12} + g_{22} = 1,7$	$p_{12} * p_{22} = 0,135$
4	$\{g_{12}, g_{21}\} = \{0,7, 0\}$	$g_4 = g_{12} + g_{21} = 1,7$	$p_{12} * p_{21} = 0,015$
5	$\{g_{11}, g_{22}\} = \{0, 1\}$	$g_5 = g_{11} + g_{22} = 1,7$	$p_{11} * p_{22} = 0,045$
6	$\{g_{11}, g_{21}\} = \{0, 0\}$	$g_6 = g_{11} + g_{21} = 1,7$	$p_{11} * p_{21} = 0,005$

Cuadro 2.3: Estados y Probabilidades correspondientes al sistema en paralelo.

La capacidad total de transmisión del sistema está determinada como suma de las capacidades de cada pipa. La función de estructura es  $\phi(G_1, G_2) = G_1 + G_2$ . Aquí  $G_1 \in \{g_{11}, g_{12}, g_{13}\}$  y  $G_2 \in \{g_{21}, g_{22}\}$  (usando las ecuaciones 2.64, 2.65 y 2.66).

Con esto se obtiene la representación de la distribución de funcionamiento del sistema entero como el producto de los polinomios:

$$\begin{aligned}
 U(z) &= \otimes_f(u_1(z), u_2(z)) \\
 &= \otimes_f(p_{11}z^{g_{11}} + p_{12}z^{g_{12}} + p_{13}z^{g_{13}}, p_{21}z^{g_{21}} + p_{22}z^{g_{22}}) \\
 &= \otimes_f(0,8z^1 + 0,15z^{0,7} + 0,05z^0, 0,9z^1 + 0,1z^0) \\
 &= p_{13}p_{22}z^{\{g_{13}+g_{22}\}} + p_{13}p_{21}z^{\{g_{13}+g_{21}\}} + p_{12}p_{22}z^{\{g_{12}+g_{22}\}} + \\
 &\quad p_{12}p_{21}z^{\{g_{12}+g_{21}\}} + p_{11}p_{22}z^{\{g_{11}+g_{22}\}} + p_{11}p_{21}z^{\{g_{11}+g_{21}\}} \\
 &= 0,72z^{\{1+1\}} + 0,08z^{\{1+0\}} + 0,135z^{\{1+0,7\}} + \\
 &\quad 0,015z^{\{0,7+0\}} + 0,045z^{\{0+1\}} + 0,005z^{\{0+0\}} \\
 U(z) &= 0,72z^{2,0} + 0,135z^{1,7} + 0,125z^{1,0} + 0,015z^{0,7} + 0,005z^0
 \end{aligned}$$

De la última expresión podemos identificar la distribución de probabilidad del MSS:

$$\mathbf{g}=\{2.0,1.7,1.0,0.7,0\}; \mathbf{p}=\{0.72,0.135,0.125,0.015,0.005\}.$$

## 2. MSS sin Trabajos Compartidos

En algunos sistemas con  $n$  elementos en paralele, por diversas circunstancias, no es posible que funcionen al mismo tiempo más de un elemento. Cuando el sistema comienza a realizar cierta tarea, en las mejores condiciones, la tarea estará completa cuando sean terminados por al menos uno de los elementos. El tiempo total del proceso del sistema se encuentra definido por el tiempo mínimo de proceso de sus elementos y la rapidez total del sistema está definida por la velocidad máxima de los elementos.

La función de estructura esta dada por:

$$\phi_p(G_1, \dots, G_n) = \text{máx}\{G_1, \dots, G_n\} \quad (2.102)$$

Como puede observarse, el estudio de la confiabilidad de un sistema multi-estado es accesible mediante el uso de la función generadora universal y de los diferentes operadores que proporcionan los índices del

tesis tesis tesis tesis tesis

sistema. A continuación se presentará el uso de FGU en el estudio de MSS en serie-paralelo y su relación con el método confiabilidad de diagramas de bloques, ya que lo aplicaremos en el desarrollo del trabajo central de esta tesis.

#### 2.4.4. FGU de MSS serie-paralelo

La función de estructura de sistemas serie paralelo que poseen algún tipo de estructura compleja pueden ser siempre representados como una composición de las funciones de estructuras de subsistemas estadísticamente independientes que contienen solamente elementos conectados en serie o en paralelo. Así, para obtener FGU de un sistema serie-paralelo se deben aplicar operadores recursivos para conseguir las FGU de cada subsistema en serie o paralelo según su estructura, usando el Método de Confiabilidad de Diagrama de Bloques. El siguiente algoritmo describe el procedimiento para dicho propósito dado en [14]:

1. Encontrar los subsistemas pertenecientes a MSS que sean puramente en serie y paralelo.
2. Obtener las FGU de estos subsistemas usando el operador  $\Omega_\phi$  correspondiente.
3. Reemplazar cada subsistema por elementos simples que posean una FGU representado la estructura que poseen.
4. Si MSS posee más elementos, regresar al paso 1.

Con el siguiente ejemplo, de un sistema en serie-paralelo determinaremos FGU utilizando el Método de confiabilidad de diagrama de bloques.

EJERCICIO 8. Consideremos el sistema mostrado en la figura 2.20 A.

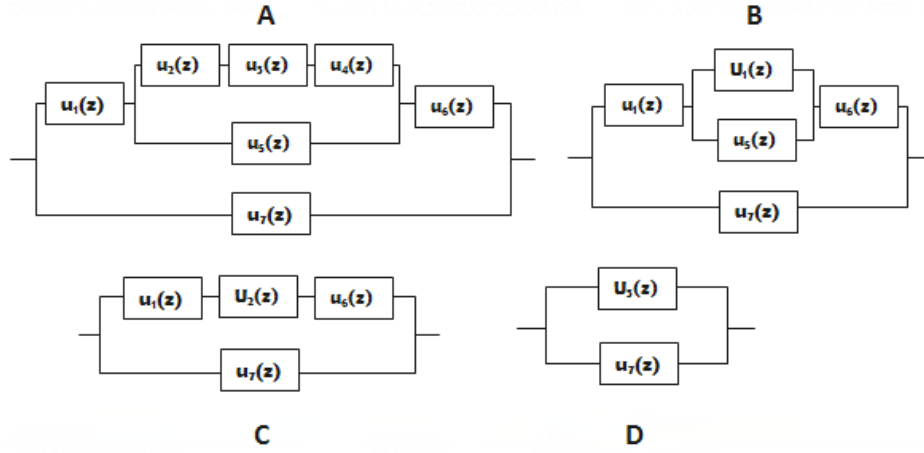


Figura 2.20: Ejemplo para determinar recursivamente la función-U del MSS

Empezaremos por obtenerse la FGU correspondiente al subsistema de los elementos que están en serie representados por  $u_2(z)$ ,  $u_3(z)$  y  $u_4(z)$ . Se calcula la función  $U_1(z) = \Omega_{\phi_s}(u_2(z), u_3(z), u_4(z))$  y se reemplaza estos tres elementos por uno simple con función  $U_1(z)$ , se obtiene un sistema con estructura mostrada en la figura 2.20 B.

Continuamos y encontramos que el sistema contiene un subsistema en paralelo que consiste de los elementos cuyas funciones son  $U_1(z)$  y  $u_5(z)$ , los cuales son reemplazados por la función  $U_2(z) = \Omega_{\phi_p}(U_1(z), u_5(z))$  resultando una estructura como la figura 2.20 C.

Así, queda una estructura en serie de tres elementos que pueden ser reemplazados por un elemento simple con:  
 FGU  $U_3(z) = \Omega_{\phi_p}(u_1(z), U_2(z), u_6(z))$ , dicha estructura se ve en la figura 2.20 D.

Y por último, como se puede apreciar, resulta un sistema que consta de dos elementos conectados en paralelo. La FGU de esta última estructura representa la distribución del sistema entero inicial como  $U(z) = \Omega_{\phi_p}(U_3(z), u_7(z))$ . Que resulta ser más fácil de calcular que el sistema inicial.

De igual forma, la FGU correspondiente a MSS puede ser obtenida de forma recursiva. Si se tiene un sistema con  $n$  elementos donde subsistemas conectados en serie están formados por elementos estructurados en paralelo, algunos de estos a su vez son subsistemas en serie, luego se tiene

$$\phi(G_1, G_2, \dots, G_n) = \phi_s[\phi_p(G_1, \dots, \phi_s(G_j, G_{j+1}, \dots)), G_i, G_{i+1}), \dots, G_n]$$

Para calcular la función de estructura de los subsistemas en serie o paralelo, se debe hacer de acuerdo a la estructura adecuada al tipo de subsistema, que las analizadas anteriormente están mostradas en la tabla 2.4.

No.tipo sistema	Descripción del MSS	Función de Estructura para elementos en serie	Función de Estructura elementos en paralelo
1	Transmisión de Flujo sin dispersión	$\phi(G_1 \dots, G_n) = \min(G_1 \dots, G_n)$	$\phi(G_1 \dots, G_n) = \sum_{j=1}^n G_j$
2	Transmisión de Flujo con dispersión	$\phi(G_1 \dots, G_n) = \min(G_1 \dots, G_n)$	$\phi(G_1 \dots, G_n) = \max(G_1 \dots, G_n)$
3	Procesamiento de tareas con trabajos compartidos	$\phi(G_1 \dots, G_n) = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{j=1}^n G_j^{-1}} & \text{si } \prod_{j=1}^n G_j \neq 0 \\ 0 & \text{si } \prod_{j=1}^n G_j = 0 \end{cases}$	$\phi(G_1 \dots, G_n) = \sum_{j=1}^n G_j$
4	Procesamiento de tareas sin trabajos compartidos	$\phi(G_1 \dots, G_n) = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{j=1}^n G_j^{-1}} & \text{si } \prod_{j=1}^n G_j \neq 0 \\ 0 & \text{si } \prod_{j=1}^n G_j = 0 \end{cases}$	$\phi(G_1 \dots, G_n) = \max(G_1 \dots, G_n)$

Cuadro 2.4: Función de Estructura para Subsistemas en serie y Subsistemas en paralelo.

## Capítulo 3

# Políticas de Mantenimiento

Mejorar la confiabilidad de un MSS, es de suma importancia en varios tipos de sistemas. Sin embargo, pueden presentarse situaciones en las cuales los recursos necesarios para realizar dicha mejora son limitados; es decir, se cuenta con restricciones económicas o tecnológicas. Por lo que en este problema de optimización se identifican dos enfoques, el primero es el buscar maximizar la confiabilidad del sistema sujeta a diversas restricciones; mientras que el segundo es el minimizar los recursos necesarios para alcanzar un nivel de confiabilidad requerido.

Para mejorar la confiabilidad de un sistema se puede usar: redundancia, un re - ordenamiento óptimo de los elementos del sistema, mejora de la confiabilidad y/o el funcionamiento de los elementos del sistema o una combinación de los anteriores.

En confiabilidad existen dos tipos de sistemas: los que realizan una sola tarea, y cuando presentan la falla son desechados no tienen reparación; y los que están continuamente operando, son sistemas reparables. Estos últimos son los más abundantes y representativos dentro de las actividades humanas diarias, por lo que es importante mantenerlos en operación durante su período de vida. Para esto se implementan programas de mantenimiento, es decir, políticas de mantenimiento.

El objetivo es mejorar la confiabilidad del sistema, no sólo se desea que éste trabaje hasta que su tiempo de vida termine o hasta que sus componentes lo permitan, sino lo más que se pueda. Pero lograr dicho



objetivo implica costos, que tanto en industrias como en empresas, la reducción de costos es igual de importante, lo ideal es mantener trabajando un sistema el mayor tiempo posible con el menor costo de mantenimiento a un cierto nivel de confiabilidad, es decir, tener la disponibilidad del sistema en el instante  $t > 0$ .

En MSS, donde los roles de los diferentes elementos para mejorar la disponibilidad del sistema depende de dos cosas, de la distribución del funcionamiento y su lugar en el sistema, la distribución óptima de los recursos limitados de mantenimiento es un problema de combinación complicado.

Se manejan tres tipos de políticas que se escriben a continuación:

### 3.1. Políticas de Reemplazo Cíclico Óptimo

Estas políticas de mantenimiento se aplican a sistemas que consisten de elementos que tienen tasas de riesgo que se incrementan con el tiempo, como vimos en los conceptos básicos

**Un Mantenimiento Preventivo (perfecto)** es aquel que:

- Reduce la tasa de riesgo para hacer los elementos "tan buenos como nuevos".
- Reemplazan los elementos por unos nuevos.
- Si el elemento tiene un alto riesgo de falla se reduce la posibilidad de falla, pero puede causar un costo significativo, si tienen una alta tasa de reemplazamiento.

Nos referiremos a este mantenimiento preventivo perfecto como reemplazamiento preventivo (PR).

**Un mantenimiento correctivo** es aquel que:

- Hace al sistema operable por un mínimo costo cuando ocurre la falla.

- Los elementos del sistema no son capaces para continuar su tarea pero no afecta su tasa de riesgo.

Tal actividad, la denotaremos como reparación mínima (MR).

### Suposiciones sobre el sistema:

- Independencia entre las actividades de reemplazamiento y reparación para los diferentes elementos.
- Los tiempos de reparación y reemplazo son mucho más pequeños que los tiempos entre las fallas.
- La probabilidad del evento de reemplazar y reparar es insignificante.

El objetivo es proveer la disponibilidad del sistema deseada por una mínima suma del costo de mantenimiento y el costo de la multa causada por la demanda no satisfecha del sistema (deficiencia del funcionamiento). El problema es determinar la programación óptima de los PRs cíclicos para MSS con configuración serie-paralelo dada y elementos de dos-estados.

#### 3.1.1. Planteamiento del Problema

Un sistema consiste de  $n$  elementos que conforman una estructura dada.

**Cada elemento  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) del sistema es caracterizado por**

- Por la distribución de probabilidad ( $\mathbf{g}_j = \{0, g_{ji}\}$ ,  $\mathbf{p} = \{(1-p_{ji}), p_{ji}\}$ ).
- Por la función de renovación que representa el número esperado de las fallas y reparaciones en el intervalo de tiempo  $(0,t)$ ,  $f_j(t)$ .
- El tiempos de la actividades de mantenimiento PR ( $\tau_{pj}$ ).
- El tiempos de la actividades de mantenimiento MR ( $\tau_{cj}$ ).
- El costo de la actividades de mantenimiento PR ( $p_{pj}$ ).

- El costo de la actividades de mantenimiento MR ( $c_{cj}$ ).

El intervalo de reemplazamiento puede ser definido por el número de acciones de PR  $x_j$  durante la vida del sistema cíclico T:  $t_j = (\frac{T}{x_j+1})$ . Por lo tanto, el número esperado de fallas del elemento  $j$  durante la vida del sistema cíclico es:

$$(x_j + 1)f_j\left(\frac{T}{x_j + 1}\right) \quad (3.1)$$

Y en consecuencia el tiempo esperado que el  $j$ -ésimo elemento del sistema no está disponible puede ser estimado por la siguiente expresión:

$$(x_j + 1)f_j\left(\frac{T}{x_j + 1}\right)\tau_{cj} + x_j\tau_{pj} \quad (3.2)$$

La disponibilidad de cada elemento es definida como:

$$p_{ji} = \frac{T - (x_j + 1)f_j\left(\frac{T}{x_j+1}\right)\tau_{cj} - x_j\tau_{pj}}{T} \quad (3.3)$$

El tiempo total del mantenimiento esperado durante la vida del sistema cíclico es:

$$\tau_{tot} = \sum_{j=1}^n [(x_j + 1)f_j\left(\frac{T}{x_j + 1}\right)\tau_{cj} + x_j\tau_{pj}] \quad (3.4)$$

Los costo del mantenimiento esperado durante la vida del sistema cíclico es:

$$C_m = \sum_{j=1}^n [(x_j + 1)f_j\left(\frac{T}{x_j + 1}\right)c_{cj} + x_j c_{pj}] \quad (3.5)$$

Con la distribución de probabilidad del sistema y la distribución de la demanda  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{q}$ , calculamos los índices de confiabilidad: la disponibilidad  $\mathbf{A}(\mathbf{w}, \mathbf{q})$  ecuación 2.81 y la deficiencia de funcionamiento esperada  $\mathbf{D}(\mathbf{w}, \mathbf{q})$  ecuación 2.90.

El costo total de la demanda no suministrada esperado durante la vida del sistema cíclico T,  $c_u$  es el costo específico de la demana no suministrada, es:

$$C_{ud} = T * c_u * D(\mathbf{w}, \mathbf{q}). \quad (3.6)$$

Definimos el número de políticas de reemplazamiento del sistema por el vector  $\mathbf{x}=x_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , entonces tenemos dos formulaciones del problema de optimización del mantenimiento del sistema.

1. Encontrar las políticas de reemplazamiento  $x^*$  del sistema a costos mínimos de mantenimiento y que dé al mismo tiempo un nivel de disponibilidad requerido del MSS mientras el tiempo de mantenimiento no sea mayor a un tiempo limite específico.

$$C_m(x^*) \rightarrow \text{mín}$$

$$\text{sujeto a } A(x^*, w, q) \geq A', \tau(x^*) \leq \tau' \quad (3.7)$$

2. Encontrar las políticas de reemplazamiento  $x^*$  del sistema minimizando el costo total de mantenimiento y de la demanda no suministrada mientras el tiempo de mantenimiento no sea mayor a un tiempo limite específico.

$$C_m(x^*) + C_{ud}(x^*, w, q) \rightarrow \text{mín}$$

$$\text{sujeto a } \tau_{total}(x^*) \leq \tau' \quad (3.8)$$

3. En forma general.

$$C_m(x^*) + C_{ud}(x^*, w, q) \rightarrow \text{mín}$$

$$\text{sujeto a } A(x^*, w, q) \geq A', \tau_{total}(x^*) \leq \tau' \quad (3.9)$$

### 3.2. Redundancia Conjunta y Optimización de Mantenimiento

En este mantenimiento también se aplican a sistemas que consisten de elementos que tienen tasas de riesgo que se incrementan con el tiempo, pero en este caso consideraremos el funcionamiento redundante, así como la aplicación de mantenimiento preventivo para mejorar la disponibilidad del sistema, desde luego implica costos. Como vimos en los conceptos básicos la redundancia es conectar elementos en paralelo, que requiere

un costo adicional que no es el mismo al de reemplazamiento, como por ejemplo ampliar la infraestructura, etc.

**Suposiciones sobre el sistema:** Son las mismas que para el mantenimiento anterior.

El objetivo es proveer la disponibilidad del sistema deseada por una mínima suma del costo totales de mantenimiento (los costos incluyen: el costo de la multa causada por la demanda no satisfecha, costos por la estructura del sistema y costos del mantenimiento). El problema es determinar la estructura óptima para MSS con configuración serie-paralelo con elementos de dos-estados y optimiza los PR de los elementos del sistema.

### 3.2.1. Planteamiento del Problema

Un MSS consiste de  $n$  componentes. Cada componentes es un sub-sistema que puede consistir de elementos en paralelo de dos estados con la misma funcionalidad, diferentes versiones y diferentes costos.

**Cada elemento  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) del sistema** tiene  $B_i$  versiones del elemento disponibles en el mercado, para cada elemento  $b$  y tipo  $i$  es caracterizado por

- La distribución de probabilidad ( $\mathbf{g}(\mathbf{i}, \mathbf{b}) = \{0, g_i(i, b)\}$ ,  $\mathbf{p}(\mathbf{i}, \mathbf{b}) = \{(1 - p_i(i, b)), p_i(i, b)\}$ ).
- La función de renovación que representa el número esperado de las fallas y reparaciones en el intervalo de tiempo  $(0, t)$ ,  $f_{ib}(t)$ .
- Los tiempos de la actividades de mantenimiento PR ( $\tau_c(i, b)$ ).
- Los tiempos de la actividades de mantenimiento MR ( $\tau_p(i, b)$ ).
- El costo de la actividades de mantenimiento PR ( $c_c(i, b)$ ).
- El costo de la actividades de mantenimiento MR ( $c_p(i, b)$ ).
- El costo de incluir el elemento en el sistema  $c_s(i, b)$

La estructura del componente del sistema es definido por el número de elementos en paralelo de cada versión  $n(i,b)$  para  $1 \leq b \leq B_i$ . El vector  $n_i = \{n(i,b)\}$ , ( $1 \leq i \leq N$ ,  $1 \leq b \leq B_i$ ) define la estructura del sistema completo. Para un conjunto de vectores  $\mathfrak{S} = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$  el costo total del sistema puede ser calculada como:

$$C_s(\mathfrak{S}) = \sum_{i=1}^N \sum_{b=1}^{B_i} n(i,b)c_s(i,b) \quad (3.10)$$

Las políticas de PR es definida por la asignación a cada elemento del tipo  $i$  y de la versión  $b$  un número de acciones de PR  $x(i,b)$  durante la vida del sistema  $T$ . El número esperado de fallas del elemento  $(i,b)$  durante la vida del sistema cíclico es:

$$(x(i,b) + 1)f_{ib} \left( \frac{T}{x(i,b) + 1} \right) \quad (3.11)$$

Y en consecuencia el tiempo esperado que el  $j$ -ésimo elemento del sistema no está disponible puede ser estimado por la siguiente expresión:

$$(x(i,b) + 1)f_{ib} \left( \frac{T}{x(i,b) + 1} \right) \tau_c(i,b) + x(i,b)\tau_p(i,b) \quad (3.12)$$

Teniendo que el conjunto  $\mathfrak{N} = x(i,b)$ , donde ( $1 \leq i \leq N$ ,  $1 \leq b \leq B_i$ ) La disponibilidad de cada elemento del MSS es definida como:

$$p_i(i,b) = \frac{T - (x(i,b) + 1)f_{ib} \left( \frac{T}{x(i,b)+1} \right) \tau_c(i,b) - x(i,b)\tau_p(i,b)}{T} \quad (3.13)$$

El tiempo total del mantenimiento esperado durante la vida del sistema es:

$$\tau_{tot}(\mathfrak{S}, \mathfrak{N}) = \sum_{i=1}^N \sum_{b=1}^{B_i} n(i, b) [(x(i, b) + 1) f_{ib} \left( \frac{T}{x(i, b) + 1} \right) \tau_c(i, b) + x(i, b) \tau_p(i, b)] \quad (3.14)$$

Los costo del mantenimiento esperado durante la vida del sistema es:

$$C_m(\mathfrak{S}, \mathfrak{N}) = \sum_{i=1}^N \sum_{b=1}^{B_i} n(i, b) [(x(i, b) + 1) f_{ib} \left( \frac{T}{x(i, b) + 1} \right) c_c(i, b) + x(i, b) c_p(i, b)] \quad (3.15)$$

Con la distribución de probabilidad del sistema y la distribución de la demanda  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{q}$ , calculamos los índices de confiabilidad: la disponibilidad  $\mathbf{A}(\mathbf{w}, \mathbf{q})$  ecuación 2.81 y la deficiencia de funcionamiento esperada  $\mathbf{D}(\mathbf{w}, \mathbf{q})$  ecuación 2.90.

El costo total de la demanda no suministrada esperado durante la vida del sistema cíclico  $T$ ,  $c_u$  es el costo específico de la demana no suministrada, es:

$$C_{ud} = T * c_u * D(\mathbf{w}, \mathbf{q}). \quad (3.16)$$

La formulación general del problema de optimización del mantenimiento y redundancia del sistema es: encontrar la configuración del sistema  $\mathfrak{S}^*$  y las políticas de PR que minimicen la suma de los costos totales que son; los costos de equipar al sistema, los costos de mantenimiento y los costos de la demanda no suministrada, mientras el nivel de la disponibilidad del MSS requerido sea cubierto y el total del tiempo de mantenimiento no sea mayor a un tiempo limite específico.

$$C_s(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{N}^*) + C_m(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{N}^*) + C_{ud}(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{N}^*, w, q) \rightarrow \text{mín} \\ \text{sujeto a } A(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{N}^*, w, q) \geq A', \tau(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{N}^*) \leq \tau' \quad (3.17)$$

### 3.3. Mantenimiento Imperfecto Óptimo

En este tipo de mantenimiento usaremos un concepto peculiar, Reducción de la Edad del Elemento que se usa para modelar mantenimiento

preventivo imperfecto, que se le llama así a las acciones que mejoran las condiciones de los elementos del sistema, pero no pueden regresarlos a su condición inicial (tales como limpiar, ajustar, etc.), el envejecimiento del elemento es afectado fuertemente por las actividades de mantenimiento. [20] Todas las acciones que no hacen cero la edad del elemento pueden ser consideradas a ser imperfectas PM.

El objetivo es proveer la disponibilidad del sistema deseada por una mínima suma del costo totales de mantenimiento (los costos incluyen: el costo de la multa causada por la demanda no satisfecha, costos por la estructura del sistema y costos del mantenimiento). El problema es determinar la estructura óptima para MSS con configuración serie-paralelo con elementos de dos-estados y optimiza los PR de los elementos del sistema.

### 3.3.1. Modelo de Reducción de Edad del Elemento

De acuerdo al concepto de reducción de edad las acciones PM reduce la edad efectiva de los elementos que tienen inmediatamente antes de entrar al siguiente mantenimiento. El uso de un modelo de retroceso de la edad proporcional asume que la edad efectiva del elemento  $j$  el cual es sometido una acción de PM al tiempo cronológico  $(t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{jn})$  es

$$\tau_j(t) = \tau_j(t_{ji}) + (t - t_{ji}) \quad t_{ji} < t < t_{ji+1} \quad (0 \leq i \leq n) \quad (3.18)$$

$$\tau_j(t_{ji}) = \epsilon_i * \tau_j(t_{ji}) = \epsilon_i[\tau_j(t_{ji-1}) + (t_{ji} - t_{ji-1})],$$

donde  $\tau_j(t_{ji})$  es la edad del elemento inmediatamente después del  $i$ -ésimo PM,  $\epsilon_i \in [0, 1]$  es el coeficiente de reducción de edad asociado con la  $i$ -ésimo acción de PM y  $\tau_j(0) = t_i=0$  por definición.

Veamos los valores extremos que puede tomar el coeficiente: Si  $\epsilon=0$  significa que la edad del elemento es restaurada a cero (reemplazamiento PR); Si  $\epsilon=1$  significa que la actividad PM no afecta la edad del elemento; en caso contrario, es decir que  $0 < \epsilon < 1$ , significa que las acciones PM mejoran parcialmente el estado del elemento.



Se introduce la función de riesgo del elemento  $j$  que esta dada como

$$h_j^*(t) = h_j(\tau_j(t)) + h_{j0} \quad (3.19)$$

donde

$h_j(t)$  es la función de riesgo del elemento cuando no ha experimentado una acción PM.

$h_{j0}$  es la edad inicial del elemento, puede ser diferente de cero al inicio del tiempo de vida del MSS.

La confiabilidad del elemento  $j$  en el intervalo entre dos acciones PM,  $i$  y  $i+1$  (usando la ecuación 2.5) es

$$r_j(t) = e^{\left[ - \int_{\tau_j^+}^{\tau_j(t)} h_j^*(x) dx \right]} e^{[H_j(\tau_j^+(t_{ji})) - H_j(\tau_j(t))]}, \quad t_{ji} \leq t \leq t_{ji+1} \quad (3.20)$$

donde

$H_j(\tau)$  es la función de riesgo acumulada para el elemento  $j$ .

El costo de reparación mínimo esperado del elemento  $j$  en el intervalo  $[0, t]$  es

$$c_{MR_j}(t) = c_{cj} \int_0^t h_j(x) dx \quad (3.21)$$

donde  $c_{cj}$  es el costo de una reparación mínima del elemento.

El costo de repación mínimo total, cuando se realiza una acción PM en el elemento al tiempo  $t_{j1}, \dots, t_{jk_j}$

$$C_{MR_j} = c_{cj} \sum_{i=0}^{k_j} \int_{\tau_j^+(t_{ji})}^{\tau_j(t_{ji+1})} h_j(x) dx = c_{cj} \sum_{i=0}^{k_j} [H(\tau_j(t_{ji+1})) - H(\tau_j^+(t_{ji}))], \quad (3.22)$$

donde  $t_{j0} = 0$  y  $t_{jk_j+1} = T$  por definición

### 3.3.2. Planteamiento del Problema

Un MSS consiste de  $n$  componentes de dos estados, en los cuales se puede realizar alguna actividad de PM y MR. Cada elemento  $j$  es

caracterizado por

- La distribución de probabilidad ( $\mathbf{g}(\mathbf{i}, \mathbf{b}) = \{0, g_i(i, b)\}$ ,  $\mathbf{p}(\mathbf{i}, \mathbf{b}) = \{(1 - p_i(i, b)), p_i(i, b)\}$ ).
- La función de riesgo  $h_j(t)$
- El costo de la reparación mínima MR ( $c_j$ ).
- El costo de la implementación de la actividad PM  $c_p(x)$ .
- El número del elemento que es afectado por la actividad PM  $e(x)$ .
- Los parámetros de la función de confiabilidad.
- El coeficiente de reducción de edad  $\epsilon(x)$

Hay que determinar el número de la actividades de mantenimiento PM ( $x$ ) que pueden ser realizada en el elemento  $e(x)$ , la demanda deseada  $w$  y la confiabilidad deseada  $R'$ .

Para este tipo de mantenimiento el tiempo de vida del sistema  $T$ , se divide en  $V$  intervalos de duración  $d_v$  cada uno que no necesariamente son iguales, las actividades PM pueden ser realizadas al termino del intervalo, si la  $R_s$  es menor a  $R'$  entonces se realiza la actividad de PM

Se define el vector  $\mathbf{x}$  que determina el número de actividades que pueden ser realizadas en los elementos para mantener la confiabilidad deseada, que se puede realizar las dos siguientes al mismo tiempo. Donde  $K$  es el número total de acciones PM no pueden ser predefinidas, dependen de la composición del vector  $x$ .

Para un vector dado  $x$  el número total  $k_j$  y el tiempo cronológico de acciones de PM son determinadas por casa elemento del sistema  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ). Si  $k_j=0$ , el cual corresponde a el caso en el cual  $e(x_j) \neq j$  para toda  $x_i \in X$ , el costo de reparación mínima  $C_{MR_j}$  dado por la ecuación 3.22 es definida por  $t_{j0}=0$  y  $t_{jk_{j+1}} = t_{j1}=T$ .

El vector  $x$  define tanto el costo de la actividad PM como el número de actividades de PM dado por  $C_{PM}$

$$C_{PM}(x) = \sum_{i=1}^n c_p(x_i) \quad (3.23)$$

Los costos de reparación mínima son

$$C_{MR}(x) = \sum_{i=1}^n c_{c_j} \sum_{i=0}^{k_j} [H(\tau_j(t_{j_{i+1}})) - H(\tau_j^+(t_{j_i}))] \quad (3.24)$$

La formulación del problema es: Encontrar la secuencia optima  $x^*$  de las acciones de PM seleccionadas de la lista de las acciones de disponibilidad las cuales minimizan el costo total de mantenimiento los cuales proveen la confiabilidad del MSS deseada.

$$\begin{aligned} C_{tot}(x^*) &= C_{PM}(x^*) \rightarrow \text{mín} \\ \text{sujeto a } R(x^*, t, w) &\geq R', \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (3.25)$$

## Capítulo 4

# Algoritmo PESO

### 4.1. Algoritmo de Optimización

Resolver un problema de optimización es encontrar la mejor solución posible a un problema formulado en lenguaje matemático, donde el criterio que evalúa la calidad de una solución es cuantitativo, generalmente asociado a un costo y denominado como función objetivo. Se han utilizado varios métodos de optimización para resolver problemas donde el objetivo es mejorar la confiabilidad de sistemas. En un problema de optimización, se debe ver si es fácil o difícil de resolver y se determina de acuerdo al algoritmo conocido para resolverlo y el uso computacional necesario.

Un algoritmo es una secuencia ordenada de pasos, exenta de ambigüedad, que permite la resolución de un problema determinado. La capacidad de un algoritmo para resolver un problema, hablando computacionalmente, lo determina el número de operaciones aritméticas necesarias para su ejecución. Un problema es fácil si existe un algoritmo que lo resuelve en tiempo polinomial (encuentran solución óptima en poco tiempo), si esta función no es polinomial, se dice que el algoritmo es no polinomial y el problema se considera difícil.

#### 4.1.1. Características

Cada problema de optimización consiste de lo siguiente:

- Una función objetivo, representa la cantidad a ser optimizada, la cantidad a minimizar o maximizar. El objetivo es encontrar una solución que satisfaga la función objetivo y a un conjunto de restricciones.
- Un conjunto de variables independientes, que afectan el valor de la función objetivo, si  $\mathbf{x}$  es la variable independiente, entonces  $f(\mathbf{x})$  cuantifica la calidad de la solución candidata,  $\mathbf{x}$ .
- Un conjunto de restricciones, que restringen los valores que pueden ser asignados a las variables independientes. La mayoría de los problemas definen los límites de las restricciones que definen el dominio de cada variable.

La meta de un método de optimización es entonces asignar valores a las variables, en su dominio, tal que la función objetivo es optimizada y las restricciones son satisfechas. Para lograr esta meta, el algoritmo busca una solución en un espacio de búsqueda,  $\mathbf{S}$ , de soluciones candidatas.

Los problemas de optimización se clasifican de acuerdo: al número de variables, el tipo de variables continuas o discretas, -los problemas donde las soluciones son permutaciones de variables de valores enteros son llamados problemas de optimización combinatoria-, grado de no linealidad de la función objetivo, el uso de restricciones, el número de óptimos, -el óptimo se refiere a la solución del problema de optimización- y al número de criterio de optimización -que se refiere al número de función objetivo-.

#### 4.1.2. Tipos de Óptimos

Los principales tipos de soluciones son llamados óptimo local y óptimo global.

**Definición Mínimo Global:** La solución  $x^* \in F$ , es un óptimo global de la función objetivo,  $f$ , si

$$f(x^*) < f(x), \forall x \in F \quad (4.1)$$

donde  $F \subseteq \mathbf{S}$

El óptimo global es por lo tanto la mejor solución del conjunto de soluciones candidatas.

**Definición Mínimo Local:** La solución  $\mathbf{x}_N^* \in N \subseteq F$ , es un óptimo local de la función objetivo,  $f$ , si

$$\text{Fuerte } f(\mathbf{x}_N^*) < f(x), \text{ Débil } f(\mathbf{x}_N^*) \leq f(x), \quad \forall x \in F \quad (4.2)$$

donde  $N \subseteq F$  es el conjunto de puntos factibles en la vecindad de  $\mathbf{x}_N^*$

Se presenta en esta tesis sólo los óptimos mínimos, porque los problemas de confiabilidad que abordaremos tienen el objetivo de minimizar los costos. Para que quede más claro la gráfica, figura 4.1, muestra cuales son los mínimos global y local.

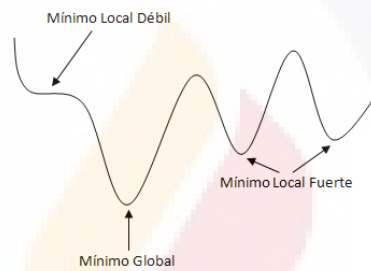


Figura 4.1: Tipos de Óptimos

### 4.1.3. Metaheurísticos

Existen algoritmos capaces de resolver problemas combinatorios que proporcionan una solución "óptima" lo suficientemente razonable en un tiempo considerable. Por otra parte existen problemas cuyo grado de complejidad es tal, que no cualquier algoritmo logra obtener resultados satisfactorios en tiempo y forma adecuados. Es por esto que se han logrado desarrollar procesos de búsqueda de resultados que satisfagan las condiciones propuestas por el problema llamados 'heurísticas', que son fáciles de aplicar, de programar y son eficientes, pero..., su eficacia depende del problema, además de que en general llegan a óptimos locales debido que se basan en la explotación no la exploración y dependen fuertemente de la solución inicial.

Debido a que la mayoría de los problemas de optimización combinatoria discretos se clasifican como difíciles, son tratados como problemas del tipo NP-completos, esto quiere decir no es posible resolverlos en un tiempo polinomial, además de que requieren mucho tiempo computacional. Recientemente, muchos trabajos sobre optimización de confiabilidad son difíciles y se han usado algoritmos de aproximación, es decir, están basados en metaheurísticas este término lo introdujo Glover (1986), es una clase de algoritmos combinan métodos heurísticos tradicionales con estrategias eficientes de exploración del espacio de búsqueda. Osman y Kelly (1996) proponen la siguiente definición:

**Definición Metaheurística:** Son métodos aproximados diseñados para resolver problemas de optimización combinatoria, en los que los heurísticos clásicos no son efectivos. Los metaheurísticos proporcionan un marco general para crear nuevos algoritmos híbridos, combinando diferentes conceptos derivados de la inteligencia artificial, la evolución biológica y los mecanismos estadísticos.

Las Metaheurísticas combinan en su búsqueda de la solución alternadamente técnicas de explotación (consiste en explorar a fondo regiones interesantes) y de exploración (o diversificación que consiste en visitar nuevas áreas no exploradas). Entre las metaheurísticas más exitosas se encuentran:

- recocido simulado (simulated annealing)
- búsqueda tabú (tabu search)
- algoritmo genético (genetic algorithms)
- redes neuronales artificiales (artificial neural networks)
- colonia de hormigas (ant colony optimization)
- búsqueda local iterativa (iterated local search)
- computación evolutiva (evolutionary computing)

- enjambre de partículas (particle swarm).

Cabe aclarar que no siempre las condiciones del problema permanecen constantes durante la resolución del mismo, este es un problema que los algoritmos sencillos no pueden considerar, pues puede que aumente o disminuya las posibilidades de búsqueda. Para este estudio, se tratará el problema de optimización de políticas de mantenimiento en sistemas multi-estado. Es claro que la naturaleza de dicho problema es complicada de tratar mediante algoritmos que manejan cierto grado de simplicidad en sus procesos.

Problemas que poseen naturaleza combinatoria cuyo grado de complejidad es mayor dado que poseen restricciones adicionales o mayor información determinística que las heurísticas no pueden considerar y menos resolver, para la resolución de estos se desarrollaron las Metaheurísticas.

## **4.2. Algoritmo PSO**

### **4.2.1. Inteligencia Computacional CI**

Los algoritmos inteligentes forman parte de la inteligencia artificial IA, que modelan la inteligencia biológica y natural. La IA involucra varias disciplinas por ejemplo, la ciencia computacional, psicología, filosofía, sociología y biología.

Una rama de la IA llamada Inteligencia Computacional CI, el estudio de la habilidad de aprender o adaptarse a nuevas situaciones, generalizar, abstraer, descubrir y asociar. Ahora veremos los paradigmas de CI que son [6]:

- Redes Neuronales Artificiales (artificial neural networks)
- Computación Evolutiva (evolutionary computing)
- Inteligencia de Enjambres (intelligence swarm)
- Sistemas Inmunes Artificiales (artificial immune system)



## ■ Sistemas Confusos (fuzzy system)

En esta tesis es de interés el paradigma inteligencia de enjambres, originado del estudio de colonias, o enjambre de organismos sociales, entre ellos se encuentra el PSO y el ACO. Los estudios de la simulación del comportamiento imprevisible del vuelo de multitudes de pájaros, es la base del diseño del algoritmo de optimización de enjambre de partícula PSO. El interés es debido que se ha visto que el algoritmo PSO obtienen buenos resultados en poco tiempo de computo, que es fácil de implementar en funciones multi-objetivo de funciones de variables continuas, el reto es implementarlo en problemas combinatorios donde se manejan variables discretas y que los resultado sean igual de eficientes.

### 4.2.2. PSO

La optimización de enjambre de partículas (PSO) es una optimización estocástica, produce una búsqueda en una población-base, donde los individuos denotan una partícula agrupados en un enjambre. Cada partícula en el enjambre representa una solución candidata a la optimización del problema, es un vuelo en el espacio de búsqueda multidimensional, que determina su posición de vuelo en el espacio de búsqueda de acuerdo a su propia experiencia y a la posición de su vecino, es decir, hace uso de la mejor posición que encontro por el mismo y la mejor posición de su vecino para dirigirse el mismo hacia la solución óptima. El funcionamiento de la partícula (el funcionamiento quiere decir la cercanía de la partícula al mínimo global) es la “aptitud” medido de acuerdo a una función dada relacionada con el problema que se resuelve.

### PSO Básico

Una individuo en un enjambre de partículas sigue un comportamiento donde imita el éxito de su vecino individual y el de él mismo. El comportamiento colectivo que surge desde su comportamiento simple es descubrir la región óptima de un espacio de búsqueda multi dimensional.

El algoritmo PSO mantiene un enjambre de partículas, donde cada una representa una solución factible.

Sea  $x_i$  la posición de la partícula  $i$  en el espacio de búsqueda en el paso de tiempo discreto  $t$ . La posición de la partícula es cambiada en el siguiente paso sumándole una velocidad, esto se

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + v_i(t + 1) \quad (4.3)$$

donde  $x_i(0) \approx U(x_{\text{mín}}, x_{\text{máx}})$

$v_i(t)$  es el vector de velocidad que se maneja en el proceso de optimización y refleja

- la experiencia conocida por la partícula, llamada componente cognoscitiva, que es proporcional a la distancia de la partícula desde su mejor posición encontrada en el primer paso.
- la información del cambio social de la vecindad de la partícula, llamada componente social

Originalmente se desarrollaron dos algoritmos PSO, la diferencia radica en el tamaño del vecindario, llamados *gbest* y *lbest* PSO, describiremos brevemente el primero y profundizaremos en el segundo porque es en el que nos apoyaremos para optimizar los problemas de políticas de mantenimiento.

### El PSO mejor global.

Denotado como *gbest* PSO, el vecindario de cada partícula es el enjambre completo. El componente social de la actualización de la velocidad de la partícula tiene la información obtenida de todas las partículas del enjambre que es la mejor posición encontrada en el enjambre. Por lo tanto la velocidad se calcula como:

$$v_{ij}(t + 1) = v_{ij}(t) + c_1 r_{1j}(t)[y_{ij}(t) - x_{ij}(t)] + c_2 r_{2j}(t)[\hat{y}_j(t) - x_{ij}(t)] \quad (4.4)$$

donde  $v_{ij}(t)$  es la velocidad de la partícula  $i$  en la dimensión  $j=1, \dots, n_x$  en el paso  $t$ .

$x_{ij}(t)$  es la posición de la partícula  $i$  en la dimensión  $j$  en el paso  $t$ .

$c_1$  y  $c_2$  son aceleradores constantes positivos.

$r_{1j}(t), r_{2j}(t) \approx U(0,1)$  son valores aleatorios en el rango  $[0,1]$  tomados de una distribución uniforme.

$y_i$  es la mejor posición personal, asociada con la partícula  $i$  es la mejor posición de la partícula que ha visitado desde el primer paso.

### PSO mejor local

Llamado lbest PSO usa un pequeño vecindario es definido para cada partícula que contendrá la información del cambio social dentro del vecindario de la partícula. El componente social de la velocidad de la partícula es proporcional a la distancia entre la partícula y la mejor posición encontrada en el vecindario de la partícula. La velocidad es calculada como

$$v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) + c_1 r_{1j}(t)[y_{ij}(t) - x_{ij}(t)] + c_2 r_{2j}(t)[\hat{y}_{ij}(t) - x_{ij}(t)] \quad (4.5)$$

nos podemos dar cuenta de que las ecuaciones 4.4 y 4.5 son semejantes, la diferencia se encuentra en la forma de encontrar la mejor posición local.  $\hat{y}_{ij}$  es la mejor posición encontrada en el vecindario de la partícula  $i$  en la dimensión  $j$ .

$\hat{y}_i$  es la mejor posición local encontrada en el vecindario  $N_i$  y esta definida como

$$\hat{y}_i(t+1) \in \{N_i | f(\hat{y}_i(t+1)) = \min\{f(x)\}, \forall x \in N_i\} \quad (4.6)$$

El vecindario esta definido como

$$N_i = \{y_{i-n_{N_i}}(t), y_{i-n_{N_i}+1}(t), \dots, y_{i+n_{N_i}}(t)\} \quad (4.7)$$

donde  $n_{N_i}$  es el tamaño del vecindario donde todas las partículas son independientes (PSO básico).

```

repeat
  for cada partícula  $i = 1, \dots, n_s$  do
    conjunto de la mejor posición personal
    if  $f(x_i) < f(y_i)$  then
      |  $y_i = x_i$ 
    end
    conjunto de la mejor posición del vecindario
    if  $f(y_i) < f(\hat{y}_i)$  then
      |  $\hat{y}_i = y_i$ 
    end
    for cada partícula  $i = 1, \dots, n_s$  do
      actualizar la velocidad usando la ecuación 4.5;
      actualizar la posición usando la ecuación 4.3
    end
  end
end

```

until hasta que la condición de paro es verdadera;

**Algorithm 1:** Algoritmo lbest PSO

Notemos que los vecindarios podrían coincidir en parte, esta interconexión entre los vecindarios favorece el flujo de información y asegura que el enjambre converge a un único punto a la mejor partícula global.

### gbest vs lbest PSO

- Los dos algoritmos son similares en el componente social de la actualización de la velocidad que mueve a la partícula al mejor global. El algoritmo lbest PSO lo logra por la interconexión entre sus vecindarios.
- El gbest PSO tiene una gran interconexión de las partículas que hace que la convergencia sea más rápida que la del lbest PSO, pero por lo mismo tiene un costo, menos diversidad de la que tiene lbest PSO.
- El lbest PSO es menos susceptible de quedar atrapado en un mínimo local, debido a la diversidad de partículas que considera, que es una consecuencia de la gran parte del espacio de búsqueda cubierta por las

vecindades.

El lbest PSO que usaremos en esta tesis, conidera además un componente llamado **Peso de Inercia** (Inertia Weigth), introducido por Shi y Eberhart [25], que controla la habilidad de exploración, explotación del enjambre y asegura la convergencia, lo denotaremos con  $w$ , controla el impulso de la partícula por una contribución de peso en la velocidad previa, es decir, es una propoción de la velocidad previa que influirá en la nueva velocidad. Con esto la ecuación 4.5 cambia como

$$v_{ij}(t+1) = wv_{ij}(t) + c_1r_{1j}(t)[y_{ij}(t) - x_{ij}(t)] + c_2r_{2j}(t)[\hat{y}_{ij}(t) - x_{ij}(t)] \quad (4.8)$$

El valor del peso de inercia  $w$ , efecta de diferentes formas al algoritmo, si  $w \geq 1$  la velocidad se acelera al máximo y el enjambre diverge, es decir, no llega a una solución óptima, si  $w < 1$  la partícula desacelera hasta llegar a cero, valores grandes facilitan la exploración e incrementan la diversidad lo que no sucede con valores pequeños. La selección del valor de  $w$  se hizo junto con la selección de los valores de  $c_1$  y  $c_2$  por van den Bergh y Engelbrecht [26, 6], como

$$w > \frac{1}{2}(c_1 + c_2) - 1 \quad (4.9)$$

si esta condición no es satisfecha el algoritmo diverge o tiene comportamientos cíclicos. Hay otras formas de determinar el valor de  $w$  se pueden ver en Engelbrecht [6].

### Componentes de la Velocidad

La velocidad caculada en la ecuación 4.4 se dirige hacia una exploración y una explotación del espacio de busqueda y consiste de tres componentes:

- **Velocidad Previa**,  $v_i(t)$ . Funciona como una memoria de la dirección del vuelo previo.
- **Componente Cognitivo**  $c_1r_1(y_i - x_i)$ . Es como una memoria individual que recuerda y tienen presente la mejor posición que tuvo

en el pasado.

- **Componente Social**  $c_2r_2(\hat{y} - x_i)$  para **gbest** y  $c_2r_2(\hat{y}_i - x_i)$  para **lbest**. Mide el funcionamiento de la partícula  $i$  relativo al vecindario o grupo de partículas.

#### 4.2.3. Tipos de Estructuras de las Redes Sociales

La característica principal del PSO es la interacción social. Las partículas dentro del enjambre aprenden de todos y cada uno de ellos, y, basándose en el conocimiento obtenido, se mueven para llegar a su “mejor” vecino. Todas las partículas que conforman el vecindario interactúan e intercambian información acerca de su experiencia propia que tuvieron dentro del vecindario.

El flujo de la información a través de la red social, depende de: 1. el grado de conexión entre los nodos ( miembros) de la red, 2. la cantidad de grupos ( los grupos ocurren cuando el vecindario de un nodo es también vecindario de otro nodo) , y 3. el promedio de las distancias más pequeñas de un nodo a otro.

La importancia radica en cubrir el espacio de búsqueda y alcanzar las mejores soluciones, que esto no se logra si hay una gran comunicación entre las vecindades o que los grupos tengan muchos individuos. Lo usual es tener pocos grupos, con una baja conexión entre los grupos. Ésto es, la información es limitada en parte por el espacio de búsqueda compartido con un bajo flujo de información entre los grupos.

Las diferentes estructuras sociales para el PSO han sido investigadas y son las siguientes:

- **La estructura social la Estrella.** En esta estructura todas las partículas están interconectadas como se puede ver en la figura 4.2. Cada partícula puede comunicarse con las otras partículas. Así la partícula se dirige hacia la mejor solución encontrada en el enjambre.

Se ha demostrado la rápida convergencia, en comparación con otras estructuras, pero es susceptible de ser atrapado a un mínimo local.

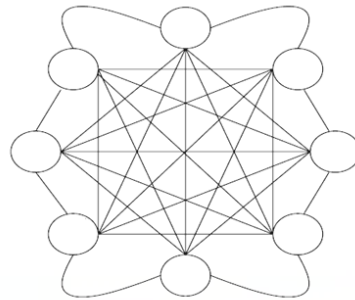


Figura 4.2: La estructura social la Estrella

- **La estructura social el Anillo.** En esta estructura cada partícula se comunica con sus  $n_N$  vecinos inmediatos adyacentes, como se ilustra en la figura 4.3. Cada partícula trata de imitar a su mejor vecino para moverse hacia la mejor solución encontrada dentro del vecindario, esta estructura facilita el intercambio de información y la convergencia es lenta, pero gran parte del espacio de búsqueda es cubierta comparada con otras estructuras.

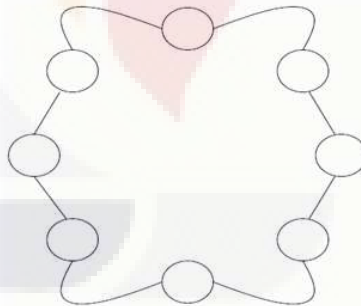


Figura 4.3: La estructura social el Anillo

- **La estructura social el Rueda.** En esta estructura el individuo en un vecindario es aislado uno de otro. Una partícula sirve como el punto focal, y toda la información es comunicada a través de la partícula focal, como se muestra en la figura 4.4. La partícula focal compara los resultados obtenidos por todas las partículas en

el vecindario, y ajusta su posición hacia el mejor vecino, y de lo contrario la partícula focal comunica a todas las demás el mejor resultado.

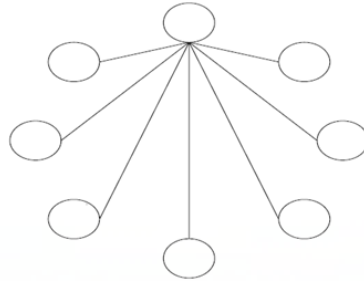


Figura 4.4: La estructura social la Rueda

- **La estructura social la Piramide.** Ésta estructura forma un campo alamabrado tri-dimensional como se ilustra en la figura 4.5.

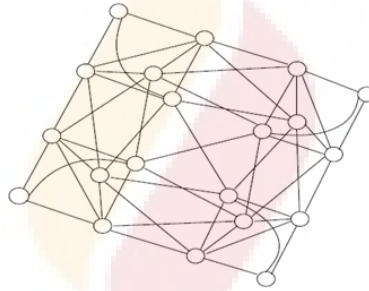


Figura 4.5: La estructura social la Piramide

- **La estructura social de Cuatro Grupos.** Ésta estructura esta formada con dos conexiones entre los grupos. Las particulas dentro de cada grupo está conectado con cinco vecinos, como se muestra en la figura 4.6.



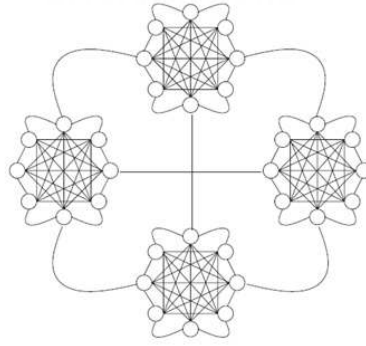


Figura 4.6: La estructura social los Cuatro Grupos

- La estructura social de Von Neumann.** Ésta estructura las partículas están conectadas en una estructura cuadrículada como se ilustra en la figura 4.7.

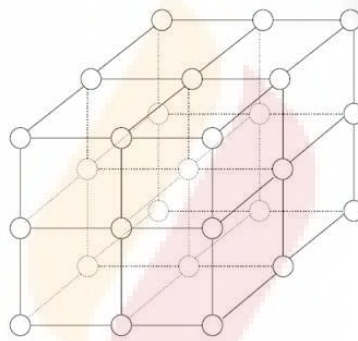


Figura 4.7: La estructura social de Von Neumann

### Parámetros del PSO Básico

- Tamaño del enjambre,  $n_s$ .** El número de partículas en el enjambre o cúmulo, para encontrar soluciones óptimas debe de estar entre 10 y 30 partículas, incrementar el número de partículas es incrementar las iteraciones y la complejidad computacional, el tamaño del enjambre depende del problema.
- Tamaño del vecindario.** Es importante porque determina las interacciones sociales dentro del enjambre, la estructura de la red social que se usó es la Wheel (La Rueda).

- TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS
- **Número de Iteraciones.** El número de iteraciones para encontrar una buena solución depende del problema.
  - **Coefficientes de Aceleración.**  $c_1$  y  $c_2$  o parámetros de confianza expresan cuanta confianza tienen una partícula por sí mismo, sus valores son más efectivos cuando la nostalgia ( $c_1$ ) y la envidia ( $c_2$ ) coexisten en un balance, es decir que  $c_1 \approx c_2$ , si  $c_1 = c_2$  la partícula es atraída hacia el promedio de  $y_i$  y  $\hat{y}$ , **de lo contrario hay un desbalance.**



## Capítulo 5

### Aplicación

La aplicación que se hace en esta tesis, es solamente para los dos primeros tipos de mantenimiento que describimos anteriormente, ejemplos 6.9 y 6.10 propuestos por Lisniansk y Levitin [15] y [16] que son: Políticas de Mantenimiento Óptimo Cíclico y la Redundancia Conjunta y Optimización de Mantenimiento, respectivamente. El conjunto de las posibles soluciones de éstos problemas es el número de combinaciones, respecto al número de mantenimientos que se le darán a los elementos del sistema, que se obtienen con las diferentes versiones que hay de los elementos, es claro que es un problema de optimización combinatoria. Para encontrar la combinación que dé la solución óptima usaremos el algoritmo PESO.

Para encontrar la solución óptima:

- Encontraremos la Disponibilidad del sistema, usando el procedimiento recursivo para obtener FGU correspondiente al MSS, existen otros métodos pero éste tiene sus bondades, permite reducir el tiempo computacional para procesar el algoritmo, algunos subsistemas pueden poseer los mismos niveles de funcionamiento en diferentes estados los cuales hacen a estos estados indistinguibles y reducen por tanto el número total de términos en las correspondientes funciones-u, además aprovecharemos la propiedad esencial que tiene la función-u que tienen los plinomios regulares que es sumar terminos semejantes.
- Se eligió como método de optimización el algoritmos PSO, por su fácil implementación, rápida convergencia y resultados convenientes,

del algoritmo simple modificaremos y agregaremos que mínimize la función objetivo con las dos limitaciones a las cuales esta sujeta; que son la restricciones de la disponibilidad y el tiempo total de las reparaciones y reemplazamientos, además buscamos una modificación más para que el algoritmos encuentre la solución de variables discretos, se ha visto que el algoritmo trabaja muy bien para variables continuas, pero hasta ahora no se ha trabajado con valores discretos.

Los parámetros que se utilizaron son: peso de inercia  $w=0.5$ , los coeficientes de aceleración  $c_1 = c_2=0.5$

- Los algoritmos fueron implementados en el software libre R [21], y son los siguientes:
  1. Para encontrar la función generadora universal para un sistema MSS en serie y en paralelo conforme al tipo de sistema mostrado en la tabla 2.4.
  2. Para encontrar la función generadora universal para un sistema MSS en serie-paralelo.
  3. Calcular los costos totales que incluyen: el mantenimiento, el de incluir un elemento al sistema y la multa de lademanda no satisfecha.
  4. Calcular la disponibilidad del MSS.
  5. Calcular la demanda no satisfecha.
  6. Calcular el tiempo total de mantenimiento.
  7. El algoritmo PESO, la función objetivo junto con las restricciones.

### 5.1. Uso de la Distribución Binomial en PSO

La distribución Binomial, es una distribución de probabilidades de variable aleatoria discreta del número de sucesos en una secuencia de  $n$

experimentos independientes Bernoulli, donde en cada suceso la probabilidad de éxito es constante.

La figura 5.1 muestra el comportamiento de la distribución binomial para diferentes probabilidades de éxito y el mismo tamaño de muestra.

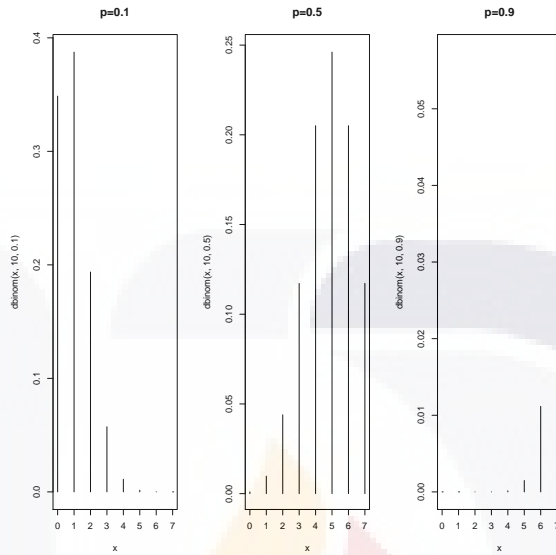


Figura 5.1: Distribución Binomial con parámetro  $n=6$  y  $p=0.1, 0.5, 0.9$

La modificación que se propone es usar la distribución binomial en la selección del cúmulo y para generar números aleatorios discretos en la dirección de las partículas  $P_{best}$  y  $L_{best}$ .

```

X = matriz(0, n, d)
for(kin1 : d)
    X[, k] = rbinom(n, 5, 0,5) + 1
    
```

donde  $n$  es el número de partículas y  $d$  es la dimensión de la partícula.

$$\begin{aligned}
 V_{t+1} &= \text{sign}(V_t) \text{Bin}(|V_t|, w) \\
 &+ \text{sign}(|G_{Best} - X_t|) \text{Bin}(|P_{Best} - X_t|, c_1) \\
 &+ \text{sign}(|L_{Best} - X_t|) \text{Bin}(|L_{Best} - X_t|, c_2)
 \end{aligned}$$

donde  $\text{sign}(a)=1$  si  $a \geq 0$  y  $\text{sign}(a)=-1$  en otro caso. El algoritmo PSO Binomial (BPSO) da valores discretos dentro del dominio discreto  $0, \dots, n$  donde  $n$  representa el valor absoluto de la diferencia entre  $P_{Best}$  y  $X_t$  o  $L_{Best}$  y  $X_t$ . Los parámetros,  $w$ ,  $c_1$  y  $c_2$  representan la probabilidad de éxito para cada termino de la ecuación de velocidad.

## 5.2. Problema

En la aplicación consideraremos un problema que trata sobre un desalinización de agua. Desalinización es el proceso de eliminar la sal del agua de mar.

El agua del mar es salada porque tiene sales minerales disueltas que precipitan cuando el agua se evapora. Debido a la presencia de estas sales minerales, el agua del mar no es potable para el ser humano y su ingestión en grandes cantidades puede llegar a provocar la muerte. El 97,5 % del agua que existe en nuestro planeta es salada y sólo una cantidad inferior al 1 % es apta para el consumo humano. Mediante la desalinización del agua del mar se obtiene agua dulce apta para el abastecimiento y el regadío. Existen varios diseños, un ejemplo de estos es el que se muestra en la figura 5.2

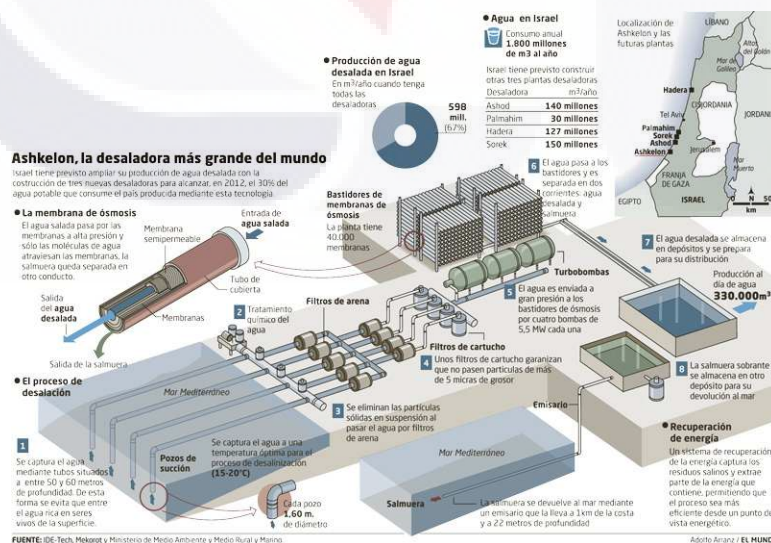


Figura 5.2: Ejemplo de un desalinización de agua.

El proceso de desalinización, es un proceso caro y se eleva más si incluimos los costos de mantenimiento así como los costos de las sanciones que son acredores cuando se deja de suministrar el agua debido a las acciones del mantenimiento (como por ejemplo, reparaciones mínimas, reemplazar algún elemento o por incluir elementos), el interés radica en minimizar los costos al mismo tiempo se debe cumplir un nivel de funcionamiento deseado durante el tiempo de vida del sistema y que los tiempos de mantenimiento sean menores al tiempo restringido.

El sistema de desalinación de agua consiste de cuatro componentes (procesos) básicos: filtros, bombas, membranas de ósmosis inversas y bloques de equipo de poder, por ejemplo en la figura 5.2, se captura el agua a una temperatura de entre  $15^{\circ}$  y  $20^{\circ}$ , luego pasa a los filtros que en este caso se usaron filtros de arena y filtros de cartucho, después las bombas envían el agua a grandes presiones hacia las membranas de ósmosis, obteniendo el agua desalada y la salmuera.

El costo total depende del costo de los elementos, pues en el mercado existen varias versiones, con diferentes: costos por unidad, costos de reemplazamiento, niveles de funcionamiento, costos de mantenimiento, tiempos de mantenimiento.

Resolver el problema es ver la forma de como reducir los costos totales, es decir que políticas de mantenimiento se deben considerar. En esta tesis se resolvió el problema, como ya se había mencionado anteriormente, considerando las dos primeras políticas de mantenimiento de las tres que se vieron en el Capítulo 3, que son descritas a continuación.

### **5.3. Diseño 1**

Se resolvió el problema planteado con las Políticas de Mantenimiento Óptimo Cíclico (ejemplo 6.9, [15]), en los tres planteamientos de la función objetivo.

El sistema de desalinación de agua, contiene en total 14 elementos de 8 tipos diferentes. La estructura del sistema, consiste de cuatro com-

ponentes básicos, (Filtros, Bomas, Membranas y Fuentes de poder que pertenecen al tipo de MSS de transmisión de flujo con dispersión de flujo en serie) presentado en la figura 5.3.

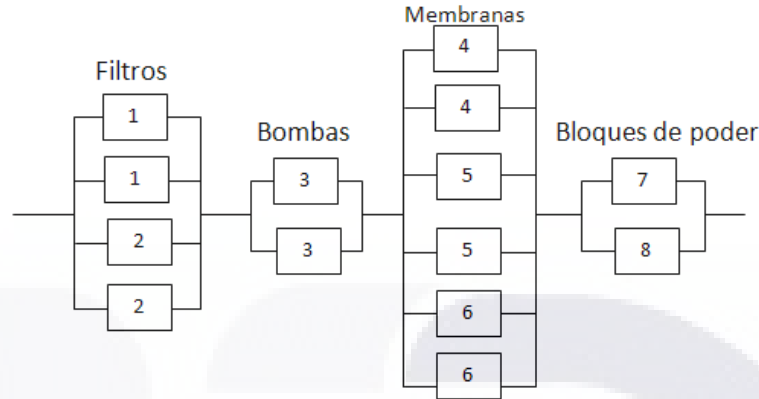


Figura 5.3: Sistema de Desalinación de Agua Serie-Paralelo

Cada elemento esta marcado con el número del tipo al que pertenece, con dos estados cada uno, podemos ver que:

- El componente filtros es a su vez un subsistema que contiene dos tipos de elementos diferentes, dos de cada uno, en total son 4 elementos conectados en paralelo, que en total tiene  $K_1 = 2^4 = 16$  estados .
- El componente Bombas es un subsistema en paralelo que contiene dos elementos del mismo tipo conectados en paralelo, en total tiene  $K_2 = 2^2 = 4$  estados .
- El componente Membranas es un subsistema con tres tipos de elementos diferentes dos de cada uno en total seis elementos conectados en paralelo, que en total tiene  $K_3 = 2^6 = 64$  estados .
- El último componente bloques, tiene dos elementos diferentes en paralelo, en total tiene  $K_4 = 2^2 = 4$  estados .
- Los cuatro componentes conforman un sistema en serie, con  $K_s = 2^{14} = 16384$  estados.



### 5.3.1. Datos del Problema

La Tabla 5.1 contiene los parámetros de cada elemento, que son los que se habían mencionado en el planteamiento de políticas de mantenimiento (sección 3.1.1).

Cuadro 5.1: Características de los elementos del sistema

Componente j	$g_j$	$cp_j$	$cc_j$	$\mu_j$	Función de Renovación $f_j(t)$						
					t:	24	12	8	6	4.8	4
					x:	5	10	15	20	25	30
1	0.40	3.01	0.019	0.002	25.00	10.00	5.00	2.0	1.00	0.50	
2	0.30	2.21	0.049	0.004	26.00	9.00	2.00	0.6	0.20	0.05	
3	0.60	2.85	0.023	0.008	20.00	4.00	1.00	0.3	0.08	0.01	
4	0.15	2.08	0.017	0.005	36.00	14.00	9.00	6.0	4.00	3.00	
5	0.15	1.91	0.029	0.003	55.00	15.00	7.00	4.0	0.32	0.30	
6	0.25	0.95	0.031	0.009	31.00	9.50	5.60	4.0	2.70	2.00	
7	1.00	5.27	0.050	0.002	13.00	3.20	1.40	0.8	0.50	0.10	
8	0.70	4.41	0.072	0.005	5.00	2.00	1.00	0.4	0.10	0.01	

El número posible de reemplazamientos durante el tiempo de vida del sistema varia de 5 a 30, de 5 pasos en 5. El tiempo esta medido en meses. La capacidad nominal del elemento es medido como un porcentaje de la demanda máxima del sistema. Todos los tiempos de reemplazamientos en el sistema se llevan 0.5 horas que es aproximadamente 0.0007 meses. El tiempo de vida total del sistema cíclico es de  $T = 120$  meses, el costo de la demanda no satisfecha es del 1 % durante un mes es  $c_u=10$  unidades convencionales. La distribución de la demanda es presentada en la Tabla 5.2.

Cuadro 5.2: Distribución de la Demanda.

w	1.00	0.80	0.50	0.20
q	0.6	0.25	0.05	0.10

La Tabla 5.3 es la que se uso para resolver el problema. De esta forma se facilito para encontrar la solición óptima.

En la Tabla 5.3, la primera columna, son los 14 elementos que conforman al sistema completo, es decir, dos de cada uno de los ementos 1,

Cuadro 5.3: Características de los elementos del sistema para la solución.

Elemento	$g_1$	$g_2$	$p_1$	$p_2$	$x_i$	$c_p$	$c_c$	$\tau_c$	$\tau_p$	24	12	8	6	4.8	4	w	q
1	0	0.4	0.003	0.997	5	3.01	0.019	0.002	0.0007	25	10.00	5.00	2.0	1.00	0.50	0.2	0.1
2	0	0.4	0.003	0.997	10	3.01	0.019	0.002	0.0007	25	10.00	5.00	2.0	1.00	0.50	0.5	0.05
3	0	0.3	0.005	0.995	15	2.21	0.049	0.004	0.0007	26	9.00	2.00	0.6	0.2	0.05	0.8	0.25
4	0	0.3	0.005	0.995	20	2.21	0.049	0.004	0.0007	26	9.00	2.00	0.6	0.2	0.05	1	0.6
5	0	0.6	0.008	0.992	25	2.85	0.023	0.008	0.0007	20	4.00	1.00	0.3	0.08	0.01	0	0
6	0	0.6	0.008	0.992	30	2.85	0.023	0.008	0.0007	20	4.00	1.00	0.3	0.08	0.01	0	0
7	0	0.15	0.009	0.991	0	2.08	0.017	0.005	0.0007	36	14.00	9.00	6.0	4.0	3.0	0	0
8	0	0.15	0.009	0.991	0	2.08	0.017	0.005	0.0007	36	14.00	9.00	6.0	4.0	3.0	0	0
9	0	0.15	0.004	0.996	0	1.91	0.029	0.003	0.0007	55	15.00	7.00	4.0	0.32	0.03	0	0
10	0	0.15	0.004	0.996	0	1.91	0.029	0.003	0.0007	55	15.00	7.00	4.0	0.32	0.03	0	0
11	0	0.25	0.008	0.992	0	0.95	0.031	0.009	0.0007	31	9.50	5.60	4.0	2.7	2.0	0	0
12	0	0.25	0.008	0.992	0	0.95	0.031	0.009	0.0007	31	9.50	5.60	4.0	2.7	2.0	0	0
13	0	1.00	0.001	0.999	0	5.27	0.05	0.002	0.0007	13	3.2	1.4	0.8	0.5	0.1	0	0
14	0	0.7	0.001	0.999	0	4.41	0.072	0.005	0.0007	5	2	1	0.4	0.1	0.01	0	0

2, 3, 4, 5 y 6; y uno de cada uno de los elementos 7 y 8, es claro, que los primeros cuatro elementos (del 1 al 4) pertenecen al subsistema de filtros, los siguientes dos (5 y 6) pertenecen al subsistema de bombas, los siguientes seis (del 7 al 12) pertenecen al subsistema de Membranas y los últimos (13 y 14) pertenecen al subsistema de bloques de poder,,la 2ª columna son los dos estados para cada elemento  $g_1$  y  $g_2$ , así como sus probabilidades  $p_1$  y  $p_2$ , las probabilidades se calculan con la ecuación 3.3, las que están en la tabla es de un ejemplo pero se tienen que calcular para cada combinación que sea una posible solución,  $x_i$  es el número de acciones de mantenimiento que se deben hacer durante el tiempo de vida (5, 10, 15, 20, 25 o 30 acciones) con la función de renovación (24, 12, 8, 6, 4.8 y 4 veces) y los respectivos costos por elemento. Las dos últimas columnas es la distribución de la demanda.

### 5.3.2. Función Objetivo

Se desea encontrar el vector  $x^*$  que nos de las políticas de reemplazamiento óptimo, esto es, la solución que minimice los costos de mantenimiento esperado  $C_m$  cumpliendo una disponibilidad del sistema requerido

y el tiempo total de mantenimiento esperado sea a lo mucho el tiempo limite establecido.

Como ejemplo y para verificar si el programa para encontrar la FGU, la disponibilidad, el tiempo total de mantenimiento y la demanda no satisfecha del MSS funciona correctamente, se comparo los resultados obtenidos con el vector  $x^*$  solución que encontraron Lisnianski y Levitin [14] y los obtenidos usando el algoritmo Generico, que es

$$x^* = (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 10, 10, 10, 10, 5, 5) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{14});$$

$x_1$  significa que para el elemento 1, que pertenece a componente filtro, se deben hacer 5 veces el mantenimiento, una cada 24 meses y así sucesivamente. Los estados y probabilidades correspondientes a cada uno de los elementos son los que se muestran en la tabla 5.3. Los resultados que obtuvo con este vector son:  $\mathbf{A}(\mathbf{w}, \mathbf{q})=0.9606$ ,  $C_m=263.1$  y  $\tau_{total}=9.2$

Con esta solución, usando las ecuaciones 2.64, 2.65, 2.66, sabiendo que el tipo de MSS es de transmisión de flujo con dispersión de flujo en serie y en paralelo ecuaciones 2.96 y 2.100, el programa en R da la FGU:

$$U(z) = 0,00007z^0 + 0z^0,15 + 0z^0,25 + 0z^0,3 + 0z^0,4 + 0z^0,45 + 0z^0,5 + 0z^0,55 + 0,016z^0,6 + 0z^0,65 + 0,00176z^0,7 + 0,00027z^0,8 + 0z^0,15 + 0,85z^0,01499 + 0,02508z^0,95 + 0,0059z^1 + 0,93594z^1,1$$

Para encontrar la disponibilidad del sistema  $\mathbf{A}(\mathbf{w}, \mathbf{q})$ , se calcula con la FGU que obtuvimos que tiene 16 estados, las ecuaciones 2.87, 2.81 y la distribución de la demanda dada en el cuadro 5.2:

$$A(w_m) = \sum_{i=1}^{16} p_i 1(F(g_i, w) \geq 0) = \sum_{i=1}^{16} p_i 1((g_i - w) \geq 0)$$

$$A(w, q) = \sum_{m=1}^4 A(w_m) q_m$$

de esto tenemos:

$$A(0,2) = \sum_{i=1}^{16} p_i 1((g_i - 0,2) \geq 0) = 0,09999$$

$$A(0,5) = \sum_{i=1}^{16} p_i 1((g_i - 0,5) \geq 0) = 0,0499966$$

$$A(0,8) = \sum_{i=1}^{16} p_i 1((g_i - 0) \geq 0) = 0,24554374$$

$$A(1,0) = \sum_{i=1}^{16} p_i 1((g_i - 1,0) \geq 0) = 0,56510484$$

$$A(w, q) = 0,09999 + 0,0499966 + 0,24554374 + 0,56510484 = 0,9606386$$

El costo y el tiempo total que nos da el programa en R  $C_m=263.061$ ,  $\tau_{total}=9.168$ . Estos resultados son los mismos mostrados por Lisnianski.

El planteamiento del objetivo para éste problema de optimización que se resolvieron en esta tesis, son las tres formas dadas en las ecuaciones 3.7, 3.8 y 3.9 que son, encontrar las políticas de reemplazamiento  $x^*$  del MSS:

1. **PLANTEAMIENTO 1.** Minimizando los costos de mantenimiento (no se consideraron los costos de la demanda no satisfecha), con las dos restricciones, que se cumpla el nivel de disponibilidad requerido (0.96, 0.97 y 0.98 dados en [15]) y en este plantamiento el tiempo de mantenimiento no se específico.

$$C_m(x^*) \rightarrow \text{mín}$$

$$\text{suje}to \ a \ A(x^*, w, q) \geq A' \quad (5.1)$$

2. **PLANTEAMIENTO 2.** Minimizando los costos totales que incluyen el de mantenimiento y los costos de la multa por la demanda no satisfecha o minimizar uno u otro, no se consideraron restricciones, así fue propuesto en [15].

$$C_m(x^*) + C_{ud}(x^*, w, q) \rightarrow \text{mín} \quad (5.2)$$

**3. PLANTEAMIENTO 3.** La forma general que abarca a los dos plantamientos anteriores, con los datos de  $A'$  y  $\tau'$  dados en [15].

$$C_m(x^*) + C_{ud}(x^*, w, q) \rightarrow \text{mín}$$

$$\text{sujeto a } A(x^*, w, q) \geq A' = 0,985, \tau_{total}(x^*) \leq \tau' = 5,5 \quad (5.3)$$

### 5.3.3. Implementación del PESO

Para mejorar la confiabilidad de un sistemas es de vital importancia la confiabilidad de los diferentes elementos que puede depender de forma significativa de su ubicación en el sistema completo. Cuando los elementos son intercambiables, el arreglo que posean puede mejorar considerablemente la confiabilidad del sistema. En general se puede apreciar el cómo un problema de optimización debe considerar la distribución de recursos limitados entre los elementos de MSS para alcanzar la mayor confiabilidad posible o para alcanza un nivel deseado con mínimos recursos.

Diferentes elementos pueden tener diferente número posible de acciones PR o alternativas de mantenimiento durante el tiempo de vida del sistema. El número de alternativas de mantenimiento determinadas para este sistema son 5, 10, 15, 20,25 30, las denotaremos como 1, 2, 3, 4, 5, 6 respectivamente, así que el número de alternativas posibles para cada elemento son  $k = 6$  que pueden ser ordenados en un vector  $Y_j = (y_{j1}, y_{j2}, y_{j3}, y_{j4}, y_{j5}, y_{j6})$  donde  $y_{ji}$  es el número de acciones de PR correspondiente a la alternativa  $i$  para el elemento  $j$ , se define un vector igual para cada elemento. En algunos sistemas la longitud del vector puede variar, dependiendo del número de alternativas definidas en los elementos. En el sistema que estamos manejando todos los elementos tienen el mismo número de alternativas.

Cada solución es representada por  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{14})$ , donde  $a_j$  ( $1 \leq a_j \leq K$ ) representa el número de alternativas de mantenimiento que se deben aplicar al elemento  $j$ . Por lo tanto el vector  $\mathbf{x}$  para la solución

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

dada, esta representada por  $a$  es  $\mathbf{x} = y_{1a_1}, \dots, y_{na_n}$ . Hay seis posibles soluciones para cada elemento y tenemos 14 elementos en total, encontrar una combinación que minimice los costos a una disponibilidad y un tiempo dado, la óptima, encontrar una de las  $6^{14}$  combinaciones que existen que cumpla con el objetivo y las restricciones.

PROCEDIMIENTO:

- Para cada combinación  $a$  obtener el vector  $\mathbf{x}$  y estimar  $f(x_j)$  para todos los elementos del sistema  $1 \leq j \leq n$ ,
- Calcular los índices de disponibilidad de cada elemento del sistema de dos-estados usando la ecuación 3.3,
- Determinar la distribución de probabilidad del sistema completo usando el método de diagrama de confiabilidad de bloques, de acuerdo al tipo de sistema usar el cuadro 2.4
- Determinar el tiempo total de mantenimiento usando la ecuación 3.4,
- Determinar el costo total de mantenimiento usando la ecuación 3.5,
- Evaluar la disponibilidad del sistema  $A(\mathbf{w}, \mathbf{q})$  usando las ecuaciones 2.81 y 2.78,
- Evaluar la demanda no satisfecha usando la ecuación 2.86 y 2.96.

#### 5.4. Diseño 2

Se resolvió el problema como optimización de redundancia conjunta y mantenimiento.

Este diseño descansa en el funcionamiento redundante y en el mantenimiento preventivo, considerando ambos factores se determinó la estructura óptima. El problema es determinar la estructura óptima para un MSS en serie-paralelo y optimizar las acciones de mantenimiento preventivo de los elementos del sistema.

Continuando con el Sistema de Desalinación de Agua, como habíamos visto consiste de cuatro componentes: filtros, bombas, membranas de ósmosis inversas y bloques de equipo de poder, a diferencia del diseño anterior, ahora cada componente puede tener a lo máximo 7 elementos redundantes en paralelo, desde luego, como se muestra en la figura 5.4.

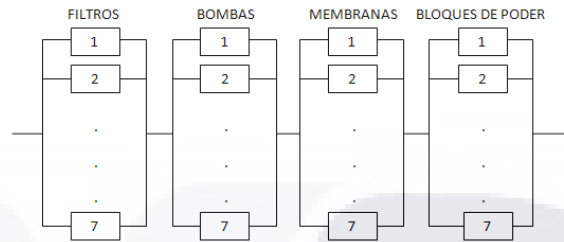


Figura 5.4: Sistema de Desalinación de Agua Serie-Paralelo

Cada elemento de redundancia puede ser seleccionado de ocho versiones disponibles en el mercado para el componente de filtros, existen tres versiones para el componente de bombas, membranas y bloques de poder.

#### 5.4.1. Datos del Problema

Se proporciona una lista que contiene las diferentes versiones para cada componente, además, contiene los costos de incluir el elemento en el sistema (a diferencia del diseño anterior), los costos del mantenimiento preventivo y los costos de las acciones de mantenimiento correctivo, los tiempos de mantenimiento, así como la función de renovación, como se muestran en la tabla 5.4 y la tabla 5.5.

Elemento			Costos				
Tipo	Descripción	versión	g	$c_s$	$c_p$	$c_t$	$\tau_t$
1	Filtro	1	0.60	29.0	8.11	0.650	0.010
		2	0.40	20.0	8.01	0.810	0.016
		3	0.30	17.1	4.61	0.810	0.016
		4	0.30	15.9	3.23	0.490	0.004
		5	0.25	14.0	3.01	0.400	0.012
		6	0.20	12.3	2.91	0.400	0.012
		7	0.15	10.1	2.24	0.400	0.012
		8	0.10	9.4	1.90	0.450	0.022
2	Bombas	1	0.65	8.8	6.85	0.430	0.024
		2	0.25	5.1	3.08	0.390	0.020
		3	0.15	3.7	1.71	0.490	0.012
3	Membrenas	1	1.00	9.0	5.27	0.190	0.018
		2	0.70	7.1	3.41	0.190	0.018
		3	0.25	4.6	0.95	0.190	0.018
4	Equipo de Conmutador de Poder	1	0.50	4.5	4.01	0.109	0.008
		2	0.35	2.9	2.21	0.121	0.012
		3	0.22	1.95	1.36	0.138	0.009

Cuadro 5.4: Parámetros de los elementos del MSS.

Los demás datos son los mismos usados en el diseño 1, como el número posible de reemplazamientos durante el tiempo de vida del sistema varía de 5 a 30. El tiempo está medido en meses. Todos los tiempos de reemplazamientos en el sistema se llevan 0.5 horas que es aproximadamente 0.0007 meses. El tiempo de vida total del sistema cíclico es de  $T = 120$  meses, el costo de la demanda no satisfecha es del 1% durante un mes es  $c_u = 10$  unidades convencionales. La distribución de la demanda es presentada en la tabla 5.2.



Elemento			$f(t)$						
Tipo	Descripción	versión	t:	24	12	8	6	4.8	4
			x:	5	10	15	20	25	30
1	Filtro	1		33.0	8.0	4.1	2.0	1.0	0.7
		2		45.0	10.0	5.0	2.0	1.0	0.75
		3		36.0	8.0	2.0	0.6	0.2	0.15
		4		56.0	9.0	1.8	0.9	0.2	0.15
		5		46.0	6.0	3.0	0.9	0.2	0.16
		6		42.0	7.0	3.0	1.0	0.3	0.22
		7		16.0	4.0	0.6	0.1	0.03	0.02
		8		6.0	2.3	0.4	0.05	0.03	0.02
2	Bombas	1		120.0	14.0	1.0	0.3	0.08	0.06
		2		36.0	4.0	0.9	0.2	0.006	0.04
		3		155.0	35.0	7.0	4.0	0.32	0.23
3	Memebranas	1		23.0	3.2	1.4	0.8	0.5	0.4
		2		15.0	4.0	1.0	0.4	0.1	0.01
		3		31.0	9.5	5.6	4.0	2.7	2.0
4	Equipo de Conmutador de Poder	1		64.0	21.0	3.0	1.1	0.4	0.28
		2		58.0	19.0	2.2	0.8	0.3	0.24
		3		47.0	11.0	2.0	0.8	0.6	0.5

Cuadro 5.5: Función de Renovación de los elementos del MSS.

La tabla de datos 5.6 es la que se uso para resolver el problema, contiene las dos tablas juntas anteriores, como se puede ver en la tabla sólo se considera un sólo estado el que es diferente de cero con su correspondiente probabilidad.

Versión	$g_2$	$p_2$	$C_s$	$C_p$	$C_c$	$\tau_p$	$\tau_c$	$x_i$	24	12	8	6	4.8	4	w	q
1	0.60	0	29.00	8.11	0.65	0.0007	0.01	5	33.0	8	4.1	2	1.0	0.7	0.2	0.1
2	0.4	0	20.00	8.01	0.81	0.0007	0.016	10	45	10	5	2	1.0	0.75	0.5	0.05
3	0.3	0	17.10	4.61	0.81	0.0007	0.016	15	36	8	2	0.6	0.2	0.15	0.8	0.25
4	0.3	0	15.90	3.23	0.49	0.0007	0.004	20	56	9	1.8	0.9	0.2	0.15	1	0.6
5	0.25	0	14.00	3.01	0.4	0.0007	0.012	25	43	6.0	3.0	0.9	0.2	0.16	0	0
6	0.2	0	12.30	2.91	0.4	0.0007	0.012	30	42	7.0	3.0	1.0	0.3	0.22	0	0
7	0.15	0	10.10	2.24	0.4	0.0007	0.012	0	16	4.0	0.6	0.1	0.03	0.02	0	0
8	0.1	0	9.40	1.90	0.45	0.0007	0.022	0	6	2.3	0.4	0.05	0.03	0.02	0	0
1	0.65	0	8.80	6.85	0.43	0.0007	0.024	0	120	14	1.0	0.3	0.08	0.06	0	0
2	0.25	0	5.10	3.08	0.39	0.0007	0.02	0	36	4	0.9	0.2	0.06	0.04	0	0
3	0.15	0	3.70	1.71	0.49	0.0007	0.012	0	155	35	7	4.0	0.32	0.23	0	0
1	1.00	0	9.00	5.27	0.19	0.0007	0.018	0	23	3.2	1.4	0.8	0.5	0.4	0	0
2	0.70	0	7.10	3.41	0.19	0.0007	0.018	0	15	4.0	1.0	0.4	0.1	0.01	0	0
3	0.25	0	4.60	0.95	0.19	0.0007	0.018	0	31	9.5	5.6	4.0	2.7	2.00	0	0
1	0.50	0	4.50	4.01	0.109	0.0007	0.008	0	64	21.0	3.0	1.1	0.4	0.28	0	0
2	0.35	0	2.90	2.21	0.121	0.0007	0.012	0	58	19.0	2.2	0.8	0.3	0.24	0	0
3	0.22	0	1.95	1.36	0.138	0.0007	0.009	0	47	11.0	2.0	0.8	0.6	0.50	0	0

Cuadro 5.6: Características de los elementos del sistema para la solución.

#### 5.4.2. Función Objetivo

Se desea encontrar el vector  $\mathbf{n}^*\mathbf{b}(\mathbf{x})$  donde  $\mathbf{b}$  es la versión seleccionada dada para el componente de la tabla 5.5,  $\mathbf{n}$  corresponde al número de elementos de la versión  $\mathbf{b}$  seleccionada, y  $\mathbf{x}$  es el número de acciones de mantenimiento al elemento de la versión  $\mathbf{b}$  seleccionada durante el tiempo de vida del sistema. La solución óptima es la que minimiza los costos totales que incluyen: los costos de incluir al elemento al sistema, los costos de mantenimiento esperado y los costos de las sanciones obtenidas por la demanda no satisfecha, cumpliendo una disponibilidad del sistema requerido y el tiempo total de mantenimiento esperado sea a lo mucho el tiempo límite establecido.

Aquí en éste diseño, también se comprobó si los programas en R funcionaban correctamente.

**PLANTEAMIENTO** La función objetivo a optimizar es la siguiente:

$$C_s(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{N}^*) + C_m(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{N}^*) + C_{ud}(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{N}^*, w, q) \rightarrow \text{mín}$$

$$\text{sujeto a } A(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{N}^*, w, q) \geq A', \tau(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{N}^*) \leq \tau' \quad (5.4)$$

Para una disponibilidad deseada de 0.98, 0.99 y 0.999 combinados con tiempo desea de 2 y 3 horas.

### 5.4.3. Implementación del PESO

Para cada elemento que consideremos en la redundancia, son tres valores que se deben calcular, **n**, **b**, y **x**. Lo que no se sabe cuantas versiones **b** diferentes se considerarán, depende de la solución, lo que se debe tener cuidado es que el número de elementos redundantes deben ser cuando mucho 7 elementos de las diferentes versiones. Diferentes elementos pueden tener diferente número posible de acciones de mantenimiento durante el tiempo de vida del sistema. El número de alternativas de mantenimiento determinadas para este sistema son 5, 10, 15, 20, 25 y 30, las denotaremos como 1, 2, 3, 4, 5 y 6 respectivamente. Para facilitar la búsqueda de soluciones, se tomo en cuenta dos versiones diferentes para componentes, los filtros tienen 8 versiones, las bombas tienen 3 versiones al igual que las membranas y los bloques de potencia, así que el vector de la posible solución esta formado como:

$$x = (b_{1F}, b_{2F}, n_{1F}, n_{2F}, x_{1F}, x_{2F}, b_{1B}, b_{2B}, n_{1B}, n_{2B}, x_{1B}, x_{2B}, b_{1M}, b_{2M}, n_{1M}, n_{2M}, x_{1M}, x_{2M}, b_{1P}, b_{2P}, n_{1P}, n_{2P}, x_{1P}, x_{2P})$$

que es un vector de 24 términos. Los primeros seis términos del vector, corresponden al subíndice F, que significa que son del componente Filtros, los siguiente seis términos, con subíndice B, son del componente Bombas, los siguientes seis, con subíndice M, son del componente Membranas y los últimos seis términos, con subíndice P, son del componente Bloques de Potencia.

Los dominios son:  $0 \leq b_j \leq 8$  para los términos 1 y 2,  $0 \leq b_j \leq 3$  para los términos 7, 8, 13, 14, 19 y 20,  $1 \leq n_j \leq 5$  para los términos 3, 4, 9, 10, 15, 16, 21 y 22,  $1 \leq x_j \leq 6$  para los términos 5, 6, 11, 12, 17, 18, 23 y 24, en todos los casos  $j=1,2$ .

#### PROCEDIMIENTO:

- Para cada combinación obtener el vector  $\mathbf{x}^*$  y estimar  $f(x_j)$  para todos los elementos del sistema  $1 \leq j \leq n$ ,
- Calcular los índices de disponibilidad de cada elemento del sistema de dos-estados usando la ecuación 3.3,
- Determinar la distribución de probabilidad del sistema completo usando el método de diagrama de confiabilidad de bloques, de acuerdo al tipo de sistema usar el cuadro 2.4
- Determinar el tiempo total de mantenimiento usando la ecuación 3.4,
- Determinar el costo total de mantenimiento usando la ecuación 3.5,
- Evaluar la disponibilidad del sistema  $\mathbf{A}(\mathbf{w}, \mathbf{q})$  usando las ecuaciones 2.81 y 2.78,
- Evaluar la demanda no satisfecha usando la ecuación 2.86 y 2.96.

## Capítulo 6

# Resultados

### 6.1. Experimentos y Resultados del Diseño 1

Este experimento fue aplicado al Diseño 1, especificado en la sección 5.2, en la Figura 5.3 y los datos del problema dados en las Tablas 5.1 y 5.2, así como las especificaciones.

Para cada experimento que consiste en encontrar una solución, se realizaron 100 corridas con los siguientes parámetros:  $cumulo = 100$  partículas,  $c_1 = 0,5$ ,  $c_2 = 0,5$  y  $w = 0,5$ . El experimento fue desarrollado en una Laptop Alienware M17x Core i7 2830QM con Ram de 16GB. El algoritmo fue implementado en el software libre R para Windows 7 (64 bits) en paralelo (4 procesadores). El tiempo de ejecución de la máquina para las 10,000 evaluaciones realizadas en cada corrida fue de 48 segundos.

#### 6.1.1. Experimento I

En la primera formulación del diseño 1 del problema, propuesto por Lisnianski en [15] y dado en la formulación 1 ecuación 5.1, la demanda no satisfecha no fueron considerados  $c_u = 0$  y el tiempo total de mantenimiento no fue limitado  $\tau' = \infty$ . En la tabla 6.1 se presenta el resultado obtenido por el autor Lisnianski. Y el mejor resultado obtenido con el BPSO en la tabla 6.2, comparando son los mismos valores.

Cuadro 6.1: Minimizar  $C_m$  obtenidos en el experimento I Optimo

$A'$	$C_m$	$\tau_{total}$	A	$\mathbf{x}$
0.96	263.1	9.2	0.9606	(5,5,5,5,5,5,5,5,10,10,10,10,5,5)

Cuadro 6.2: Minimizar  $C_m$  obtenidos en el experimento I mejor BPSO

$A'$	$C_m$	$\tau_{total}$	A	$\mathbf{x}$
0.96	263.061	9.168	0.9606	(5,5,5,5,5,5,5,5,10,10,10,10,5,5)

Para una disponibilidad deseada de 0.97. En la tabla 6.3 se presenta el resultado obtenido por el autor Lisnianski. Y el mejor resultado obtenido con el BPSO en la tabla 6.4. Aquí hay un error en el Optimo reportado, con ese vector  $\mathbf{x}$  los costos son de  $C_m=314.4384$ . El vector  $\mathbf{x}$  obtenido con el BPSO si corresponde a los  $C_m$  dados en la tabla. Las diferentes políticas de mantenimiento estan marcadas en negritas

Cuadro 6.3: Minimizar  $C_m$  obtenidos en el experimento I Optimo

$A'$	$C_m$	$\tau_{total}$	A	$\mathbf{x}$
0.97	296.6	7.7	0.97	(5,5,5,5,5,5,5,5,10,10, <b>25,25</b> ,5,5)

Cuadro 6.4: Minimizar  $C_m$  obtenidos en el experimento I mejor BPSO

$A'$	$C_m$	$\tau_{total}$	A	$\mathbf{x}$
0.97	296.6412	9.168	0.7.6978	(5,5,5,5,5,5,5,5,10,10, <b>15,15</b> ,5,5)

Para una disponibilidad de 0.98. En la tabla 6.5 se presenta el resultado obtenido por el autor Lisnianski. Y el mejor resultado obtenido con el BPSO en la tabla 6.6, comparando son los mismos valores.

Cuadro 6.5: Minimizar  $C_m$  obtenidos en el experimento I Optimo

$A'$	$C_m$	$\tau_{total}$	A	$\mathbf{x}$
0.98	384.4	5.85	0.98	(5,5,5,5,15,15,10,10,10,25,25,25,5,5)

Cuadro 6.6: Minimizar  $C_m$  obtenidos en el experimento I mejor BPSO

$A'$	$C_m$	$\tau_{total}$	A	$\mathbf{x}$
0.98	384.4487	5.84906	0.98	(5,5,5,5,15,15,10,10,10,25,25,25,5,5)

En resumen los resultados del BPSO para los tres diferentes niveles de la disponibilidades del MSS  $A^*$  son representados en la Tabla 6.7.

Cuadro 6.7: Minimizar  $C_m$  obtenidos en el experimento I

$A^*$	Optimo	El mejor	Media	Mediana	El peor	Std. Dev.
0.96	263.1	263.061	263.061	263.061	263.061	0
0.97	296.6	296.6412	296.6412	296.6412	296.6412	0
0.98	384.4	384.4487	384.754	384.4487	388.0589	0.8053

**6.1.2. Experiment II**

En la segunda formulación del diseño 1 del problema, propuesto por Lisnianski en [15] y dado en la formulación 2 ecuación 5.2, los costos de la demanda no satisfecha fueron considerados  $c_u = 10$  por 1%, el tiempo total de mantenimiento no fue limitado  $\tau' = \infty$  y la disponibilidad fue la máxima. En la tabla 6.8 se presenta el resultado obtenido por el autor Lisnianski para los diferentes objetivos.

Cuadro 6.8: Costos minimos obtenidos para el experimento II con BPSO

Objetivo	$A$	$\tau_{tot}$	$C_{ud}$	$C_m$	$CT = C_{ud} + C_m$	$\mathbf{x}$
min $C_m$	0.949	11.61	1029.5	249.1	1278.6	(5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5)
min $C_u$	0.988	2.47	156.4	1060.3	1216.7	(30,30,30,30,30,30,30,30,30,25,25,30,30,30,30)
min $CT$	0.98	6.02	256.2	397.4	653.5	(5,5,5,5,20,20,10,10,10,10,30,30,5,5)
min $CT$ $\tau=3$	0.9877	2.99	181.7	674.7	856.4096	(10,20,20,20,25,20,30,30,25,25,30,30,10,5)

Los resultados obtenidos con el BPSO para los cuatro diferentes objetivos son presentados en la Tabla 6.9. Los resultados fueron los mismos que da el autor, como se puede ver.

Cuadro 6.9: Costos minimos obtenidos para el experimento II

Objetivo	$A^*$	$\tau^*$	Optimo	Best	Media	Mediana	El peor	Std. Dev.
min $C_m$	0	$\infty$	249.1	249.084	249.084	249.084	249.084	0
min $C_u$	0	$\infty$	156.4	156.3879	156.3879	156.3879	156.3879	0
min $TC$	0	$\infty$	653.5	653.553	653.553	653.553	653.553	0
min $TC$	0	3	856.4	856.4096	856.4096	856.4096	856.4096	0

### 6.1.3. Experiment III

En la tercera formulación del diseño 1 del problema, propuesto por Lisnianski en [15] y dado en la formulación 3 ecuación 5.3, los costos de la demanda no satisfecha fueron considerados  $c_u = 10$  por 1%, el tiempo total de mantenimiento fué de  $\tau' = 2, 3$  y la disponibilidad fué de  $A' = 0,98, 0,99, 0,999$ .

En la tabla 6.10 se presenta el resultado obtenido por el autor Lisnianski. Y en la tabla 6.11 se presenta el resultado de BPSO, que son los mismos valores.

Cuadro 6.10: Costos minimos obtenidos para el experimento III Optimo

Objetivo	$A$	$\tau_{tot}$	$C_{ud}$	$C_m$	$CT = C_{ud} + C_m$	$\mathbf{x}$
min $CT$ $\tau' = 5,5, A' = 0,985$	0.985	5.5	192.8	498.1	690.9	(5,5,5,5,25,25,10, 10,25,25,30,30,10,5)

Cuadro 6.11: Costos minimos obtenidos para el experimento III el mejor BPSO

Objetivo	$A$	$\tau_{tot}$	$C_{ud}$	$C_m$	$CT = C_{ud} + C_m$	$\mathbf{x}$
min $CT$ $\tau' = 5,5, A' = 0,985$	0.985	5.5	192.8	498.1	690.9552	(5,5,5,5,25,25,10, 10,25,25,30,30,10,5)

En resumen los valores obtenidos con el BPSO son mostrados en la tabla 6.12

Cuadro 6.12: Costos minimos obtenidos para el experimento II

Objetivo	$A'$	$\tau'$	Optimo	Best	Media	Mediana	El peor	Std. Dev.
min $TC$	0.985	5.5	690.9	690.9552	692.4106	690.9552	695.567	2.0634

## 6.2. Experimentos y Resultados del Diseño 2

Este experimento fue aplicado al Diseño 2, especificado en la sección 5.4, en la Figura 5.4 y los datos del problema dados en las Tablas 5.4, 5.5 y 5.2, así como las especificaciones.

Para cada experimento que consiste en encontrar una solución, se realizaron 100 corridas con los siguientes parámetros:  $cumulo = 100$  partículas,  $c_1 = 0,5$ ,  $c_2 = 0,5$  y  $w = 0,5$ . El experimento fue desarrollado en una



Laptop Alienware M17x Core i7 2830QM con Ram de 16GB. El algoritmo fue implementado en el software libre R para Windows 7 (64 bits) en un procesador. El tiempo de ejecución de la máquina para las 10,000 evaluaciones realizadas en cada corrida fue de 6 minutos. Los resultados obtenidos son presentados en la tabla 6.13

Cuadro 6.13: Minimizar  $CT$  obtenidos en el experimento con el BPSO

No.	$A'$	$\tau'$	Optimo	El mejor	Media	Mediana	El peor	Std. Dev.
1	N	N	794.41	794.4074	815.2583	808.846	866.3205	15.515
2	0.98	N	801.41	808.9187	826.2675	823.1224	871.4804	15.615
3	0.99	N	821.21	827.705	860.0749	854.1216	924.0928	25.1649
4	0.999	N	901.13	904.2693	954.7108	952.2823	1033.9	35.807
5	0.98	3	819.47	819.4679	830.6029	832.575	855.6946	6.779
6	0.99	3	859.56	870.224	908.6066	908.3413	956.3745	21.5737
7	0.999	3	1050.41	1064.062	1145.611	1138.672	1242.842	43.374
8	0.98	2	884.4	852.2646	878.826	884.1486	908.0445	16.552
9	0.99	2	911.79	930.9608	851.2973	950.4435	974.5054	11.909
10	0.999	2	1097.79	1184.037	1267.555	1268.309	1342.22	47.232

Se puede ver en la tabla de resultados, las soluciones 1 y 5 son los mismos, en las soluciones 2, 3, 4, 6, 7, 9 y 10 arrojadas por el BPSO son cercanas a los optimos reportados por Lisnianski y Levitin [16], pero en la solución 8 la solución encontrada por BPSO si es mejor al reportado en [16], el vector solución es mostrada en la tabla 6.14, 6.15 respectivamente. Note que la diferencia en los costos totales es de 32.13.

Cuadro 6.14: Resultados BPSO, Minimizando Costos Totales  $CT$

Rest.	$A$	$\tau_{tot}$	$C_s$	$C_{ud}$	$C_m$	$CT$	$\mathbf{x}$
$A'=0.98$ $\tau'=2$ ,	0.9858	1.98	95.2	63.04	694.02	852.26	1*8(15) y 3*4(15), 4*2(20),1*1(15),3*2(20)

Cuadro 6.15: Resultados Optimos, Minimizando Costos Totales  $CT$

Rest.	$A$	$\tau_{tot}$	$C_s$	$C_{ud}$	$C_m$	$CT$	$\mathbf{x}$
$A'=0.98$ $\tau'=2$ ,	0.9868	1.96	101.70	57.49	725.20	884.40	4*4(15),4*2(20), 1*1(15),3*2(20)

## Capítulo 7

### Conclusiones

Durante el tiempo y la elaboración de ésta tesis, se pasa por dificultades y diversiones, que comentaremos en esta parte, además de que haremos una breve conclusión y platicaremos los trabajos que quedaron pendientes.

Al inicio de la implementación del PSO, el problema fue discretizarlo, el PSO en variables continuas es muy efectivo, así que se probaron varias cosas, el uso de la distribución uniforme discreta, la distribución uniforme continua formando intervalos, la distribución normal formando intervalos, pero no funcionaron, el uso de la distribución binomial fue la que dio las mejores soluciones, como se vio en los resultados, que inclusive se encontro una mejor solución en el diseño dos. Aunque no se pudo haber hecho una comparación en todos los aspectos con el autor [17], debido a que no proporciona la información suficiente.

En el diseño uno, en el que también trabajó en su tesis [23], Vargas-Serdio reporta un funcionamiento pobre de un algoritmo ACO (Ant Colony Optimization) implementado en una computadora cluster con 16 procesadores; que es un algoritmo propio para problemas de optimización combinatoria, ella reporta una tiempo de ejecución de máquina de alrededor de 2 horas. Además que la implentación es un poco más complicada por la búsqueda de los parámetros adecuados.

El tiempo del uso de maquina fué pequeño, debidó al tipo de maquina, el haberlo programado en paralelo, bueno que eso solo fué en el primer

TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS

diseño porque en el diseño dos no fue posible, debido a su complejidad, de hecho en el diseño 1 el programa en R fue robusto de manera que el algoritmo tuvo oportunidad de buscar soluciones, pero en el diseño 2 no se pudo hacer lo mismo, el haber acotado el vector de solución fue lo que hizo que no encuentra las soluciones optimas, lo ideal hubiera sido usar dos vectores de solución una para el número de elementos y otro para el número de acciones de mantenimiento que es más complicado. Pero lo que si ayudó mucho fue que el programa en R que realizó la reducción del polinomio de la FGU.

La modificación hecha al PSO funcionó de manera favorable, mostrando que es una herramienta eficiente y poderosa en problemas de optimización combinatoria complejos. Es una contribución al campo de Algoritmos Evolutivos y a la optimización en el mantenimiento de MSS.

Sería interesante trabajar en:

- Implementar el BPSO en el problema de mantenimiento imperfecto propuesto en el ejercicio 6.11 en [17].
- Implementar el BPSO en un problema que resuelva los tres tipos de mantenimiento.
- Implementar otro algoritmo como el DF (Differential Evolution), que es también para optimización en espacios continuos, por lo que habría que hacer una adaptación para valores discretos y ver que tan eficiente sería. La aplicación podría ser en los tres tipos de mantenimiento.

## Capítulo 8

### Anexos

DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO PSO USADO EN EL DISEÑO 1 Y 2.

El algoritmo que se utilizó, se programó en una función, consideremos como función general, que se llama Particle -Swarm con los parámetros: fx, función objetivo (F.O.) a optimizar; Rx, son las restricciones a las cuales está sujeta la función objetivo; Dd, la disponibilidad deseada; Td, el tiempo límite; d, longitud del vector solución; N, tamaño de la población; vec, número de vecinos; iter, número de iteraciones.

La diferencia entre en diseño 1 y 2; es la forma en generar la población.

Particle-Swarm=function(fx,Rx,Dd,Td,d,N,w,c1,c2,vec,iter)

datos=read.table(file.choose()) Leer la base de datos, la tabla 5.3

P=generarX(N,d) Genera una población de posibles soluciones

Fp=evaluar(fx,P,datos) Evaluar la población en la F.O.

Cp=Evaluar-Restriccion(Rx,datos,P,Dd,Td) Evaluar la población en las restricciones

V=matrix(0,N,dim(P)[2]) Inicializa la matriz de velocidades

B=P Inicialmente usamos la misma población para comparar

Fb=Fp

Cb=Cp

for(i in 1:iter) Inicia la iteración, se hacen iter veces

L=Lbest(Fb,vec) Encontrar el mejor vecino  $l_{best}$

V=velocidad(P,B,V,L,w,c1,c2) Actualizar la velocidad

$P = \text{actualizar}(P, V)$  Actualizar la población

$F_p = \text{evaluar}(f_x, P, \text{datos})$  Evaluar la población actualizada en la F.O.

$C_p = \text{Evaluar-Restriccion}(R_x, \text{datos}, P, D_d, T_d)$  Evaluar la población actualizada en las restricciones

$\text{comp} = \text{comparar-factibilidad}(P, B, F_p, F_b, C_p, C_b)$  Comparamos la disponibilidad

$B = \text{comp}B$

$F_b = \text{comp}F_b$

$C_b = \text{comp}C_b$  Finaliza la iteración

$\text{mejor} = \text{which.min}(F_b[C_b \leq 0])$

$\text{return}(\text{list}(x = B[\text{mejor}], f_x = F_b[\text{mejor}], r_x = C_b[\text{mejor}]))$  Muestra la mejor solución encontrada



## Capítulo 9

### Glosario

Definición **Confiabilidad**: Es la habilidad de un artículo para realizar una función requerida, bajo condiciones de ambiente y de operación dadas; durante un período de tiempo indicado.

Definición **Disponibilidad**: Es la habilidad de un artículo (bajo los aspectos de su confiabilidad, capacidad de mantenimiento y apoyo de capacidad de mantenimiento) para realizar su función requerida en un instante de tiempo o en un período de tiempo dado (BS 4778).

Definición **Capacidad de Mantenimiento**: Es la habilidad de un artículo, bajo las condiciones indicadas de uso, para ser conservado, o restaurado para, un estado en el cual puede realizar su función requerida.

Definición **MSS**: Un sistema que posee un número finito de niveles de funcionamiento es llamado un Sistema Multi-Estado.

Definición **Metaheurística**: Son métodos aproximados diseñados para resolver problemas de optimización combinatoria, en los que los heurísticos clásicos no son efectivos.

PSO La optimización de enjambre de partículas (PSO) es una optimización estocástica, produce una búsqueda en una población-base, donde los individuos denotan una partícula agrupados en un enjambre. Cada partícula en el enjambre representa una solución candidata a la optimización del problema, es un vuelo en el espacio de búsqueda multidimensional, que determina su posición de vuelo en el espacio de búsqueda de acuerdo a su propia experiencia y a la posición de su vecino.

## Bibliografía

- [1] Barlow,R.E., Lambert,H.E.: *Introducción to Fault Tree Analysis* in Reliability and Fault Tree Analysis, 1975.
- [2] L. Caldarola, Coherent Systems with Multistate Components, Nucl. Eng. Des. 58, 127-139 (1980).
- [3] Cohen, H. Space Reliability Technology: A Historical Perspective, *IEEE Transactions on Reliability*, 33, 36-40, 1984
- [4] Blischke, W. y Murthy, D., Product Warranty Handbook, New York: Marcel Dekker, 1996.
- [5] Coppola, A. Reliability Engineering of Electronic Equipment: A Historical Perspective, *IEEE Transactions on Reliability*, 33, 29-35, 1984.
- [6] Engelbrecht Andries P. *Computational Intelligence An Introduction*, Wiley 2007, 285-300
- [7] Meeker, W. and Escobar, L. Reliability: The Other Dimension of Quality, *Quality Technology & Quality Management Journal*, 1, 1-25, 2004.
- [8] Escobar R. Luis A, Villa D. Enrique R. y Yañez C. Sergio: *Confianza: Historia, Estado del Arte y Desafíos Futuros*.
- [9] Hoyland,A., Rausand,M.; *System Reliability Theory*, Models and Statistics Methods, 1994.
- [10] Hoyland, A. and Rausand, M, *System Reliability Theory: Models and Statistics Methods*, New York: John Wiley Sons, 1994.

- TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS
- [11] E. Korczak, Reliability analysis of multistate monotone systems, in Safety and Reliability Assessment - An Integral Approach, ES-REL '93, p. 671, Eds. P. Kafka and J. Wolf, Elsevier, Amsterdam (1993).
  - [12] Lawless, J. Statistics in Reliability, Journal of the American Statistical Association, 95, 989-992, 2000.
  - [13] Lawless, J. Statistical Methods in Reliability, Technometrics, 25, 305-316, 1983.
  - [14] A. Lisnianski and G. Levitin, Multi-State System Reliability. Assessment, Optimization and Applications, World Scientific, página. 171, New Jersey (2003).
  - [15] A. Lisnianski and G. Levitin, Multi-State System Reliability. Assessment, Optimization and Applications, World Scientific, página. 316, New Jersey (2003).
  - [16] A. Lisnianski and G. Levitin, Multi-State System Reliability. Assessment, Optimization and Applications, World Scientific, página. 322, New Jersey (2003).
  - [17] G. Levitin, X. Hu and Y. Dai. *Particle swarm optimization in reliability engineering*, pages 83-112 Studies in Computational Intelligence. Springer-Verlag, 2006.
  - [18] A. Lisnianski and G. Levitin, Joint redundancy and maintenance optimization for Multi-State series-parallel System. *Reliability Engineering and System Safety*,, 64(1):33-42,1998
  - [19] Meeker, W. and Escobar, L. Statistical Methods for Reliability Data, New York, 1998.
  - [20] Nakagawa, T.(1988)"Sequential imperfect preventive maintenance policies", IEEE Transactions on Reliability, 37, 295-298.



- TESIS TESIS TESIS TESIS TESIS
- [21] R. Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria, 2009. ISBN 3-900051-07-0.
  - [22] Ushacov, I.(1987), ‘Optimal standby problems and a universal generating function’. *Sov. J. Comput. Syst. Sci.*,25(4), 78-82
  - [23] L. Vargas-Serdio. Optimización de confiabilidad en sistemas multi-estado. Tesis de Maestria, Centro de Investigación en Matemáticas, Guanajuato, Gto., México, 2010.
  - [24] A.P. Wood, Multistate Block Diagrams and Fault- Trees, *IEEE Trans. Reliability* 34, 236-240 (1985)
  - [25] Y. Shi and R.C. Eberhart. A Modified Particle Swarm Optimizer. In *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*
  - [26] F. van den Bergh. An Analysis of Particle Swarm Optimizers. PhD thesis, Department of Computer Science, University of Pretoria, Pretoria, South Africa, 2002.